CAPITOLO III

LO SPAZIO DEI VETTORI ORDINARI

1.- L'INSIEME DEI VETTORI ORDINARI.

Iniziamo il paragrafo con il fissare la nostra attenzione sul ben noto concetto di segmento orientato. Un segmento orientato, di primo estremo A e di secondo estremo B (con B $\neq$ A), verra' indicato con AB, mentre un segmento non orientato, sempre di estremi A e B, verra' indicato con [AB].

Indicheremo con AB la misura o modulo del segmento non orientato [AB] rispetto ad una data unita' di misura $\mathcal{U}$. Denoteremo con S l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio. Dati due segmenti orientati AB e CD diremo che il segmento orientato AB e' <u>equipollente</u> al segmento orientato CD e scriveremo:

$$AB \simeq CD$$

se si verificano le seguenti condizioni:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (rispetto ad una qualunque unita' di misura);

b) retta AB // retta CD (parallele o coincidenti);

c) verso AB = verso CD.

In altre parole due segmenti si dicono equipollenti se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.

TEOREMA. *La relazione $\simeq$ e' una relazione di equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare che la relazione $\simeq$ verifica le proprieta' riflessiva, simmetrica e transitiva.

1) *Riflessiva*

Si ha banalmente $AB \simeq AB$ in quanto :

$\overline{AB} = \overline{AB}$; retta AB = retta AB ; verso AB = verso AB.

2) *Simmetrica*

Supposto $AB \simeq CD$ si deve provare che $CD \simeq AB$. Cio' segue dal fatto che le tre condizioni a), b), c) sono simmetriche.

3) *Transitiva*

Supposto che sia $AB \simeq CD$ e $CD \simeq HK$ proviamo che: $AB \simeq HK$.

Se $AB \simeq CD$ e $CD \simeq HK$ allora:

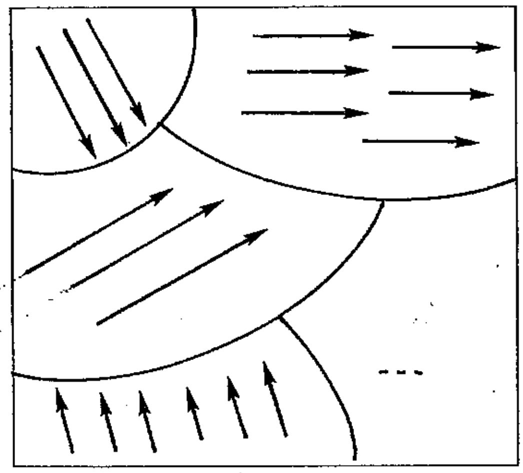
a) $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{HK}$;

b) retta AB // retta CD // retta HK;

c) verso AB = verso CD = verso HK

da cui l'asserto.

Poiche' la relazione di equipollenza e' una relazione di equivalenza possiamo ripartire l'insieme *S* in classi di segmenti equipollenti.



L'insieme quoziente $S/\simeq$, cioe' l'insieme di tutte le possibili classi di equipollenza, sara' denotato con $\mathbb{V}_0$ e le classi, ovvero gli elementi di $\mathbb{V}_0$, si chiameranno vettori (liberi).

Un generico vettore si indichera' con $\overrightarrow{AB}$ o anche con una lettera minuscola sormontata da una freccia:

$$u = \overrightarrow{AB} = \{HK: HK \in S, HK \approx AB\}$$

Il segmento orientato $AB \in \overrightarrow{AB}$ si dice un <u>rappresentante</u> del vettore $\overrightarrow{AB}$.

All'insieme $\mathbb{V}_o$ si aggiunge un elemento esterno che prende il nome di <u>vettore</u> <u>nullo</u> e si denota con 0. Da un punto di vista intuitivo tale insieme si introduce come derivante dall'idea intuitiva di segmento nullo. Come nuova classe di equivalenza, avra' per elementi "tutti i punti dello spazio ovvero tutti i segmenti nulli". Porremo nel seguito:

$$\mathbb{V} := \mathbb{V}_0 \cup \{\vec{0}\} := S/\simeq \cup \{\vec{0}\}$$

L'insieme $\mathbb{V}$ si dira' <u>sostegno</u> <u>dello</u> <u>spazio</u> <u>vettoriale</u> <u>ordinario</u>. A volte un rappresentante AB di un vettore ordinario $\vec{u}$ si dira' anche <u>vettore</u> <u>applicato</u> in A. Se $\vec{u}$ e' un vettore, con u si indica il suo <u>modulo</u> rispetto alla unita' di misura. Un vettore di modulo unitario sara' detto <u>versore</u>. Dato un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$, chiamiamo vettore opposto di $\vec{u}$ un vettore $\vec{v}$ tale che:

$$\vec{v} = \begin{cases} \text{stesso modulo di } \vec{u} \\ \text{stessa direzione di } \vec{u} \\ \text{verso contrario a } \vec{u} \end{cases}$$

<u>porremo</u> <u>per</u> <u>definizione</u> $\vec{v} := -\vec{u}$.

2. LA STRUTTURA ALGEBRICA DELLO SPAZIO DEI VETTORI ORDINARI

Definiamo ora alcune operazioni su $\mathbb{V}$.

Definiamo l'**addizione**(+) fra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definendo la somma di due vettori nel modo seguente:

a) se uno almeno dei due vettori e' nullo, definiamo la somma ponendo:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \qquad \forall\, \vec{u} \in \mathbb{V}$$

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = -\vec{u}$ allora (per definizione di opposto):

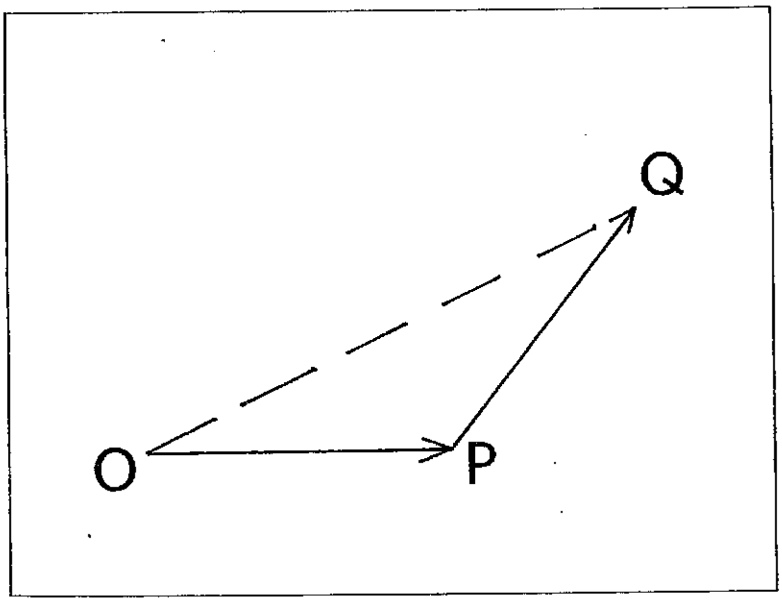
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

c) Se invece $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ ed inoltre i due vettori non sono opposti, definiamo un terzo vettore $\vec{w}$ che chiamiamo <u>somma</u> mediante la seguente costruzione: si fissa in modo arbitrario un

punto O nello spazio e si considerano i segmenti OP e PQ tali che:

$$OP \in \vec{u} \text{ oppure } \overrightarrow{OP} = \vec{u}$$

$$PQ \in \vec{v} \text{ oppure } \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$



Si ottiene da questa costruzione un nuovo vettore determinato dal sergmento non nullo (essendo $Q \neq O$) OQ, cioe' il vettore $\vec{w}$ tale che $OQ \in \overrightarrow{OQ} = \vec{w}$.

<u>OSSERVAZIONE.</u> Sembra a prima vista che il vettore $\vec{w}$ somma di due vettori di pende dalla scelata di O, perche' cambiando O in O' si ottiene un diverso segmento orientato.

Dimostriamo che il vettore $\vec{w}$ costruito non dipende dalla scelta del punto iniziale O.

Infatti se consideriamo altri due segmenti O'P' e P'Q' (equipollenti ai precedenti, questi per composizione forniscono un segmento O'Q' che e' equipollente a $\overrightarrow{OQ}$.

Occupiamoci ora delle principali proprieta' della somma di vettori.

1) <u>Proprieta' commutativa.</u>

$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V \qquad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

<u>1. caso</u>: almeno uno dei due vettori e' nullo. Allora la proprieta' commutativa e' verificata per la definizione di somma di un vettore col vettore nullo.

