CAPITOLO V

LA TEORIA DEI SISTEMI LINEARI

1. PRELIMINARI E NOMENCLATURA

Siano a_1, a_2,.....,a_n , b elementi di un campo qualsiasi e per fissare le idee numeri reali o complessi. Ogni equazione del tipo :

(1.1)
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = b$$

si diceequazione *lineare nelle n incognite* x_1, x_2,...,x_n. I numeri a_1,a_2,....,a_n si dicono rispettivamente i *coefficienti* dell'equazione e l'elemento b si dice *termine noto*. Se b = 0, la (1.1) si dice *equazione lineare omogenea*. Un sistema lineare di "m" equazioni lineari in "n" incognite puo' essere scritto nel modo seguente *(forma estesa)* :

(1.2)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Denotiamo con "A" la matrice dei cofficienti, precisamente poniamo :

$$A := \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

La matrice A prende il nome di *matrice incompleta* del sistema. Denotiamo ancora con

$$B := \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

la colonna dei termini noti del sistema. Consideriamo la matrice "A'" ottenuta aggiugendo o meglio giustapponendo la colonna dei termini noti alla matrice A.

La matrice A' := [AB] si chiama *matrice completa* del sistema. Precisamente si pone:

$$A' := [AB] = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

Se con X si indica la colonna delle n incognite:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

allora possiamo scrivere il sistema (1.2) nella forma matriciale :

$$A^* X = B$$

dove A e' di tipo m×n, X di tipo n×1 e B di tipo m×1.
Per soluzione di una equazione del tipo (1.1), si intende una n-pla *ordinata* di numeri reali $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ per la quale risulti identicamente

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + a_n\bar{x}_n \equiv b.$$

Risolvere un sistema di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ significa trovare tutte le n-ple ordinate $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ che risultano soluzioni contemporanee delle m equazioni del sistema.
Un sistema si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione, si dice *incompatibile* nel caso contrario . Due sistemi che ammettono le stesse soluzioni si dicono *equivalenti*.
Un'equazione del sistema (1.2) si dice che é combinazione lineare delle altre se la corrispondente riga della matrice completa A' é combinazione lineare delle rimanenti .
Osserviamo nel contesto che e' evidente che ogni soluzione comune a piú equazioni é anche soluzione di una qualunque

loro combinazione lineare . Segue da questo che un sistema non cambia se ad una sua equazione si sostituisce una combinazione lineare a coefficienti non nulli di quella equazione ed altre del sistema.

E' interessante rimarcare che :

se un sistema ammette due soluzioni distinte allora necessariamente ne ammette infinite.

Infatti se Y e Z sono due soluzioni distinte del sistema AX = B allora anche una combinazione lineare del tipo

$(\lambda Y+ \mu Z)/(\lambda+ \mu)$ e' una soluzione in quanto:

$$A(\lambda Y + \mu Z) = A(\lambda Y) + A(\mu Z) = \lambda(AY) + \mu(AZ) = (\lambda+ \mu)B$$

Segue allora che i sistemi compatibili si possono suddividere in due vaste classi, precisamente i *sistemi determinati* ed *indeterminati* in accordo al fatto che un sistema ammetta una sola soluzione ovvero almeno due e quindi infinite soluzioni.

Il rango della matrice A si dice anche *rango del sistema* .

Il sistema (1) si dice *normale* se il suo rango é uguale al numero n delle incognite ; si dice non normale se il suo rango é minore del numero n delle incognite.

2. I TEOREMI SUI SISTEMI LINEARI NEL CASO GENERALE

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite del tipo:

(2.1) $$AX = B$$

Il primo problema sui sistemi lineari e' il riconoscere se il sistema sia o no compatibile (cioe' se ammetta soluzioni, una o

TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite AX = B *ammette soluzioni se e solo se la matrice incompleta* A *e la matrice completa* A' = [AB] *hanno lo stesso rango.*

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a provare che:

Hp: Il sistema ammette soluzioni.

Th: rango A = rango A'.

Se il sistema ammette almeno una soluzione allora il vettore colonna dei termini noti si puo' scrivere come combinazione lineare degli n vettori colonna dei coefficienti. Quindi nella matrice completa la colonna dei termini noti si scrive come combinazione lineare delle n colonne dei coefficienti delle incognite e questo significa appunto che il rango della matrice completa é uguale al rango della matrice incompleta .

Dimostriamo il viceversa, precisamente:

Hp: Risulta rango A = rango A'.

Th: Il sistema ammette almeno una soluzione.

Sia dunque rango A = rango A'= p $\leq$ m.

