# Le superficie algebriche

FEDERIGO ENRIQUES

Bologna, Nicola Zanichelli, 1949.

## Indice

page:vii

Il volume che cede oggi la luce, contiene, rielaborata e ordinata, la parte maggiore dell'opera matematica di Federigo Enriques, vale a dire la teoria delle superficie algebriche, alla quale il suo nome resterà sempre legato. Questa opera iniziata subilo dopo la laurea nel 1893 e proseguita per oltre mezzo secolo fino alla morte, con brevi interruzioni quando problemi di filosofia, e di storia della scienza occupa vano il suo spirito universale, si trova dispersa in una cinquantina di Note e Memorie pubblicate in varie raccolte.

A far risaltare l'alto valore dell'opera, che ha aperto un vasto e fecondo campo quasi inesplorato quando l'Enriques cominciò le sue ricerche, gioverà il presente volume. Il quale permetterà ai cultori della geometria algebrica, e in particolare agli studenti universitari, di orientarsi nell'ampio territorio.

Il compianto Autore aveva già sentito il bisogno di una sistemazione della geometria sopra le superficie algebriche dopo la sua chiamata all'Università di Roma, dove Egli poteva dedicarsi ai soli corsi, superiori di matematica e dove maggiore era il numero degli allievi. Valendosi della collaborazione di Luigi Campedelli, allora suo e mio assistente, oggi professore all'Università di Firenze, Egli raccolse la parte generale della teoria in un volume litografato, che usti nel 1932; mentre una seconda parte riguardante categorie particolari di superficie fu pubblicala a stampa, due anni dopo, dal Seminario matematico dell'Università di Roma, col concorso dello stesso collaboratore.

Esauriti in pochi anni questi, due volumi, l'Autore doniti: pensare ad una seconda, edizione; e durante gli ozi, cui fu costretto dalle leggi razziali e poi dalla guerra e dalle persecuzioni, Egli meditò una rielaborazione di tutta l'opera col proposito di semplificare o mettere al riparo da critiche alcune dimostrazioni, di condurre a termine od estendere classificazioni di tipi particolari dì superficie, e di tener conto dei più recenti risultati a cui Egli slesso od altri ricercatori, arano arrivati.

Il manoscritto era fortunatamente compiuto quando la morte colse Fede-
page:viii
rigo Enriques nella piena lucidità dello spirito. in cui fiorivano nomi quali

GAUSS, ABEL, JACOBI, CAUCHY e tanti altri grandissimi, non si possono celare preoccupazioni sul futuro della nostra scienza.

Un giorno però, prossimo o lontano, rinascerà l'amore per le grandi teorie di cui i nostri maestri del secolo XIX gettarono le basi. E quel giorno il trattato di FEDERIGO ENRIQUES sarà letto e meditato come il resoconto di un'esplorazione in un territorio dove molte gemme sono già state raccolte e molte altre attendono chi sia degno di scoprirle.

G. CASTELNUOVO

Roma, Gennaio 1949.

page:ix

# Prefazione

In questo trattato ci proponiamo di esporre la teoria delle superficie algebriche, particolarmente riguardata nel suo aspetto algebrico-geometrico, quale si è venuta maturando, durante un cinquantennio, in specie nella scuola geometrica italiana. Per lunghi anni abbiamo elaborato tale esposizione, rivedendo e talora rifacendo, o almeno riordinando, le dimostrazioni più antiche, in guisa da conferire alla teoria stessa l'assetto più rigoroso e più semplice.

Quest'opera di revisione e di ordinamento si è svolta anzitutto attraverso i corsi delle lezioni da noi tenute nella Università di Roma, che sono state raccolte, in una prima redazione, da LUIGI CAMPEDELLI, oggi professore all' Università di Firenze, cui ci piace attcstare ancora uhm volta la nostra gratitudine. Le lezioni di ENRIQUES-CAMPEDELLI furono pubblicate in due volumi; la prima parie, col titolo «Lezioni sulla, teoria delle superficie algebriche, raccolte dal Dott. LUIGI CAMPEDELLI», in edizione litografica presso la Casa Cedam di Padora, nel 1932 e la seconda parte nel 1934, col titolo «Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero, lezioni, raccolte dal Dott. LUIGI CAMPEDELLI», nei Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma.

Questi volumi rimangono anche oggi il fondamento del nostro lavoro di sistemazione della teoria che tuttavia si è prosegnilo di poi, sia dalla cattedra universitaria, sia nel riposo degli ultimi anni, dopo l'ottobre 1938.

Abbiamo ripreso l'esposizione del CAMPEDELLI, correggendo talvolta o semplificando qualche punto, uni soprattutto dando alla, teoria slessa una più ampia, estensione con l'usufruire dei contributi recali alla scienza, da alcuni giovani geometri. Fra questi ci è caro ricordare i nomi di altri nostri discepoli che, dopo il Collega fiorentino, ci hanno aiutato in questa, ricostruzione, approfondendo alcuni punti o invitandoci a rimeditarli colla discussione delle nostre idee e delle nostre spiegazioni: sono il Prof. GIUSEPPE POMPILJ — presto parlilo per le armi — e il Dott. ALFREDO FRANCHETTA (due giovani speranze della nostra scienza), che si troveranno citati nel corso di queste Lezioni; ai quali vogliamo page:x attestare pubblicamente il nostro animo grato.

Non abbiamo da spiegare più, lungamente il disegno dell'opera, che già appare dall'indice generale della materia. Ma c'importa rilevare che abbiamo cercato, non soltanto di dare alle teorie esposte un assetto logico, sì anche (come in opere anteriori) di porgere una prospettiva storica del loro divenire. In tal guisa vuoisi offrire al lettore, non già il dono di qualcosa dì perfetto che si lasci contemplare dal di fuori, anzi la veduta di un acquisto e di un progresso di cui deve comprendere le ragioni, e che egli, è invitato a riguadagnare da sè e per sè, trovando nel libro un istrumento dì lavoro. Appunto perciò il cammino induttivo della scienza, che muove da esempi e casi particolari, e talvolta anche gli errori che occorse superare e correggere, vengono messi particolarmente in rilievo.

Aggiungiamo che per quel che concerne la conoscenza di teorie preliminari (curve algebriche, superficie razionali), ci riferiamo particolarmente all'esposizione datane in altre nostre lezioni, che furono raccolte, nei quattro volumi di ENRIQUES-CHISINI «Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche»[1] e in quello di FABIO CONFORTO su «Le superficie razionali», anch'esso redatto sulle nostre lezioni[2].

Il testo che offriamo al lettore è stato composto ed ha trovato la sua forma, definitiva entro il mese di aprile del 1942, quando la persecuzione fascista vietava, nel nostro paese, anche le più innocenti pubblicazioni matematiche, e d'altronde la pubblicazione all'estero dava luogo a difficoltà che dovemmo in appresso sperimentare. In esso erano indicate alcune note, in ispecie note da noi (come corrispondente) inviate all' Accademia delle Scienze di Madrid, che, non, abbiamo potuto sapere se abbiano effettivamente, trovato posto in quegli atti accademici.

Oggi, usciti fuori dal periodo burrascoso della guerra, nel momento di pas-

[1]Bologna, Zanichelli 1915, 1918, 1924, 1934.
[2]Bologna, Zanichelli, 1939.

sare il manoscritto alla, tipografia, ci riesce ancor difficile di prendere esalta, nozione della, letteratura scientifica degli ultimi tre anni, e d'altra parte gli impegni di nuovi lavori ci vietano di ritornare sul lavoro fallo per riesaminarlo al, lume di alcuni studi che, più o meno approssimativamente, siamo venuti a conoscere soltanto più tardi. Perciò conserviamo al testo delle presenti lezioni la forma datagli, come si è detto, nel 1942, salvo a completare qualche notizia bibliografica e ad indicare, con qualche nota, le lacune che richiederebbero un nuovo esame.

F. Enriques

Roma, Settembre 1945.

page:1

# 1 Introduzione

## 1.1 Richiamo di nozioni elementari

In queste lezioni ci riferiamo, in generale, ad una superficie algebrica dello spazio ordinario, supponendola irriducibile. La superficie $f$ verrà definita da un'equazione in coordinate cartesiane

$$f(x, y, z) = 0$$

ovvero in coordinate omogenee

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 :$$

$f$ designa nel primo caso un polinomio nelle variabili $x, y, z$, e nel secondo caso un polinomio omogeneo ovvero una forma.

Assumiamo come noti gli elementi della teoria proiettiva delle superficie, che includono le nozioni di ordine, classe, superficie polari, ecc.[3] E richiamiamo alcune proprietà di cui si farà uso nel seguito.

Un *punto* $O$ della superficie $f$, che sia d'ordine $n$, è *semplice* per essa se le rette uscenti da $O$ segano la superficie in $n-1$ punti fuori di $O$. L'intorno di un punto semplice della superficie si può rappresentare in modo semplice su un piano in un ordine di approssimazione alto come si vuole, cioè dove si tenga conto degli infinitesimi di ordine $1, 2, \ldots$ ecc. In primo luogo è chiaro che nel primo ordine di approssimazione la superficie può essere sostituita dal piano ivi tangente; ma se si vuol tenere conto del secondo ordine, supponendo gli assi cartesiani scelti in modo opportuno, si sostituirà invece col paraboloide osculatore dello stesso ordine $z = \varphi_2(xy)$, che si lascia proiettare univocamente sul piano $(x, y)$ dal punto all'infinito dell'asse $z$. E così si dica, successivamente per l'intorno del terzo ordine ecc. Pertanto, essendo data sulla superficie una curva

[3]Cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Libro III. vol. II. Bologna, Zanichelli, 1918.

page:2 che abbia in $O$ una singolarità qualsiasi, si potrà ritenere questa singolarità formata di punti multipli infinitamente vicini, proprio come accade nel piano.[4]

I punti singolari o multipli per la superficie $f$ sono definiti come segue: un *punto* $O$ *multiplo d'ordine* $r$ $(r > 1)$ è tale che le rette per $O$ segano la superficie in $n-r$ punti residui. Vi è luogo a distinguere le *curve multiple* e *i punti multipli isolati*, senza escludere la considerazione di punti multipli notevoli appartenenti ad una curva multipla, che si presentano come una sovrapposizione dei due casi, e su cui avremo luogo di dare nel seguito qualche delucidazione. Una curva multipla d'ordine $r$ si può ritenere in generale, come l'intersezione di $r$ superficie o *falde* differenzialmente distinte in un punto generico della curva, in corrispondenza agli $r$ piani tangenti in esso. Invece un punto multiplo isolato appare di regola conico, dove le rette aventi $r+1$ intersezioni riunite con la superficie, formano un cono d'ordine $r$, generalmente irriducibile.

Ma si possono avere delle particolarizzazioni. Così due o più falde della superficie lungo una curva multipla possono toccarsi o anche fondersi in una *falda d'ordine superiore*: il più semplice esempio è offerto dalla curva doppia cuspidale. D'altra parte il cono tangente in un punto $r$-plo isolato può spezzarsi o anche ridursi ad un piano contato $r$ volte: l'esempio più semplice è offerto dal punto doppio uniplanare.

Per dominare tutte le complicazioni cui possono dar luogo le singolarità della superficie, conviene definire i *punti multipli infinitamente vicini* e le *curve (proprie o infinitesime)* da questi costituite, come si fa per mezzo dei rami di curve uscenti da un punto[5]. In quest'ordine di idee un punto uniplanare appare come un punto doppio cui sono infinitamente vicini tre punti doppi in direzioni distinte. Il più semplice esempio di una curva (retta) doppia infinitesima, infinitamente vicina ad un punto multiplo isolato, è il tacnodo: cioè, un punto doppio $O$ tale che le sezioni piane per $O$ hanno accanto ad $O$ un altro punto doppio infinitamente vicino. Ma noi non vogliamo indugiarci su questo argomento, per cui rimandiamo alle citate lezioni di Enriques-Chisini.

[4]Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro IV, vol. II.
[5]Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro IV, cap. IV.

## 1.2 Trasformazioni razionali

Si definisce una trasformazione razionale dello spazio cui appartiene la superficie $f$ ponendo le coordinale $X, Y, Z$, funzioni razionali delle $x, y, z$:

$$X = \frac{\varphi_1(xyz)}{\varphi_0(xyz)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xyz)}{\varphi_0(xyz)}, \quad Z = \frac{\varphi_3(xyz)}{\varphi_0(xyz)}, \tag{1}$$

eq:0:1

page:3 dove le $\varphi$ sono dei polinomi che possiamo supporre dello stesso ordine. Per mezzo di questa trasformazione, che supponiamo non degenere, ad ogni punto generico dello spazio $(xyz)$ corrisponde un punto dello spazio $(XYZ)$, e viceversa ad un punto $(XYZ)$ corrisponde in generale un certo numero finito $n$ $(\geq 1)$ di punti $(xyz)$, i quali si ottengono risolvendo le equazioni (1), in cui le $XYZ$ vengano assunte come date e le $xyz$ come incognite: per $n > 1$ i gruppi di punti così ottenuti formeranno, nello spazio $(xyz)$, una involuzione $I_n$ d'ordine $n$, cioè una serie di gruppi di $n$ punti tale che ogni punto appartenga in generale ad un gruppo.