<u>2. caso</u>: se i due vettori sono uno l'opposto dell'altro in qualunque ordine si sommino danno il vettore nullo.

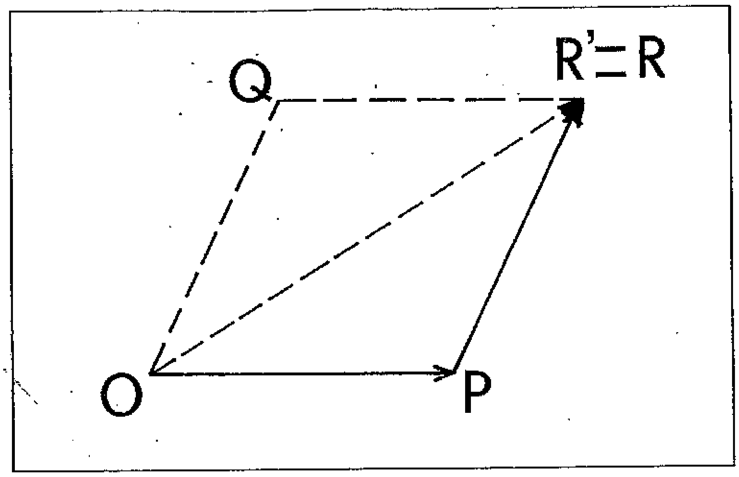
<u>3. caso</u>: i due vettori non sono opposti e non nulli. In tale caso fissiamo un punto O e costruiamo a partire da O due segmenti orientati $OP \in \vec{u}$ e $PR \in \vec{v}$. Segue che

$$\overrightarrow{OR} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Sempre a partire da O costruiamo $OQ \in \vec{v}$ e $QR' \in \vec{u}$.

Si ha ovviamente R' = R e quindi

$$\overrightarrow{OR} = \vec{v} + \vec{u}.$$



OSSERVAZIONE. La prova della proprieta' commutativa va sotto il nome di regola del parallelogramma.

2)Proprieta' associativa.

$\forall\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V \qquad\qquad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Per la dimostrazione distinguiamo tre casi.

1 caso. Se uno almeno dei tre vettori e' nullo la prova e' banale.

2 caso. Supponiamo due consecutivi dei tre vettori siano tra loro opposti. Sia ad esempio $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, allora il secondo membro e' $\vec{w}$. Poniamo che anche il primo membro e' $\vec{w}$. Fissiamo allora

$$OP \in \vec{u},\ PQ \in \vec{v},\ QR \in \vec{w}.$$

Essendo $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ risulta Q=O e quindi:

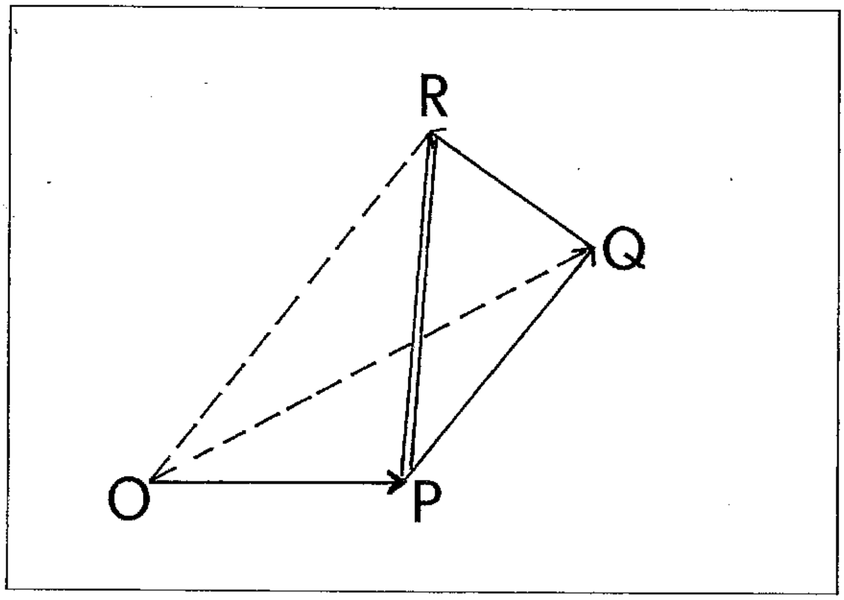
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OR} = \vec{w}$$

3 caso. Supponiamo ora i tre vettori non nulli e supponiamo che due consecutivi non siano opposti. (Da notare che se ad esempio $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sono opposti la figura del successivo riquadro sara' un parallelogramma).

Costruiamo separatamente $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
Per costruire il primo vettore, a partire da un punto O consideriamo i segmenti orientati:

$$OP \in \vec{u},\ \ PQ \in \vec{v} \text{ e } QK \in \vec{w}.$$

Per costruire il secondo vettore prendiamo, a partire dal punto P considerato $PQ \in \vec{v}$ e $QK \in \vec{w}$; infine prendiamo il seguente segmento orientato $OP \in \vec{u}$



Risulta:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{OK}$$
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OK}$$

da cui l'asserto.

La seconda operazione che definiamo e' la <u>la moltiplicazione di un numero per un vettore</u> o **moltiplicazione scalare**. Allo scopo definiamo il risultato dell'operazione che chiameremo prodotto per uno scalare.
Chiamiamo prodotto per uno scalare scalare $\lambda\vec{u}$ (λ scalare e $\vec{u}$

vettore), il nuovo vettore soddisfacente le proprieta' seguenti:

a) Se $\lambda = 0$ oppure $\vec{u} = \vec{0}$ o entrambi si pone: $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.

b) Se $\lambda>0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$ la moltiplicazione scalare $\lambda\vec{u}$ e' un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{u}$ ma modulo dato dal prodotto λu, esendo u il modulo di $\vec{u}$.

c) Se $\lambda<0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, allora $\lambda\vec{u}$ e' un vettore avente la stessa direzione di $\vec{u}$, verso contrario ad $\vec{u}$ e modulo dato dal prodotto del valore assoluto di λ per il modulo di $\vec{u}$, cioe' da ($|\lambda|u$).

(Il modulo λu dipende solo dalla scelta dell'unita' di misura di $\vec{u}$ dato che λ e' un numero puro).

Proviamo ora alcune importanti <u>proprieta' della moltiplicazione scalare.</u>

1) $1\vec{u} = \vec{u}$. (ovvia).

2) $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

Nel caso che sia $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ il vettore $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u})$ ha modulo $(\alpha u + \beta u)$ e direzione e verso di $\vec{u}$, cioe' $(\alpha+\beta)\vec{u}$. Analogamente si provano gli altri tre casi, relativi ai segni di α e β.

3) $\alpha \times (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \times \vec{u} + \alpha \times \vec{v}$.

Si puo' provare sotto l'ipotesi $\alpha>0$, effettuata una semplificazione per il segno di α.

In entrambi i casi ($0<\alpha<1$ e $\alpha>1$) α e' il rapporto di similitudune tra OA e O'A' e AB e A'B'. Il rapporto si conserva anche per il terzo lato.

4) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Si noti che sono ovvie le:

$(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$

$\alpha \times \vec{u} = S(\alpha) \left(|\alpha| \times \vec{u}\right)$ ($S(\alpha)$ = segno di α).

Si ha:

$$\alpha\ (\beta \times \vec{u}) = S(\alpha)\ |\alpha| \left(S(\beta)\ |\beta| \times \vec{u}\right) =$$

$$= S(\alpha)\ S(\beta) \left[|\alpha| \left[|\beta| \times \vec{u}\right]\right]$$

I vettori $|\alpha| \left(|\beta|\ \vec{u}\right)$ e $\left(|\alpha|\ |\beta|\right) \vec{u}$ coincidono avendo stesso modulo, stessa direzione e stesso verso, dunque

$$\alpha \left(\beta\ \vec{u}\right) = S(\alpha)\ S(\beta) \left(\left[|\alpha|\ |\beta|\right] \vec{u}\right) = \alpha\ \beta\ \vec{u}$$

cioe' l'asserto.

3. LINEARE DIPENDENZA ED INDIPENDENZA.

Nel presente paragrafo vogliamo illustrare una nozione fondamentale, la nozione di <u>lineare indipendenza</u>. Tale nozione si ritrovera' piu' avanti in altri ambienti come spazi vettoriali numerici e spazi vettoriali astratti, ed e' opportuno fin dall'inizio comprendere bene l'idea di indipendenza.