Esistono dunque in A ed anche in A' easattamente p colonne linearmente indipendenti ed ogni altra colonna di A' e' una combinazione lineare di quelle p colonne. In particolare allora la colonna B dei termini noti e' combinazione lineare di quelle p colonne indipendenti. Inserendo degli zeri nei punti giusti la colonna dei termini noti e' combinazione lineare di tutte le colonne di A, e i coefficienti della combinazione costituiscono una soluzione del sistema.□

La prova del teorema precedente non e' costruttiva poiche' non fornisce indicazioni su come trovare le soluzioni; di questo aspetto ci occuperemo in seguito. Il teorema inoltre non si pronuncia sul fatto che le soluzioni siano infinite o se esiste una unica soluzione, cioe' non ci dice se il sistema e' piu' o meno determinato. A questo problema che si puo' pensare come il secondo problema dei sistemi lineari risponde il seguente:.

TEOREMA FONDAMENTALE SUI SISTEMI LINEARI. *Un sistema lineare compatibile ammette infinite (una sola) soluzione se e solo se il suo rango e' minore (eguale) al numero delle incognite.*

OSSERVAZIONE. E' dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite AX = B compatibile, cioe' dotato di soluzioni. Dobbiamo provare che il sistema ammette una ed una sola soluzione, se e solo se i vettori colonna della matrice incompleta sono linearmente indipendenti, condizione equivalente al fatto che la matrice completa A abbia rango pari al numero n delle incognite, ovvero che il sistema come suol dirsi sia normale.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che :

Hp. Le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Th. La soluzione di AX = B, se esiste e' unica.

Supponiamo che le colonne $A_1, A_2, \dots, A_n$ della matrice incompleta A siano linearmente indipendenti e scriviamo il sistema nella forma :

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B$$

Supponiamo, inoltre, che per assurdo esistano due soluzioni del sistema.

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \dots + A_n\lambda_n = B \quad , \quad A_1\mu_1 + A_2\mu_2 + \dots + A_n\mu_n = B$$

segue che :

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \dots + A_n\lambda_n = A_1\mu_1 + A_2\mu_2 + \dots + A_n\mu_n$$

e quindi

$$A_1(\lambda_1 - \mu_1) + A_2(\lambda_2 - \mu_2) + \dots + A_n(\lambda_n - \mu_n) = 0.$$

Essendo i vettori colonna linearmente indipendenti ss ha :

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \ , \ \lambda_2 - \mu_2 = 0 \ \dots, \ \lambda_n - \mu_n = 0.$$

da cui l'unicita' della eventuale soluzione del sistema.

Inversamente proviamo che :

Hp. La soluzione di $AX = B$, esiste ed e' unica.

Th. Le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Proviamo che la negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi e quindi l'asserto.
Supponiamo dunque che le colonne di A siano linearmente dipendenti, cioe' che esistano n costanti $h_1, h_2, \ldots, h_n$, non tutte nulle, per le quali sia :

$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + \ldots + h_n A_n = 0 .$$

Da questo segue che denotata con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ una soluzione del sistema, certamente esistente per la supposta compatibilita', esiste almeno una seconda soluzione, da questa differente, tale essendo la n-pla seguente:

$$(\lambda_1 + h_1, \lambda_2 + h_2, \ldots, \lambda_n + h_n) \neq (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

per essere $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0,0,\ldots,0)$.

Rimarchiamo infine che la condizione di lineare indipendenza delle colonne di A equivale all'essere il rango di A pari ad n, cioe' che il sistema sia normale<. Infatti non puo' essere il rango di A minore di n, altrimenti le colonne di A sarebbero linearmente dipendenti e non puo' essere il rango di A superiore ad n perche' il rango di A e' per definizione minore o eguale al minimo tra m ed n. □

Daremo in un paragrafo successivo il metodo generale per la risoluzione di un sistema lineare nel caso generale. Per questo occorre premettere un teorema di importanza notevole, che va sotto il nome di Teorema di Cramer, ed e' l'oggetto del paragrafo seguente.

3. SISTEMI LINEARI NORMALI QUADRATI: IL TEOREMA DI CRAMER

Nel presente paragrafo ci occuperemo di una classe ristretta di sistemi lineari e precisamente dei sistemi lineari per i quali la matrice incompleta A sia *una matrice quadrata* cioe' dei sistemi aventi *ugual numero* n *di equazioni ed incognite.* Tali sistemi li diremo *quadrati.* Essi saranno dunque della forma:

$$AX = B$$

In accordo con la nomenclatura generale con un sistema quadrato e' normale se e solo se risulta $\det A \neq 0$. Questa condizione infatti equivale all'essere il rango di A pari al numero delle incognite, ovvero le colonne di A linearmente indipendenti.