Ora la trasformazione (1) porterà generalmente gli $\infty^2$ punti della superficie $f(x, y, z) = 0$ in $\infty^2$ punti distinti, costituenti una superficie $F(X, Y, Z) = 0$ trasformata della $f$. Ad un punto generico di $f$ corrisponderà dunque *un* punto di $F$ e viceversa ad un punto generico di $F$ corrisponderà di regola *un* punto di $f$, la trasformazione riuscendo univocamente invertibile per i punti della superficie $F$[6]. Questa invertibilità e le circostanze particolari in cui essa cessa di sussistere, esigono una spiegazione. Invero abbiamo visto che la trasformazione (1), considerata fra i due spazi $(xyz)$ $(XYZ)$, non è in generale univocamente invertibile, anzi conduce dai punti $(XYZ)$ ai gruppi di $n$ punti di una involuzione $I_n$ nello spazio $(xyz)$. Ma se la $f$ viene scelta in modo generale entro questo spazio, essa non apparterrà all'involuzione $I_n$, cosicché ad un punto di $f$ saranno coniugati, in $I_n$, $n-1$ punti fuori della superficie, e quindi ad un punto generico di $F$ verranno a corrispondere per la (1) un punto di $f$ ed $n-1$ punti fuori di essa, descrivendo la superficie ad essa, coniugata rispetto ad $I_n$.

[6] Di qui la distinzione fra trasformazione birazionalo intercedente fra duo superficie e trasformazione birrazionale o cremoniana, estendibile allo spazio che le contiene.

Soltanto nel caso che appartenga all'involuzione $I_n$, ovvero ad un'involuzione parzialmente contenuta in essa, la trasformata di $F$ si ridurrà ad una superficie multipla, in corrispondenza $[1, n]$ o $[1, m]$ $(m < n)$ con $f$.

Ora, riferendoci al caso generale, in cui $f$ e $F$ sieno in corrispondenza biunivoca, conviene pur rilevare che la trasformazione (1) ammette, in generale, delle eccezioni[7]. Invero le formule della trasformazione diventano indeterminate in tutti quei punti $(xyz)$ per cui si annullino insieme le $\varphi$ (cioè per i punti base del sistema trasformante individualo dalle superficie $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, page:4 $\varphi_3 = 0$). Una eccezione di questo genere può aver luogo anzitutto in un punto semplice di $f$; allora questo si trasforma in generale in una retta o in una curva di $F$, curva trasformata di un punto semplice, che si chiamerà *curva eccezionale* della superficie $F$.

Invece può darsi che un punto base del sistema trasformante delle $\varphi$ cada in un punto singolare di $f$. E se si ha una curva multipla di $f$ su cui si annullino, contemporaneamente, le $\varphi$, questa si trasformerà generalmente in una curva semplice, ad ogni punto $r$-plo della curva corrispondendo $r$ punti distinti, in relazione alle $r$ falde di $f$ che passano per esso. Se invece un punto base delle $\varphi$ cade in un punto multiplo isolato $O$ della $f$, questo si trasforma generalmente in una curva i cui punti rispondono ai punti infinitamente vicini ad $O$.

Queste affermazioni cadono in difetto quando intervengono punti e curve multipli infinitamente vicini ai punti singolari considerati. In questi casi l'effetto generale della trasformazione è di trasformare in punti multipli propri i punti multipli infinitamente vicini del primo ordine, e in generale di semplificare la singolarità, riducendo da $r$ ad $r - 1$ l'intorno dei punti considerati, almeno quando si supponga che le superficie $\varphi$, passanti per un punto $O$, non abbiano alcuna tangente fissa in comune.

Tuttavia la trasformazione che riesce a semplificare le singolarità di una superficie introduce in generale delle nuove singolarità, perchè vi saranno in

[7]Si tengano presenti le considerazioni analoghe relative alla trasformazione delle curve: Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro V, vol. III.

generale $\infty^1$ coppie di punti della $f$ dove le $X, Y, Z$ riprenderanno lo stesso valore, sicché ad essi risponderanno punti di una curva doppia di $F$.

Ciò risulta, in sostanza, da un facile, computo di costanti. Se le $X, Y, Z$, debbono riprendere lo stesso valore nei punti $(x, y, z)$ e $(x', y', z')$, dovranno sussistere le 5 equazioni in 6 incognite:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(xyz)\varphi_0(x'y'z') - \varphi_1(x'y'z')\varphi_0(xyz) = 0 \\
&\varphi_2(xyz)\varphi_0(x'y'z') - \varphi_2(x'y'z')\varphi_0(xyz) = 0 \\
&\varphi_3(xyz)\varphi_0(x'y'z') - \varphi_3(x'y'z')\varphi_0(xyz) = 0 \\
&f(xyz) = 0 \\
&f(x'y'z') = 0,
\end{aligned}
$$

le quali ammetteranno in generale $\infty^1$ soluzioni $(xyzx'y'z')$, fuori delle $\infty^2$ soluzioni triviali[8]

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

In casi particolari si potranno avere $\infty^1$ gruppi di più che due punti di $f$ cui
page:5 rispondono i punti d'una curva multipla di $F$. Ma potranno anche aversi curve di $f$ su cui le $XYZ$ restino costanti, cui rispondono punti multipli isolati di $F$. E col complicarsi delle singolarità di $f$, e con l'intervento di altre circostanze particolari, non si può escludere la genesi di singolarità più elevale per la $F$.

## 1.3 Superficie negli iperspazi: scioglimento delle singolarità

La trasformazione dello spazio ordinario che sopra abbiamo considerato si può estendere definendo una trasformazione che porti la superficie $f$ in uno spazio $S_r$ a più dimensioni:

$$X_1 = \frac{\varphi_1(xyz)}{\varphi_0(xyz)}, \quad X_2 = \frac{\varphi_2(xyz)}{\varphi_0(xyz)}, \ldots, X_r = \frac{\varphi_r(xyz)}{\varphi_0(xyz)};$$

[8]Lo primo tre equazioni definiscono tre ipersuperficie dello spazio $S_6$, che hanno a comune lo $S_3$ ($x = x'$, $y = y'$, $z = z'$) e, fuori di questo, una certa varietà a tre dimensioni $V$; la $V$ viene intersecata dalle varietà cilindriche $f(xyz) = 0$ o $f(x'y'z') = 0$ secondo una curva.

la superficie $f(xyz) = 0$ si trasformerà in una superficie $F$ dello spazio $S_r$, quale è definita dalle formule scritte, e che d'altra parte può anche definirsi in vari modi come intersezione parziale di varietà dell'iperspazio.[9]

Anche per questa trasformazione si ripetono in gran parte le cose dette per una trasformazione dello spazio $S_3$; che in generale la trasformazione riesce biunivoca per i punti delle due superficie (e non per gli spazi che le contengono), e che una curva multipla ordinaria di $f$, che sia base per il sistema trasformante delle superficie $\varphi$, si scioglie in generale diventando luogo degli $r$ punti semplici che rispondono ai punti $r$-pli di $f$ che la costituiscono; e similmente si dica dei punti multipli isolati che si mutano in curve, ecc.

Ma qui, almeno per $r \geq 5$, non si producono in generale nuovi punti singolari per la $F$, che appunto per $r \geq 5$ non esistono in generale coppie di punti di $f$ ove le $X_1, X_2, \ldots, X_r$ riprendano lo stesso valore, mentre per $r = 4$ si ha in generale un numero finito di tali coppie che dà luogo ad altrettanti punti doppi per la $F$.

S'intuisce per tal modo che si riuscirà sempre a sciogliere le singolarità di una superficie $f$ e a trasformarla in un'altra dello spazio $S_r$ affatto priva di singolarità, cioè dotata soltanto di punti semplici. Ma questa riduzione che riesce facile per le superficie dotate soltanto di curve e di punti multipli ordinari (curve multiple a falde distinte, e punti multipli isolati a cono osculatore affatto generale) esige un esame più minuto quando la $f$ possegga singolarità infinitamente vicine, comunque complicate. L'analisi che occorre a tal uopo si può decomporre tuttavia in due parti: un'analisi nel senso della geometria differenziale, dove si tratta di sciogliere le singolarità definite nell'intorno di un punto $O$ di una curva dello spazio ordinario ed in cui è lecito giovarsi di trasformazioni birazionali o cremoniane dell'intero spazio $S_3$; e successivamente un esame critico delle nuove singolarità che possono venir prodotte dalla trasformazione stessa. Ma quest'ultimo passo, che importa difficoltà minuziose quando si tratti della riduzione delle singolarità con trasformazioni birazionali dello $S_3$[10], si può

page:6

[9] Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro I, §23.
[10] Problema risoluto da O. Chisini in Memorie Acc. Bologna. 1921.

evitare mercè una semplice osservazione di B. Levi: infatti, se la superficie $f(xyz) = 0$ viene trasformata in un altra $F(XYZ) = 0$, la superficie dello spazio a 6 dimensioni luogo dei punti $(x, y, z, X, Y, Z)$ possiederà soltanto delle singolarità che rispondono alle singolarità comuni alle $f$ e $F$.

Non è nostro proposito fermarci qui a spiegare la riduzione delle singolarità delle superficie quale si è ottenuta rigorosamente anzitutto da B. Levi, e ci limiteremo ad enunciare il risultato fondamentale cui si perviene, rimandando per la dimostrazione alle principali memorie che la contengono e la svolgono in differenti maniere. [11]

*Una superficie $f$ dotata di singolarità qualsiansi si può sempre trasformare birazionalmente in un'altra priva di singolarità, appartenente ad uno spazio a cinque dimensioni.*

## 1.4 Superficie dotate di singolarità normali

Data una superficie con singolarità qualsiansi si cominci anzitutto a trasformarla in una $F$ dello spazio $S_5$ affatto priva di punti multipli. La $F$, proiettata successivamente da due punti sullo spazio ordinario, ci darà in questo un'immagine $\Phi$ della superficie data. Si tratta di esaminare quali saranno le singolarità di $\Phi$ quando la proiezione di $F$ sia fatta da due punti generici. Vogliamo dimostrare che la $\Phi$ possiederà soltanto una curva doppia nodale (piani tangenti generalmente distinti), dotata di punti tripli che sono puro tripli per la superficie.

È chiaro anzitutto che questo è il tipo delle *singolarità normali*, che avrà in generale una superficie dello spazio ordinario, ottenuta come proiezione di

[11] B. Livi; *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche.* Atti Acc. Torino, 1897 (cfr. Ann. di Mat. 1897).

O. Chisini, *La risoluzione delle singolarità delle superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio.* Memorie Acc. Bologna, 1921.

G. Albanese, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in un'altra priva di punti multipli.* Circ. Mat. Palermo, 1924.

R.J. Walker *Reduction of singularities of an algebraic surface.* Annals of Math., 1935.

O. Zariski. *The reduction of the singularities of an algebraic surface.* Ann. of Math., 1939. Cfr. Annals of Math., 1941.

una superficie dello spazio a più dimensioni, priva di punti singolari; ciò risulta, page:7 da un semplice computo di costanti. Si osservi infatti che le corde di una superficie dello spazio $S_r$ sono sempre $\infty^4$ e quindi per $r = 5$ vi è un numero finito di corde passanti per un punto, mentre per $r = 4$ ve ne sono $\infty^1$. Quindi, proiettando la $F$ da un punto generico dello $S_5$, la superficie proiezione $F'$ acquisterà, in corrispondenza delle corde della $F$ passanti per il centro, un numero finito di punti doppi; proiettando poi la $F'$ da un punto generico dello $S_4$, la superficie proiezione acquisterà una curva doppia (apparente) sulla quale andranno a cadere i punti doppi della $F'$. In altre parole, per due punti dello $S_5$, o per la retta che li congiunge, passerà una serie $\infty^1$ di piani che incontrano la $F$ in due punti e un numero finito di piani che la incontrano in tre punti, sicché la proiezione di $F$, fatta da quei centri, possiederà appunto una curva doppia nodale dotata di punti tripli, tripli insieme per la curva doppia e per la superficie.

Tuttavia si può dubitare che, per una particolare superficie dello $S_5$, sia pure priva di punti multipli, la proiezione fatta da due punti generici dello $S_5$ venga ad acquistare singolarità più elevate, cioè: una curva multipla anziché doppia, ovvero dei punti multipli più che tripli per la curva doppia. Per escludere il primo dubbio basta notare che le $\infty^4$ corde di una superficie di uno spazio qualunque a più di tre dimensioni non possono essere trisecanti, poiché altrimenti anche le corde di una curva gobba sezione iperpiana della superficie sarebbero trisecanti, il che è impossibile[12]. Da ciò segue che per un punto generico dello $S_5$ non possono passare trisecanti della $F$, e che quando la $F$ sia proiettata da un punto generico in una $F'$ dello $S_4$, per un punto generico di questo non può passare che un numero finito di trisecanti.

Resta da dimostrare che scegliendo in modo generico i centri di proiezione nello $S_5$, non può accadere che i piani trisecanti per i detti centri incontrino la superficie $F$ in più che tre punti e quindi la curva doppia della proiezione $\Phi$ possegga, in luogo di punti tripli, punti di molteplicità più elevata[13]. Perciò

[12] Cfr. Enriques-Chisini. Op. cit., Libro III, cap. IV, §43, vol. II, pag. 289.

[13] Cfr. F. Enriques, *Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie o varietà algebrica*, in

basta escludere che tutti i piani cui s'imponga d'incontrare la superficie in tre punti vengano a incontrarla di conseguenza in quattro o più punti. Infatti, se ogni piano trisecanto la $F$ risulti quadrisecante, lo stesso accadrà per ogni curva gobba sezione iperpiana di $F$ (la quale non può appartenere ad un $S_3$) e quindi anche la proiezione di questa fatta da un suo punto sullo $S_3$ dovrà dare una curva di cui ogni corda risulta trisecante, ciò che abbiamo già ricordalo esser page:8 impossibile.