Siano assegnati n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n numeri reali o scalari. Si chiama <u>vettore combinazione lineare</u> degli n vettori dati tramite gli n scalari il vettore:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n\ .$$

Supponiamo assegnati i vettori $\vec{u}_i$ e trattiamo come variabili gli scalari λ_i. Ha senso considerare l'<u>equazione vettoriale</u> nelle incognite λ_i e coefficienti $\vec{u}_i$ seguente:

$$(1) \qquad \vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0} .$$

Le soluzioni dell'equazione (1) sono delle n-ple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri reali. Esiste una evidente soluzione: quella ottenuta ponendo le a_i tutte nulle. Tale soluzione si dira' la <u>soluzione</u> <u>nulla</u> o <u>banale</u> della (1).

La (1) naturalmente potra' essere nulla anche con valori a_i non tutti nulli.

Ad esempio dati i vettori : $\vec{u}$, $-\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e considerata l'equazione

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2(-\vec{u}) + \lambda_3(\vec{v}) + \lambda_4(\vec{w}) = \vec{0}$$

Si ha

$$1\vec{u} + 1(-\vec{u}) + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = 1(\vec{u} - \vec{u}) = \vec{0}$$

dunque esiste la soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1,1,0,0) \neq (0,0,0,0)$, ma anche ogni soluzione del tipo (h, h, 0, 0).

Puo' dunque accadere che la (1) oltre alla soluzione nulla ammetta anche altre soluzioni diverse dalla nulla.

Distingueremo essenzialmente due casi:

I): si dice che n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, sono <u>linearmente indipendenti</u> L. I., se l'equazione nelle incognite λ_i :

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{o}$$

ha soltanto la soluzione nulla, cioe' se:

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Si dice invece che gli n vettori sono <u>linearmente</u> <u>dipendenti</u> (L. D.) se l'equazione (1), oltre la soluzione nulla, ne ammette anche di non nulle.

OSSERVAZIONE. Giova osservare che se $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ e' una soluzione non nulla della (1) e se $k \neq 0$ allora anche la n-pla $(kc_1, kc_2, \dots, kc_n)$ e' soluzione. Inoltre se $(d_1, \dots, d_n)$ e' una ulteriore soluzione della (1), allora anche le n-ple:

$$k(c_1, \dots, c_n) + h(d_1, \dots, d_n) = (kc_1 + hd_1, \dots, kc_n + hd_n)$$

sono soluzioni.

In altre parole: se esistono soluzioni non nulle della (1), di conseguenza ce ne sono <u>infinite</u>.

Il teorema seguente e' fondamentale per il seguito:

<u>Proposizione</u> <u>0.</u>- **Se m ≤ n tra n vettori sono L.D., allora tutti gli n vettori sono L.D.**

DIMOSTRAZIONE .Dati n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, possiamo supporre, a meno di riordini, che gli m tra essi che sono L.D. siano i primi m

$$\underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m}_{\text{L. D.}}, \dots, \vec{u}_n$$

Relativamente agli m vettori, L.D. per ipotesi, si puo' scrivere:

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_m\vec{u}_m = \vec{0},$$

con $$(c_1, \dots, c_m) \neq (0_1, \dots, 0_m).$$

Ne segue allora che l'equazione nelle m incognite h_i:

$$h_1\vec{u}_1 + h_2\vec{u}_2 + \dots + h_m\vec{u}_m + h_{m+1}\vec{u}_{m+1} + h_n\vec{u}_n = \vec{0},$$

ha come soluzione la n-pla: (poniamo $0_i = 0, \ \forall \ i$)

$$(c_1, c_2, \dots, c_m, 0_{m+1}, \dots, 0_n) \neq (0_1, 0_2, \dots, 0_n)$$

Cio' significa appunto che gli n vettori sono L.D.

Vogliamo ora provare ora alcuni teoremi che ci permetteranno, almeno nel caso dello spazio ordinario, di dare un'interpretazione geometrica della lineare dipendenza, in termini di <u>parallelismo</u> e <u>complanarita'</u>.

<u>PROPOSIZIONE</u> <u>1</u>. - **Un vettore e' L.I. se e solo se esso e' diverso dal vettore nullo.**

$$\vec{u} \text{ L.I.} \iff \vec{u} \neq \vec{0}$$

Questa implicazione puo' essere scritta anche nella forma:

$$\vec{u} \text{ L.D.} \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Dim. : proviamo che $\vec{u} \neq \vec{0}$ implica $\vec{u}$ linearmente indipendente.
L'equazione (1) adattata al nostro caso diviene:

$$\lambda\vec{u} = \vec{0}.$$

Essendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ si suppone anche $\lambda \neq 0$; risultando il modulo di $\lambda\vec{u}$ mai nullo; segue che $\lambda\vec{u} \neq \vec{0}$ allora l'equazione data ha soltanto la soluzione $\lambda = 0$, cioe' $\vec{u}$ e' L.I.
Viceversa supponiamo che $\vec{u}$ sia L.I., cioe' che l'equazione

$$\lambda\vec{u} = \vec{0}$$

ammetta soltanto la soluzione nulla. Se, per assurdo fosse $\vec{u} = \vec{0}$ si avrebbe $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, anche per $\lambda \neq 0$, dunque non si avrebbe solo la soluzione nulla in contrasto con l'ipotesi.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Se in un insieme di vettori c'e' il vettore nullo, o due di essi sono opposti, allora tutti i vettori sono L.D.

Il teorema che segue e' una interpretazione geometrica della lineare dipendenza di due vettori, come parallelismo.

<u>Definizione di vettori paralleli</u>.

Due vettori non nulli si dicono paralleli se due qualsiasi loro rappresentanti uscenti da un punto dello spazio sono su una stessa retta. La nozione di parallelismo e' manifestamente indipendente dalla scelta del punto di applicazione.

PROPOSIZIONE 2 - **Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli sono L.D. se e solo se sono paralleli. In simboli:**

$$\vec{u},\vec{v} \quad \text{L.D.} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u} \,//\, \vec{v}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'implicazione da sinistra a destra.

Essendo per ipotesi i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente dipendenti, l'equazione $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ avra' come soluzioni infinite coppie di valori (a,b) diverse dalla nulla. Si potra' allora , se a $\neq$ 0, scrivere $\vec{u} = -\dfrac{b}{a}\vec{v}$; cio', ricordando la definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare (la direzione del vettore risultato e' uguale a quella del vettore di partenza), significa dire che $\vec{u}$ e' parallelo a $\vec{v}$.

Dimostriamo l'altra implicazione. Proviamo che se $\vec{u}$ // $\vec{v}$ e' possibile trovare un numero c tale che $\vec{u} = c\vec{v}$. Si ha infatti che:

$$\vec{u} = \begin{cases} (u/v)\vec{v} \text{ se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ sono equiversi} \\ -(u/v)\vec{v} \text{ se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ hanno verso contrario} \end{cases}$$

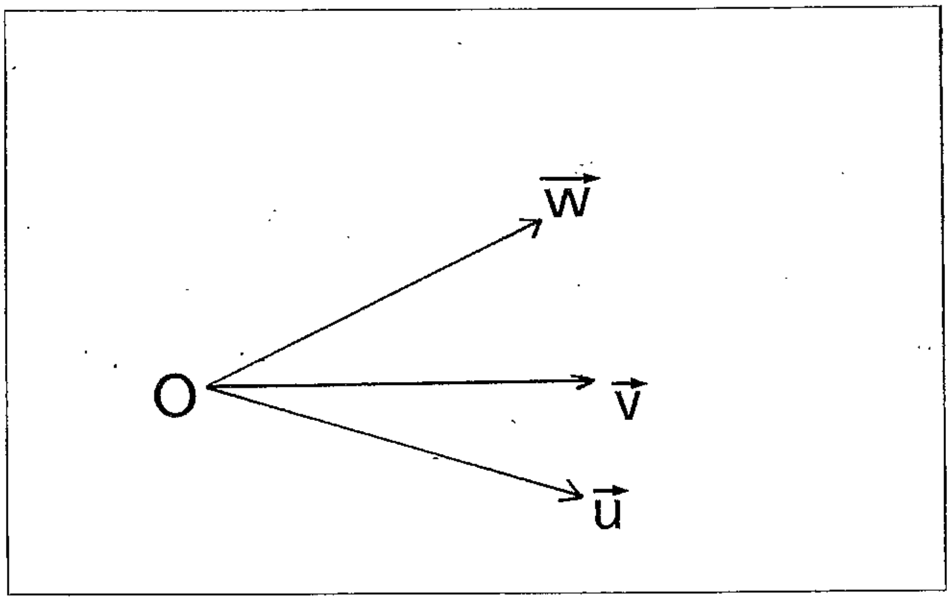
Dunque e' $\vec{u}=c\vec{v}$ e si puo' scrivere:

$$(-1)\vec{u}+c\vec{v}=\vec{0}$$

Dunque l'equazione $\lambda\vec{u} + c\vec{v}= \vec{0}$ ammette come soluzione la coppia $[(-1),c]$ che e' diversa dalla nulla, segue che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti.