Proveremo ora che nel caso di sistemi quadrati la normalita' implica l'esistenza della soluzione e quindi per il teorema di unicita' l'esistenza e l'unicita' della soluzione stessa. Questo e' in sostanza il significato del seguente:

TEOREMA DI CRAMER. *Un sistema lineare quadrato, cioe' di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e soltanto se* $\det A \neq 0$ *. (In altre parole se e solo se e' normale)*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che il sistema e' compatibile ed applicare il teorema fondamentale sui sistemi lineari. Proviamo che se $\det A \neq 0$ allora esiste almeno una soluzione.
Infatti se $\det A \neq 0$ allora esiste la matrice A^{-1} inversa di A. Si verifica di conseguenza che la n-pla:

$$Y = A^{-1}B \tag{3.1}$$

e' una soluzione del sistema $AX = B$. Infatti risulta:

$$AY = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B \equiv B,$$

e quindi l'asserto.

Ai fini della ricerca della soluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite con determinante dei coefficienti delle incognite non nullo si possono applicare le FORMULE DI CRAMER che ora illustreremo.
Sia dato il sistema $AX = B$, dove

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Ai fini della costruzione della soluzione costruiamo nell'ordine le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$A2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

che si ottengono sostituendo la colonna dei termini noti al posto rispettivamente della prima colonna, della seconda colonna e cosi' procedendo fino alla n-ma colonna per ottenere:

$$An = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{Vmatrix}$$

Se con $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]_t$ indichiamo la colonna delle soluzioni, si hanno le seguenti FORMULE DI CRAMER :

$x_1 = \det A_1 / \det A$, $x_2 = \det A_2 / \det A$, . . . , $x_n = \det A_n / \det A$

Vogliamo ora dimostrare le formule suddette.

In generale si ha che la i-esima componente della soluzione é ottenuta utilizzando la matrice A_i ottenuta mettendo al posto della i-esima colonna di A quella dei termini noti:

$$(3.2) \quad x_i = \frac{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ i complementi algebrici degli elementidella i-esima colonna della matrice dei coefficienti. Considerando ora le n equazioni del sistema e moltiplicandole rispettivamente la prima per A_{1i}, la seconda per A_{2i}, ... ,la n-esima per A_{ni} si ha :

$$\begin{aligned} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)A_{1i} &= b_1 A_{1i} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)A_{2i} &= b_2 A_{2i} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)A_{ni} &= b_n A_{ni} \end{aligned}$$

Sommmando le equazioni si ottiene:

$$(a_{11}A_{1i}+a_{21}A_{2i}+\ldots+a_{n1}A_{ni})x_1+(a_{12}A_{1i}+a_{22}A_{2i}+\ldots+a_{n2}A_{ni})x_2+$$

$$+\ldots+(a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\ldots+a_{ni}A_{ni})x_i+\ldots$$

$$\ldots+(a_{1n}A_{1i}+a_{2n}A_{2i}+\ldots+a_{nn}A_{ni})x_n=$$

$$= b_1A_{1i}+ b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}$$

La somma a primo membro e' composta da n addendi dei quali rimane, in forza del teorema di Laplace sui determinati, solo il termine i-ma. Infatti il prodotto degli elementi di una colonna per i complementi algebrici di altra colonna vale zero. Cosi' si ha :

$$x_i \det A = b_1A_{1i}+ b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}$$

formula che coincide perfettamente con la (3,2), come era da provare. Le due formule

(3.1) formula della matrice inversa

(3.2) formule di Cramer

sono le due formule utili per risolvere i sistemi lineari quadrati e normali.

4. IL METODO GENERALE PER RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE

Il terzo problema dei sistemi lineari e' quello della determinazione in termini di una formula di tutte le soluzioni del sistema. Svariati sono i metodi, noi ne ilustreremo uno che e' certamente il piu' interessante dal punto di vista teorico. Sia $AX = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia rango A = rango $[AB]$ = $= p \leq \min(m,n)$.