In tal guisa viene rigorosamente dimostrato un teorema fondamentale già riconosciuto dal NOETHER (1888):

*Una superficie con singolarità qualsiansi può sempre trasformarsi in un'altra dello spazio ordinario dotata soltanto di singolarità normali, cioè di una curva doppia nodale che possiede in generale un numero finito di punti tripli, i quali sono pure tripli per la superficie.*

La detta curva doppia potrà possedere anche un numero finito di punti doppi (*incroci*) provenienti dalle corde della superficie di $S_4$ proiettata sullo $S_3$, che siano doppie per il cono delle corde proiettanti.

Giova anche ricordare che sulla detta curva nodale vi sarà in generale un numero finito di *punti cuspidali* (pinch-points) nei quali le due falde lineari della superficie si fondono in una falda del secondo ordine, e che riescono punti base semplici per le curve intersezioni variabili delle superficie polari.

Nel seguito, dovendo svolgere una teoria delle superficie in cui si ricercano le proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, potremo sempre riferirci ad una superficie modello priva di singolarità dello spazio a 5 dimensioni, ovvero ad una superficie dello spazio ordinario dotata delle singolarità normali, di cui nel precedente enunciato. In quest'ultimo caso un punto biplanare della curva doppia dovrà ritenersi come la sovrapposizione di due punti semplici, i cui intorni corrispondono alle due falde, così come nella teoria invariantiva delle curve un nodo viene considerato come la sovrapposizione di due punti appartenenti ai due rami.

---

Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, Pavia, 1936, pag. 351.

## 1.5 Nota

Ciò che si è detto in ordine alla trasformazione di una superficie in un'altra dello spazio ordinario, dotata di singolarità normali, può precisarsi nel senso che: è lecito supporre che la *trasformata di una qualsiasi superficie sia dotata di curva doppia irriducibile*, la quale possegga, come si è detto, un certo numero di punti tripli, tripli egualmente per la superficie e per la sua curva nodale.

Esporremo la dimostrazione di questa proprietà[14] ammettendo noti i principii della teoria dei sistemi lineari, che vengono esposti nei primi paragrafi di queste lezioni.

A tal uopo conviene partire da una superficie priva di singolarità nello spazio $S_5$, o meglio da una $F$ che sia proiezione generica di questa nello $S_4$, e
page:9 perciò dotata soltanto di punti doppi impropri *ordinarii*, ciascuno dei quali può ritenersi come una singolarità apparente, rappresentando una coppia di punti sovrapposti *distinti*. Conviene esaminare le singolarità di una superficie $\Phi$ dello spazio ordinario, proiezione della $F$ da un punto generico $O$ dello $S_4$: in quali casi possa accadere che la curva doppia di $\Phi$ riesca sempre riducibile al variare del centro di proiezione $O$.

Questo esame conduce a stabilire che: se una superficie $F$, dotata di punti doppi impropri ordinarli nello $S_4$, viene proiettata da un punto generico in una $\Phi$ dello $S_3$, la cui curva doppia sia riducibile, la $F$ è una proiezione della superficie di Veronese (superficie del quarto ordine di $S_5$, rappresentata sul piano del sistema $\infty^5$ delle coniche).

Per giungere a questo risultato conviene premettere il seguente:

**Lemma:** non esistono superficie dello $S_4$ possedenti $\infty^3$ coppie di piani tangenti, incidenti secondo una retta, in modo che le rette che congiungono i loro punti di contatto riempiano tutto lo spazio.

Sia $P$ un punto generico di $F$ e $\pi$ il piano ivi tangente. Per ipotesi esistono $\infty^1$ piani tangenti ad $F$ ed incidenti $\pi$ in rette; i loro punti di contatto formano

[14] Cfr. A. Franchetta, *Sulla curva doppia della proiezione di uva superficie generale dello $S_4$ da un punto generico su uno $S_3$*. Rendic. R. Acc. d'Italia, 1941, v. anche i Rend. dell'Acc. dei Lincei, s. VIII, vol. II, fasc. 3, 1947.

una curva, eventualmente riducibile, di cui consideriamo una componente $C$. Sia $Q$ un punto di essa, e $Q'$ il punto infinitamente vicino a $Q$ su $C$. I piani tangenti ad $F$ in $Q$ e $Q'$ segano $\pi$ in rette; quindi ciascuno di essi giace in un $S_3$ con $\pi$. Ma il piano tangente in $Q'$ contiene $Q$, quindi i detti piani determinano con $\pi$ un unico $S_3$, il quale è tangente ad $F$ in tutti i punti di $C$. Al variare di $P$, la curva $C$ descrive un sistema (almeno) $\infty^1$; e se, come si è supposto, la superficie $F$ non appartiene ad un $S_3$, ognuna di queste curve $C$, dovendo stare nello $S_3$ da essa determinato, e nello $S_3$ determinato dalla curva infinitamente vicina, è contenuta in un piano (potendosi ridurre, in particolare, ad una retta); i piani di due curve $C$ infinitamente vicine stanno in un $S_3$. Si conclude che una superficie per cui valga l'ipotesi ammessa, è rigata, o contiene $\infty^1$ curve piane i cui piani formano una sviluppabile. Nel primo caso le rette che congiungono i punti di contatto di due piani incidenti in rette sono le generatrici della rigata; nel secondo sono le rette dei piani della sviluppabile; in nessuno dei casi esse riempiono lo $S_4$.

Ciò posto si abbia in $S_4$ una superficie $F$, dotata soltanto di un numero finito di punti doppi impropri ordinari, la cui proiezione $\Phi$ fatta da un punto generico $O$ possegga una curva doppia riducibile; diciamo anzitutto che questa curva deve essere connessa, cioè formata di due o più parti aventi qualche punto comune. Invero le curve doppie apparenti

$$C = \sum K$$

page:10 che rispondono agli insiemi di codeste parti $K$, formano un sistema razionale (o almeno unirazionale) i cui elementi corrispondono ai punti $O$ dello spazio $S_4$, e perciò le $C$ appartengono ad un sistema lineare di curve su $F$[15]. Se tale sistema è irriducibile, le $C$ riducibili che ne fan parte debbono essere connesse[16]; se invece tutte le $C$ del detto sistema lineare sono riducibili esse vengono composte con le curve $K$ di un fascio, non aventi fra loro intersezioni variabili.

[15] Teorema stabilito per le serie razionali di gruppi di punti sopra una curva ed esteso alle varietà da Enriques. Cfr. Enriques-Chisini, op. cit., Libro V, cap. I. §9. vol. III. pag. 78 (cfr. pag. 485).

[16] Principio di degenerazione. Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro V, cap. III, §36. vol. III, pag. 405.

Ma questo caso non può presentarsi perchè due curve $K$ contenenti due coppie di punti di $F$ come $AA_1$ e $AA_2$ hanno certo (in $A$) un punto comune; e si avverta che esse non possono coincidere in una medesima curva poiché al variare di $A_2$ questa verrebbe a contenere tutti i punti della superficie.

Pertanto si è condotti ad esaminare se e come la superficie $\Phi$, proiezione di $F$ da un punto generico $O$, possa avere una curva doppia composta di due o più parti fra loro connesse.

Un punto di connessione di tali parti potrà essere:

1. un semplice incrocio, cioè un punto doppio comune a due rami semplici, che pertanto risulterà un tacnodo per la superficie, ovvero
2. un punto triplo, per cui passino tre rami della curva doppia, due dei quali possono a priori anche appartenere ad una medesima componente irriducibile.

1.) Un punto $\overline{P}$ comune a due rami semplici della curva doppia $\overline{C}$ di $\Phi$ sarà in generale proiezione di due punti $P$ e $P'$ allineati col centro $O$ di $S_4$, e si vede tosto che i piani tangenti ad $F$ in $P$ e $P'$ appartengono allo stesso iperpiano che ha per traccia il piano tangente a $\Phi$ in $\overline{P}$, e che quindi sono incidenti secondo una retta. Ma siccome il punto doppio $\overline{P}$ di $\overline{C}$ viene supposto esistere per ogni posizione del centro $O$, la superficie $F$ dovrebbe possedere $\infty^3$ coppie di piani tangenti incidenti e le rette che congiungono i punti di contatto di queste coppie di piani dovrebbero riempire tutto lo spazio; ciò è assurdo per il lemma premesso.

Un esame speciale esige il caso in cui i punti $P$ e $P'$ siano infinitamente vicini, cadendo dunque nei punti che una tangente per $O$ ha comuni con la superficie $F$. In questo caso il punto $\overline{P}$, incrocio dei due rami della curva doppia di $\Phi$, sarà sempre un tacnodo per $\Phi$, per modo che ogni piano per $\overline{P}$ segherà $\Phi$ in una curva avente ancora un punto doppio infinitamente vicino a $\overline{P}$. Segue di
page:11 qui che l'iperpiano proiettante da $O$ il piano tacnodale di $\Phi$ deve segare $F$ secando una curva che ha quattro intersezioni con ogni piano per la tangente

$PP'$ e quindi possiede $P$ e $P'$ come punti doppi; salvo ad esaminare i casi particolari in cui la molteplicità effettiva di $P$ diventi superiore alla molteplicità virtuale 2, abbassandosi invece la molteplicità di $P'$. L'ipotesi a cui si riferisce il nostro discorso importa che, movendosi $O$ nello spazio $S_4$, si abbia sempre per esso una tangente, diciamo $p$, incontrante $F$ in due punti infinitamente vicini, che sarebbero doppi per la sezione con l'iperpiano tangente in $P$; quindi, ognuno degli $\infty^3$ iperpiani tangenti ad $F$ dovrebbe toccare la superficie in due punti $P$ e $P'$ infinitamente vicini. Ma è facile vedere che questa proprietà non può competere ad una superficie $F$ di $S_4$; infatti una proiezione generica di questa sullo $S_3$ sarebbe tale che ogni suo piano tangente sarebbe tangente ad essa anche in un punto infinitamente vicino, e perciò risulterebbe essere una sviluppabile; allora anche la superficie di $S_4$ di cui essa è proiezione dovrebbe essere sviluppabile, e tuttavia una sviluppabile di $S_4$ possiede soltanto $\infty^1$ e non $\infty^3$ iperpiani che la toccano in due punti infinitamente vicini.

La conclusione di questo discorso è di dimostrare impossibile l'ipotesi che abbiamo fatto, cioè che la proiezione della nostra superficie $F$ da un punto generico $O$ di $S_4$ sia una $\Phi$ la cui curva doppia si componga di due componenti che si incrociano in un punto $\overline{P}$, immagino di due punti infinitamente vicini $P$ e $P'$ di $F$. Senonchè occorre esaminare il caso particolare a cui si è innanzi accennato: che in luogo di un iperpiano tangente in $P$ la cui intersezione con $F$ abbia due punti doppi $P$ e $P'$, s'incontri un iperpiano tangente la cui sezione abbia in $P$ un punto triplo e in $P'$ un punto semplice, ovvero soltanto in $P$ un punto quadruplo. Dei due casi che qui si presentano il primo non dà luogo ad eccezione nel ragionamento precedente, perchè dovranno aversi ancora $\infty^3$ iperpiani tangenti ad $F$ che la tocchino pure (virtualmente) in un punto infinitamente vicino. Invece occorre fermarsi un momento sulla seconda ipotosi, in cui si avrebbero a priori non più $\infty^3$, ma $\infty^2$ iperpiani secanti la $F$ secondo curve dotate di un punto quadruplo. Di fatto questa ipotesi non può presentarsi perchè una superficie dello $S_4$ tale che per ogni punto di esso si abbia un iperpiano tangente che la seghi secondo una curva, dotata di punto quadruplo, una tale superficie – diciamo – non può appartenere allo $S_4$, ma giace interamente in uno spazio $S_3$. Giacché le curve sezioni iperpiano di essa sono tali che il piano osculatore in un punto qualsiasi ha con la curva stessa un contatto quadripunto, e perciò sono curve piane.

2.) Un punto $\overline{P}$ che sia triplo per la curva doppia $C$ di $\Phi$ e punto di page:12 connessione di componenti irriducibili di questa, può essere:

**a)** punto semplice comune a tre componenti irriducibili di $\overline{C}$; ovvero

**b)** punto semplice per una componente irriducibile di $\overline{C}$, e doppio per un'altra.

a) Nell'ipotesi a) il punto $\overline{P}$ sarà proiezione di tre punti di $F$, diciamo $P_1, P_2, P_3$; e le componenti $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3$ della $\overline{C}$ per cui $\overline{P}$ è punto triplo saranno proiezioni di tre curve, rispettivamente $K_1, K_2, K_3$, per cui si può ritenere che la prima passi per i punti $P_2$ e $P_3$; la seconda per $P_1$ e $P_3$ e la terza per $P_1$ e $P_2$.

Ricordiamo che la superficie $\Phi$ proiezione di $F$ deve avere una singolarità simile a $\overline{P}$, comunque il centro di proiezione $O$ vari nello $S_4$, e in particolare se esso si faccia muovere sulla retta $P_1P_2P_3$. Ora, in corrispondenza a tale variazione di $O$, potrà accadere che le curve doppie apparenti $K_1K_2K_3$ su $F$ restino fisse, oppure variino con $O$. Se una di esse, per es. $K_1$, resta fissa, si deduce che essa è una conica: infatti, per essere sempre, la curva $\overline{K}_1$ proiettata nella medesima curva, bisogna che ogni retta congiungente un punto di $\overline{K}_1$ con un punto della retta $P_2P_3$ incontri in un altro punto $K_1$ e quindi la $K_1$ risulta appartenente ad un piano per la retta $P_2P_3$; una curva piana che si proietti come questa in una curva doppia (e non di molteplicità superiore) dev'essere una conica, e perciò la superficie $F$, possedendo $\infty^2$ coniche, dovrà essere proiezione di una superficie di Veronese.