<u>Definizione</u> <u>di</u> <u>vettori</u> <u>complanari</u>.

Sono dati tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non paralleli a due a due, si dice che i tre vettori sono <u>complanari</u> se, preso un punto dello spazio O e riportati da O i rappresentanti dei tre vettori, questi tre segmenti orientati giacciono nello stesso piano. La nozione di complanarita' e' manifestamente indipendente dalla scelta di O.



PROPOSIZIONE 3. **Tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.** In simboli:

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \quad \text{L.D.} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \quad \text{complanari.}$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo ad osservare che se uno almeno dei tre vettori e' nullo, oppure se due almeno di essi sono paralleli per la proposizione zero essi sono linearmente dipendenti.

Dal punto di vista geometrico essi sono anche banalmente complanari. Dunque il teorema, vero nel caso particolare, va provato per vettori non nulli e a due a due non paralleli.

Proviamo in primo luogo che se i vettori sono L.D. allora essi sono complanari.

Per ipotesi esiste una terna $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ tale che:

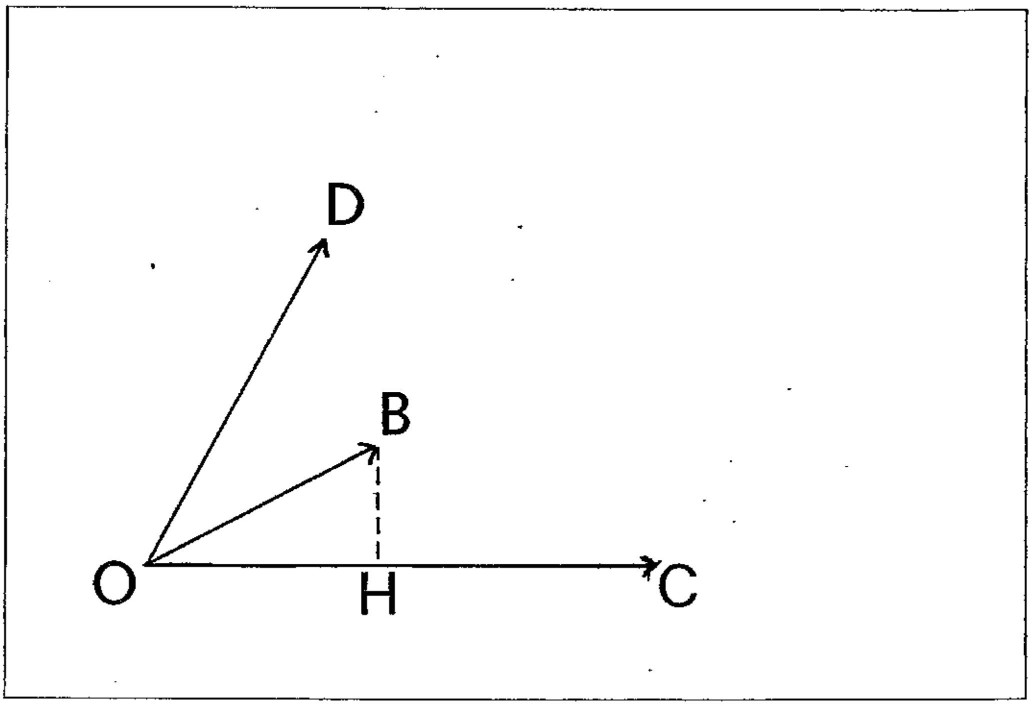
$$c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w} = \vec{0}.$$

Supponendo ad esempio $c_2 \neq 0$, possiamo scrivere:

$$\vec{v} = -\frac{c_1}{c_2}\,\vec{u} - \frac{c_3}{c_2}\,\vec{w} = h\vec{u} + k\vec{w}.$$

Dunque $\vec{v}$ e' nel piano di due vettori paralleli ad $\vec{u}$ e $\vec{w}$; segue che $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono complanari.

Dimostriamo ora inversamente che se i vettori sono complanari allora sono linearmente dipendenti.



Riportiamo a partire da un punto **O** i tre rappresentanti dei vettori complanari precisamente OB, OC, OD.

Notiamo che essendo H la proiezione di B su OC,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}$$

Tuttavia OH giace sulla stessa retta di OC, per cui si potra' scrivere che $\overrightarrow{OH} = \alpha\,\vec{v}$ e con lo stesso ragionamento ($\overrightarrow{HB}$ parallelo a $\vec{u}$) si puo' affermare che $\overrightarrow{HB} = \beta\,\vec{u}$. Possiamo allora scrivere, dalla espressione di $\overrightarrow{OB}$, che $\vec{w} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}$ ovvero $\alpha\vec{v} + \beta\vec{u} + (-1)\vec{w} = \vec{0}$.

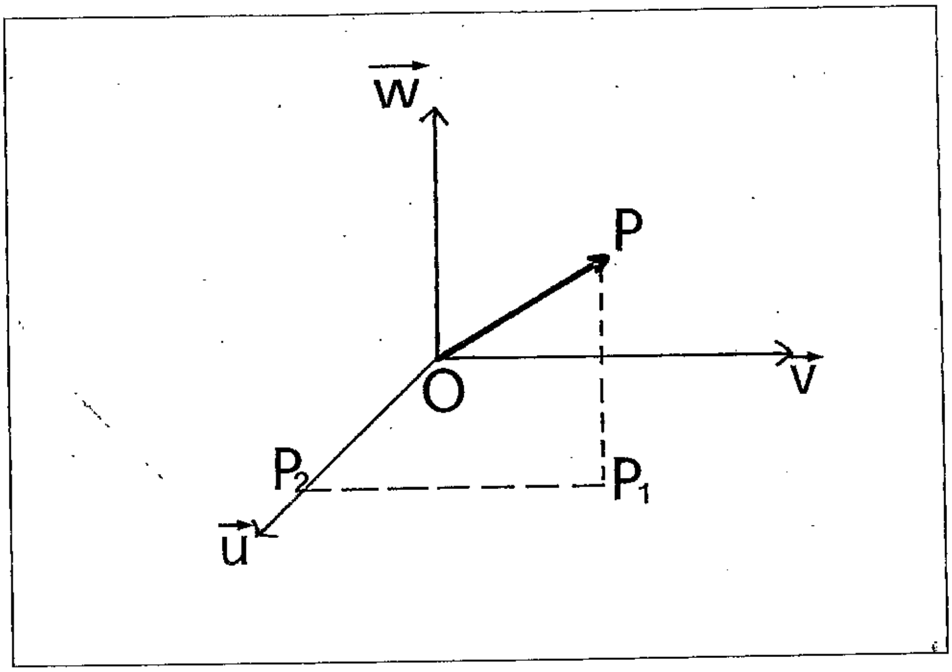
Si notera' allora che la terna $[\alpha, \beta, (-1)]$, e' una soluzione non nulla della equazione $\lambda\vec{v} + \mu\vec{u} + \nu\vec{w} = \vec{0}$. Ne segue che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Abbiamo data un'interpretazione della lineare dipendenza di uno, due ovvero tre vettori, interpretazione che corrisponde all'essere nullo, o l'essere paralleli ovvero complanari.

Il teorema seguente riguarda il caso "piu' di tre". Precisamente proviamo che:

PROPOSIZIONE 4. Quattro o piu' vettori dello spazio ordinario sono sempre linearmente dipendenti.

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente provare che esattamente quattro vettori sono sempre dipendenti poiche' allora ogni insieme di n vettori, con $n>4$, contenendo quattro vettori dipendenti, sono dipendenti per la Proposizione zero. Inoltre se dei quattro vettori almeno uno e' nullo o almeno due sono paralleli o almeno tre sono complanari la prova e' banale per la Proposizione zero.
Supponiamo dunque che i quattro vettori siano a tre a tre non complanari.



Riportiamo a partire da un qualunque punto dello spazio O i rappresentanti dei quattro vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$. Sia $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$. Tracciamo a partire da esso la retta parallela a $\vec{w}$ fino ad incontrare il piano dei rappresentanti dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in P_1. Da P_1 tracciamo la retta parallela a $\vec{v}$ fino ad incontrare il rappresentante di $\vec{u}$. E' evidente che i punti P, P1, P2 ed O sono tutti distinti (per le ipotesi di non complanarita') e si ha:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP}_2 + \overrightarrow{P_2P}_1 + \overrightarrow{P_1P} .$$

Dato che $\overrightarrow{OP}_2$ e' parallelo ad $\vec{u}$, che $\overrightarrow{P_1P}_2$ e' parallelo a $\vec{v}$ e che $\overrightarrow{P_1P}$ e' parallelo a $\vec{w}$, segue:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

ovvero:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$$

Dunque i quattro vettori considerati sono linearmente dipendenti.