Si consideriun minore R di ordine p non nullo estratto dalla matrice incompleta A. Supporremo, a meno di riordinamenti delle equazioni e delle incognite, che tale minore sia quello formato dalle prime p righe e dalle prime p colonne.

$$R = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{Vmatrix}$$

E' intanto evidente che *le* m-p *equazioni che non concorrono a formare il minore* R *possono essere scartata ai fini della ricerca delle soluzioni*. Infatti se consideriamo la matrice completa $[AB]$, essendo questa di caratteristica p e contenendo il minore R puo' essere posta nella forma:

$$[AB] = \begin{bmatrix} RM_1 & B_1 \\ NM_2 & B_2 \end{bmatrix}$$

con ovvio significato dei simboli. Dunque essendo p la caratteristica di $[AB]$ risulta che le righe di $[NM_2B_2]$ sono

combinazione lineare delle prime p righe di [AB]e quindi anche le corrispodenti equazioni.
Il sistema si riduce a:

$$[RM_1]X = B_1$$

che si puo' scrivere nella forma:

$$RX_1 = B_1 - M_1X_2$$

essendo

$$X_1 = [x_1, x_2, \dots, x_p]^t \qquad X_2 = [x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n]^t$$

Il sistema scritto per esteso e'il seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1,(p+1)}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2,(p+1)}x_{p+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = b_p - a_{p,(p+1)}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

Si assegnano alle incognite poste alla destra del segno di uguaglianzadei valori generici: $x_{p+1} = \lambda_{p+1}, \dots, x_n = \lambda_n$.Quindi si ottiene il seguente sistema di p equazioni in p incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = c_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = c_p \end{cases} \quad , \qquad RX_1 = C$$

dove $c_i = b_i - a_{i,(p+1)}\lambda_{p+1} - \dots - a_{in}\lambda_n$ con $i=1,2,\dots,m$.

Si noti che allora che sia $n = p$, i blocchi M_1 ed M_2 mancano e le c_i sono delle costanti. In tale caso e in pieno accordo con il teorema fondamentale, il sistema ha una unica soluzione.

Quando $n > p$ il sistema ha ancora una unica soluzione perche' $\det R \neq 0$, ma tale soluzione e' funzione degli $n - p$ parametri

$$\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n.$$

Quindi ogni volta che si fissano dei valori per le incognite

$x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ si ottiene una soluzione del sistema,

e le soluzioni del sistema in effetti dipendono da $n-p$ parametri. Si esprime questo fatto dicendo che le soluzioni sono :

$$\infty^{n-p} \text{ (infinito alla n-p).}$$

(Forzando il simbolismo si pone in questo cotesto $\infty^0 = 1$).

In generale un sistema lineare di m equazioni in n incognite compatibile con rango A = rango $[AB] = p$ ammette ∞^{n-p} soluzioni.

5. I SISTEMI OMOGENEI

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite si dice omogeneo se i termini noti tutti nulli. Dunque si ha un sistema della forma:

$$AX = 0$$

ovvero in forma estesa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Una prima circostanza da osservare e' che un sistema omogeneo e sempre compatibile esistendo almeno per esso la soluzione delle incognite tutte nulle o *soluzione nulla.* Quindi ci si pone semplicemente il problema di vedere se il sistema *oltre la soluzione nulla ammette anche altre soluzioni da questa diverse*, che chiameremo AUTO-SOLUZIONI.. A questa domanda risponde compiutamente il

TEOREMA FONDAMENDALE SUI SISTEMI OMOGENEI

Un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite ammette autosoluzioni se e solo se il rango della matrice incompleta e' minore del numero delle incognite.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema fondamentale sui sistemi lineari ed osservare che nel caso particolare richiedere l'esistenza di auto-soluzioni equivale a richiedere l'esistenza di infinite soluzioni. □

Il teorema seguente e' di prova banale, ma presenta un certo interesse per capire il legame tra sistemi non omogenei e sistemi omogennei.

TEOREMA SUI SISTEMI OMOGENEI ASSOCIATI

Sia $AX = B$, un sistema lineare qualsiasi (sistema completo) e con esso si consideri il sistema $AX = 0$ (sistema omogeneo associato).

Se X^* e' una soluzione particolare del sistema completo ed Y e' la soluzione generale del sistema omogeneo associato, allora

$$Y + X^*$$

e' la soluzione generale del sistema completo.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo X^* soluzione di $AX = B$ risuta $AX^* = B$; sottraendo ha che $AX = B$ e' equivalente ad $A(X - X^*) = 0$, da cui l'asserto.□

Circa le soluzioni di un sistema omogeneo sussiste il seguente teorema che getta una interessante luce sulla struttura delle soluzioni di un sistema omogeneo:

TEOREMA (sulla struttura vettoriale delle soluzioni). L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ c con rango $A = p$, costituiscono un sottospazio vettoriale di dimensione $n-p$ dello spazio numerico $\mathbb{K}^n$ delle n-ple ordinate degli elementi del campo dei coefficienti.

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo se $Y, Z \in \mathbb{K}^n$ sono due soluzioni del sistema, allora $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ risulta:

$$A\ (\lambda Y + \mu Z) = A\ (\lambda Y) + A(\mu Z) = \lambda\ (AY) + \mu(AZ) = \lambda O + \mu O = O$$

e quindi le soluzioni costituiscono un sottospazio.

