CAPITOLO IV

ALGEBRA DELLE MATRICI

3.1 Introduzione e cenni storici

Il concetto di matrice (dal latino *matridx* o *mater*) fu introdotto da James Joseph Silvester (1814-97)in *An Essay on canonical forms*, (Londra, 1851) per indicare una disposizione rettangolare di numeri alla quale si potessero, nel caso quadrato, associare quantita' numeriche dette determinanti. A parte alcuni prodromi risalenti a vari autori quali Gabriel Cramer (1750, Genova)), Laplace e Vandermonde (1770), Bezout (1779), la Teoria dei determinanti nasce in una Memoria di Cauchy del 1812 ed ad un contemporaneo lavoro meno perfetto di Jacques Binet. Augustin Cauchy (1789-57, Ingegnere militare e Professore all'Ecole Polytechnique di Parigi, riprende il termine "determinante" da Gauss (che non diede effettivi contributi alla teoria) e sviluppa di fatto l'intera teoria dei determinanti. La notazione a due indici attuale e' forse dovuta al matematico tedesco Leopold Kronecker (1813-91), la nozione di "rango" (o "caratteristica") e' dovuta al tedesco George Frobenius (1849-17). A partire dal 1858, in una serie di lavori, Arthur Cayley (1821-95, matematico ed avvocato inglese) Professore di Algebra a Cambridge, autore di piu' di mille Memorie, inizio' ad operare con le matrici definendo le operazioni di addizione e moltiplicazione e costruendo in tal modo le basi del moderno calcolo matriciale. La teoria delle matrici, sviluppata in stretta connessione con la Teoria dei Vettori, ha trovato molte applicazioni sia in branche della Matematica che della Fisica. Ad esempio nel 1925 Heisemberg trovo' nell'algebra delle matrici lo strumento adatto per realizzare la sistemazione analitica della meccanica quantistica, costruendo cosi' la "meccanica delle matrici".

3.2 Generalita' sulle Matrici e sullo Spazio Numerico standard delle n-ple ordinate

Fissiamo un campo $\mathbb{K}$ (vedasi il Capitolo IV). Il lettore che non conosce ancora l'idea generale di campo puo' limitarsi a pensare $\mathbb{K}$ come il campo dei numeri razionali o dei numeri reali o il campo dei numeri complessi. Naturalmente quanto diremo vale per un qualsiasi campo $\mathbb{K}$ infinito o anche finito come puo essere un campo di Galois GF(q), (vedasi ancora il Cap. IV).

Una matrice di tipo (m,n) o anche m X n pu essere definita come un quadro di elementi scelti in un fissato campo $\mathbb{K}$ organizzati secondo righe e colonne in modo tale che ogni elemento individuii esattamente un incrocio di righe e colonna ; una matrice verr schematizzata nel modo seguente

$$A = \left\| \begin{matrix} a11 & a12 \ldots\ldots\ldots & a1n \\ a21 & a22 \ldots\ldots\ldots & a2n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ am1 & am2 \ldots\ldots\ldots & amn \end{matrix} \right\|$$

Il primo indice i dell'elemento a_{ij} indica il numero della riga a cui esso appartiene, il secondo indice j quello della colonna. Nel caso in cui m = n la matrice viene detta <u>quadrata</u> di ordine n. Dal punto di vista formale chiamiamo matrice di tipo (m,n) ogni m-pla ordinata di n-ple ordinate . Ogni n-pla si chiamer <u>riga</u> della matrice. Puo' anche dirsi che se $N = \{1,2,...,n\}$ ed $M = \{1,2,...,m\}$, allora una matrice puo' definirsi come una applicazione:

$$a: M \times N \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita ponendo

$$a(i,j) = a_{ij}.$$

Spesso si suole indicare una n-pla di elementi del campo come se fosse una matrice con una riga ed una n colonne.

$$\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

Si parlera' allora di matrice riga o di vettore riga. Utilizzando questa idea una matrice si potra' riguardare come una colonna di vettori riga.

$$\underset{(m,n)}{A} = \left\|\begin{matrix} \underline{a}_1 \\ .. \\ .. \\ .. \\ \underline{a}_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

Le componenti di ciascuna riga aventi lo stesso indice formano le <u>colonne</u> della matrice . Una m-pla di elementi di un campo $\mathbb{K}$ si puo' pensare anche scritta come una matrice com m righe ed una colonna:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

In questo caso si parla di matrice colonna o vettore colonna. Conseguentemente ogni matrice pu essere riguardata come matrice dei suoi vettori colonna:

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ ... \\ a_{jm} \end{pmatrix}$$

e quindi scrivere :

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ .... & a_{2n} \\ .... \\ .... \\ a_{m1} & a_{m2} \ .... & a_{mn} \end{matrix} \right\| = (A_1, A_2, ..., A_n) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ .. \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

Ad esempio la matrice:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{matrix} \right\|$$

puo' rappresentarsi con tre vettori riga 2-dimensionali oppure con due vettori colonna 3-dimensionali.

Appare chiaro dal precedente contesto come sia importante approfondire lo studio e la struttura delle n-ple ordinate degli elementi di un campo $\mathbb{K}$.

Chiamiamo dunque **vettore numerico n-dimensionale** ogni n-upla ordinata di elementi appartenenti ad un generico campo $\mathbb{K}$.

Denoteremo con $\mathbb{K}^n$ l'insieme di tutte le n-ple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$, ed ogni n-pla sar indicata con la notazione introdotta sopra e che ricorda " i vettori"

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n)$$

Nell'insieme $\mathbb{K}^n$ definiamo, quali che siano $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^n$ e $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ le tre operazioni seguenti:

1. Somma tra due vettori numerici n-dimensionali :

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) :=$$

$$:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

2. Prodotto tra un elemento $\lambda \in K$ ed un vettore numerico :

$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda\, (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda a_n)$$

3. Prodotto scalare tra vettori numerici :

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) :=$$

$$:= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

E' un facile esercizio per il lettore provare che $(\mathbb{K}^n, +)$ e un gruppo abeliano (per la def. di gruppo vedasi Cap. IV) e verificare anche che $\forall\ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{K}^n$ e $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha :

(a) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

(b) $(\lambda + \mu)\,\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

(c) $\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$

(d) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

(e) $(\lambda\,\underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b})$

(f) $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{ac} + \underline{bc}$

L' insieme $\mathbb{K}^n$ corredato dalle tre operazioni sop definite prende il nome di spazio vettoriale n- dimensiona standard o brevemente spazio standard.

I vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ si dicono linearment indipendenti se l'equazione vettoriale

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_m \underline{a}_m = \underline{0}$$

nelle incognite λ_i ha solo la soluzione nulla. Dunque s l'equazione sopra scritta ha una soluzione diversa dall nulla allora uno dei vettori pu essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti ed i vettori si dicon linearmente dipendenti.

E' facile verificare che in $\mathbb{K}^n$ esistono n vettor linermente indipendenti tali essendo i vettori :

$$\underline{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(il simbolo δ_{ij} si dice simbolo di Kronecker). Proviamo che i vettori numerici $\underline{e}_i$ sono linearmente indipendenti. Si ha :

$$\lambda_1\underline{e}_1 + \lambda_2\underline{e}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{e}_n =$$
$$=\lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + \lambda_n(0,\ldots,0,1) =$$
$$=(\lambda_1,0,1,\ldots,0) + (0, \lambda_2,\ldots,0) + \ldots + (0,\ldots,0,\lambda_n) =$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

se e solo se

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

L'insieme dei vettori $\{ \underline{e}_1, i=1, 2, \ldots, n \}$ si dice che formano la <u>base naturale</u> dello spazio e ogni vettore numerico combinazione lineare di essi. Infatti risulta :

$$\underline{x} = (x_1, x_2, . . ., x_n) = (x_1, 0 , . . . , 0) +$$
$$+ (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, .., 0, x_n) =$$
$$= x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + . . . + x_n \underline{e}_n .$$

Tale rappresentazione ovviamente unica poich se fosse :

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + ... + x_n\underline{e}_n = y_1\underline{e}_1 + ... + y_n\underline{e}_n$$

risulterebbe:

$$(x_1 - y_1) \underline{e}_1 + ... + (x_n - y_n) \underline{e}_n = 0$$

e quindi :

$$x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , ... , x_n = y_n.$$

3.3 Il concetto di determinante associato ad una matrice quadrata

Per pervenire alla nozione di determinante associato ad una matrice quadrata, occorre premettere la nozione di <u>permutazione</u> .

Chiamasi <u>permutazione di n oggetti</u> o equivalentemente dei primi n <u>numeri naturali</u> un qualsiasi loro riordinamento.

In particolare la permutazione formata dai primi n numeri nel loro ordine naturale

1 2 3 . . . n

si dice <u>permutazione fondamentale</u>. Ad esempiopartendo dalla permutazione fondamentale 1 2 3 4 su quattro oggetti si hanno le altre 2 1 3 4 , 3 2 4 1 etc. etc.

Proviamo che :

TEOREMA 1 : **Il numero delle permutazione di n numeri n! .**

Dimostrazione (per induzione)
Indicando con P_n il numero delle permutazioni m n oggetti.
Si ha :

$$P_1 = 1$$

Proviamo ora l'implicazione:

$$P_{n-1} = (n-1)! \quad ===> \quad P_n = n!$$

Tutte le (n-1)! permutazioni dei numeri 1, 2, ..., n-1 si possono pensare raccolte nel quadro seguente

$$\left.\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots\ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} (n-1)!$$

Se aggiungiamo il numero n nella prima riga del quadro otterremo una diversa permutazione dei primi n numeri per ogni possibile posizione in cui andiamo a collocare n . Ad esempio con riferimento alla prima riga si ha :

n 1 2...n-1 , 1 n 2 ... n-1 , 1 2 n ... n-1 ,....
...., 1 2 ...n-1 n .

per un totale di n permutazioni. In altre parole si otterranno n permutazioni su n oggetti per ciascuna delle (n-1)! permutazioni su n-1 oggetti. Il numero totale delle permutazioni cos ottenute sar (n-1)! • n = n! .

Una permutazione si dice di <u>classe</u> <u>pari</u> o <u>dispari</u> a seconda che tale sia il numero (pari o dispari) di scambi che si devono eseguire per ottenere da quella data, la permutazione fondamentale.