OSSERVAZIONE. Si osservi ora che se l'ambiente e' una retta (spazio 1-dimensionale) esiste un vettore L.I. e non piu' di uno, ed ogni altro e' dipendente (ovvero //) a questi.
Se siamo in un piano (spazio 2-dimensionale) esistono due e non piu' di due vettori L.I. (basta prenderli non //) ad ogni altro vettore e' ambiregione lineare di questi due.
Nello spazio 3-dimensionale esistono tre e non piu' di tre vettori indipendenti (basta prenderne tre non complanari) ed ogni altro e' combinazione lineare di essi. Concludendo:
<u>Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di un sottospazio vettoriale dello spazio ordinario o euclideo coincide con la dimensione del sottospazio stesso.</u>

Negli spazi a piu' dimensioni di cui ci occuperemo in un successivo paragrafo incontreremo un maggior numero di vettori indipendenti.

4. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

La geometria analitica del piano e' un argomento noto fin dalle Scuole Secondarie. Si parla spesso di questa disciplina come di un "vero e prprio ponte" tra la Geometria Sintetico-grafica e l'Algebra. Traducendo quidi enti geometrici in enti matematici e viceversa la Geometria si avvale e di quel naturale arricchimento che una disciplina fornisce all'altra quando si effettuano queste operazioni di interpretazione.La geometria analitica ha come punto di partenza i riferimenti cartesiani, che andiamo ad introdurre nel modo che segue. Fissiamo nello spazio:

1) un punto O detto origine;

2) tre rette orientate uscenti da O non complanari: X,Y,Z ("assi coordinanti" o "assi cartesiani di riferimento.")

3)treunita'dimisura: u_x u_y u_z

su ciascuna delle rette citate.

In generale, due assi formano tra loro un certo angolo. Se i tre angoli *xy* *yz* *xz* sono retti il riferimento cartesiano si dice "ortogonale". Inoltre se le tre unita'di misura sono tutte e tre diverse allora si parlera' di riferimento "trimetrico"; se invece due di esse sono uguali si dira' "dimetrico"; se infine le tre unita' di misura risultano tutte uguali, si parlera' di riferimento "monometrico".

Fissiamo un riferimento nello spazio e consideriamo un qualsiasi punto P dello spazio. Tracciamo da P la parallela all'asse Z, otteniamo il punto P_1 sul piano *XY*; la retta per P_1 parallela all'asse Y, interseca l'asse X sul punto P_2.

Al punto P possiamo associare i tre numeri:

$$x = \text{mis } OP_2, \quad y = \text{mis} P_2P_1, \quad z = \text{mis } P_1P.$$

I tre numeri x, y, z si dicono l'ascissa, l'ordinata e la quota di P e la terna ordinata (x,y,z) si dice terna delle coordinate di P.

La corrispondenza tra tra i punti P dello spazio le terne ordinate di numeri reali (x,y,z) e' chiaramente una corrispondenza biunivoca, che si chiama coordinazione dello spazio.

Consideriamo un sistema cartesiano qualunque. Ciascuna unita' di misura individua un vettore avente lunghezza unitaria (pari ad U_x, U_y, U_z). e direzione e verso di uno dei tre assi (X,Y,Z).

Tali vettori sono chiamati "versori fondamentali". Si indicano con

$$\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ e\ \vec{k}.$$

L'insieme formato da questi tre vettori si dice una <u>base</u> di V.

Ricordando che ogni vettore $\vec{v}$ dello spazio puo' essere espresso come combinazione lineare di 3 vettori non complanari si puo' scrivere:

$$\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}.$$

Questa relazione viene detta "rappresentazione cartesiana del vettore $\vec{u}$ ". I tre numeri u_x, u_y, e u_z sono detti "componenti del vettore $\vec{u}$ "; rispetto alla base fissata. Proviamo che:

PROPOSIZIONE - La rappresentazione di un vettore rispetto ad una base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k},\}$ e' unica.

DIMOSTRAZIONE. Si abbiano le due seguenti rappresentazioni:

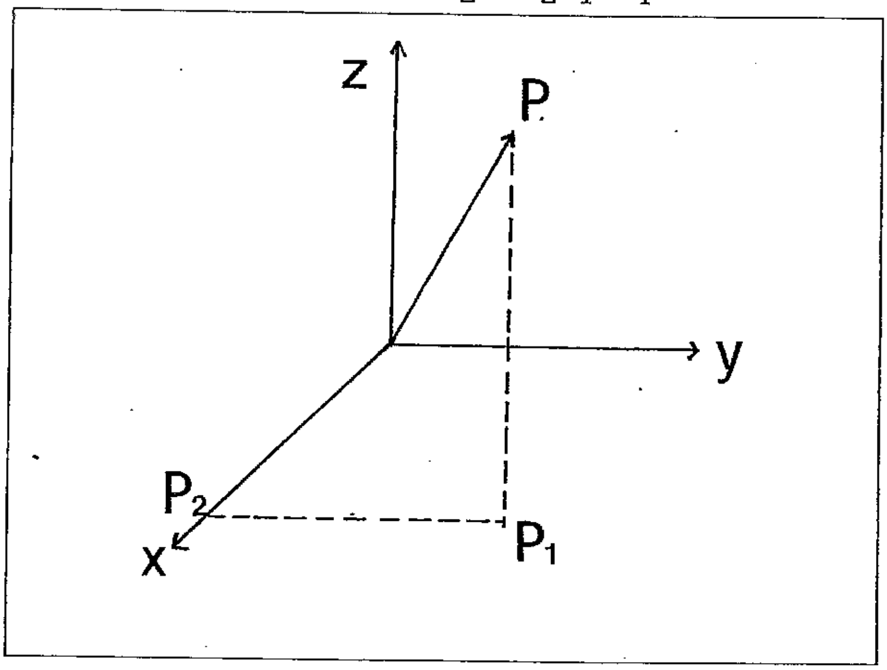
$$\vec{x} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} \quad e \quad \vec{x}' = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}\ .$$

Sottraendo membro a membro si ottiene la soluzione: $(a-a')\vec{\imath}+ + (b-b')\ j + (c-c')\ \vec{k} = 0$. Ma dato che i tre vettori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ sono indipendenti (in quanto non complanari), la relazione precedente e'vera se e solo se si annullano tutti i coefficienti, ossia: a = a', b = b' c = c'.

Vediamo ora quale sia il legame tra la rappresentazione dei punti nello spazio e quella dei vettori e come sia possibile ricavare le componenti di un dato vettore $\vec{u}$ in funzione delle coordinate dei suoi estremi.

Affrontiamo la questione dapprima in un caso particolare: supponiamo che il segmento orientato abbia il primo estremo nell'origine, in tale caso si ha:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$$



Se dunque il primo estremo del segmento che rappresenta il vettore $\vec{u}$ si trova nell'origine, le componenti del vettore sono

uguali alle coordinate (x, y, z) del punto P e si ha:

$$\vec{u}=\overrightarrow{OP}=x\vec{\imath}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Analizziamo ora il caso in cui nessuno degli estremi del segmento rappresentante il vettore u coincida con l'origine.

Si ha
$$\vec{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP}_2-\overrightarrow{OP}_1$$

$$OP_2=x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k} \text{ e } OP_1=x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1 = (x_2-x_1)\vec{\imath}+(y_2-y_1)\vec{\jmath}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

Questa formula esprime in particolare il vettore u in funzione delle coordinate dei suoi estremi. Possiamo quindi affermare che le componenti di un vettore, del quale siano noti un rappresentante e le relative coordinate degli estremi, sono date dalla differenza delle coordinate del 2^ e del 1^ estremo.

Supponiamo di avere un dato vettore $\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$ e di prendere due punti: $P(x,y,z)$ e $P_1(x_1,y_1,z_1)$ tali che $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$ (fissato). Fissato il vettore la legge che ad un punto P associa il punto P' in modo che risulti $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$, si dice una <u>traslazione di vettore</u> $\vec{u}$. Il legame che si stabilisce tra le componenti del vettore $\vec{u}$ e le coordinate dei due punti P e P' e' espresso dalle seguenti relazioni:

$$x'-x = u_x, \quad y'-y = u_y, \quad z'-z = u_z$$

Queste vengono solitamente dette "equazioni della translazione".