Conviene ora esaminare l'ipotesi che la curva $K_1$ varii al variare di $O$ sulla retta $P_2P_3$. In tal caso, per una conveniente posizione di $O$, la $K_1$ verrà a passare anche per il punto $P_1$ di codesta retta, e si avrà corrispondentemente una superficie $\Phi$ dotata di un punto triplo particolare $\overline{P}$, nel quale due falde, per es. quelle corrispondenti agli intorni di $P_1$ e $P_2$, riescono fra loro tangenti. Ma ciò importa che i piani tangenti ad $F$ in $P_1$ e $P_2$ s'incontrino secondo una retta. Nelle nostre ipotesi dunque la $F$ verrà ad avere $\infty^3$ coppie di piani tangenti incidenti fra loro, in modo che le rette che congiungono i punti di contetto di queste coppie di piani riempiono lo spazio $S_4$; e ciò è escluso dal lemma.

b) Esaminiamo ora l'ipotesi in cui il punto triplo $\overline{P}$ di $\Phi$ sia semplice per una componente $\overline{K}_1$ e doppio per una componente $\overline{K}_2$ della curva doppia. Le $\overline{K}_1$ e $\overline{K}_2$ saranno proiezioni di due curve doppie apparenti $K_1$ e $K_2$ di $F$, di cui la prima potrà supporsi passare semplicemente per $P_2$ e $P_3$, mentre la seconda passerà semplicemente per $P_2$ e $P_3$ e doppiamente per $P_1$. Ora, facendo variare il centro di proiezione $O$ sulla retta $P_1P_2P_3$, potrà accadere che la curva $K_1$ resti fissa ovvero che varii con $O$. Se resta fissa, si conclude come prima che è una curva piana, e quindi una conica, donde segue che la $\Phi$ è proiezione d'una
page:13 superficie di VERONESE. Se invece la $K_1$ varia con $O$, per una qualche posizione di questo, essa viene a passare anche per $P_1$: la singolarità che la $\Phi$ presenta in $\overline{P}$ risulta ora un punto triplo in cui almeno due falde si toccano, e perciò i piani tangenti ad $F$ in due punti come $P_1$ e $P_2$ risulteranno incontrarsi secondo una retta: la $F$ possiede $\infty^3$ coppie di piani tangenti incidenti e si ricade nel caso già escluso.

Da tutto ciò che precede risulta che *la proiezione nello spazio $S_3$ di una superficie dello $S_5$ priva di singolarità possiede in generale una curva doppia irriducibile; fa eccezione soltanto il caso di una superficie di* VERONESE *che di fatto si proietta nella superficie di* STEINER*, dotata di tre rette doppie passanti*
page:15 *per un punto triplo.*

# 2 Sistemi lineari di curve

## 2.1 Fasci lineari

n:1:1

Sia $F$ una superficie che, per semplicità di discolpo, supporremo appartenere allo spazio ordinario ed essere dotata delle singolarità normali definite nella precedente introduzione.

Consideriamo una funzione razionale $t$ del punto variabile su $F$ che non si riduca ad una costante:

$$t = \frac{\varphi(xyz)}{\psi(xyz)}. \tag{2}$$

eq:1:1:

Per ogni valore determinato $t = t_0$ esisteranno punti di $F$ in cui la $t$ assume questo valore: il loro luogo $C$ si dirà una *curva di livello* della funzione razionale $t$ sopra $F$. Al variare di $t$ si avrà su $F$ una semplice infinità di curve di livello che si dice costituire un *fascio lineare.* Tra le $C$ del fascio figura la *curva degli zeri*, cioè la curva $\varphi = 0$ che risponde a $t = 0$, e la *curva dei poli*, cioè la $\psi = 0$ per cui $t = \infty$.

Nel caso che queste due curve abbiano una parte in comune $K$, la $K$ su cui $t$ assume forma indeterminata, può ritenersi come componente fissa, delle $C$, ovvero togliersi da tutte le $C$.

Le definizioni date innanzi sono perfettamente analoghe a quelle che si riferiscono alle curve ed alle serie $g_n^1$ su di esse, e danno luogo ad osservazioni simili. Il fascio delle $C$ definito dalla (2) è dato ugualmente dalla funzione razionate

$$\tau = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta};$$

la sostituzione razionale ha il solo effetto di cambiare il valore di $t$ che corrisponde ad ogni singola curva $C$; pertanto tutte le $C$ figurano ugualmente nel fascio e così la curva degli zeri come quella dei poli non hanno per esso alcun significato particolare.
page:16 Dato il fascio, una funzione razionale che vi corrisponde resta determinata dalla scelta arbitraria delle curve $\tau = 0$e $\tau = \infty$, ed insieme della curva unità $\tau = 1$, questa scelta determinando la sostituzione precedente. Se per due funzioni $t$ e $\tau$ coincidono la curva degli zeri e dei poli, esse differiscono per una costante moltiplicativa.

Notiamo inoltre che la funzione razionale (2) è definita soltanto rispetto *al modulo* $F$. Così due diverso funzioni $\frac{\varphi}{\psi}$ e $\frac{\varphi_1}{\psi_1}$ dovranno ritenersi identiche sopra $F$ quando sia per tutti i punti di $F$:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_1}{\psi_1},$$

cioè

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 \equiv 0 \pmod{.F} \tag{3}$$ eq:1:1:

ossia

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 = AF,$$

dove $A$ rappresenta un polinomio.

Le curve $C$ di un fascio lineare hanno tutte lo stesso ordine; se per una di esse l'ordino si riduce apparentemente, vuol dire che la curva si è spezzata e contiene una parte all'infinito. Per eliminare la riduzione apparente, quando non si voglia ricorrere ad una trasformazione proiettiva della superficie, basta far uso di coordinate omogenee $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Così ad esempio nella (2), se il polinomio $\varphi$ era di grado inferiore a $\psi$, passando a coordinate omogenee, $\varphi$ viene moltiplicato per una conveniente potenza di $x_4$ e diventa quindi manifesto che la curva degli zeri viene a contenere anche la sezione di $F$ col piano all'$\infty$ $(x_4 = 0)$ contato un certo numero di volte.

La definizione di fascio lineare di curve $C$ ha un semplice significato proiettivo: invero l'equazione

$$\varphi(xyz) - t\psi(xyz) = 0 \tag{4}$$ eq:1:1:

rappresenta un fascio di superficie le quali segano la $F$ lungo le curve $C$; e la (3) dice che *lo stesso fascio di curve può essere segato sulla $F$ da diversi fasci di superficie.*

Il fascio delle superficie (4) avrà una curva base $\Gamma$ la quale in generale non apparterrà ad $F$ ed incontrerà $F$ in un numero finito di punti. Questi *punti base del fascio lineare* di curve $C$ sono punti di indeterminazione essenziale per la funzione razionale (2).

Infatti la funzione, che in un punto base assume la forma $\frac{0}{0}$, possiede ivi una singolarità non eliminabile: se invero si cerchi di definire ivi codesto valore con considerazioni di limite, il valore così definito per continuità sarà diverso
page:17 quando ci si avvicini al punto base sopra curve $C$ diverse.

Un punto base per le curve $C$ di un fascio lineare potrà avere per le $C$ una certa molteplicità $i > 1$ e in tal caso si dirà un *punto base $i$-plo del fascio.*

Infine potrà accadere che la curva base $\Gamma$ del fascio (4) ovvero una parte $K$ di essa, se è riducibile, giaccia sopra $F$; allora (come già si è detto) $K$ si potrà considerare come componente fissa delle curve $C$ del fascio (*riducibile*), ma si può anche prescindere da $K$ e ritenere il fascio delle $C$ come costituito dalle sole intersezioni variabili della $F$ colle superficie (4).

## 2.2 Fasci irrazionali

n:1:2

Un fascio lineare di curve $C$ sopra $F$ viene caratterizzato geometricamente dalle proprietà seguenti:

1) è una serie (algebrica) $\infty^1$ d'*indice* 1, cioè tale che per ogni punto generico di $F$ passi una $C$;

2) tale serie è *razionale*, cioè può porsi in corrispondenza biunivoca algebrica con una retta punteggiata o con la serie dei valori di un parametro $t$.

Infatti la $t$ così definita riesce una funzione univoca e perciò razionale dei punti di $F$ e le curve $C$ sono per essa curve di livello. Se si chiama *fascio* una serie di curve $C$ che sia d'indice 1, cioè goda della proprietà 1) si può dire dunque che *ogni fascio razionale è lineare*.

Ma possono aversi sopra una superficie anche dei *fasci irrazionali*, le cui curve costituiscono gli elementi di un ente algebrico non razionale, avente un certo genere $p > 0$. Così per esempio le generatrici di una rigata (le cui sezioni piane sono di genere $p$) formano appunto un fascio irrazionale di rette.

Si può costruire un esempio di superficie che abbia un fascio irrazionale di curve di genere $p$, intersecando con una varietà qualsiasi dello $S_4$ un cono di seconda specie costituito dai piani dello $S_4$ stesso che proiettano da una retta i punti di una curva di genere $p$.

Conviene rilevare che un *fascio di curve, appartenente alla superficie $F$, è certo razionale se possiede un punto base in un punto semplice per la superficie.*

Infatti se il punto base $O$ è semplice per le curve $C$ di un fascio, la serie delle $C$ si trova in corrispondenza biunivoca col fascio delle tangenti in $O$. E se invece il punto è $i$-pio per le $C$ ($i > 1$) allora le $C$ corrispondono in generate ai gruppi di un'involuzione d'ordine $i$ nel fascio delle tangenti anzidette, e questa

page:18 involuzione è razionale (teorema di LÜROTH)[17].

Tuttavia questo ragionamento può cadere in difetto se le curve $C$ abbiano in $O$ tangenti fisse, cioè posseggano come punti base, non soltanto $O$, ma anche altri punti ad esso infinitamente vicini. Per eliminare l'eccezione basta osservare che procedendo sopra un ramo di una $C$ fino ad un ordine $r$ convenientemente elevato si troverà un primo punto $O_r$, appartenente all'intorno $r$-mo di $O$, suscettibile di descrivere liberamente l'intorno del punto base $O_{r-1}$, che, come l'intorno di $O$, costituisce un ente razionale: se $O_{r-1}$ è un punto base semplice, le curve $C$ corrispondono biunivocamente ai punti $O_r$ del detto intorno; se $O_{r-1}$ è $i$-plo e gli succedono più punti liberi, $O_r$, le $C$ rispondono ai gruppi di un'involuzione descritta da questi gruppi di punti.

## 2.3 Sistemi lineari

n:1:3

La definizione del fascio lineare di curve sopra $F$ si può generalizzare considerando i *sistemi lineari di dimensione* $r > 1$.

Un sistema lineare $\infty^r$ di curve $C$ viene segato sopra $F$ da un sistema lineare di superficie (o di ipersuperficie)

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_R\varphi_R = 0 \tag{5}$$ eq:1:3:

la *dimensione* $r$ riesce minore di $R$ quando nel sistema (5) vi sono $\infty^h$ superficie che contengono come parte la $F$, e allora $r = R - h - 1$.

Per i sistemi lineari più volte infiniti $|C|$, come pel fascio, si definiscono le curve *componenti fisse* delle $C$ e i *punti base* di $|C|$; un punto base è un punto comune a tutte le $C$, dove si annullano contemporaneamente le $\varphi$.

Un sistema lineare $|C|$ si può definire in modo intrinseco indipendentemente dal carattere proiettivo della superficie, così come si è fatto per il fascio lineare. Perciò si considerino $r$ funzioni razionali del punto variabile di $F$ le quali

[17] Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro II, cap. I, § 1, vol I.

abbiano tutte la stessa curva polare e che supporremo rappresentate da

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad t_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \quad \dots \quad t_r = \frac{\varphi_r}{\varphi_0},$$

ammettendo per semplicità di discorso che esse siano linearmente indipendenti sopra $F$, sicché *non sia possibile* trovare $r+1$ costanti (non tutte nulle) $a_0, a_1, \dots, a_r$, per cui si abbia identicamente

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \equiv 0 \pmod{.F}.$$

Allora la curva di livello della funzione

$$t_0 = \lambda_0 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_r \varphi_r$$

descrive il sistema lineare $|C|$ di dimensione $r$. In questo sembra assumere una posizione speciale la curva polare $\varphi_0$; ma si può scegliere come tale una curva page:19 qualunque del sistema, giacché ad uno stesso sistema $|C|$ rispondono infiniti sistemi lineari di funzioni che si deducono l'uno dall'altro con sostituzioni lineari.

La dimensione $r$ del sistema lineare $|C|$ riesce definita geometricamente dalla proprietà che segue: *per $r$ punti generici della superficie passa una ed una sola curva del sistema.*

Un sistema lineare $C$ si dirà *irriducibile* se la curva generica $C$ di esso è irriducibile. Per un sistema lineare irriducibile $|C|$ si dirà *genere effettivo* il genere della sua curva generica, e *grado effettivo* il numero delle intersezioni variabili di due $C$ generiche. Per $r = 1$ il grado è nullo, poiché ogni punto comune a due curve del fascio è un punto base che appartiene a tutte le $C$.