Per la dimensione cominciamo a notare che non e' restrittivo supporre che la matrice R associata al minore non nullo di A di ordine p che consideriamo sia quello formato dalle prime p righe e dalle prime p colonne, cosi' che posto:

$$X_1 = [x_1, x_2, \ldots, x_p]^t \qquad X_2 = [x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n]^t$$

$$A = \begin{bmatrix} R M_1 \\ N M_2 \end{bmatrix}$$

il sistema ridotto si scrive

$$R\ X_1 + M_1\ X_2 = O$$

da cui , posto $H = R^{-1}(-M_1)$, risulta:

$$X_1 = H\ X_2$$

Introduciamo allora i parametri

$$T_2 := [t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_n]^t$$

mediante i quali le soluzioni si scrivono nella forma compatta:

$$X_1 = H\ T_2$$
$$X_2 = T_2 = I_{n-p} T_2$$

e quindi :

$$X = \begin{bmatrix} O & H \\ O & I_{n-p} \end{bmatrix} T$$

Dunque la generica soluzione e' combinazione lineare di n-p vettori colonna linearmente indipendenti.□

Tratteremo ora una particolare classe di sistemi lineari omogenei, precisamente i sistemi del tipo $AX = 0$ di n equazioni in n+1 incognite con il rango di A massimo (cioe' pari ad n).

Supponiamo dunque di avere una matrice A del tipo :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n+1)} \end{bmatrix}$$

con rango A = n; segue allora che i minori di ordine n estratti non sono tutti nulli. Poniamo la seguente

DEFINIZIONE. Si chiama *h-mo aggiunto* (h=1,2,..,n+1) della matrice A di tipo n×(n+1) il determinante della matrice A_h ottenuta da A cancellando in A la colonna h-ma (la cancellazione e' indicata da un riquadro in verticale) moltiplicata per $(-1)^{h+1}$, cioe' lo scalare definito ponendo:

$$A_h := (-1)^{h+1} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1h}} & \dots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{n(n+1)} \end{bmatrix}$$

Premessa questa nozione proviamo il seguente :

TEOREMA DEGLI AGGIUNTI. Sia dato un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n+1 incognite della forma $AX = 0$ con il rango di A massimo (cioe' pari ad n). Il sistema ammette ∞^1 autosoluzioni proporzionali agli aggiunti della matrice A, in formule :

$$x_1 = \rho A_1 , \quad x_2 = \rho A_2 , \quad \dots, \quad x_{n+1} = \rho A_{n+1}$$

DIMOSTRAZIONE. Il sistema in esame si puo' scrivere nella forma:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = - a_{1(n+1)} x_{n+1} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = - a_{2(n+1)} x_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = - a_{n(n+1)} x_{n+1} \end{array}$$

Supporremo che il determinante Δ , dei coefficienti delle incognite numerate da 1 ad n, sia diverso da zero, avendo A rango n e potendo, a meno di cambio di nome delle variabili, riordinare le colonne in modo che questa ipotesi sia generale.

Determiniamo <u>una</u> <u>soluzione</u> <u>particolare</u> del sistema, per questo poniamo:

$$(*) \qquad x_{n+1} := A_{n+1} = (-1)^{n+2}\Delta \ (i = 1,2,, \ \ldots, \ n).$$

la seconda eguaglianza essendo conseguenza della definizione di aggiunto. Segue allora, per i = 1, 2, ..., n, ponendo le b.. nella i-ma colonna :

$$\Delta \ x_i = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots & b_1 \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} \ldots & b_s \ldots & a_{sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & b_n \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= - \quad A_{n+1} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \ldots & a_{1(n+1)} & \ldots \ a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} \ldots & a_{s(n+1)} & \ldots \ a_{sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & a_{n(n+1)} & \ldots \ a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= -A_{n+1}(-1)^{n-i} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} \ldots & \boxed{\begin{matrix} \\ . \\ \ldots \end{matrix}} & \ldots \ a_{1(n+1)} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{n1} \ \ . & & . \ a_{n(n+1)} \end{bmatrix} \\ \text{i-ma} \end{array} = (-1)^n A_{n+1} A_i =$$

$$= (-1)^n \, (-1)^{n+2} \, \Delta A_i .$$

Quindi semplificando per Δ, tenuto conto della (*), ed essendo pari l'esponente di (-1), si ha in definitiva:

$$x_i = A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Siccome le ∞^1 autosoluzioni del sistema sono proporzionali alla soluzione particolare trovata, segue l'asserto. □