<u>Esercizio</u> 1 Traslare il punto P (2,-3,5) di un vettore $\vec{u}$ di componenti (5,3,1). Si ha :

$$x' = x+u_x = 2+5= 7$$

$$y' = y+u_y = -3+3 = 0$$

$$z' = z+u_z = 5+1 = 6$$

Esercizio 2 Sia OXYZ un riferimento ed O'X'Y'Z' un secondo riferimento con i nuovi assi paralleli ai vecchi.
Se (x,y,z) ed (x',y',z') sono le coordinate di uno stesso punto P e se O' ha coordinate (a,b,c) rispetto a OXYZ si ha:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$$

da cui :

$$\begin{cases} x = a+x' \\ y = b+y' \\ z = c+z' \end{cases}$$

Queste sono le equazioni di un cambiamento di riferimento per traslazione.

5. PRODOTTO SCALARE, VETTORIALE E MISTO

In tutto il paragrafo si intendera' il riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Cio' si esprimera' anche dicendo che la base formata da $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ e' ortonormale (vettori unitari a due a due ortogonali).
Sono dati due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ di moduli rispettivi $u = \|\vec{u}\|$ e $v = \|\vec{v}\|$. Si definisce prodotto scalare (o interno) dei due vettori, il numero reale che si indica con $\vec{u} \circ \vec{v}$ dato da :

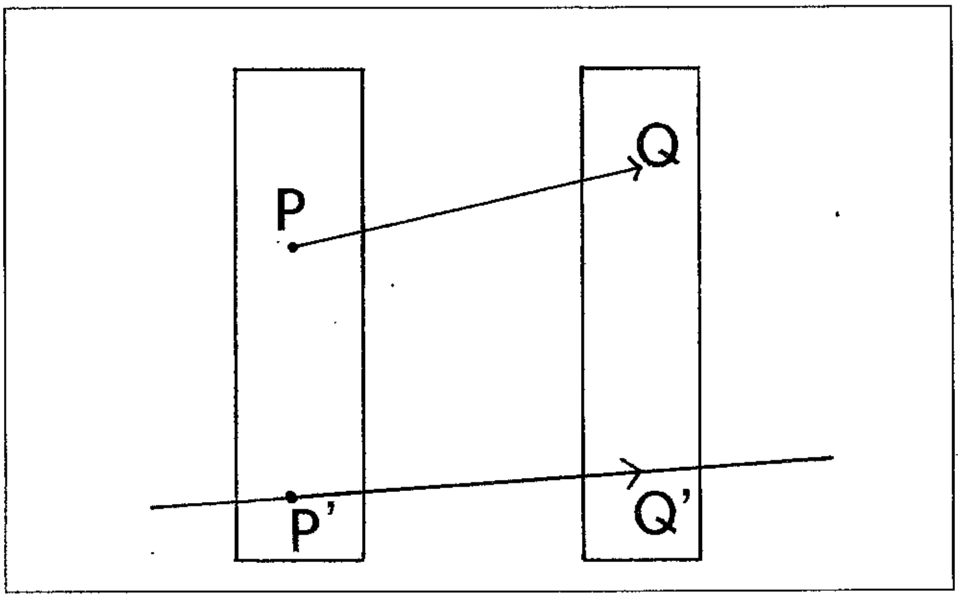
$$\vec{u}\circ\vec{v} = u\, v \cos\vartheta$$

essendo ϑ l'angolo convesso dalle semirette uscenti da O e contenenti P e Q ove $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$.

Una interessante interpretazione geometrica del prodotto scalare e' la seguente.

Sia $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, considero una retta r parallela a $\vec{v}$; considero per P e Q i due piani ortogonali ad r fino ad incontrare r in P' e Q'. Se $(P'Q')$ e' la misura orientata del segmento $P'Q'$ e $v(P'Q')$ il vettore da essi individuato, risulta:

(*) $$\vec{u}\vec{v} = v(P'Q')$$



Pertanto <u>quando</u> $\vec{v}$ <u>e' un versore</u> $\vec{u} \circ \vec{v}$ e' quel numero che chiamiamo "<u>componente di</u> $\vec{u}$ <u>secondo</u> $\vec{v}$".

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprieta' fondamentali.

Quali che siano i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e lo scalare α si ha:

1) $\vec{u}\circ\vec{v} = \vec{v}\circ\vec{u}$ (proprieta' commutativa).

2) $\vec{w}\circ(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}\circ\vec{u} + \vec{w}\circ\vec{v}$: (proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma)

3) $\alpha(\vec{u}\circ\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\circ\vec{v} = \vec{u}\circ(\alpha\vec{v})$ (proprieta' associativa mista ovvero di "passeggio" dello scalare α)

Proviamo le 1), 2), 3).

La 1) e' banale conseguenza della definizione (ϑ e' un angolo non orientato).

La 2) si prova tenendo conto della (*). Fissiamo una retta per O parallela a $\vec{w}$ e sia

$$\vec{u} = \overrightarrow{OU},\ \vec{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{US},\ \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$$

Risulta:

$$\vec{w}\circ\vec{u} = w(OU)$$
$$\vec{w}\circ\vec{v} = w(OV) = w(US)$$

$$\vec{w}\circ(\vec{u} + \vec{v}) = w\,(OS)$$

Essendo $w(OS) = w(OU) + w(US)$ segue l'asserto.

La prova della 3) e' ovvia quando $\alpha = 0$.

Supponiamo ora $\alpha > 0$. In questo caso $\alpha\vec{u}$ ed $\alpha\vec{v}$ hanno lo stesso verso di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rispettivamente, ne segue che ciascuno dei tre membri della doppia uguaglianza vale:

$$\alpha\ u\ v\ \cos\vartheta$$

essendo ϑ l'angolo convesso delle direzioni orientate di

$\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Supponiamo ora $\alpha < 0$. L'angolo convesso che $\alpha\vec{u}$ forma con $\vec{v}$ e' allora il supplementare di ϑ come anche l'angolo convesso che $\vec{u}$ forma con $\alpha\vec{v}$.

Segue allora:

$$(\alpha\vec{u})\ \vec{v} = \vec{u}\ (\alpha\vec{v}) = |\alpha|\ uv\ \cos(\pi-\vartheta).$$

D'altro canto risulta:

$$\alpha\ (\vec{u}\circ\vec{v}) = \alpha\ uv\ \cos\ \vartheta$$

essendo $\alpha < 0$ e $\cos(\pi-\vartheta) = -\cos\ \vartheta$ segue l'asserto.

Proviamo ora il:

Teorema di rappresentazione del prodotto scalare

Se due vettori rispetto ad una base ortonormale sono rappresentati da:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

allora :

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

(espressione cartesiana del prodotto scalare)

Ovvero il prodotto scalare di due vettori eguaglia la somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori.

DIMOSTRAZIONE. Si ha intanto, essendo la base ortonormale

$$\vec{\imath}\circ\vec{\imath} = \vec{j}\circ\vec{j} = \vec{k}\circ\vec{k} = 1*1\cos\ 0 = 1$$
$$\vec{\imath}\circ\vec{j} = \vec{\imath}\circ\vec{k} = \vec{j}\circ\vec{k} = 1*1\ \cos\ \frac{\pi}{2} = 0$$

segue:

$$\vec{v}\circ\vec{\iota}=(v_x\vec{\iota}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})\circ\vec{\iota}\overset{(2)}{=}(v_x\vec{\iota})\circ\vec{\iota}+(v_y\vec{j})\circ\vec{\iota}+(v_z\vec{k})\circ\vec{\iota}\overset{(3)}{=}$$

$$=v_x(\vec{\iota}\circ\vec{\iota})+v_y(\vec{j}\circ\vec{\iota})+v_z(\vec{k}\circ\vec{\iota}) = v_x$$

edanalogamente :

$$\vec{v}\circ\vec{j}=v_y, \vec{v}\circ\vec{k}=v_z.$$

si ha allora :

$$\vec{u}\circ\vec{v}=(u_x\vec{\iota}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k})\circ\vec{v}\overset{(2)}{=}(u_x\vec{\iota})\circ\vec{v}+(u_y\vec{j})\circ\vec{v}+(u_z\vec{k})\circ\vec{v}\overset{(3)}{=}$$

$$=u_x(\vec{v}\circ\vec{\iota})+u_y(\vec{v}\circ\vec{j})+u_z(\vec{v}\circ\vec{j})= u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z.$$

Dal teorema di rappresentazione segue:

$$\|\vec{u}\|^2=u^2=\vec{u}\circ\vec{u}=u_x^2+u_y^2+u_z^2$$

(espressione cartesiana del modulo) Da questa relazione e' anche possibile ricavare anche la formula che esprime la distanza tra due punti: $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2(x_2,y_2,z_2)$nello spazio, infatti:

$$d(P_1P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| =\sqrt{(x_2-x_1^2)+(y_2-y_1^2)+(z_2-z_1^2)}$$

(espressione cartesiana della distanza)

Tale formula e' valida, naturalmente, soltanto se la base e' ortonormale . In questo ordine di idee si e' fatto uso di una definizione geometrica di prodotto scalare e da questa definizione si sono provate le 1), 2), 3).