Poich eseguendo un solo scambio si cambia classe, immediato che il numero di scambi di classe pari eguaglia il numero di scambi di classe dispari. Essi in totale sono dunque $n!/2$ $(n>2)$.

Siamo ora in grado di dire la definizione di determinante associato ad una matrice quadrata. Sia data una matrice quadrata A ad elementi in un campo $\mathbb{K}$:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

Chiamasi **determinate associato** ad A l'elemento del campo $\mathbb{K}$ che si denota con $\det A$, definito ponendo:

$$\det A := \sum_{P} (-1)^{c} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n}$$

dove :

- $(i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n)$ una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, n$
- c la classe della permutazione $i_1, i_2, \ldots, i_n$ rispetto alla permutazione fondamentale
- la somma estesa alla $P_n = n!$ permutazioni dei secondi indici.

Nel seguito il determinante associato ad A verr indicato con uno dei simboli seguenti :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a11 & a12 & \dots\dots\dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots\dots\dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots\dots\dots & ann \end{vmatrix}$$

cioe' utilizzando la barra semplice invece che la doppia (sinonimo di matrice).

Esempio I.- Sia A una matrice quadrata del 3 ordine :

$$A = \left\| \begin{matrix} a11 & a21 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix} \right\|$$

Calcoliamo il determinante associato, cioe'

$$\det A = \sum_{3!} (-1)^c \, a_{1i_1} \, a_{2i_2} \, a_{3i_3}$$

3! = 6

i1	i2	i3	classe
1	2	3	0
1	3	2	1
2	1	3	1
2	3	1	0
3	1	2	0
3	2	1	1

$$= (-1)^0 a11\ a22\ a33 + (-1)^1 a11a23a32 +$$
$$+ (-1)^1 a12\ a21\ a33 + (-1)^0 a12a23a31 +$$
$$+ (-1)^0 a13\ a21\ a32 + (-1)^1 a13a22a31 .$$

Limitatamente ai determinanti del terzo ordine esiste una regola pratica detta di SARRUS, per il calcolo del valore numerico.

I Enunciato della regola di Sarrus

Per calcolare il det A :

a) si copiano a destra della matrice le prime due colonne:

$$\left\|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right\|\begin{array}{|cc} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

b) si prende la somma delle tre diagonali discendenti da sinistra a destra cio :

$$\Delta^{+} = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$$

c) si prende la somma, cambiata di segno, delle tre diagonali discendenti da destra a sinistra, cio :

$$\Delta^{-} = -\ a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{12}\ a_{23}\ a_{31} - a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$$

segue :

$$\det A = \Delta^{+} + \Delta^{-}.$$

<u>II Enunciato della regola di Sarrus</u>

Per calcolare det A :

$$\left\|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right\|$$

a) si prende il prodotto dei termini formanti la diagonale principale e quelli formanti i due triangoli seguenti

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{array}$$

cio :

$\Delta^{+}=$ a11 a22 a33 + a31 a12 a23 + a13 a21 a32

b) si prendono, con segno cambiato la diagonale secondaria e i triangoli opposti :

a11	o	o		o	a12	o
o	o	a23		a21	o	o
o	a3	2 o		o	o	a33

cio :

$\Delta^{-}=$ - a13 a22 a31 - a11 a23 a32 - a33 a12 a21

e si annoter:

$$\det A = \Delta^{+} + \Delta^{-}$$

Cos ad esempio :

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ \sqrt{2} & 15 & \Pi \end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ \sqrt{2} & 15 \end{matrix}\right\| \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ \sqrt{2} & 15 & \Pi \end{matrix}$$

$[1\cdot5\cdot(-\Pi)]+[2\cdot6\cdot e]+[1\cdot6\cdot\sqrt{2}]+[1\cdot(-3)\cdot15]-[2\cdot(-3)\cdot(-\Pi)]-[1\cdot6\cdot$

$[1\cdot6\cdot15]-[1\cdot5\cdot\sqrt{2}] = -5\Pi + 12\sqrt{2} -45 -6\Pi -90 -5\sqrt{2} = 7e - 113$.

Diamo ancora qualche definizione, utile per il seguito. Si chiama <u>matrice</u> <u>trasposta</u> di una data matrice A una matrice A^{t} ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

$$A=\left\|\begin{matrix} a11 & a21 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{matrix}\right\| ; \qquad A^{t}=\left\|\begin{matrix} a11a21\dots am1 \\ a12a22\dots an2 \\ \\ a1na2n\dots amn \end{matrix}\right\|$$

Una matrice quadrata si dice simmetrica quando e' uguale alla sua trasposta $A = A^t$, cioe' quando per ogni coppia di indici i.j e'

$$a_{ij} = a_{ji} \quad .$$

Una matrice quadrata si dice emisimmetrica quando e' uguale all'opposta della sua trasposta $A = -A^t$, cioe' se e' :

$$a_{ij} = - a_{ji} \qquad , \qquad a_{ii} = 0 \quad .$$

Quindi mentre per una matrice simmetrica i termini sulla diagonale principale sono qualsiasi, per una matrice emisimmetrica tali termini sono tutti nulli. Osserviamo che una matrice diagonale e' una particolare matrice simmetrica. Una matrice quadrata $\| a_{ij} \|$ si dice triangolare superiore quando sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale, cioe' quando $a_{ij} = 0$ per $i > j$; si dice invece triangolare inferiore quando sono nulli gli elementi al di sopra della diagonale principale, cioe' quando $a_{ij} = 0$ per $i < j$. I termini "inferiore" e "superiore" sono riferiti dunque agli elementi non nulli; questi elementi, non essendo stata imposta nessuna condizione,possono risultare anche in parte nulli. Una matrice quadrata che e' al tempo stesso triangolare superiore e triangolare inferiore e' detta matrice diagonale. Dunque una matrice diagonale ha certamente nulli tutti i termini posti al di fuori della diagonale principale,cioe' $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Se in particolare a_{ii} = 1, la matrice diagonale prende il nome di matrice unitaria. In altre parole una matrice unitaria ha come coefficienti i simboli di Kronecker introdotti prima (cfr.3.2). Nel seguito la matrice unitaria d'ordine n si indichera' con I_n. Vedremo nel seguito che ogni matrice quadrata si puo' trasformare in una matrice triangolare superiore, in una matrice triangolare inferiore ed in una matrice diagonale.

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

triangolare superiore — triangolare inferiore — diagonale — unitaria I_3

$$\left\|\begin{matrix} a & A & \alpha \\ A & b & d \\ \alpha & d & c \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} 0 & A & \alpha \\ -A & 0 & d \\ -\alpha & -d & 0 \end{matrix}\right\|$$

simmetrica — emisimmetrica

3.3 Proprieta' dei determinanti

Il calcolo effettivo di un determinante non segue ovviamente dalla sua definizione. Per grandi matrici che possono incontrarsi, ad esempio, nel calcolo di una struttura di cemento armato o simili si ricorre usualmente ad un elaboratore (calcola bene anche determinanti 100 X 100). Per matrici al piu' 20 X 20 si ricorre a metodi di riduzione che seguono da alcune proprieta' fondamentali per i determinanti, che tratteremo in questo paragrafo.

TEOREMA 2 : Se in un determinante una riga (o una colonna) composta di soli zeri, allora il determinante vale zero .

DIMOSTRAZIONE. Dire che la riga i-esima composta di soli zeri significa che

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$$

cio ogni elemento avente come primo indice i zero.

Poich ciascuno degli n! addendi dello sviluppo

$$\det A = \sum_{P_n} (-1)^{\sigma} a_{1R_1}\, a_{2R_2} \dots a_{iR_i} \dots a_{nR_n}$$

contiene un fattore con primo indice eguale ad " i " , segue che ogni addendo, avendo un fattore nullo, nullo.

Analogamente si ragiona se sono nulli gli elementi di una colonna :

$$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{nj} = 0.$$

(in tal caso in ogni addendo uno degli indici R_i e' eguale ad j, dunque l'addendo e' nullo).

TEOREMA 3. Il determinante di una matrice triangolare eguaglia il prodotto degli elementi della diagonale principale.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un generico addendo della espressione polinomiale che definisce un determinante, sia :

$$(-1)^{\sigma} a_{1i_1}\, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

Se risulta $i_1, i_2, \dots, i_n \neq 1, 2, \dots,$ nella permutazione dei secondi indici esiste sia un fattore con il primo termine indice inferiore al secondo (cio del triangolo superiore) sia un elemento con il primo indice maggiore del secondo (cio del triangolo inferiore). Di conseguenza sono nulli tutti i termini i cui secondi indici non formano la permutazione fondamentale.

TEOREMA 4 : Sia A una matrice quadrata allora :

$$\det A^t = \det A \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$A = \left\| \begin{matrix} a11 & a21 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{matrix} \right\| ; \qquad A^t = \left\| \begin{matrix} b11 & b21 & \dots & bm1 \\ b12 & b22 & \dots & bn2 \\ & & & \\ b1n & b2n & \dots & bmn \end{matrix} \right\|$$

Essendo :

$$bji = aij$$

risulta :

$$\det A^t = \sum (-1)^s b1i_1 \; b2i_2 \; \dots\dots \; bni_n =$$

$$= \sum (-1)^s ai_1 1 \; ai_2 2 \; \dots\dots \; ai_n n$$

$$\det A = \sum (-1)^t \; a1h_1 \; a2h_2 \; \dots\dots \; anh_n .$$

Consideriamo ora l'insieme $\mathfrak{I}^t$ degli n! addendi dello sviluppo di det A^t e l'insieme $\mathfrak{I}$ degli n! addendi dello sviluppo di det A. Due di essi :

$$(-1)^s \; ai_1 1 \; ai_2 2 \; \dots\dots \; ai_n n \in \mathfrak{I}^t$$
$$(-1)^t \; a1h_1 \; a2h_2 \; \dots\dots \; anh_n \in \mathfrak{I}$$

si diranno <u>corrispondenti</u> se, a meno del segno, contengono gli stessi fattori, cioe' se vale l'eguaglianza insiemistica:

$$\{ ai_1 1 , \dots, ai_n n \} = \{ a1h_1 , \dots\dots, anh_n \} .$$

E' chiaro allora che ad ogni elemento di $\mathfrak{I}^t$ ne corrisponde uno ed uno solo di $\mathfrak{I}$ ed inversamente. Per la prova occorre mostrareche elementi corrispondenti sono eguali anche in segno. Appare chiaro allora che , essendo sia i primi indici che i secondi tutti distinti (sono infatti permutazioni) l'elemento del primo insieme avente primo indice s ha secondo indice h_s. Cio' significa che:

$$\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_n \\ 1\ 2 \dots\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots n \\ h_1 h_2 \dots h_n \end{pmatrix}$$

segue necessariamente

$$s = t.$$

TEOREMA 5. Se tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) di un determinante risultano moltiplicati per un fattore comune k, allora il determinante uguale al fattore comune k per il nuovo determinante avente ogni elemento di quella riga (o di quella colonna) diviso per il fattore costante k.