Fra la dimensione $r$ e il grado $n$ di un sistema lineare $|C|$ sussisto la diseguaglianza $r \leq n+1$; infatti la serie segata sopra una qualunque $C$ di $|C|$ dalle rimanenti curve del sistema, fuori dei punti base, è una $g_n^{r-1}$, per cui si ha $r - 1 \leq n$.

La serie lineare $g_n^{r-1}$, definita sopra una curva generica $C$, ha fondamentale importanza nello studio del sistema lineare e dicesi *serie caratteristica* di $|C|$.[18]

[18] La serie caratteristica di un sistema lineare è stala introdotta da C. Segre e G. Castelnuovo intorno al 1890. La denominazione di *serie caratteristica* è stata adoperata per la prima volta da G. Castelnuovo nelle: «*Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*». Memorie dell'Acc. di Torino, s. II, t. XLII, 1891, riprodotta a pag. 137 e segg. delle «Memorie scelte», Zanichelli, Bologna, 1937.

Il grado effettivo di un sistema lineare di curve, resta anche definito per un sistema di curve riducibili che sia privo di parti fisse. Ora si può dimostrare che il grado vale $n > 0$ a meno che il sistema stesso non sia un fascio lineare, ovvero le sue curve siano composte con quelle di un fascio (razionale o no).

Infatti se $n = 0$ tutte le curve $C$ del sistema che passano per un punto generico dovranno coincidere in una sola (dimensione $r = 1$); oppure dovranno avere in comune una curva $K$, e l'insieme delle $K$ costituirà un fascio, razionale o no, con cui le $C$ vengono composte.

## 2.4 Proprietà caratteristica dei sistemi lineari

n:1:4

Abbiamo rilevato che, essendo $|C|$ un sistema lineare di dimensione $r$ sopra la superficie $F$, per $r$ punti generici di $F$ passa una ed una sola curva $C$. Questa
page:20 proprietà è caratteristica per $r > 1$[19], mentre si è visto che per $r = 1$ possono aversi anche fasci non lineari.

La dimostrazione del teorema si dà come segue.

Pongasi per semplicità di discorso che le curve del sistema $|C|$ siano irriducibili, e si consideri dapprima il caso $r = 2$. Le $\infty^2$ curve si segano a due a due nei gruppi di un'involuzione $I_n$ di ordine $n$ uguale al grado di $|C|$. Si assumano questi gruppi come elementi (punti) di una nuova superficie $F'$; allora si avrà su $F'$ un sistema $\infty^2$ di curve $C'$ trasformato di $|C|$, che si segano a due a due in un punto. Le curve $C'$ che passano per un punto $A'$ formano un fascio dotato di un punto base, e perciò razionale (cfr. § precedente). Accanto a questo fascio se ne consideri un altro con un punto base $B'$. I due fasci di $C'$ coi centri $A'$ e $B'$ si possono riferire rispettivamente a due fasci di rette $A$ e $B$ nel piano, per mezzo di proiettività che facciano corrispondere ugualmente alla curva $C'$, congiungente $A'$ e $B'$, la retta $AB$. Da questo riferimento risulta una corrispondenza biunivoca fra i punti di $F'$ e i punti del piano, dove alle rette del piano corrispondono le curve $C'$ e ai fasci di rette i fasci di $C'$; ciò porta che le

[19] F. Enriquaes, *Una questione sulla lineatila* ecc. Atti Acc. Lincei, 1893. Cfr. C. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.* Ann. di Mat., s. II, t. 22 (1894).

$C'$ sopra $F'$ e quindi anche le $C$ sopra $F$, formino un sistema lineare (*rete*). Il teorema essendo così stabilito per le reti si estenderà al caso dei sistemi lineari $\infty^3$, e così in generale, passando dalla dimensione $r$ alla dimensione $r+1$. Se $|C|$ è un sistema $\infty^3$ di curve, tale che per tre punti generici passi una $C$, le $C$ passanti per un punto fisso $A$ formeranno una rete. Ora le reti definite da due punti base $A$ e $B$ potranno riferirsi proiettivamente a due stelle di piani $A'$ e $B'$ dello spazio ordinario, in modo che alle $C$ del fascio comune alle due reti rispondano ugualmente gli stessi piani comuni alle due stelle. Da ciò risulta una corrispondenza biunivoca (omografica) fra il sistema delle $C$ e i piani dello spazio $S_3$, dove ai piani di un fascio corrisponderanno le $C$ di un fascio, e ai piani di una stella le $C$ di una rete; ciò porta che il sistema $|C|$ è un sistema lineare, c. d. d.

n:1:5

## 2.5 Estensione dei teoremi di Berlini

E. Bertini ha dato per i sistemi lineari di curve piane due teoremi fondamentali[20]: il primo dice che le curve di un sistema lineare non possono avere punti doppi o multipli variabili che non appartengano ad una componente fissa; il secondo – che è un corollario del primo – afferma che qualora le parti variabili di un sistema lineare siano riducibili esse si compongono con le curve di un
page:21 fascio.

Questi teoremi si estendono facilmente ai sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie qualunque.[21]

Quando si segua la dimostrazione indicata nelle lezioni di Enriques-Chisini[22], l'estensione riesce immediata.

Se la curva generica $C$ del sistema lineare $|C|$ possiede un punto doppio o multiplo variabile $O$, la curva $C$ ha almeno due intersezioni riunite in $O$ con ogni curva infinitamente vicina, e quindi con le curve di tutti i fasci a cui essa

[20]Rondic. Istituto Lombardo, 1880.

[21]Cfr. F. Enriques, *Ricerche di Geometria* ecc. Memorie. Acc. di Torino, 1893 o *Introduzione alla geometria sopra una superficie algebrica.* Società Italiana delle Scienze (dotta dei XL), I896. Il teorema della riducibilità è già osservato in Noether, Math. Ann., VIII, 1874.

[22]Op. cit., Libro II, cap. I, § 5, vol. I, pag. 180.

appartiene: ciò significa che $O$ è punto base ovvero un punto appartenente ad una curva $K$ componente fissa delle $C$.

Enunciamo dunque che: *le curve di un sistema lineare sopra una superficie non possono avere punti doppi, o multipli variabili* (fuori dei punti base) *che non appartengano ad una componente fissa.*

II secondo teorema di Bertini segue come corollario.

Le curve $C$ di $|C|$ (non aventi componenti fisse) siano riducibili, per esempio in due parti (variabili) $K$ e $K'$. Se $K$ e $K'$ non appartengono ad un medesimo fascio, con cui siano composte le curve $C$, vi saranno per un punto generico $O$, almeno una curva $K$ ed una curva $K'$, distinta dalla $K$; per conseguenza le $K$ e $K'$ dovranno incontrarsi almeno in un punto variabile, e le $C$ dovranno avere almeno un punto doppio suscettibile di variare liberamente sopra la superficie, il che è assurdo. Invero se i punti comuni alle $K$ e $K'$ che compongono una $C$ cadessero sempre in punti base del sistema $|C|$, tutte le $K$ e tutte le $K'$ passerebbero per quei punti fissi e non avrebbero intersezioni variabili. Non può accadere neppure che le curve complementari $K$ e $K'$ s'incontrino in punti di una curva fissa, perchè questa risulterebbe una componente fissa delle $C$, che si è supposto non esistere.

Enunciamo dunque: *se la curva generica di un sistema lineare $|C|$ sopra $F$ è riducibile*:

1) *$C$ contiene una parie fissa, tolta la quale rimane un sistema irriducibile*, oppure

2) *le curve $C$ sono composte con $r > 1$ curve variabili in un fascio, razionale o no* (e sopra questo, concepito come ente $\infty^1$, formano una $g_r$), o infino

3) *le $C$ sono composte come nel caso 2) con le curve di un fascio, ed inoltre con curve fisse che a queste si aggiungono.*

Nei casi 2) e 3) rientrano tutti i sistemi lineari di dimensione $r > 1$, e di page:22 grado $n = 0$ (cfr. § 2.3).

## 2.6 Superficie immagini di sistemi lineari

n:1:6

Si consideri un sistema lineare $|C|$ irriducibile di dimensione $r \geq 3$ e perciò di grado $n > 0$. Riferendo proiettivamente $|C|$ al sistema degli iperpiani di uno spazio $S_r$ si dà luogo ad una trasformazione della nostra superficie $F$ in una $F'$ d'ordine $n$, su cui le trasformate delle $C$ vengono segate dagli iperpiani. Infatti le $C$ si possono ritenere astrattamente come gli elementi (iperpiani) di uno spazio $S_r$ e quindi la proiettività indicata fa corrispondere al sistema lineare $\infty^{r-1}$ delle $C$ passanti per un punto $P$, una stella di iperpiani passanti per un punto $P'$ dello $S_r$ e, al variare di $P$ su $F$ il punto $P'$ varia descrivendo una superficie $F'$.

La corrispondenza univoca fra $F$ ed $F'$ è, in generale, univocamente invertibile, perchè alla stella di centro $P'$ corrisponderà un sistema lineare di curve $C$ dotato di un punto base (variabile) $P$ e questo sistema non avrà in generale altri punti base, conseguenti dall'esistenza di $P$.

In verità non si può escludere che le condizioni di passaggio delle $C$ per un punto generico di $F$ portino di conseguenza il passaggio per altri punti $P_1 P_2 \dots P_{m-1}$; allora i gruppi analoghi a $PP_1 \dots P_{m-1}$ formeranno sopra $F$ un'*involuzione di ordine $m$ a cui apparterranno le $C$*; e la superficie $F'$ dello $S_r$ determinata innanzi risulterà una superficie d'ordine $\frac{n}{m}$, da considerarsi come multipla d'ordine $m$.

Che effettivamente l'appartenenza ad un'involuzione costituisca una circostanza particolare per un sistema lineare $|C|$ di dimensione $r \geq 3$, risulta da un semplice computo di costanti, perchè vi sono almeno 3 curve passanti per $P$ e linearmente indipendenti, ed in generale non vi è ragione perchè una di queste passi per l'intersezione delle altre due. Invece un sistema lineare $\infty^2$ (cioè una rete) appartiene sempre ad un'involuzione d'ordine $n$, ove sia di grado $n > 1$; poiché per un punto $P$ passano soltanto due $C$ linearmente indipendenti e tutte le altre $C$ per $P$ formano un fascio, che ha come punti base le loro intersezioni. Cosi, dunque, una refe $|C|$ di grado $n$ conduce ad un *piano multiplo d'ordine $n$*, dove le $C$ hanno per immagini le rette $n$-ple e su cui assume importanza speciale la *curva di diramazione*, luogo dei punti del piano a cui corrispondono gruppi dell'involuzione dotati di un punto doppio.

Si può dare un esempio di un sistema lineare $|C|$ di dimensione $r \geq 3$ appartenente ad un'involuzione, considerando il sistema delle $C$ intersezioni della superficie $F$ con i coni di un certo ordine $n$ che abbiano il vertice in un punto fisso dello spazio; il sistema $|C|$ apparterrà ora ad un'involuzione d'ordine
page:23 $m$ e sarà di grado $mn$, designando con $m$ l'ordine della superficie $F$.

Volendo *escludere l'appartenenza ad un'involuzione* di un sistema $|C|$ diremo in breve che esso è un *sistema semplice*.

Ritornando in generale alla trasformazione della superficie $F$ cui dà luogo un sistema lineare $|C|$ di dimensione $r \geq 3$, noteremo che la corrispondenza proiettiva di cui sopra si è discorso si traduce nelle formule come segue: se il sistema $|C|$ è rappresentato da

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0,$$

si dovrà prendere le coordinate dei punti dello $S_r$:

$$X_0 \equiv \varphi_0 \, X_1 \equiv \varphi_1 \ \ldots \ X_r \equiv \varphi_r.$$

Concluderemo enunciando un teorema che estende alle superficie una nota considerazione relativa alle curve e alle serie lineari sopra di esse:

*la geometria delle trasformazioni birazionali sopra le superficie, quando si ricerchino le relazioni invariantive con un sistema lineare semplice $\infty^3$ almeno, si rispecchia nella geometria proiettiva della superficie immagine del sistema.*

Così la relazione di due sistemi lineari $|C|$ e $|K|$ (semplici $\infty^3$ almeno) sopra $F$, di cui il primo contenga il secondo, si rispecchia nel fatto che la superficie immagine di $|K|$ può ritenersi come proiezione della superficie immagine di $|C|$ da un certo spazio lineare. Questo, in generale, segherà la detta superficie in un gruppo di punti, se $|K|$ è dedotto da $|C|$ con l'imposizione di quei punti base, ed invece segherà la superficie secondo una $L$ se $|K|$ sia contenuto parzialmente in $|C|$ per modo che aggiungendo alle $K$ la curva fissa $L$ si ottengano delle curve $C$.