Potremmo ridefinire il prodotto scalare in modo formale; come si fa attualmente in diversi testi.

Chiamiamo prodotto scalare un'applicazione:

$$(\circ): V \times V \to \mathbb{R},$$

che ad una coppia $(\vec{u},\vec{v})$ di vettori di V associa il numero reale $\vec{u}\circ\vec{v}$ soddisfacente le condizioni (1), (2) e (3). Gli sviluppi che ne conseguono non sono immediati. Conviene allora per approfondire studiare la teoria degli spazi vettoriali astratti con prodotto interno.

Vogliamo introdurre ora la nozione di <u>prodotto vettoriale</u> di due vettori. Consideriamo una qualsiasi coppia ordinata di vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Chiamiamo <u>prodotto vettore</u> di $\vec{u}$ per $\vec{v}$ il nuovo vettore

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

definito come segue:

a) Se uno almeno dei vettori e' nullo oppure se i due vettori sono paralleli:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$$

b) Se i due vettori sono non nulli e non paralleli il vettore

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ e' quello avente le seguenti caratteristiche:

b1) la <u>direzione</u> e' quella ortogonale al piano di due rappresentanti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ uscenti da un fissato punto del piano.

b2) <u>Verso</u> di $\vec{w}$: Per la determinazione del verso ci sono innumerevoli regole pratiche. Una di queste la regola dell'omino secondo cui:

il verso del prodotto vettoriale ($\wedge$), lungo la direzione perpendicolare quello che va dai piedi alla testa di un omino che, posto con i piedi nel punto di applicazione dei due vettori, vede il primo vettore del prodotto sul suo braccio destro e il secondo sul suo braccio sinistro. Cosi' facendo il vettore $\vec{u}$ per sovrapporsi a $\vec{v}$ descrive in senso antiorario un angolo α orientato e minore di π, nella faccia del piano in esame.

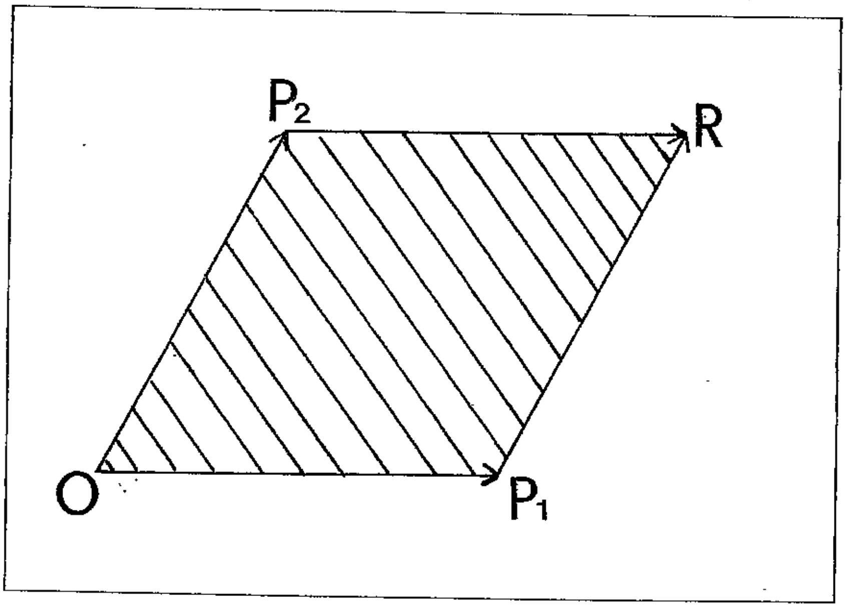
b3) Il <u>modulo</u> w di $\vec{w}$e' definito ponendo:

$$w = u\ v\ \text{sen}\ \alpha$$

- Osservazione: assunti i tre vettori applicati in O:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_1}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_2}$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{OP}$$

osserviamo che w eguaglia l'area del parallelogramma OP_1P_2R.



Le principali proprieta' del PRODOTTO VETTORIALE sono le seguenti:

$$\forall\ u,\ v,\ w \in V \text{ e } \forall\ \lambda \in \mathbb{R},$$

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

(Proprieta' anticommutativa o alternante)

2) $\lambda\ (\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ ) = (\ \lambda\vec{u}\ ) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\ \lambda\vec{v})$

(Proprieta' di "passeggio"dello scalare)

3) $\vec{w} \wedge (\ \vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$

(Proprieta' distributiva rispetto all'addizione vettoriale a destra e a sinistra)

Dimostrazione. La 1) e' immediata. Proviamo la 2).

Se $\lambda = 0$ la prova e' ovvia. Sia λ positivo. Allora i tre vettori

$$\lambda\ (\vec{u} \wedge \vec{v})\ ,\ (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v}\ ,\ \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$$

ovviamente eguali in direzione e verso, hanno lo stesso modulo.

Sia λ negativo. Allora $\lambda = -|\lambda|$. E' intanto:

$$-(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (-\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{v})$$

Infatti sia il verso di $(-\vec{u}) \wedge \vec{v}$, che di $\vec{u} \wedge (-\vec{v})$, e' opposto a quello di $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Segue allora che

$$(-|\lambda|\vec{u}) \wedge \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{u} \wedge (-|\lambda|\vec{v})$$

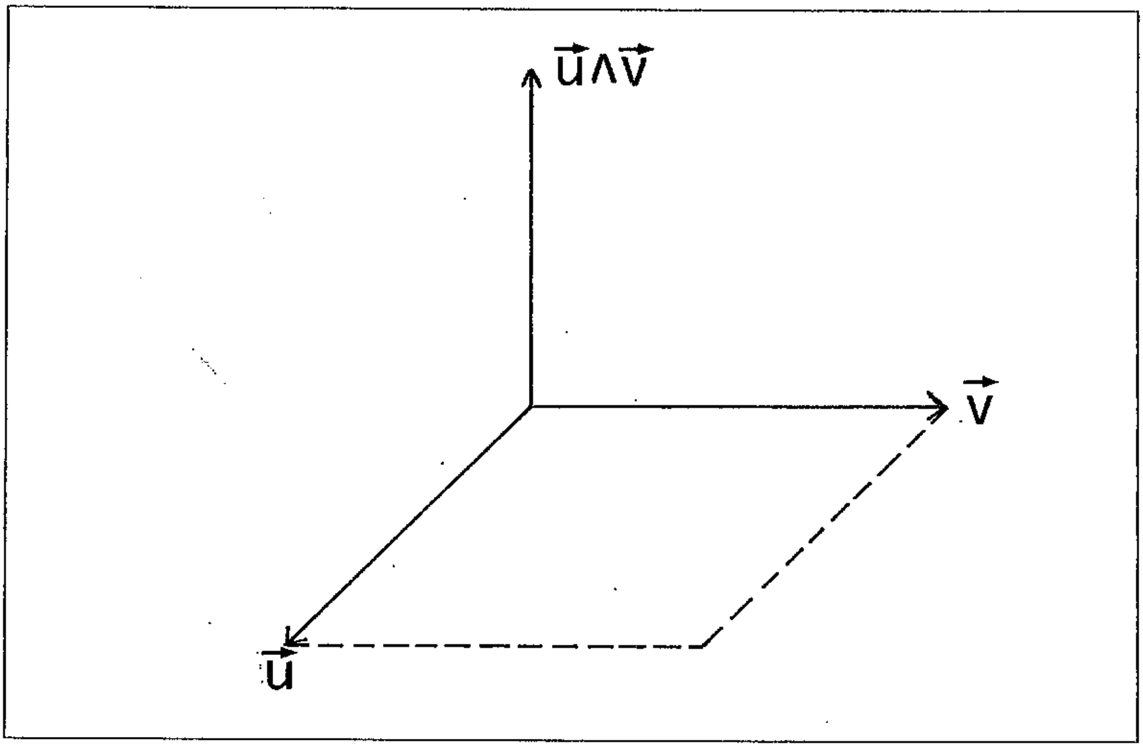
sono membri opposti del vettore:

$$|\lambda| \left[\left(\vec{u} \right) \wedge \vec{v}\right]$$

Segue l'asserto.