DIMOSTRAZIONE. Posto

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \dots & ka_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si ha:

$$\det B = \sum(-1) a_{1i_1}\, a_{2i_2} \dots\dots (k\, a_{si_s}) \dots\dots a_{ni_n} =$$

$$= k \sum(-1) a_{1i_1}\, a_{2i_2} \dots\dots a_{si_s} \dots\dots a_{ni_n} = k\cdot\det A\ .$$

TEOREMA 6. Se in un determinante si scambiano tra loro due righe (o colonne) parallele il nuovo determinante cambia di segno.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Risulta:

$$\det A = \sum_{P_n} (-1)^h a_{1i_1} \dots a_{ri_r} \dots a_{si_s} \dots a_{ni_n}$$

$$\det B = \sum_{P_n} (-1)^t a_{1i_1} \dots a_{si_s} \dots a_{ri_s} \dots a_{ni_n}$$

Consideriamo le due permutazioni dei seguenti indici:

$$H = i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_n$$

$$T = i_1 \dots i_s \dots i_r \dots i_n$$

Dimostriamo che le classi di permutazione di H e di T sono opposte. Si pu scrivere

:

$$H = \underbrace{i_1 \dots i_{r-1} \mid i_r}_{C} \mid \underbrace{i_{r+1} \dots i_{s-1} \mid i_s}_{D} \mid \underbrace{i_{s+1} \dots i_n}_{E}$$

$$T = \underbrace{i_1 \dots i_{r-1}}_{C} \; i_s \; \underbrace{i_{r+1} \dots i_{s-1}}_{D} \; i_r \; \underbrace{i_{s+1} \dots i_n}_{E}$$

Abbiamo allora bisogno di *d* (numero degli indici presenti nella permutazione D) spostamenti per costruire dalla permutazione H quella seguente:

$$F = \underbrace{i_1 \; \dots \; i_{r-1}}_{C} \; i_r \; i_s \; \underbrace{i_{r+1} \; \dots \; i_{s-1}}_{D} \; \underbrace{i_{s+1} \; \dots \; i_n}_{E}$$

e di *d* spostamenti ancora per costruire dalla permutazione T quella seguente:

$$G = \underbrace{i_1 \; \dots \; i_{r-1}}_{C} \; i_r \quad i_s \; \underbrace{i_{r+1} \; \dots \; i_{s-1}}_{D} \quad \underbrace{i_{s+1} \; \dots \; i_n}_{E}$$

Siccome le permutazioni F e G differiscono di un solo scambio e sono state costruite rispettivamente con uno stesso numero " *d* "di scambi a partire dalle permutazioni H e T, segue allora che H e T differiscono di un numero dispari di scambio. La classe della permutazione H dunque sempre opposta a quella della permutazione T. Risulta quindi:

$$\det A = - \det B.$$

TEOREMA 7. Se in un determinante di ordine n la riga (o colonna)r-esima uguale alla somma di due n-ple date, allora il valore del determinante uguale alla somma dei due determinanti ottenuti dal dato sostituendo in essi rispettivamente alla riga (o colonna) r-esima ciascuna delle due n-uple date.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la riga r-esima sia data da:

$$\underline{a}_r = \underline{b}_r + \underline{c}_r$$

dove $\underline{b}_r$ e $\underline{c}_r$ sono due n-ple date. Poniamo:

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \quad C=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

risulta:

$$\det a = \sum_{P_n}(-1)^{\sigma} a_{1i_1} \dots a_{ri_r} \dots a_{ni_n}$$

$$\det B = \sum_{P_n}(-1)^{\sigma} a_{1i_1} \dots b_{ri_r} \dots a_{ni_n}$$

$$\det C = \sum_{P_n}(-1)^{\sigma} a_{1i_1} \dots c_{ri_r} \dots a_{ni_n}$$

sommando termine a termine det A e det B risulta ogni elemento del nuovo determinante di primo indice R uguale all'elemento (di primo indice R) corrispondente nel det C

$$\det A + \det B = \sum_{p_n} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} \dots (b_{ri_r} + c_{ri_r}) \dots$$
$$\dots a_{ni_n} = \det C.$$

E' utile esercizio ripetere la prova per le colonne.

TEOREMA 8. Se in un determinante aggiungiamo agli elementi di una riga (o di una colonna) gli elementi di una riga (o colonna) parallela moltiplicati ciascuno per un fattore arbitrario costante K, il valore del determinante non cambia.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo :

$$A = \left\| \begin{array}{lcl} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \qquad B = \left\| \begin{array}{lcl} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}+ka_{s1} & \dots & a_{rn}+ka_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

Per i teoremi 4 ,5 e 7 risulta che det B eguaglia det A piu' kvolte un determinante con due righe eguali.

In simboli:

$$\det B = \left| \begin{array}{llcl} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{llcl} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \dots & ka_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| =$$

$$= \det A + k \left| \begin{array}{llcl} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = \det A.$$

OSSERVAZIONE.- Il teorema precedente permette di trasmormare un determinante in un altro determinante di egual valore ma avente un prefissata riga fatta con elementi tutti nulli uno al piu' eccettuato. Questo procedimento ci tornera' molto utile nel seguito. Mostriamo il metodo su un esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k & 2+k & 3+k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+2h & 2 & 3 \\ 1+h & 1 & 1 \\ 2+3h & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2h & 2+3a & 3 \\ 1+h & 1+a & 1 \\ 2+3h & 3-a & -1 \end{vmatrix}$$

Possiamo ora prendere adesempio $h = a = -1$ ed avere la seconda riga con due zeri.

TEOREMA 9 . Se le righe (o le colonne) di un determinante sono linearmente dipendenti, allora il determinante nullo:

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che A sia formato dai vettori riga:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \quad \text{(linearmente dipendenti).}$$

Esistono allora n scalari

$$(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) \neq (0_1, 0_2, \ldots\ldots, 0_n)$$

tali che:

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \ldots\ldots + c_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

Senza ledere la generalit supporremo $c_n \neq 0$, da cui:

$$\underline{a}_n = \frac{- c_1 \underline{a}_1 - c_2 \underline{a}_2 - \ldots - c_n \underline{a}_{n-1}}{c_n}$$

cio:

$$\underline{a}_n = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} \underline{a}_{n-1}.$$

Risulta allora:

$$
\det A = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \underline{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}\underline{a}_{n-1} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \alpha_1\underline{a}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \alpha_2\underline{a}_2 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots + \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \alpha_{n-1}\underline{a}_{n-1} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \alpha_1 \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}_1 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \underline{a}_2 \end{vmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \cdots \\ \underline{a}_{n-1} \\ \underline{a}_{n-1} \end{vmatrix} = 0.
$$

Infatti i determinanti che compaiono nella terza eguaglianza sono nulli avendo ciascuno due righe eguali.

3.4. Il calcolo dei determinanti e i teoremi di Laplace

In questo paragrafo, utilizzando i teoremi del paragrafo precedente, e come si accennava all'inizio di questi vogliamo pervenire ad alcuni teoremi che ccostituiscono gli aspettati "teoremi di riduzione" per il calcolo effettivo dei determinanti.

Premettiamo una definizione :

Si chiama <u>complemento</u> <u>algebrico</u> di un elemento a_{ij} di una matrice quadrata quel numero, denotato con A_{ij} , dato dal nuovo determinante ottenuto privando quello dato della riga i-ma e della colonna j-ma ,moltiplicato per

-1 elevato alla somma i+j degli indici dell'elemento.
ESEMPI: Calcoliamo i complementi algebrici di alcuni elementi della matrice quadrata:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

$$A_{11} :=(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} :=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \square$$

Proviamo unteorema fondamentale per il calcolo dei determinanti.

I TEOREMA DI LAPLACE. Il determinante di una matrice quadrata eguaglia la somma dei prodotti degli elementi di una data riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si fa per passi. Passo 1. La somma di tutti gli elementi dello sviluppo di det A che contengono l'elemento a_{11} vale $a_{11} A_{11}$. Per provare l'asserto si osservi che ogni termine dello sviluppo della sommatoria contenente a_{11} potr essere scritto come :

$$a_{11} \cdot (-1)^{\sigma} a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n}$$

La classe σ non viene alterata dalla presenza di a_{11} essendo σ sia la classe della permutazione $i_1, \ldots, i_n$

rispetto a $1,\dots,n$ sia la classe della permutazione $i_2,\dots,i_n$ rispetto a $2,\dots,n$.