Per quel che concerne i punti base gioverà tener presente le osservazioni che seguono. Se $O$ è, sopra la superficie $F$, un punto base $i$-plo di $|C|$ (semplice per $F$), esso sarà fondamentale per la trasformazione che muta la $F$ nella $\Phi$, avente come sezioni iperpiane le $C$; e se le $C$ non hanno alcuna tangente fissa in $O$, ad $O$ corrisponderà su $\Phi$ *una curva eccezionale* di ordine $i$. Se invece $O$, essendo base $i$-plo per $|C|$ con $i \geq 1$, le $C$ abbiano una tangente fissa in $O$ (cioè un punto base semplice $O_1$ infinitamente vicino ad $O$), senza contatto più elevato, si potrà dire ancora che ad $O$ corrisponde su $\Phi$ una curva eccezionale d'ordine $i$, ma questa, in generale, si comporrà di una curva di ordine $i-1$, i cui punti rispondono ai punti variabili nell'intorno del primo ordine di $O$, e d'una retta immagine dell'intorno di $O_1$ (i cui punti appartengono all'intorno del secondo ordine di $O$). In particolare se $i = 1$ l'intero intorno del punto semplice $O$ avrà per immagine su $\Phi$ l'intorno di un punto doppio conico, cui si aggiungerà la retta eccezionale immagine di $O_1$ (si pensi, ad esempio, alla, rappresentazione page:24 piana del cono quadrico).

**Nota.** – In generale se il punto semplice $O$ della superficie $F$ costituisce una singolarità comunque complicata per le curve $C$ di $|C|$, si può sciogliere questa singolarità trasformando la $F$ in una superficie $\Phi$ su cui l'intorno del punto $O$ (preso nella sua integrità) verrà rappresentato da una curva eccezionale composta di tante parti quanti sono i rami (lineari o meno) che costituiscono la singolarità delle $C$ in $O$; e la connessione di queste parti rispecchierà la composizione della detta singolarità mediante punti multipli o semplici infinitamente vicini, e le loro relazioni di prossimità[23] in una maniera che ha formato oggetto dell'analisi di E. Barber e di O. Zariski[24]. Ma avremo occasione di ritornare sull'argomento.

[23] *Enriques-Chisini*, Op. cit., Libro IV, vol. II, pag. 327 e segg.

[24] Cfr. Barber e Zariski, *Reducible exceptional curves of the first Kind.* American Journal of Mathematik, 1935 (pag. 119). P. Du Val., American Journal of Math., 1936.

## 2.7 Curve equivalenti e sistemi lineari completi

n:1:7

Le considerazioni che seguono estendono passo a passo ai sistemi lineari di curve sopra una superficie ciò che si dice per i gruppi di punti equivalenti e per le serie lineari complete appartenenti ad una curva[25].

Sopra la superficie $F$ due curve (dello stesso ordine) si dicono *equivalenti* quando appartengono ad un medesimo sistema lineare di dimensione $r > 0$: se esse sono distinte vuol dire che appartengono ad un fascio lineare; la considerazione dei sistemi di dimensione zero, significa che una curva deve ritenersi equivalente a sè stessa.

L'equivalenza di due curve $C$ e $K$ si esprimerà scrivendo

$$C \equiv K \quad \text{o anche} \quad C = K.$$

Due curve equivalenti $C$ e $K$ possono sempre considerarsi come curva degli zeri e curva dei poli di una funzione razionale $t$ sopra $F$; le due curve vengono scambiate fra loro ove si sostituisca alla funzione $t$ la $\frac{1}{t}$.

La relazione di equivalenza fra curve sopra una superficie gode delle tre proprietà fondamentali dell'uguaglianza:

1. la proprietà *riflessiva*, espressa da $C \equiv C$,

2. la proprietà *simmetrica*, se $C \equiv K$ anche $K \equiv C$,

3. la proprietà *transitiva*, se $C \equiv K$ e $K \equiv L$ anche $C \equiv L$.

Per dimostrare quest'ultima proprietà si costruisca una funzione razionale $t$
page:25 avente come curva degli zeri $K$ e come curva dei poli $C$, e poi una funziono razionale $\tau$ che abbia $K$ come curva degli zeri ed $L$ come curva dei poli; allora la funzione $\frac{\tau}{t}$ avrà come curva degli zeri $C$ e come curva dei poli $L$. Ciò prova appunto che $C$ ed $L$ sono equivalenti.

Dalle proprietà anzidette risulta il teorema fondamentale:

*Sopra una superficie $F$ la totalità delle curve equivalenti ad una data curva $C$ costituisce un sistema lineare che dicesi completo.*

[25] Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro V, vol. III (1924).

Questo sistema si ottiene come insieme delle curve di livello della funzione razionale che risulta combinando linearmente le funzioni razionali indipendenti, per cui la $C$ è curva dei poli.

Il sistema *completo* $C$ così definito sarà in generale *privo di punti base*, ed in ogni caso s'intenderà, salvo avviso contrario, *virtualmente* privo di punti base, ai sensi che verranno precisati più tardi; ma si può anche definire il sistema completo relativamente ad un *gruppo di punti base assegnati* sopra la $C$. Si noti che, trasformando la superficie in guisa che i punti base della $C$ diventino curve (eccezionali), si dovrà ritenere che la trasformata di $C$ sia spogliata di queste curve che altrimenti apparirebbero come componenti fisse del sistema trasformato. E così la nozione del sistema completo relativamente ad un gruppo di punti base si riconduce in generale a quello del sistema completo senza punti base, sopra una superficie trasformata.

Comunque sia, il sistema completo irriducibile, con o senza punti base, resta definito a partire da un sistema lineare ($\infty^2$ almeno) contenuto in esso, come il sistema più ampio dello stesso grado, che contiene il dato.

Dalla proprietà transitiva dell'equivalenza segue che il sistema lineare completo $|C|$, con o senza punti base assegnati, viene definito ugualmente a partire da mia qualunque delle sue curve.

È ovvio che il sistema completo $|C|$ si può costruire come segue.

Si costruisca anzitutto un sistema lineare qualunque che contenga (totalmente) $C$ e poi si ampli successivamente questo sistema, finché è possibile; siccome la dimensione non può superare il grado aumentato di un'unità, si perverrà in tal guisa ad un sistema $|C|$ che non sarà contenuto in un altro sistema lineare più ampio dello stesso ordine, e queste sarà il sistema lineare completo definito dalla $C$. Pertanto, comunque si proceda alla costruzione dei sistemi via via più ampi di cui si è discorso, si riuscirà infine allo stesso sistema lineare completo.

Al concetto di sistema lineare completo risponde il concetto di *superficie normale*, superficie di uno spazio $S_r$ che non può ottenersi come proiezione di un'altra dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore: essere la su-page:26 perficie normale significa, che il sistema (irriducibile) delle sue sezioni iperpiane è completo, e viceversa.

Ecco dunque il significato proiettivo del teorema dei sistemi completi. Si consideri, per esempio nello spazio ordinario, una superficie $F$ di un certo ordine $n$; potrà accadere che la $F$ si ottenga come proiezione di due superficie dello stesso ordine dello $S_4$, $F_1$ ed $F_1'$, le proiezioni essendo fatte rispettivamente da due punti $O$ ed $O'$. Ora se $F_1$ ed $F_1'$ sono superficie normali, risulteranno fra loro proiettive, cioè proiettivamente identiche. Se ciò non è, vuol dire che $F_1$ potrà ritenersi proiezione di una superficie $F_2$ dello $S_5$ ed $F_1'$ proiezione di una $F_2'$ dello $S_5$, e così via; procedendo in un modo qualunque da una superficie ad un'altra dello spazio superiore, si arriverà in ultimo ad una superficie $F_r$ dello spazio $S_{r+3}$ che sarà normale; e questa $F_r$ resterà sempre proiettivamente definita, comunque si arrivi ad essa attraverso serie diverse di superficie $(F_1, F_2, \dots,$ o $F_1', F_2', \dots)$ che si deducono per proiezione l'una dall'altra.

Esempi relativi alle superficie normali s'incontrano già nella teoria delle superficie razionali[26].

Così una superficie $F_5$ del $5^o$ ordine dello spazio ordinario, a sezioni piane ellittiche, dotata di curva doppia del $5^o$ ordine appartenente ad un cono quadrico ed avente un punto triplo, triplo anche per la superficie, nel vertice di detto cono, si può ritenere proiezione di più superficie $F_5$ dello stesso ordine dello spazio $S_4$, non proiettive fra loro; ma queste sono proiezioni di un'unica superficie normale dello $S_5$, proiettivamente definita. Queste asserzioni si giustificano partendo dalla rappresentazione piana della $F_5$ mercè un sistema lineare $\infty^3$ di cubiche $C_3$ con 4 punti base semplici $A_1A_2A_3A_4$.

Infatti un tale sistema $\infty^3$ è contenuto in $\infty^1$ sistemi lineari $\infty^4$ di $C_3$ cogli stessi punti base $A_1A_2A_3A_4$, i quali sono, nel piano, omograficamente (e anche birazionalmente) distinti e perciò rappresentano superficie $F_5$ di $S_4$, non proiettive fra loro. Invece la superficie normale di $S_5$ di cui queste $F_5$ sono proiezioni (da un punto esterno) viene proiettivamente definita dal sistema completo delle

[26] Cfr. Enriques-Conforto, *Le superficie razionali*, Bologna, 1939 (1945).

$C_3$ per $A_1A_2A_3A_4$.

n:1:8

## 2.8 Somma e differenza di sistemi lineari: teorema del resto

Curve composte con curve equivalenti, cioè *somme di curve equivalenti, sono equivalenti.*

Infatti siano $C_1$ e $C_2|$, $K_1$ e $K_2$ due coppie di curve equivalenti, e si assuma page:27 la $t$ funzione razionale che abbia $C_1$ come curva polare e $C_2$ come curva degli zeri; e $\tau$ funzione razionale che abbia $K_1$ come curva polare e $K_2$ come curva degli zeri; allora la funzione $\tau t$ avrà come curva polare $C_1 + K_1$ e come curva degli zeri $C_2 + K_2$. Cosi dall'essere

$$C_1 \equiv C_2, \quad K_1 \equiv K_2$$

si deduce

$$C_1 + K_1 \equiv C_2 + K_2.$$

Risulta di qui che, dati due sistemi lineari qualunque $|C|$ e $|K|$, esiste un ben determinato sistema completo $|C + K|$, che contiene totalmente le curve composte $C + K$; questo si dirà il *sistema completo somma* di $|C|$ e $|K|$.

Conviene notare che se $|C|$ e $|K|$ sono sistemi lineari irriducibili di dimensione maggiore di zero, non coincidenti in un medesimo fascio, il sistema completo $|C + K|$ è irriducibile. Aggiungasi che se i sistemi irriducibili $|C|$ e $|K|$ posseggono dei punti base assegnati, questi sono sempre base per $|C+K|$. C'è qui una ovvia conseguenza della estensione del teorema di Bertini. In particolare è irriducibile il doppio e in generale il sistema $|sC|$ multiplo secondo $s$ del sistema $|C|$, tranne il caso che $|C|$ sia un fascio.

Essendo ancora $|C|$ e $|K|$ due sistemi non coincidenti in uno stesso fascio si considerino le curve composte $C + K$; abbiamo detto che esse sono contenute nel sistema completo $|C + K|$; ma in generale potranno essere contenuti anche in sistemi di dimensione inferiore, e in particolare vi sarà un *sistema somma minima* dei due dati.

Per esempio si assuma una superficie $F$ d'ordine $n$ dello spazio ordinario, priva di singolarità; per un punto $O$ di essa passano $\infty^2$ piani che segano una rete completa; il doppio minimo di questa è il sistema $\infty^5$ segato dai coni quadrici col vertice in $O$; ma questo sistema che ha il punto base $O$ doppio non è completo, essendo contenuto nel sistema $\infty^6$ segato sulla $F$ dalle quadriche che la toccano in $O$.

La *sottrazione* di due sistemi lineari, di cui uno contiene parzialmente l'altro, si definisce come *operazione inversa della somma* e precisamente come segue.

Sia $|C|$ un sistema lineare di cui faccia parte la curva spezzata $C \equiv L + K$; allora dicesi sistema *residuo* della curva $K$ rispetto a $|C|$, il sistema di tutte le curve $L$ che insieme a $K$ costituiscono una curva di $|C|$. In forza delle proprietà delle curve equivalenti si può affermare che:

se una curva particolare $C \equiv L + K$ del sistema completo $|C|$ contiene parzialmente una $K$, ogni altra curva equivalente a $K$ fa parte di una $C$. E page:28 quindi si ha il *teorema del resto: il sistema lineare $|L|$ residuo di una $K$ rispetto ad un sistema $|C|$, è pure residuo di ogni altra curva equivalente a $K$.*

Insomma il *sistema lineare completo differenza* di $|C|$ e $|K|$:

$$|L| = |C - K|,$$

è definito dalla relazione

$$|C| = |L + K|.$$

**Nota.** – Il teorema enunciato ammette un complemento proiettivo che dimostreremo più avanti. *Vedremo infatti che sopra una superficie $F$ dello spazio ordinario con singolarità normali, le superficie (aggiunte) di un dato ordine che passano per la curva doppia segano, fuori di questa, un sistema lineare completo.*

In particolare, sopra una superficie, dello spazio ordinario, priva di singolarità, le superficie $\varphi$ di un dato ordine segano un sistema completo.

Se, riferendoci al caso generale, si conducono le $\varphi$ d'un certo ordine passanti per una curva $C$ di $F$, e si considerano le intersezioni residue $K$ di queste superficie aggiunte con $F$, *ogni curva $C$ del sistema completo $|C|$ risulterà ugualmente residua di ogni $K$*, rispetto al sistema segato dalle $\varphi$ (fuori della curva doppia), e reciprocamente ogni $K$ è residua di ogni $C$.