Per stabilire la 3) premettiamo due osservazioni.

Consideriamo il prodotto $\vec{u} \wedge \vec{v}$ essendo $\vec{u}$ versore (u=1), e pensiamo i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ applicati in O.



Si ha allora ovviamente:

(*) Se $\vec{u}$ e' perpendicolare a $\vec{v}$, il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ si ottiene facendo ruotare di un angolo retto $\vec{v}$ intorno alla retta orientata per O di versore $\vec{u}$, nel verso di rotazione positivo associato all'orientazione dello spazio.

Se $\vec{u}$ non e' ortogonale a $\vec{v}$, possiamo decomporre $\vec{v}$ in un vettore $\vec{v}'$ perpendicolare ad u e in un vettore $\alpha\vec{u}$ parallelo a $\vec{u}$ ($\vec{v}=\vec{v}'+\alpha\vec{u}$), come si ha subito dalla figura. Tenuto conto che l'area del parallelogramma costruito su $\vec{u}$, $\vec{v}$ uguaglia l'area della parallelogramma (rettangolo) costruito su $\vec{u}$, $\vec{v}'$, si ha:

$$(*1) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\vec{v}' + \alpha\, \vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}'$$

Cio' posto, per provare la seconda delle 3), poniamo $\vec{w}=b\vec{u}$ dove u e' un versore parallelo a w e b uno scalare. Bastera' dimostrare la relazione che si ottiene sotituendo u a w, giacche' si passa poi al caso generale tenendo conto di 2).

Si ha:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{u} \wedge (\vec{v}'_1+a_1\vec{u}+\vec{v}'_2+a_2\vec{u}) = \vec{u} \wedge [(\vec{v}'_1+\vec{v}'_2)+(a_1+a_2)\vec{u}]$$

dove a_1, a_2 sono scalari, $\vec{v}'_1 \perp \vec{u}$, $\vec{v}'_2 \perp \vec{u}$ e quindi anche

$$(\vec{v}'_1+\vec{v}'_2)\perp\vec{u}.$$

Tenuto conto di (*) i vettori $\vec{u} \wedge \vec{v}'_1$, $\vec{u} \wedge \vec{v}'_2$, $\vec{u} \wedge (\vec{v}'_1+\vec{v}'_2)$ si ottengono rispettivamente da $\vec{v}'_1$, $\vec{v}'_2$, $(\vec{v}'_1+\vec{v}'_2)$ con la stessa rotaazione di un angolo retto intorno alla retta orientata di versore $\vec{u}$, quindi:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}'_1+\vec{v}'_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}'_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}'_2$$

Per (*1) si ha percio':

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{u} \wedge (\vec{v}'_1+\vec{v}'_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}'_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}'_2 =$$

$$= \vec{u} \wedge (\vec{v}'_1+a_1\vec{u}) + \vec{u} \wedge (\vec{v}'_2+a_2\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2.$$

Le proprieta' dimostrate consentono, anche per l'operazione di prodotto vettoriale, il calcolo agevole e non dissimile dal calcolo algebrico ordinario, fatta eccezione per la proprieta' 1) anticommutativa, alla quale occorre porre particolare attenzione.

Proviamo ora a dare una "espressione cartesiana" del prodotto vettoriale nota come "determinante simbolico".

- **Teorema di rappresentazione**: sia data una base ortogonale $\vec{\iota}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, e siano date le componenti (u_x, u_y, u_z) di $\vec{u}$ e (v_x, v_y, v_z) di $\vec{v}$ allora:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \iota & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_y u_z \\ v_y v_z \end{vmatrix} \iota - \begin{vmatrix} u_x u_z \\ v_x v_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_x u_y \\ v_x v_y \end{vmatrix} k.$$

Osservazione. Nella 1^a riga del "determinante simbolico" compaiono i versori, nella 2^a riga compaiono le componenti del 1^o vettore, nella 3^a riga le componenti del 2^o vettore.

Dim. Si ha intanto dalla definizione:

$$\vec{\iota} \wedge \vec{\iota} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\iota} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{\iota}, \quad \vec{k} \wedge \vec{\iota} = \vec{j}$$

$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Calcoliamo ora i tre prodotti:

$(u \wedge \iota)$, $(u \wedge j)$, $(u \wedge k)$.

(3) (2)

$$\vec{u} \wedge \vec{\iota} = (u_x \vec{\iota} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge \vec{\iota} =$$

$$= u_x (\vec{\iota} \wedge \vec{\iota}) + u_y (\vec{j} \wedge \vec{\iota}) + u_z (\vec{k} \wedge \vec{\iota}) = -u_y \vec{k} + \vec{u}_z j$$

Analogamente:

$$\vec{u} \wedge \vec{j} = (u_x \vec{\iota} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge \vec{j} = u_x (\vec{\iota} \wedge \vec{j}) + u_y (\vec{j} \wedge \vec{j}) + u_z (\vec{k} \wedge \vec{j}) =$$

$$= u_x \vec{k} - u_z \vec{\iota}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{k} = (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) \wedge \vec{k} = u_x(\vec{i} \wedge \vec{k}) + u_y(\vec{j} \wedge \vec{k}) +$$

$$+u_z(\vec{k} \wedge \vec{k}) = -u_x\vec{j} + u_y\vec{i}.$$

Calcoliamo ora il prodotto:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (v\,\vec{i} + v\,\vec{j} + v\,\vec{k}) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \vec{u} \wedge (v_x\,\vec{i}) + \vec{u} \wedge (v_y\,\vec{j}) + \vec{u} \wedge (v_z\,\vec{k}) =$$

$$= v_x(\vec{u} \wedge \vec{i}) + v_y(\vec{u} \wedge \vec{j}) + v_z(\vec{u} \wedge \vec{k}) \overset{(1)}{=}$$

$$= v_x(-u_y\vec{k} + u_z\vec{j}) + v_y(u_x\vec{k} - u_z\vec{i}) + v_z(-u_x\vec{j} + u_y\vec{i}) =$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)\,\vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\vec{k}\ ;$$

che e' appunto la stessa espressione che si ottiene dallo sviluppo del determinante simbolico visto in precedenza.

Osservazioni:

1) Nella struttura algebrica $(V, \wedge)$ non esiste un vettore neutro $\vec{a}$, cioe' un vettore tale che :

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{u} \qquad \forall\ \vec{u} \in V$$

Conseguenza di tutto cio' e' che non essendoci un elemento neutro, non si puo' parlare di inverso rispetto al prodotto vettoriale.

2) Il prodotto vettoriale non e' associativo . Vi sono

infatti terne per cui la proprieta' vale e terne per cui la proprieta' non vale:

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{\iota} \wedge \vec{\iota}) \wedge \vec{j}=\vec{0}\wedge\vec{j}=\vec{0} \\ \vec{\iota} \wedge (\vec{\iota} \wedge \vec{j})=\vec{\iota}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\end{array}\right\}$$ in questo caso la proprieta' associativa non e' valida

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{\iota} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0} \\ \vec{\iota} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{k})=\vec{\iota}\wedge\vec{\iota}=\vec{0}\end{array}\right\}$$ in questo caso la proprieta' associativa e' valida.

Definiamo ora il <u>prodotto</u> <u>misto</u>.

Dati 3 vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, si chiama <u>prodotto</u> <u>misto</u> il numero:

$$\vec{u}\circ \vec{v} \wedge \vec{w}$$

Si ha:

$$\vec{u}\, \vec{v} \wedge \vec{w} = 0 \quad <=> \quad \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \quad \text{sono complanri.}$$

Dim.

Poiche' il prodotto scalare di due vettori e' nullo se idue vettori sono ortogonali, segue che

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} = 0 \quad => \quad \vec{u} \perp \vec{v} \wedge \vec{w}$$

ma $\vec{u} \perp \vec{v} \wedge \vec{w}$ => $\vec{u}$ complanare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e viceversa se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono complanari, il loro prodotto misto e' nullo.

Se

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}$$

segue

$$\vec{u}\,\vec{v}\wedge\vec{w} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si ha

$$\vec{u}\,\vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{v}\,\vec{w}\wedge\vec{u} = \vec{w}\,\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Osserviamo che se $\vec{u}\,\vec{v}\wedge\vec{w} = 0$ deve essere :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Poiche' $\vec{u}\,\vec{v}\wedge\vec{w} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari, segue che il determinante in questione e' nullo se e solo se i vettori sono complanari. Quindi

Teorema.

Tre vettori dati in forma cartesiana sono complanari se e solo se il determinante delle loro componenti e' nullo.