La sommatoria di tutti questi termini risulta dunque essere:

$$\sum_{P_n}(-1)^{\sigma}a_{11}\ a_{2i_2}\dots a_{ni_n} = a_1 \sum_{P_{n-1}}(-1)^{\sigma}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$$

In altre parole nei termini della sommatoria a secondo membro non compaiono mai elementi con l'1 al primo o al secondo indice. Ne segue che quella sommatoria sar lo sviluppo di un determinante di ordine (n-1) con indici da 2 ad n. Questo determinante proprio il complemento algebrico di a_{11}:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} \end{vmatrix}$$

Dunque la somma dei termini dello sviluppo di det A contenenti a_{11} :

$$a_{11}\ A_{11}.$$

Passo 2. La somma di tutti gli elementi dello sviluppo di det A che contengono l'elemento a_{rs} vale

$$a_{rs}\ A_{rs}.$$

Dimostriamo l'asserto per un generico elemento a_{rs}, con r ed s fissati. Partiamo da :

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1\,1} & \dots\dots & a_{r-1\,n} \\ a_{r1} & \dots\dots\dots & a_{rn} \\ a_{r+1\,1} & \dots\dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Spostando la riga r-esima in prima posizione si ha:

$$\det A=(-1)^{r-1}\begin{vmatrix} a_{r1} & \dots\dots\dots & a_{rn} \\ a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1\,1} & \dots\dots & a_{r-1\,n} \\ a_{r+1\,1} & \dots\dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ora scambiamo la colonna s-esima con la prima :

$$\det A=(-1)^{s-1}(-1)^{r-1}\begin{vmatrix} a_{rs} & a_{r1} & \dots\dots\dots & a_{rn} \\ a_{1s} & a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1\,s} & a_{r-1\,1} & \dots\dots & a_{r-1\,n} \\ a_{r+1\,s} & a_{r+1\,1} & \dots\dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ns} & a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La somma dei termini che contengono l'elemento a_{rs} risulta allora essere:

$$(-1)^{r+s}\cdot a_{rs}\cdot \det\begin{vmatrix} \text{parte} \\ \text{complementare} \\ \text{di } a_{rs} \end{vmatrix} = a_{rs}\cdot A_{rs}.$$

Passo 3. Passiamo ora dimostrare il teorema. Da quanto provato al passo 2 risulta chiaro che :

$a_{rs}\, A_{rs}$ = somma di termini det A contenenti a_{rs}

in particolare :

$$a_{r1}\, A_{r1} = \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad a_{r1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{rn}\, A_{rn} = \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad a_{rn}$$

Segue allora banalmente l'asserto avendosi:

$$\det A = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots\ldots + a_{rn} A_{rn}. \qquad \square$$

Il teorema seguente di facile dimostrazione .

II TEOREMA DI LAPLACE. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice per i complementi algebrici di una riga (o colonna) parallela uguale a zero.

$$r \neq s \quad \Rightarrow \quad a_{r1} A_{s1} + a_{r2} A_{s2} + \ldots\ldots + a_{rn} A_{sn} = 0$$

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente considerare le due matrici :

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boxed{a_{r1} \qquad\qquad} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \end{matrix} \right\| \qquad\qquad B = \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \end{matrix} \right\|$$

Calcolare il numero in esame equivale a calcolare det B che zero quando due righe sono uguali. $\square$

Il I e II teorema di Laplace, ricordando il simbolo di Kronecker (cfr. **3.2**), si riassumono nella formula :

$$a_{r1}\mathcal{A}_{s1} + a_{r2}\mathcal{A}_{s2} + \dots\dots + a_{rn}\mathcal{A}_{sn} = \delta_{rs} \cdot \det A$$

Vogliamo ora provare un teorema, che pur non essendo di importanza fondamentale in questo contesto, completa il quadro degli sviluppi di un determinante. Su questo teorema si basera' la prova della proprieta' moltiplicativa dei determinanti

III TEOREMA DI LAPLACE. Data una matrice quadrata A, d'ordine n e considerata una qualunque sua submatrice S di tipo mXn, (ovvero nXm) il valore det A dato dalla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine m di S per i rispettivi aggiunti in A.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema ovvio se m=n (calcolo diretto di det A), se m=1 nonch se m=n-1 (I Teorema di Laplace). Sicch noi potremo limitarci al caso di $1 < m < n$.

La sottomatrice S sia costituita dalla righe x_1-esima, x_2-esima, ..., x_m-esima di A, con $x_1 < x_2 < \dots < x_m$; e siano x_{m+1}, $x_{m+2}, \dots$, x_n le rimanenti righe. Siano λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_m una qualunque permutazione dei numeri 1, 2,.., m; e siano λ_{m+1}, $\lambda_{m+2}, \dots$, λ_m i rimanenti termini della permutazione 1, 2, ...,m, m+1, ..., n. Si supponga di nuovo di aver scelto i simboli in modo che risulti $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ e $\lambda_{m+1} < \lambda_{m+2} < \dots < \lambda_n$.

Si tratta di provare che det A eguale a

$$\sum(-1)^{d}\begin{vmatrix} a_{x_1,\lambda_1},\dots,a_{x_1,\lambda_m}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{x_m,\lambda_1},\dots,a_{x_m,\lambda_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{x_{m+1},\lambda_{m+1}},\dots,a_{x_{m+1},\lambda_n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{x_n,\lambda_{m+1}},\dots\quad,a_{x_n,\lambda_n}\end{vmatrix},$$

dove $d = x_1+x_2+\dots+x_m+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m$ ed essendo la sommatoria estesa a tutte le possibili combinazioni $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_m$ dei primi m numeri naturali.

Se D' il determinante della matrice ottenuta da M portando la x_1-esima riga al primo posto, la x_2-esima al secondo, ..., la x_m-esima all' m-esimo, risulta

$$D = (-1)^{x_1+\dots+x_m-(1+..+m)}D',$$

Sicch per stabilire il nostro teorema basta far vedere che D' uguale alla somma (ove si e' posto $\lambda := \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m$)

$$\sum(-1)^{1+\dots+m+\lambda}\begin{vmatrix} a_{x_1,\lambda_1},\dots.,a_{x_1,\lambda_n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{x_m,\lambda_1},\dots.,a_{x_m,\lambda_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{x_{m+1},\lambda_{m+1}},\dots.,a_{x_{m+1},\lambda_n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{x_m,\lambda_{m+1}},\dots\dots,a_{x_n,\lambda_n}\end{vmatrix}$$

cio basta far vedere che il nostro teorema vero nell'ipotesi supplettiva dei $x_1=1$, $x_2=2$, ..., $x_m=m$.

Basta poi scrivere la matrice A come segue:

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}+0 & , a_{1,2}+0 & ,\dots, & a_{1,n}+0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m,1}+0 & , a_{m,2}+0 & ,\dots, & a_{m,n}+0\\ 0+a_{m+1,1} & , 0+a_{m+1,2} & ,\dots, & 0+a_{m+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0+a_{n,1} & , 0+a_{n,2} & ,\dots, & 0+a_{n,n}\end{Vmatrix}$$

per riconoscere che il suo determinante si spezza in una somma di determinanti.

Mediante facili trasformazioni si riconosce che si tratta della somma degli addendi

(*)

$$(-1)^{\lambda_1-1+\ldots+\lambda_r-r}\begin{vmatrix} a_{1,\lambda_1} & \ldots & a_{1,\lambda_r} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,\lambda_1} & \ldots & a_{m,\lambda_r} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1,\lambda_{r+1}} & \ldots & & a_{m+1,\lambda_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,\lambda_{r+1}} & .. & & a_{n,\lambda_n} \end{vmatrix}$$

dove $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ e dove $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$ una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, n$ soddisfacente alle $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ (se $r > 1$) ed alle $\lambda_{r+1} < \ldots < \lambda_n$ (se $r < n$).

Mostriamo ora che i determinanti che compaiono negli addendi sono tutti nulli, quando $r \neq m$.

Supponiamo prima $r < m$. La prova ovvia, se $r=0$, perch il determinante di una matrice che abbia nulli gli elementi della prima riga nullo.

La cosa vera anche se $r=1$, perch allora, essendo $m>1$, risulta :

$$\begin{vmatrix} a_{1,\lambda_1}, & 0 & , \ldots , & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,\lambda_1}, & 0 & , \ldots , & 0 \\ 0 & , a_{m+1,\lambda_2} & , \ldots & , a_{m+1,\lambda_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & , a_{n,\lambda_2} & , \ldots & , a_{n,\lambda_n} \end{vmatrix} = a_{1\lambda_1} \begin{vmatrix} 0 & , \ldots , & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & , \ldots , & 0 \\ a_{m+1,\lambda_2} & , \ldots & , a_{m+1,\lambda_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,\lambda_2} & , \ldots & , a_{n,\lambda_n} \end{vmatrix} = 0$$

sicch si pu procedere per induzione rispetto al numero r.

E dopo di ci la conclusione immediata, perch per $r>1$

il determinante che compare in (*) si presenta come una somma di addendi che, a meno del segno, sono del tipo

$$a_{1,\lambda_s}\begin{vmatrix} a_{2,\lambda_1},..,a_{2,\lambda_{s-1}} & ,a_{2,\lambda_{s+1}},..,a_{2,\lambda_r}, & 0 & ,.., & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m,\lambda_1},..,a_{m,\lambda_{s-1}} & ,a_{m,\lambda_{s+1}},..,a_{m,\lambda_r}, & 0 & ,.., & 0 \\ 0 \quad ,.., \quad 0 & , \quad 0 \quad ,.., \quad 0 & ,a_{m+1,\lambda_{r+1}} & ,.., & a_{m+1,\lambda_n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 \quad ,.., \quad 0 & , \quad 0 \quad ,.., \quad 0 & ,\ a_{n,\lambda_{r+1}} & ,.., & a_{n,\lambda_n} \end{vmatrix}$$

e quindi sono tutti nulli, per l'ipotesi induttiva (e, naturalmente, della r-1<m-1). Se r>m, la conclusione si raggiunge con lo stesso ragionamento, dando ad n-r ed n-m i ruoli rispettivi di r e di m e ricorrendo secondo ultime righe invece che secondo prime righe.

Pertanto il determinante *D* della matrice *A* uguale alla somma di quelli fra gli addendi (*) per i quali r=m. Ed infine basta provaredimostrare che il determinante della matrice *C*:

$$(**)\quad \begin{Vmatrix} a_{1,\lambda_1} & ,\ \ldots\ , & a_{1,\lambda_m} & , & 0 & ,\ \ldots\ , & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m,\lambda_1} & ,\ \ldots\ , & a_{m,\lambda_m} & , & 0 & ,\ \ldots\ , & 0 \\ 0 & ,\ \ldots\ , & 0 & , & a_{m+1,\lambda_{m+1}} & ,\ \ldots\ , & a_{m+1,\lambda_n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & ,\ \ldots\ , & 0 & , & a_{n,\lambda_{m+1}} & ,\ \ldots\ , & a_{n,\lambda_n} \end{Vmatrix}$$

uguale al prodotto del determinante della matrice per il

$$\begin{Vmatrix} a_{1,\lambda_1} & ,\ \ldots\ , & a_{1,\lambda_m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m,\lambda_1} & ,\ \ldots\ , & a_{m,\lambda_m} \end{Vmatrix}$$

determinante della matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{m+1,\lambda_{m+1}} & ,\ \ldots\ , & a_{m+1,\lambda_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n,\lambda_{m+1}} & ,\ \ldots\ , & a_{n,\lambda_n} \end{Vmatrix};$$

Essendo la proprieta' vera per $m=1$, si pu procedere per induzione rispetto al numero m.