Questa è la forma del *Restsatz* di M. NOETHER[27], che analogamente a ciò che si dice per la geometria sopra una curva (osservazione di G. CASTELNUOVO, 1890) contiene due affermazioni distinte: la prima relativa alla sottrazione dei sistemi completi, l'altra che ne reca un complemento proiettivo, concernente l'integrità del sistema, segato sopra una superficie $F$ dello spazio $S_3$ dalle sue aggiunte $\varphi$ di un dato ordine.

Conviene ora osservare che, mentre l'operazione della somma conduce in generale, come si è detto, da sistemi lineari irriducibili a sistemi irriducibili, ciò non ha più luogo per la sottrazione: quando si sottragga da un sistema irriducibile $|C|$ una curva $K$ (irriducibile, o no) il sistema completo residuo $|C-K|$ può risultare riducibile. Un semplice esempio si ha considerando un fascio lineare $|L|$ che, per semplicità, supponiamo privo di punti base, ed un sistema lineare $|K|$: se si somma $|K|$ a $|2L|$ si ottiene un sistema $|C| = |K+2L|$. E sottraendo da questo $|K|$, si ha il sistema doppio di $|L|$, sistema riducibile composto con le curve del fascio $|L|$.

page:29 Può anche accadere che sottraendo una $K$ dal sistema irriducibile $|C|$, si ottenga un sistema lineare che contenga una parte fissa $K'$, il cui distacco dalle $C$ sia una conseguenza del distacco della $K$; e similmente può anche accadere che sottraendo una curva $K$ da $|C|$ il sistema residuo $|L|$ abbia come conseguenza qualche nuovo punto base $O$ oltre ai punti base di $|C|$ che non appartengono a $K$. Questo caso si riconduce al precedente con una trasformazione della superficie che muti $O$ in una curva eccezionale, perchè sulla superficie trasformata codesta curva apparirà come parte fissa di $|L|$.

**Osservazioni.** – La definizione del sistema $|L| = |C-K|$ è legata ad un presupposto d'esistenza, poiché la differenza assume significato effettivo soltanto se il sistema $|C|$ contiene parzialmente $|K|$. Ma nel seguito gioverà anche

[27] *Mathematische Annalen*, Bd. VIII. Cfr. per le curve: BRILL e NOETHER, *Math. Ann.*, Bd. VII; ENRIQUES-CHISINI, Op. cit., Libro V.

parlare di *curve virtuali* che risultano definite dalla sottrazione, anche quando questa sia effettivamente impossibile. Perciò si riterrà la relazione simbolica

$$|C - K| = |L - M|$$

come equivalente alla

$$|C + M| = |K + L|.$$

Le curve virtuali vengono definite come i numeri negativi nella teoria degli operatori di Peano, cioè come possibili addendi. Sommare la curva virtuale $C - K$ ad un sistema $|D|$, vorrà dire sommargli $C$ e sottrante $K$, ciò che risulterà in generale possibile per sistemi sufficientemente ampi. In ogni caso l'equivalenza delle curve virtuali $C - K$ e $L - M$ significa l'equivalenza dei sistemi lineari

$$|D + C - K| = |D + L - M|,$$

essendo

$$|D + (C - K)| = |D + C - K|.$$

Tuttavia si può dare un concetto più ristretto delle curve virtuali come curve non aventi esistenza effettiva ma di cui esiste il doppio ovvero un multiplo, siccome avremo luogo di vedere nel seguito. E questo concetto piuttosto che ai numeri negativi risponde a quello degli *ideali*, che s'incontrano nella teoria dei corpi algebrici.

**Notizia.** – L'idea, se non il nome, delle «curve virtuali», cioè l'idea che la curva $C-K$, definita mercè il sistema lineare differenza di due altri, risponda ad un ente matematico dotato di una certa realtà, anche quando la sottrazione non conduca ad una curva effettiva, si è affacciata ad Enriques in rapporto alle curve canoniche: essa costituisce anzi il motivo principale del nuovo sviluppo dato alla teoria nel passaggio dalle *Ricerche* del 1893 alla *Introduzione* del 1896, dove si ricerca in sostanza il più largo significato che assume l'invarianza delle
page:30 dette curve canoniche, anche quando il genere $p = 0$. Della curva differenza, $C - K$, l'A. definisce i caratteri virtuali, grado e genere (cfr. § 2.10), e rileva che, pur mancando, può avere un doppio dotato di esistenza effettiva. La

locuzione «virtuale», applicata alla curva oltreché ai suoi caratteri (che così venivan designati da ENRIQUES), si trova in una Nota di SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendic. Istituto Lombardo, 1905). L'interpretazion topologica dello curve virtuali come cicli a due dimensioni è stata avvertita da S. LEFSCHETZ.

## 2.9 Superficie immagine del sistema somma

n:1:9

Si abbiano sulla superficie $F$ due sistemi lineari irriducibili $|C|$ e $|K|$ rispettivamente di dimensione $r$ e $s$, dove sia $r \geq 1$, ed $s \geq 1$. Si può costruire in generale una superficie trasformata $\Phi$, immagine del sistema somma $|C + K|$, entro uno spazio ad $R$ dimensioni, dove riesce $R > r + s$; il sistema somma di cui si parla può essere il sistema somma minima o anche, se si vuole, il sistema completo.

Comunque sia, ci saranno nello $S_r$, due serie lineari di spazi rispettivamente ad $R-r-1$ dimensioni e ad $R-s-1$ dimensioni secanti le $K$ e le $C$, per modo che gli $\infty^r$ iperpiani passanti per uno $S_{R-r-1}$ della prima serie segheranno le $C$, contenendo gli $S_{R-s-1}$ a cui esse appartengono, e reciprocamente si dica per gli iperpiani che passano per uno $S_{R-s-1}$ della seconda serie.

Si fissi uno $S_{R-r-1}$ della prima serie secante una curva $C$ di $|C|$ e un $S_{R-s-1}$ della seconda, secante una curva $K$ di $|K|$; questi saranno contenuti in un iperpiano dello $S_R$, ed avranno perciò in comune un $S_{R-r-s-1}$; proiettando da questo sopra un $S_{r+s}$ si otterrà in tale spazio un immagine $F$ della superficie data che conterrà una particolare $K$ sezione di un $S_{s-1}$ e una particolare $C$ sezione di un $S_{r-1}$ e dove gli iperpiani per lo $S_{s-1}$ segano le $\infty^r$ curve $C$, e gli iperpiani per lo $S_{r-1}$ le $\infty^s$ $K$.

Prendiamo in particolare $r = 2$, $s = 1$: saremo condotti ad una superficie dello spazio ordinario su cui la rete delle curve $C$ viene segata dai piani per un punto $O$, e il fascio delle $K$ dai piani per una retta $a$ (non passante per $O$) e la superficie così ottenuta sarà certo in corrispondenza biunivoca con quella da cui siano partiti, se $|C|$ e $|K|$ non appartengono ad una medesima involuzione.

La costruzione della superficie $F$ si potrà ottenere anche direttamente, ponendo una corrispondenza proiettiva fra la rete $|C|$ e la stella di piani $O$, e fra il fascio $|K|$ e il fascio di piani $a$. Alla $\overline{K}$ che si aggiunge alle $C$ della rete viene così a corrispondere l'intorno del punto multiplo $O$, che sarà precisamente page:31 $i$-plo, ove si designi con $i$ il numero delle intersezioni di una $C$ e di una $K$; invero l'intorno di $O$ dovrà avere (come $\overline{K}$) i punti a comune con una sezione piana $C$. Invece alla $\overline{C}$, che si aggiunge alle $K$ del fascio, corrisponderà la retta $a$ multipla per $F$, che sarà precisamente $n$-pla, designando con $n$ il grado di $|C|$. Il piano $Oa$ segherà la superficie $F$ fuori di $a$ secondo $i$ rette eccezionali, uscenti da $O$. La superficie $F$ sarà dunque d'ordine $n+i$ e si vede, che essa è l'immagine di un particolare sistema $\infty^3$ contenuto in $|C+K|$, che possiede $i$ punti base nei punti comuni a $C$ e $K$: sono questi punti che danno origine alle rette eccezionali per $O$ di cui s'è detto sopra.

Se ora si vuole costruire sulla $F$ il sistema somma della rete $|C|$ e del fascio $|K|$, è chiaro che converrà ricorrere al sistema delle superficie che si ottengono sommando un piano per $O$ e un piano per $a$, e perciò al sistema lineare $\infty^5$ delle quadriche per $O$ ed $a$: si otterrà così il minimo sistema somma $|C+K|$.

## 2.10 Caratteri virtuali

n:1:10

Siano $|C_1|$ e $|C_2|$ due sistemi lineari irriducibili sopra la superficie $F$, e si designino rispettivamente con $n_1$ ed $n_2$ i loro gradi effettivi, con $\pi_1$ e $\pi_2$ i loro generi, e con $i$ il numero delle intersezioni variabili di una $C_1$ con una $C_2$. Il *grado del sistema* $|C_1+C_2|$ sarà il numero delle intersezioni

$$(C_1+C_2)^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2,$$

e quindi varrà

$$n = n_1 + n_2 + 2i$$

Il *genere dei sistema somma* varrà

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

tale essendo l'espressione del genere di una curva che viene a spezzarsi in due parti, espressione determinata dal NOETHER secondo l'esigenza della continuità[28].

Queste formule conducono a definire *il grado e il genere virtuale di una curva* $C$ sopra $F$, indipendentemente dalla possibilità di estendere il sistema lineare $\infty^0$ da essa determinato. A tale scopo si associ alla $C$ un sistema irriducibile $|K|$ tale che il sistema $|C + K|$ risulti irriducibile; ciò può farsi facilmente mandando per $C$ le superficie di un ordine abbastanza alto e prendendo come curve $K$ le curve residue. Ora designando con $n$ il grado della $C$ che si tratta
page:32 di definire, con $m$ il grado di $K$ e con $i$ il numero delle intersezioni di una $C$ con una $K$, il grado di $|C + K|$ verrà dato da

$$N = n + m + 2i,$$

da cui si ricava

$$n = N - m - 2i.$$

*Il grado virtuale della* $C$ cosi definito *è indipendente dalla scelta del sistema ausiliario* $|K|$ *che si è associato ad essa.* Invero sieno $|K_1|$ e $|K_2|$ due sistemi ausiliari soddisfacenti alle condizioni poste, coi gradi $m_1$ ed $m_2$, e siano $i_1$ e $i_2$ i numeri delle intersezioni $CK_1$ e $CK_2$, $j$ il numero delle intersezioni variabili di una $K_1$ ed una $K_2$.

Si potranno confrontare il grado $n_1$ definito rispetto a $|K_1|$, il grado $n_2$ definito rispetto a $|K_2|$, valutando il grado del sistema

$$|(C + K_1) + K_2| = |(C + K_2) + K_1| = |C + (K_1 + K_2)|.$$

Si avrà dunque

$$\begin{aligned} N &= (n_1 + m_1 + 2i_1) + m_2 + (2j + 2i_2) = \\ &= (n_2 + m_2 + 2i_2) + m_1 + (2j + 2i_1), \end{aligned}$$

da cui segue

$$n_1 = n_2.$$

[28]Cfr. ENRIQUES-CHISINI, Op. cit., Libro V, vol. III, pag. 399.

In modo affatto simile si può definire il *genere virtuale* $\pi$ di una curva isolata $C$, e questo carattere conserva un significato anche quando la $C$ sia una curva multipla, o una curva riducibile contenente qualche parte multipla.

Aggiungiamo che la definizione dei *caratteri* (grado e genere) virtuali si estende anche al caso di una *curva virtuale* $C - K$ definita come differenza indipendentemente dalla sua effettiva esistenza (§ 2.8). Basta all'uopo sommare a $C - K$ una curva $L$ per modo che $|M| = |C - K + L|$ sia un sistema lineare irriducibile, e valutare quindi i caratteri della differenza $|M - L|$, i quali risultano indipendenti da $|L|$.

Ritornando alle curve effettive, notiamo ora che la nozione dei caratteri virtuali di una curva $C$ dà luogo ad alcune osservazioni che tendono ad attribuire a codesti caratteri un significato invariante rispetto a trasformazioni birazionali della superficie.

Si trasformi la $F$ in un'altra superficie $\overline{F}$ in modo che ad un punto $O$ della curva $C$ corrisponda una curva eccezionale $o$ di $\overline{F}$; allora come trasformata della $C$ si potrà riguardare la curva composta $\overline{C} + o$ ovvero soltanto la $\overline{C}$, tralasciando la $o$ che corrisponde ad un punto fondamentale della trasformazione. La scelta che cosi può farsi risponde ad un diverso modo di considerare il punto
page:33 $O$ sopra la curva $C$: se la $C$ sia suscettibile di appartenere ad un sistema lineare irriducibile di dimensione $> 0$ col punto base $O$, il trasformato di questo sistema sarà il sistema ugualmente irriducibile $|\overline{C}|$, in cui la $o$ non figura come parte fissa. Ma se invece $|C|$ possa estendersi in guisa da non possedere più il punto base $O$, il trasformato di esso conterrà in particolare il sistema $o + |\overline{C}|$, dove la $o$ figura come parte fissa. In altre parole la curva eccezionale $o$ corrispondente ad $O$ dovrà ritenersi o meno come componente della curva trasformata di $C$, secondo che s'intenda di considerare la $C$ come curva di un sistema lineare non avente o avente $O$ come punto base. La circostanza che un sistema $|C|$ senza un punto base $O$ esista effettivamente può ritenersi come accidentale rispetto alla considerazione di cui sopra. Il *grado virtuale* della $C$, avuto riguardo alle possibili trasformazioni dei punti di essa in curve eccezionali, si definirà dunque

*in generale* supponendo che esso *non* abbia *punti base*, ovvero dichiarando quali *punti base* s'intendono assegnati sopra la curva, all'infuori dei quali ogni altro punto di $|C|$ che risulti *punto base* per un $|C|$ effettivamente costruito deve ritenersi *virtualmente inesistente*. Aggiungasi che se la $C$ possiede un punto multiplo (semplice per la superficie), di molteplicità $\geq i$, questo può assumersi virtualmente come $i$-plo per la curva $C$, anche se in effetto possegga una molteplicità superiore, e se pur questa resulti la molteplicità effettiva del più ampio sistema $|C|$ cui sia imposto di possedere quel punto come $i$-plo.