Allo scopo, indicati rispettivamente con $A_{1,1}(\lambda_1,\dots,\lambda_m),\dots,A_{1,m}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ i minori complementari di $a_{1,\lambda_1},\dots,a_{1,\lambda_m}$ ne4lla matrice (2a) e con $A'_{1,1}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $\dots$, $A'_{m,\lambda_m}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ quelli degli stessi a_{1,λ_1}, $\dots$, a_{1,λ_m}, nella matrice (3a) si noti che risulta :

$$|A_{1,\nu}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)|=|A'_{1,\nu}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)|\,|C(\lambda_1,\dots,\lambda_m)|$$
$$(\nu=1,\dots,m)$$

constatato che $A_{1,\nu}(\lambda_1,\dots\lambda_m)$ ha lo stesso aspetto della matrice (**), con valori per m (e per n) diminuiti di una unit.

La conclusione segue ora non appena si sviluppino i determinanti (**) e successivi secondo le prime righe di queste.

OSSERVAZIONE SUL CALCOLO DEI DETERMINANTI

Abbiamo visto alla fine di 3.3 (dopo il Teorema 8) come sia sempre possibile trasmormare un determinante in uno di egual valore ma avente una riga o colonna in cui tutti gli elementi sono nulli salvo uno. Questo risultato combinato con il I Teorema di Laplace ci permette di <u>ridurre il calcolo di un determinante d'ordine n ad uno d'ordine n-1</u> e cosi via.

Vediamo un esempio.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -12 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ -4 & -12 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -4 & 12 & 8 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ -8 & 5 & 3 \\ -28 & 12 & 8 \end{matrix}$$

I PASSO : alla seconda riga si toglie la prima moltiplicata per 2, alla terza riga si toglie la prima moltiplicata per 3, alla quarta riga si aggiune la prima moltiplicata per 5, E' una applicazione del Teorema 8 di **3.2.**

II PASSO : si sviluppa con il I Teorema di Laplace rispetto alla prima colonna.

III PASSO : si ottiene un determinante del terzo ordine nel quale si mette in evidenza −1 sia dalla seconda che dalla terza colonna .
E' una applicazione del Teorema 5.

IV PASSO : alla prima colonna togliamo la III moltiplicata per 3,

V PASSO: si sviluppa rispetto alla I riga, ottenendo:

$$2\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -28 & 12 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 36 .$$

Chiudiamo quindi il paragrafo del calcolo con un maggior ottimismo per il calcolo stesso.

3.5 STRUTTURA ALGEBRICA DELLE MATRICI

In questo paragrafo vogliamo definire due "operazioni parziali" sull'insieme $\mathcal{M}$ di tutte le matrici.

Ricordiamo che una operazione parziale binaria interna su un insieme E e' una funzione definita in un parte P di $E \times E$ ed a valori in E.

Usualmente la parte P si assegna mediante una relazione data su E . Le due operazioni che definiremo si dicono addizione (posto a posto)e moltiplicazione (righe per colonne). Due matrici A e B si dicono dello stesso tipo o sommabili se hanno sia egual numero di righe che egual numero di colonne.

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} ; \qquad \underset{(k,h)}{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kh} \end{Vmatrix} \quad A, B$$

dello stesso tipo se e soltanto se $m=k$ e $n=h$. La somma di due matrici A e B di egual tipo data da una nuova matrice, dello stesso tipo delle precedenti, in cui ogni elemento dato dalla somma degli elementi aventi i medesimi indici nelle matrici di provenienza. Se

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} ; \qquad \underset{(m,n)}{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kh} \end{Vmatrix} ;$$

allora e'

$$\underset{(m,n)}{A} + \underset{(m,n)}{B} := \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}$$

equivalenza rispetto a " essere dello stesso tipo ". Ciascuna classe e' completamente individuata allora che siano assegnati i due interi m ed n ; una classe di equivalemza si indichera' con **M**(m,n). Ogni classe di equivalenza **M**(m,n)in cui $\mathcal{M}$ risulta ripartito e' una struttura algebrica rispetto all'addizione di matrici. Questa struttura manifestamente un <u>gruppo</u> <u>abeliano</u>. In altre parole fissati m ed n segue che, $\forall$ m,n $\in \mathbb{N}$:

(**M**(m,n),+) un gruppo abeliano o commutativo :

cioe':

(1) vale la propriet associativa (2) vale la propriet commutativa

(3) esiste (ed unico) l'elemento neutro tale essendo la matrice nulla

(4) esiste il simmetrico (opposto) costituito dalla matrice ottenuta dalla data cambiando segno ad ogni elemento.

Diamo un cenno sulle prove delle proprieta':

(1) $$(A + B) + C = A + (B + C)$$

costruendo i due membri dell'uguaglianza vengono fuori matrici con elementi generici aij + bij + cij uguali perch indipendenti dalle parentesi.In particolare posto:

$$A = \|..aij..\|, B = \|..bij..\|, C = \|..cij..\|$$

segue:

$$(A+B) + C = \|..aij+bij..\| + \|..cij..\| = \|..aij+bij+cij..\|$$

$$A + (B+C) = \|..aij..\| + \|..bij+cij..\| = \|..aij+bij+cij..\|$$

da cui l'eguaglinaza.

(2) $$A + B = B + A$$

analogamente alla (1) risultano uguali gli elementi generici delle matrici ottenute costruendo i due membri.

(3) Sia $O :=$ la matrice composta di soli zeri, allora

$$A + O = O + A = A$$

la prova e' evidente.

(4) Sia $-A :=$ la matrice composta dagli elementi della matrice A cambiati di segno, allora:

$$A + (-A) := O$$

anche in questo caso la prova e' evidente.

Chiamiamo <u>prodotto di un elemento</u> $\lambda \in \mathbb{K}$ <u>per una matrice</u> A (composta di vettori con elementi in $\mathbb{K}$) la nuova matrice avente ogni elemento uguale al prodotto dell'elemento corrispondente di A per λ.

$$\lambda A := \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Vogliamo ora definire il prodotto di due matrici. Due matrici A e B <u>si dicono nell'ordine conformabili</u> o <u>moltiplicabili,</u> se il numero delle colonne di A eguaglia il numero delle righe di B :

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} ; \quad \underset{(k,h)}{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kh} \end{Vmatrix}$$

A conformabile con B se e soltanto se $n=k$

Notiamo espressamente che la relazione di conformabilit non di equivalenza, anzi una classe di matrici di egual tipo e' chiusa rispetto alla conformabilita' solo se si tratta di una classe di matrici quadrate.

Chiamiamo <u>prodotto riga per colonna di due matrici</u> *A* <u>e</u> *B* <u>conformabili nell'ordine</u> la nuova matrice *C* avente tante righe quante quelle della prima matrice *A* e tante colonne quante quelle della seconda matrice *B* e tale che ogni suo elemento c_{ij} risulti il prodotto scalare del vettore-riga i-mo di *A* per il vettore-colonna j-mo di *B* (essendo entrambi di dimensione n).

Scriviamo il prodotto in simboli. E' intanto:

$$\underset{(m,n)}{A} \times \underset{(n,h)}{B} = \underset{(m,h)}{C}$$

Poniamo:

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{Vmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \cdot\cdot \\ \underline{r}_n \end{Vmatrix} \qquad \forall \underline{r}_i \in \mathbb{K}^n, \underline{r} = \text{"vettoreriga "}$$

$$\underset{(n,h)}{B} = \begin{Vmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \ldots \underline{c}_h \end{Vmatrix} \qquad \forall \underline{c}_i \in \mathbb{K}^n, \underline{c} = \text{"vettorecolonna"}$$

risulta:

$$A \times B := \begin{Vmatrix} \underline{r}_1\underline{c}_1 & \underline{r}_1\underline{c}_2 & \ldots\ldots & \underline{r}_1\underline{c}_h \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \underline{r}_m\underline{c}_1 & \underline{r}_m\underline{c}_2 & \ldots\ldots & \underline{r}_m\underline{c}_h \end{Vmatrix} = C.$$

ESEMPIO.- Calcolare il prodotto, che risultera' una matrice (2,2), di una matrice (2,3) per una (3,2):

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 13 & 4 \\ 5 & 1 \end{matrix}\right\|$$

essendo

$a_1 = (2\ 3\ 1)$ $a_2 = (1\ 1\ 1)$ $b_1 = (1\ 3\ 2)^t$ $b_2 = (-1\ 20)^t$.

<u>TEOREMA</u> <u>11</u> : Date due matrici A e B, conformabili nell'ordine, la matrice trasposta del loro prodotto eguaglia in valore il prodotto delle matrici trasposte nell'ordine contrario (cio prima B^t e poi A^t).

$$(A\ B)^t = B^t A^t$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\underset{(m,n)}{A} = \| a_{ik} \| \ ; \ \underset{(n,m)}{A^t} = \| a'_{ik} \| = \| a_{ki} \|$$

$$\underset{(n,h)}{B} = \| b_{ik} \| \ ; \ \underset{(h,n)}{B^t} = \| b'_{ik} \| = \| b_{ki} \|$$

essendo A e B conformabilinell'ordine per ipotesi, risulta:

$$\underset{(m,h)}{AB} = \| c_{ik} \| \ ; \ \underset{(h,m)}{(AB)^t} = \| c_{ik} \| = \| c_{ki} \|$$

si ha:

$$c'_{ik} = c_{ki} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\ b_{li} = \sum_{l=1}^{n} b_{li}\ a_{kl} = \sum_{l=1}^{n} b'_{il}$$

a'_{lk} ed essendo conformabili nell'ordine anche B^t ed A^t, sviluppando il loro prodotto risulta :

$$B^t A^t = \| b'_{ik} \| \ \| a'_{ik} \| =$$

che coincide con l'espressione di c'_{ik}

$$= \left\| \sum_{l=1}^{n} b'_{il} \; a'_{lk} \right\| = \| c'_{ik} \| = (AB)^t \qquad \text{c.v.d.}$$

E' possibile data una matrice A (m,n) , definire delle matrici che funzionano da <u>elemento</u> <u>neutro</u> <u>moltiplicativo</u>. Tuttavia quando la matrice rettangolare l'elemento neutro a destra sar differente da quello sinistro.

Come detto al paragrafo 3, fissato un intero n chiamiamo matrice identica I_n d'ordine n la matrice quadrata

$$I_n = \| \delta_{ij} \| \qquad i, j = 1, \ \ldots, \ n$$

essendo δ_{ij} il simbolo di Kronecker.

Esempi: $I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ldots\ldots$

Risulta chiaramente :

$$\underset{(m,n)}{A} \times I_n = A \qquad , \qquad I_m \underset{(m,n)}{\times A} = A$$

come facile verificare. Infatti :

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1_1 & 0_1 & \ldots & 0_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_1 & 0_2 & \ldots & 1_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{Vmatrix}$$

dove :

$$c_{11} = a_{11} \, 1_1 + \ldots + a_{1n} \, 0_1 = a_{11}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{etc.}$$
$$c_{1n} = a_{11} \, 0_n + \ldots + a_{1n} \, 1_n = a_{1n}$$

Si prova anche, con calcoli banali ma non agevoli che se A, B, C sono tre matrici tali che A conformabile con B e B con C, allora

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(propriet associativa parziale).

In algebra si chiama categoria ogni struttura algebrica parziale (C,x) tale che :

(1) Quali che siano $a,b,c \in C$, risulta :

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

ogni volta che le operazioni indicate sono eseguibili.

(2) $\forall\ a \in C$ esistono due elementi ud ed us in C tali che:

$$a \times ud = a , \quad us \times a = a$$

La struttura generale moltiplicativa delle matrici dunque una struttura di <u>categoria</u> mentre quella additiva l'unione di gruppi abeliani ripartiti dal tipo. ancora altra luce pu essere fatta se guardiamo le matrici da un'ottica differente .

Possiamo restringere la nostra attenzione all'insieme $\mathbf{M_n}$ delle matrici quadrate di egual ordine n. Allora entrambe le operazioni sono totali su $\mathbf{M_n}$. Nasce quindi una struttura algebrica :

$$(M_n , + , \times)$$

tale che

a) $(M_n , +)$ un gruppo commutativo

b) $(M_n , \times)$ una struttura associativa con elemento neutro.

c) la moltiplicazione distributiva rispetto all'addizione.

Ne segue che $(M_n, + , \times)$ un anello unitario, non commutativo, con elemento neutro bilatero I_n. La non commutativita' segue dall'esempio seguente :

$$A \times B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$B \times A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Sono ora da trattare i seguenti due problemi :

(a) caratterizzare gli elementi di M_n che sono invertibili, cio tali che le due equazioni

$$A X = I_n \quad e \quad X A = I_n$$

hanno la stessa soluzione. La matrice X, quando esiste si dice la <u>matrice</u> <u>inversa</u> di A e si indica con:

$$A^{-1}$$

(b) caratterizzare i divisori dello zero, cio quelle matrici $A \neq 0$ tali che le equazioni matriciali :

$$A X = 0 \qquad Y A = 0$$

abbiano soluzioni non nulle .

La caratterizzazione della matrice inversa di una matrice quadrata nasce dallo studio della nozione di matrice <u>aggiunta</u> che ora definiremo.

Chiamasi <u>matrice</u> <u>aggiunta</u> A^a <u>della</u> <u>matrice</u> <u>quadrata</u> A, la matrice che si ottiene sostituendo tutti gli elementi della matrice data A con i relativi complementi algebrici e trasponendo la matrice cos ottenuta:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

$$A^a := \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

<u>TEOREMA</u> <u>12</u> : Date due matrici quadrate A e B entrambe di ordine n, il determinante della matrice prodotto (righe per colonne) AB uguale al prodotto (in $\mathbb{K}$) del determinante di A per il determinante di B det $(AB) = det\ A\ \ det\ B$ Dimostrazione.Poniamo:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}; \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

sia χ l'indice di riga e sia λ l'indice di colonna, allora :

$$A = \| a_{\chi\lambda} \|; \quad B = \| b_{\chi\lambda} \| ; \qquad \text{con} \quad \chi, \lambda = 1,2,\dots.$$

e ponendo :

$$c_{\chi\lambda} = a_{\chi1}b_{1\lambda} + a_{\chi2}b_{2\lambda} + \dots + a_{\chi n}b_{n\lambda} \qquad \text{con } \chi, \lambda = 1,2,\dots..$$

risulta :

$$A \times B = C = \| c_{\chi\lambda} \|$$

Costruiamo ora una matrice V in questo modo:

$$V_{2n} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

essa tale che il suo determinante calcolato ricorrendo ai minori di ordine n contenuti nella sub-matrice formata dalle prime n righe della matrice V e ai loro rispettivi minori complementari (regola di Laplace) uguale al prodotto dei singoli determinanti A_n, B_n:

$$\det V = \det A \times \det B$$

Ora aggiungiamo alla (n+1)-esima colonna della matrice V la prima, la seconda,...,la n-esima moltiplicate per la prima della matrice B, alla (n+2)-esima le stesse moltiplicate per la seconda della matrice B ripetendo l'operazione fino alla 2n-esima colonna ottenendo una nuova matrice W:

$$V_{2n} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

avente stesso determinante della matrice V : det V = det W (calcolandolo praticamente con lo stesso metodo usato per calcolare il determinante di V), il che implica inevitabilmente:

$$\det W = \det A \times \det B$$

Ci rendiamo facilmente conto pero' che nelpassare dalla matrice V a quella W non abbiamo pero' fatto altro che moltiplicare la matrice A per la matrice B con vettori colonna "allungati" dalla presenza di alcuni zeri che non possono variare il valore dei determinanti in gioco (cio del det W e del det (AB)); risulta quindi:

$$\det (AB) = \det W = \det A \cdot \det B. \qquad \square$$

Siamo ora in grado di provare che:

TEOREMA 13 (Esistenza della matrice inversa)
Nella struttura algebrica associativa $(M_n, \times)$ l'elemento inverso di una matrice A esiste (ed quindi unico) se e solo se il determinante della matrice data diverso da zero.

Dimostrazione.- Sia $\det A \neq \emptyset$ .Poniamo:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{\det A}$$

Calcoliamo :

$$A \times A^a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

moltiplicando la riga r-esima per la colonna c-esima si ha :

$$(a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}) \times \begin{pmatrix} A_{c1} \\ A_{c2} \\ \dots \\ A_{cn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{r1} A_{c1} + a_{r2} A_{c2} + \dots + a_{rn} A_{cn} = \begin{cases} \det A & , \text{ se } r = c \\ 0 & , \text{ se } r \neq c \end{cases}$$

cio :

$$A \times A^a = (\det A) I_n$$

e cio :

$$A \times A^{-1} = I_n.$$

Dunque almeno una inversa esiste, l'unicit ovvia .

Inversamente se esiste l'inversa di una data matrice A, sia A^{-1} e':

$$A \times A^{-1} = I_n$$

e quindi

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

onde

$$\det A \neq 0 . \qquad \square$$

Vogliamo ora illustrare un semplice metodo per invertire una matrice. Proviamo che :

LEMMA 14 (DELLA MATRICE INVERSA). Siano M, A, B tre matrici tali che M sia conformabile sia con A che con B. Allora :

$$M \times [\, A \mid B \,] = [\, M{\times}A \mid M{\times}B \,]$$

Dimostrazione

$$M \times [\, A \mid B \,] = \left\| \begin{matrix} \dots\dots\dots\dots \\ m_{r1} \; m_{r2} \; \dots \; m_{rn} \\ \dots\dots\dots\dots \end{matrix} \right\| \; \left\| \begin{array}{c|c} \dots a_{1t} \dots & \dots b_{1s} \dots \\ \dots a_{2t} \dots & \dots b_{2s} \dots \\ \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \\ \dots a_{nt} \dots & \dots b_{ns} \dots \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ c_{rt} & c_{st} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array} \right\| = [\, M \times A \mid M \times B \,]$$

essendo :

$c_{rt} = m_{r1}\, a_{1t} + \dots + m_{rn}\, a_{nt}$

$c_{st} = m_{r1}\, b_{1s} + \dots + m_{rn}\, b_{nt}$

se A una matrice quadrata d'ordine n invertibile e si pone $M=A^{-1}$ e $B=I_n$ segue la formula :

$$A^{-1} [\, A \mid I_n \,] = [\, I_n \mid A^{-1} \,]$$

segue allora che per ottenere A^{-1} sufficiente operare su [A | In] opportune operazioni elementari per righe cio trasformare in In la sottomatrice formata dalle prime n righe ed n colonne.

Esempio :

$$[A\ In] = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\underset{2^a+3^a}{\to} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{matrix} \right\|$$

Risulta ora:

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{matrix} \right\| = I_3.$$

Due propriet relative alla struttura algebrica del semigruppo delle matrici quadrate sono le seguenti:

(1) l'inversa di un prodotto di matrici quadrate uguale al prodotto delle inverse delle singole matrici

$$(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$$

(2) l' aggiunta di un prodotto di matrici quadrate uguale al prodotto delle aggiunte delle singole matrici in ordine scambiato:

$$(A \times B)^a = B^a \times A^a .$$

TEOREMA 15.

(Costruzione dei divisori complementari dello zero) Sia A una matrice quadrata di ordine n con detA = 0. Esistono infinite matrici quadrate di ordine n tali che il prodotto di una di queste per la matrice data A eguaglia la matrice nulla.

Dimostrazione.- Poniamo :

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad X = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_1 & \dots\dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & \dots\dots & \end{matrix} \right\|$$

risulta:

$$AX = \left\| \begin{matrix} y_1 & y_1 & \dots\dots & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n & \dots\dots & y_n \end{matrix} \right\| = 0$$

se e solo se:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ . \\ y_n = a_{11}x_1 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \end{cases} \qquad (\ *\ )$$

Il sistema (*), essendo det A = 0, ammette, come sara' provato nei successivi paragrafi (cfr. Teorema fondamentale sui sistemi omogenei), soluzioni diversa dalla soluzione fatta da tutti zeri, dunque esistono matrici X non nulle tali che AX=0.

Osserviamo ancora che alla matrice X puo' sostituirsi la matrice:

$$X^* = \left\| \begin{matrix} c_1b_1x_1^* & c_2b_2x_1^* & \dots\dots & c_nb_1x_1^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1b_nx_n^* & c_2b_nx_n^* & \dots\dots & c_nb_nx_n^* \end{matrix} \right\|$$

essendo $x_1^*, x_2^*, \dots\dots, x_n^*$ una qualsiasi soluzione del sistema (*).

Concludiamo il paragrafo con i seguenti esempi. di unamatrice (2,3) per una(3,2):

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Si noti che gli esempi sopra riportati fanno riflettere su alcune questioni:

(1) possono esistere matrici rettangolari il cui prodotto e' unitario, quindi matrici rettangolari una inversa dell'altra.

(2) Una matrice si puo' riprodurre anche se non moltiplicata per l'elemento unitario.

(3) Esistono divisori dello zero rettangolari.

3.6. LA NOZIONE DI RANGO (O CARATTERISTICA) DI UNA MATRICE

Siano m,n due interi fissati e siano s,t due interi con $1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$.

Chiamiamo sottomatrice di tipo (s, t) estratta da una matrice A di tipo (m,n) ogni matrice con sxt ottenuta prendendo gli elementi di incrocio di s prefissate righe di A con t prefissate finite colonne di A.
Se s = t si hanno le sottomatrici quadrate estratte.

ESEMPIO. Siano $(m,n) = (3,4)$ ed $1 \leq s \leq 3$, $1 \leq t \leq 4$, e sia:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 5 & 6 & e \\ \sqrt{2} & 15 & -\pi & 0 \end{Vmatrix}$$

Esempi di sottomatrici con s = 1, t =1 :

$\begin{Vmatrix} 1 \end{Vmatrix}$ (riga 1, colonna 1 oppure 3)

$\begin{Vmatrix} -\pi \end{Vmatrix}$ (riga 3, colonna 3)

esempi di sottomatrici con s = 2, t = 2

$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 5 & e \\ 15 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 15 & 0 \end{Vmatrix}$
righe 1,2 colonne 1.2	righe 2,3 colonne 2,4	righe 1,3 colonne 2,4

esempi di sottomatrici con s = 2,t = 3

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{matrix} \right\| ; \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & e \end{matrix} \right\| .$$

Chiamasi <u>minore estratto da una matrice</u> il determinante di una sottomatrice quadrata estratta dalla matrice stessa.

Passiamo ora a dare una definizione di notevole importanza per il seguito.

DEFINIZIONE. Si chiama RANGO o CARATTERISTICA di una data matrice A l'ordine massimo dei suoi minori estratti non nulli. Indicat con $\mathbf{r}(A)$ il rango di una matrice A di tipo $m \times n$, risulta:

$$0 \leq \mathbf{r}(A) \leq \min \{ m,n \}.$$

Sia A una matrice. La matrice A ha rango $\mathbf{r}(A) = k$ se:

(a) Esiste in A un minore d'ordine k non nullo.

(b) Ogni minore d'ordine superiore a k nullo.

ESEMPIO. Consideriamo la matrice:

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \right\| ;$$

poich la terza riga uguale alla somma delle prime due , risulta che ogni minore di ordine 3 nullo. Segue allora che il rango di A sicuramente < 3. D'altra parte la sottomatrice formata dagli elementi di incrocio delle prime due righe con le prime due colonne fornisce un minore del

2^{o}ordine. Dunque $\mathbf{r}(A) = 2$.

Come si puo' operare in generale per trovare il rango di una matrice?

Sia A di tipo mxn e sia p il piu' piccolo dei due valori m ed n. Iniziamo a calcolare tutti i minori d'ordine p; se uno almeno di essi non nullo allora la caratteristica p (massima), altrimenti andremo a calcolare i minori di ordine p-1. Questi, rispetto ai precedenti crescono in numero, se si riesce a vedere che non sono tutti nulli la caratteristica P-1. Nel caso che a calcolo completato risultano tutti nulli occorre passare a calcolare quelli d'ordine p - 2 .....E COSI' VIA.........!

OSSERVAZIONE. A volte puo' essere interessante notare che sapendo che tutti i minori di un certo ordine k sono nulli segue che sono nulli tutti i minori di ordine superiore a k. Infatti sono nulli tutti quelli d'ordine k+1, basta svilupparli rispetto ad una riga. Segue che sono nulli anche quelli di ordine k+2 e cos via.

ESEMPIO. Considero la matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|$$

nella quale la terza riga differenza delle prime due e la quarta riga somma delle prime due. Segue allora che sono nulli tutti i minori del terzo ordine. E' allora nullo anche l'unico minore del quarto ordine (poich sviluppandolo rispetto ad una riga, gli elementi di quella riga sono moltiplicati per minori del terzo ordine, nulli necessariamente). Esistendo poi in A minori del secondo ordine non nulli segue che **r**(A) = 2.

Tuttavia la strada indicata per la valutazione della caratteristica appare fallimentare poiche' le considerazioni fin ora svolte ci fanno capire che per questa via occorre calcolare molti e molti minori. Si pu ottenere un notevole riduzione del numero dei minori da calcolare qualora si applichi il TEOREMA DI KRONECKER che enuncieremo tra breve.

Premettiamo solo la nozione di <u>sottomatrice</u> <u>orlata</u>.

Sia B una sottomatrice di A di tipo (s,t). Una sottomatrice B' si dice una sottomatrice orlata di A tale che :

i) B' e' di tipo (s+1,t+1)

ii) B e' sottomatrice di B'.

TEOREMA DI KRONECKER. Una matrice A di ordine n×m ha rango **r** se e soltanto se esiste un minore M di ordine **r** non nullo e sono nulli tutti i minori (se esistono) ottenuti da M orlandolo con le (m-**r**) righe ed con le (n-**r**) colonne che non concorrono a formare M stesso. (La dimostrazione e' lasciata per esercizio.)

Come si applica il teorema di Kronecker?

(1) Supponiamo di conoscere unn sottomatrice M di ordine k contenuto in A con determinante non nullo.

Sicuramente $\mathbf{r}(A) \geq k$.

(2) Si esaminano le sottomatrici di ordine k+1 di A orlate di M; se queste hanno tutte determinante nullo allora $\mathbf{r}(A) = k$. Se almeno una di esse ha determinante diverso da zero allora abbiamo un nuovo minore non nullo di ordine n+1.

(3) Si riparte allora dal nuovo minore come al punto 1.

Esempio

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\|;$$

risulta $\mathbf{r}(A) \leq 3$. E' inoltre $\mathbf{r}(A) \geq 2$, essendo:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

La sottomatrice M si puo' orlare in due modi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

ed essendo il secondo minore non nullo, segue che $\mathbf{r}(A) = 3$.

Un metodo forse piu' efficente per la determinazione della caratteristica di una matrice data il metodo della riduzione per righe. Esso si basa su alcune trasformazioni dette <u>trasformazioni elementari per righe</u> rispetto alle quali la caratteristica un <u>invariante</u> . Queste trasformazioni sono:

1.- Sommare (o sottrarre) agli elementi della riga R_i quelli della riga R_j -moltiplicati per un opportuno fattore costante k: $R_i \dashrightarrow R_i+kR_j$

2.- Invertire di posto le righe R_i ed R_j .

3.- Moltiplicare gli elementi della riga R_i per un opportuno fattore costante $(K) \neq 0$. Come vedremo nell'esempio le trasformazioni devono tendere a determinare in ogni riga <u>un elemento</u> tale che nella colonna che lo individua tutti gli elementi al di sotto siano nulli.

Esempio

$$A_4 = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & -3 \end{matrix}\right\| \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & 3 \end{matrix}\right\| \longrightarrow$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \end{matrix}\right\| \longrightarrow \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \end{matrix}\right\| \longrightarrow$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

ed essendo il numero delle righe non tutte nulle di R =3 allora anche K(A)=3.

Per prevenire il <u>teorema fondamentale sulla caratteristica</u>, premettiamo due lemmi.Il primo generalizza una proprieta' dei determinanti :

****++************

****** *

TEOREMA 16 Le righe (o le colonne) di una matrice data A di ordine $m*n$ sono linearmente dipendenti se e soltanto la caratteristica della matrice K(A) minore del numero m delle righe (o del numero n delle colonne).

Hp Le m righe di A L.D $\Rightarrow$ Th $K(A) < m$

Dimostrazione. Se fosse $m > n$, allora $k(A) < m$ per definizione stessa di caratteristica (essendo ogni minore al piu' di ordine n); verifichiamo quindi il caso $m <= n$; per ipotesi essendo le righe della matrice data A linearmente dipendenti, una almeno di queste combinazione lineare delle altre, e quindi ogni minore estratto da A risulta essere un determinante uguale a zero; non potendo quindi la matrice data A contenere minori di ordine m non nulli, risulta essere la caratteristica $K(A) < n$.

Inversamente:

Hp $K(A) < m \Rightarrow$ Th le righe di A sono L.D.

Dimostrazione. Sia C una sottomatrice di ordine $p = K(A)$ della matrice data A e tale che $\det.C \neq 0$; per ipotesi sicuramente $K(A) < m$.Riordiniamo per righe la matrice data Ain modo che la sottomatrice C sia il primo dei minori non nulli.

$$C_p = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p3} \end{matrix} \right\| ; \qquad A(m,n) = \left\| \begin{matrix} \boxed{C_p} & \dots \\ & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix} \right\| ;$$

con $K(A) = p < m$

Fissiamo h e k in modo tale che :

$$p < h \le m \;;\quad 1 \le K \le n \quad \text{com } n \le p$$

risulta che ogni nuova sottomatrice C' di ordine compreso tra p e h o k ha determinante nullo (per definizione stessa di caratteristica, essendo K(A)=p). Senza ledere la generalita' poniamo l'ordine della sottomatrice C' = K .

$$C'_k = \left\| \begin{matrix} \boxed{C_p} & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ a_{p1} \ldots a_{pp} \end{matrix}} & \begin{matrix} \ldots a_{ik} \\ \ldots a_{pk} \end{matrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} \ldots & \ldots a_{kk} \end{matrix} \right\| ;$$

con det C' = 0

Possiamo sviluppare, con la regola di Laplace, il determinante della sottomatrice C' della matrice data A che sappiamo essere uguale a zero: per semplificare i calcoli, poniamo K = p+1 e riscriviamo la sottomatrice C'.

$$C'_k = \left\| \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ a_{p1} \ldots a_{pp} \end{matrix}} & \begin{matrix} \ldots a_{ik} \\ \ldots a_{pk} \end{matrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} \ldots & \ldots a_{kk} \end{matrix} \right\|$$

per cui, se A_1, A_2 .... A_p sono i complementi algebrici dei primi p elementi dell'ultima colonna della sottomatrice C', risulta:

$$a_{1k}A_1 + a_{2k}A_2 + \ldots\ldots + a_{pk}A_p + a_{kk}{*}\det.C = 0$$

ed essendo $\det.C \neq 0$:

$$a_{kk} = \frac{-a_{1k}A_1 - a_{2k}A_2 \;\dots\; -a_{pk}A_p}{\det.C}$$

con $\det.C \neq 0$ e cioe':

$$a_{kk} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots\dots + \alpha_p A_p$$

ed essendo $\alpha_i = -\dfrac{A_1}{\det.C}$ indipendente da K, risulta:

$$\begin{array}{c} \text{elementi} \\ \text{della} \\ \text{K-esima} \\ \text{riga} \end{array} \begin{cases} a_{k1} = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots\dots + \alpha_p a_{p1} \\ a_{k2} = \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots\dots + \alpha_p a_{p2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kk} = \underbrace{\alpha_1 a_{1k}}_{\substack{\text{elementi} \\ 1^a \text{ riga}}} + \alpha_2 a_{2k} + \underset{\dots\dots\dots}{\dots\dots} + \underbrace{\alpha_p a_{pk}}_{\substack{\text{elementi} \\ \text{p-esima riga}}} \end{cases}$$

e cio risulta che la k-esima riga (cio che tutte le righe oltre la p-esima) risulta essere combinazione lineare delle prime p righe (essendo $p = K(A) < m$), e quindi le m righe della matrice data A sono linearmente dipendenti.

3.7. IL LEMMA DI STEINEITZ E IL TEOREMA FONDAMENDALE SUL RANGO

<u>TEOREMA</u> <u>17</u> Dati q vettori numerici $\underline{a}_1, a_2, \dots\dots, a_q$ linearmente indipendenti e supposto che ciascuno di essi sia rappresentabile come combinazione lineare di altri p vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots\dots, \underline{v}_p$ anche essi linearmente indipendenti, allora il numero dei secondi minore o al pi uguale al numero dei primi, cio $p <= q$.

Dimostrazioneper induzione (su p)

per P = 1:

posto $\underline{v}_1 = \underline{v}$, si ha:

$$\begin{cases} \underline{a}_1 = \lambda_1 \underline{v} \\ \underline{a}_2 = \lambda_2 \underline{v} \\ \cdots\cdots \\ \underline{a}_q = \lambda_q \underline{v} \end{cases}$$

ed ovvio che il numero q di vettori linearmente indipendenti del primo sistema 1 oppure 0, a seconda che sia $\underline{v} \neq \underline{0}$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$; comunque verificata la tesi, poich risulta essere:

$$q <= 1 = p$$

Supposto vero per p = p-1 (e q generico), il teorema da dimostrare per p =p:

Hp

$$\begin{cases} \underline{a}_1 = c_{11}\underline{v}_1 + c_{12}\underline{v}_2 + \ldots\ldots + c_{1p}\underline{v}_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{a}_q = c_{q1}\underline{v}_1 + c_{q2}\underline{v}_2 + \ldots\ldots + c_{qp}\underline{v}_p \end{cases}$$

Th

$$q <= p$$

Senza ledere la generalita' del discorso, essendo tutti i vettori non nulli, cio dovendo essi avere i coefficienti non tutti nulli, poniamo $c_{pq} \neq 0$: possiamo in questo mod ricavare il vettore $\underline{v}_p$ dall'ultima relazione del sistem nato dall'ipotesi del lemma stesso e sostituirlo nell altre relazioni:

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{a}_q - c_{q1}\underline{v}_1 - c_{q2}\underline{v}_2 - \ldots\ldots - c_{qp-1}\underline{v}_{p-1}}{c_{pq}}$$

$$\underline{v}_p = \alpha_q\underline{a}_q + \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_{p-1}\underline{v}_{p-1}$$

$$\begin{cases} \underline{a}_1 = \alpha_q\underline{a}_q + (c_{11} + \alpha_1)\underline{v}_1 + \ldots\ldots + (c_{1p-1} + \alpha_{p-1})\,\underline{v}_{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{a}_{q-1} = \alpha_q\underline{a}_q + (c_{q-11} + \alpha_1)\underline{v}_1 + \ldots\ldots + (c_{q-1p-1} + \alpha_{p-1})\underline{v}_p \end{cases}$$

e ponendo $c_{ij} + \alpha_j = d_{ij}$ riscriviamo:

$$\begin{cases} \underline{a}_1 - \alpha_q\underline{a}_q = d_{11}\underline{v}_1 + \ldots\ldots + d_{1p-1}\underline{v}_{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{a}_{q-1} - \alpha_q\underline{a}_q = d_{q-11}\underline{v}_1 + \ldots\ldots + d_{q-1p-1}\underline{v}_{p-1} \end{cases}$$

Essendo i primi q-1 vettori ai primi membri linearmente indipendenti per l'ipotesi stessa del lemma, utilizzando l'ipotesi induttiva siamo sicuri che il teorema vale se ai secondi membri ci sono (almeno) p-1 vettori linearmente indipendenti, cio se :

$$q-1 \le p-1 \qquad q \le p.$$

TEOREMA 18 (Teorema fondamentale sulla caratteristica)

Data una matrice A di ordine m*n e con caratteristica k(A), il massimo numero di righe linearmente indipendenti eguaglia il massimo numero di colonne linearmente indipendenti e tale numero coincide con la caratteristica k(A).

1^a parte: dimostriamo che il massimo numero p di righe e colonne linearmente dipendenti della matrice A lo stesso.

Hp p righe e q colonne sono linearmente indipendenti

Th $p=q$

Supponiamo senza ledere la generalit della dimostrazione le p righe e le q colonne linearmente dipendenti siano le prime; indicati con $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ i vettori riga, e con $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ i vettori colonna della matrice data A di ordine m*n, risulta che ogni riga generica (per esempio la k-esima) combinazione lineare delle prime p:

$$\underline{a}_k = d_{k1}\underline{a}_1 + d_{k2}\underline{a}_2 + \ldots + d_{kp}\underline{a}_p$$

fissiamo l'attenzione sulla riga i-esima e sulla colonna j-esima:

$$\underset{(m,n)}{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots & a_{1j} & \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots & a_{ij} & \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots & a_{mj} & \ldots a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad \begin{matrix} \text{con } 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

Possiamo scrivere:

$$\underline{a}_i = (a_{i1}, \ldots\ldots, a_{ij}, \ldots\ldots, a_{in}) =$$

$$= d_{i1}\underline{a}_1 + d_{i2}\underline{a}_2 + \ldots\ldots + d_{ij}\underline{a}_j + \ldots\ldots + d_{ip}\underline{a}_p =$$

$$\begin{array}{llcl}
= d_{i1} (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, & a_{ij} & , \ldots\ldots, a_{1n}) + \\
+ d_{12} (a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots, & a_{2j} & , \ldots\ldots, a_{2n}) + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ d_{ip} (a_{p1}, a_{p2}, \ldots\ldots, & a_{pj} & , \ldots\ldots, a_{pn})
\end{array}$$

e qundi:

$$a_{ij} = d_{i1}a_{1j} + d_{i2}a_{2j} + \ldots\ldots + d_{ip}a_{pj}$$

e facendo variare la riga i-esima, otteniamo:

$$a_{1j} = d_{11}a_{1j} + d_{12}a_{2j} + \ldots\ldots + d_{1p}a_{pj}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{mj} = d_{m1}a_{1j} + d_{m2}a_{2j} + \ldots\ldots + d_{mp}a_{pj}$$

la colonna j-esima:

$$\underline{b}_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

espressa in funzione dei vettori numeri colonna :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{m1} \end{pmatrix}; \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ \vdots \\ d_{m2} \end{pmatrix}; \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \underline{v}_p = \begin{pmatrix} d_{1p} \\ \vdots \\ d_{mp} \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere quindi la colonna j-esima in questa forma:

$$\underline{b}_j = a_{1j}\underline{v}_1 + a_{2j}\underline{v}_2 + \ldots\ldots + a_{pj}\underline{v}_p$$

Saranno sicuramente (per ipotesi) i primi q vettori linearmente indipendenti, ed essendo linearmente indipendenti anche i p vettori numeri colonna per il modo stesso con cui sono stati costruiti, applicando il lemma 2 risulta essere $q <= p$.
Ripetendo il procedimento sulla matrice trasposta della matrice data A atteniamo $p <= q$, e dall'unione dei risultati si ha:

$$q=p.$$

<u>2^a parte</u>: dimostriamoche la caratteristica k(A) della matrice data A eguaglia il numero delle righe lin. ind.

Hp se p = numero righe lin. ind e
q = numero righe lin. ind
allora p = q

Th. $k(A) = p \ (= q)$.

Dimostrazione
Se per l' ipotesi stessa il massimo numero di righe linearmente indipendenti della matrice data A p, allora comunque preso un minore di ordine p+1 estratto dalla matrice esso sicuramente nullo, e saranno nulli tutti i minori di ordine maggiore di p poich risultano essere determinanti con almeno una riga combinazione lineare delle altre; possiamo affermare quindi che la caratteristica della matrice data A minore o al pi

uguale al numero delle righe linearmente indipendenti,e cio:

$$k(A) <= p$$

In modo analogo si dimostra che la matrice Acontiene almeno un minore di ordine p non nullo,tale che la caratteristica risulti inequivocabilmente uguale al numero p.Supposto il contrario per assurdo, consideriamo una sottomatrice B formata da p righe,e consideriamo quella formata dalle prime p righe lin. ind per ipotesi. Se ogni minore di ordine p fosse nullo sarebbe $k(A) < p$, e quindi per il lemma 1 le righe di ognuno di tali minori sarebbero lin. dip.; ma ci un assurdo, poich abbiamo costruito un minore,il primo, avente p righe lin. ind.(Del resto bastava notare che il determinante della sottomatrice B $\neq 0$, ed essendo di ordine p, risultava $k(A) = p$).Quindi risulta :

$$k(A) = p \ (=q)$$