In particolare dunque, se sopra la superficie $F$ la curva $C$ possiede un punto $i$-plo che non voglia ritenersi come punto base assegnato pel sistema $|C|$, esso dovrà considerarsi *virtualmente inesistente*, e perciò il *genere virtuale* della $C$ si otterrà aggiungendo al genere effettivo $\pi$, $\frac{i(i-1)}{2}$, che è precisamente il numero di cui diminuisce il genere di una curva irriducibile che venga ad acquistare un punto $i$-plo.

Similmente il *grado virtuale* della $C$ si valuterà aggiungendo $i^2$ al numero effettivo delle intersezioni di due $C$ fuori di questo, poiché appunto di $i^2$ viene a diminuire il numero delle intersezioni di due curve quando esse acquistino un punto $i$-plo comune.

## 2.11 Curve eccezionali

n:1:11

Da ciò che si è detto innanzi, l'intorno di un punto (semplice) della superficie $F$, quando sia punto base per un sistema lineare di curve, può ritenersi come una *curva infinitesima* che, per una trasformazione della superficie si muta in una curva propriamente detta (curva eccezionale). Reciprocamente una curva ecce-
page:34 zionale è una curva tracciata sulla superficie $F$ che possa mutarsi nell'intorno di un punto semplice.

Volendo esaminare più da vicino le curve eccezionali stabiliremo anzitutto questa distinzione:

una curva *irriducibile* $\omega$ sopra la superficie $F$ si dirà *curva eccezionale di 1-a specie* se è suscettibile di trasformarsi in un punto semplice per mezzo di un sistema lineare $|C|$ che non abbia punti base su $\omega$. Ed invece si dirà *curva eccezionale di 2-a specie* una curva $\omega$ trasformabile in un punto mediante un sistema lineare $|C|$ che abbia qualche punto base su di essa.

Esempio di curve eccezionali di prima specie sono le 27 rette appartenenti ad una superficie cubica generale $F_3$. Infatti si può rappresentare la $F_3$ sopra il piano in modo che ad una qualunque di codeste rette risponda l'intorno di uno dei 6 punti base del sistema di cubiche rappresentative. Invece nel piano non vi sono curve eccezionali di prima specie. Ma le rette, le coniche e in generale le curve piane fondamentali per una trasformazione cremoniana costituiscono curve eccezionali di seconda specie: si trasformerà una rette in un punto per mezzo di una rete omaloidica (per esempio di coniche) avente due punti base sopra la retta; e si traformerà una conica in un punto assumendo per esempio una rete omaloidica di cubiche con un punto base doppio e quattro punti base semplici sopra la conica.

Già da questi esempi risulta che la distinzione fra le curve eccezionali di prima e di seconda specie ha soltanto carattere proiettivo o gode di una *invarianza relativa* a trasformazioni prive di punti base: infatti una *curva eccezionale di seconda specie* $\omega$ appartenente ad una superficie $F$ *può sempre mutarsi in una curva eccezionale di prima specie* su una superficie trasformata $\Phi$. A tal uopo si consideri il sistema lineare trasformante $|C|$ che muta $\omega$ in un punto; esso ha per ipotesi un certo numero $s$ di punti base, con certe molteplicità $i_1$, $i_2, \ldots, i_s$ sopra $\omega$, e il numero delle intersezioni con $\omega$ uguaglia precisamente la somma $i_1+i_2+\cdots+i_s$. Ora, se si somma a $|C|$ un sistema lineare $|L|$ privo di punti base, e per cui la $\omega$ non sia curva fondamentale, il sistema $|C+L|$ varrà a trasformare $\omega$ in una curva, la quale sarà fondamentale per il sistema trasformato di $|C|$ (senza punti base sopra di esso) e risulterà quindi una curva eccezionale di prima specie.

Cerchiamo di valutare il genere e il grado di una curva eccezionale irriducibile di prima specie $\omega$, riferendoci al punto semplice $O$ il cui intorno corrisponde alla $\omega$ sopra una superficie trasformata. Assunto su quella un sistema lineare qualsiasi $|C|$ per cui $O$ non sia punto base, l'imposizione del punto base $O$ diminuisce di uno il grado di $|C|$; inoltre le $C$ per $O$ hanno un punto a comune page:35 con l'intorno di $O$ stesso. Perciò designando con $n$ e $\pi$ il grado e il genere di $|C|$ e con $\nu$ e $\rho$ il grado e il genere della curva infinitesima che costituisce l'intorno di $O$, ossia della curva eccezionale $\omega$, avremo

$$n = n^{-}1 + \nu + 2.1$$

$$\pi = \pi + \rho + 1 - 1,$$

e quindi

$$\nu = -1 \quad \text{e} \quad \rho = 0.$$

La formula $\rho = 0$ risulta del resto a primi essendo razionale l'intorno di $O$.

Naturalmente lo stesso computo si può ripetere sulla superficie $\Phi$, trasformata di $F$, che contiene la $\omega$. Qui si ha un sistema $|C|$ per cui $\omega$ è *curva fondamentale* (senza intersezioni colle $C$ variabili) e le $C$ passanti per un punto di $\omega$ si spezzano nella $\omega$ e in una curva residua $C_1$ unisecante la $\omega$: scrivendo il grado e il genere di $|C| = |\omega + C_1|$ si ritrovano le formule precedenti.

Enunciamo dunque che: *una curva eccezionale irriducibile di 1-a specie ha il genere virtuale $\rho = 0$ e il grado virtuale $\nu = -1$.*

Passando ora alle curve eccezionali di 2-a specie, basta ricordare che una siffatta curva $\omega$ si lascia trasformare in una curva eccezionale di 1-a specie, qualora si tolgano da essa dei punti da ritenere come punti base assegnati di un sistema trasformante $|C|$; perciò *il genere e il grado virtuali di una curva eccezionale di 2-a specie varranno*

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \nu \geq 0.$$

Per esempio il grado delle generatrici d'ina rigata vale

$$\nu = 0;$$

il grado d'una retta del piano vale

$$\nu = 1,$$

quello d'una conica

$$\nu = 4, \text{ ecc.}$$

Notiamo ora che l'esigenza che il *genere* virtuale di una *curva eccezionale sia* $\rho = 0$, porta che una *curva eccezionale irriducibile* di 1-a specie $\omega$ *non* può avere *punti doppi* o multipli. Infatti il genere virtuale $\rho$ viene valutato calcolando il genere del sistema somma $|C| = |C_1 + \omega|$ e perciò un eventuale punto doppio della componente $\omega$, non essendo punto base per $|C|$, deve ritenersi come inesistente, ed allora, essendo già $\rho = 0$, la curva $\omega$ risulterebbe riducibile.

Anticipando alcune nozioni che saranno acquisite nel seguito vogliamo dire
page:36 qui che le curve eccezionali vengono definite dai loro caratteri virtuali trovati innanzi. Se $\omega$ è una curva irriducibile di genere $\rho = 0$ e di grado $\nu = -1$ sopra la superficie $F$, essa potrà trasformarsi in un punto semplice, operando come segue. Si assuma sopra $F$, in modo affatto generale, un sistema lineare $\infty^3$ $|C|$ privo di punti base su $F$, di un certo genere $\pi$ e di un certo grado $n$, le cui curve seghino in $i$ punti la $\omega$. Sommando $\omega$ a $|C|$ si ottiene un sistema $|C+\omega|$ di curve $(i-1)$ secanti la $\omega$, che sarà di grado $n + 2i - 1$ e di genere $\pi + i - 1$, di modo che la differenza fra il grado e il doppio del genere $n - 2\pi$, viene aumentata di una unità. E, come riconosceremo nel seguito, questo aumento ha un significato effettivo, perché l'addizione di $\omega$ riesce effettivamente ad estendere il sistema $|C|$, risultando la dimensione del sistema irriducibile $|C+\omega|$ maggiore di quella di $|C|$. Ciò posto, si può procedere sommando ancora al sistema ottenuto la $\omega$ e così di seguito, fino a che non si arrivi ad un sistema $|C + i\omega|$ privo di punti base su $F$ per cui la $\omega$ riesce fondamentale. Mediante questo sistema la superficie $F$ si lascia trasformare in una $\Phi$ in cui ad $\omega$ corrisponde l'intorno di un punto semplice $O$. In conclusione la $\omega$ è una curva eccezionale di 1-a specie.

Il procedimento di trasformazione qui adoperato conduce al risultato seguente:

se la superficie $F$ contiene un certo numero $s$ di curve eccezionali che seghino rispettivamente le $C$ in $i_1, i_2, \ldots, i_s$ punti, dove sia

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_s > 2\pi - 2 - n$$

si costruirà sopra $F$ un sistema lineare irriducibile di grado $N$ e di genere $\Pi$ per cui

$$N > 2\Pi - 2.$$

Vedremo nel seguito che l'esistenza di sistemi i cui caratteri danno luogo ad una tale disuguaglianza vale a definire una particolare famiglia di superficie, che anzi essa caratterizza la famiglia delle superficie razionali e di quelle riferibili a rigate; sopra una superficie che non appartenga a codesta famiglia particolare, per ogni sistema lineare di genere $\pi$ e di grado $n$ sussiste la disuguaglianza fondamentale

$$n \leq 2\pi - 2.$$

Conseguenza delle cose dette sarà che: *una superficie non appartenente alla famiglia delle rigate potrà sempre trasformarsi in un'altra priva affatto di curve eccezionali.*

In pari tempo si riconoscerà che «una superficie che contenga curve eccezionali di 2-a specie appartiene alla famiglia delle rigate».

page:37 Infatti si trasformi dapprima, come si è detto, una curva eccezionale di 2-a specie in una curva $\omega$ di genere $\rho = 0$ e di grado $\nu \geq 0$. Qui, per essere $\nu \geq 0$, il procedimento di addizione della $\omega$ ad un sistema $|C|$ non ha mai termine perché cresce, o almeno non diminuisce, il numero delle intersezioni delle curve del sistema con la $\omega$, sicché certo si arriverà ad un sistema lineare di genere $\Pi$ e di grado $N$, per cui

$$N > 2\Pi - 2.$$

## 2.12 Nota sulle curve eccezionali riducibili

n:1:12

Quando si trasforma una superficie $F$ in un'altra $\Phi$ per mezzo di un sistema lineare $|C|$ che abbia su $F$ dei punti base distinti $O$, $O_1$, $O_2, \dots$ le curve eccezionali che rispondono a questi punti, e che sono in pari tempo fondamentali per lo stesso sistema $|L|$ (trasformato dello sezioni piano di $F$), sono curve irriducibili fra loro sconnesse. Ma che cosa accade quando i punti $O$, $O_1$, $O_2, \dots$ diventano infinitamente vicini?

Pongasi che i detti punti $O$, $O_1$, $O_2, \ldots$ abbiano per $|C|$ certe molteplicità $i$, $i_1$, $i_2, \ldots$ dove sia $i > i_1 > i_2 > \ldots$ e le differenze $i - i_1, i_1 - i_2, \ldots$ sieno grandi quanto occorre. A codesti punti rispondono in generale su $\Phi$ delle curve eccezionali, $\Omega$, $\Omega_1$, $\Omega_2, \ldots$ risp. degli ordini $i$, $i_1$, $i_2, \ldots$ Ma se il punto $O_1$ diventa infinitamente vicino ad $O$, la curva $\Omega$ d'ordine $i$ viene a spezzarsi in due parti $\omega$ e $\omega_1 (= \Omega_1)$, la prima, d'ordine $i - i_1$, corrispondente all'intorno del punto $O$ privato di $O_1$ e la seconda, d'ordine $i_1$, limite della curva eccezionale corrispondente ad $O_1$.

In generale se più punti $O_1$, $O_2, \ldots$ diventano infinitamente vicini ad un punto proprio $O$, succedendosi su uno o più rami, lineari o superlineari, la curva eccezionale che risponde al punto $O$ si spezzerà in più parti fra loro connesso, comprendenti le curvo eccezionali che nascono dai punti successivi. Si può precisare la cosa riferendoci al caso caratteristico in cui $O$, $O_1$, $O_2, \ldots$ si succedano sopra un unico ramo, e incominciando dagli esempi più semplici. Se $O$, $O_1$, $O_2, \ldots, O_s$ si succedono sopra un ramo lineare, la curva eccezionale d'ordine $i$ che risponde ad $O$ diventa una curva composta d'ordine $(i - i_1) + (i_1 - i_2) + \cdots + (i_{s-1} - i_s) + i_s$:

$$\Omega = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s,$$

mentre le curvo nascenti da $O_1 O_2 \ldots$ diventano

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s, \\ &\ldots \\ \Omega_{s-1} &= \omega_{s-1} + \omega_s, \\ \Omega_s &= \omega_s. \end{aligned}$$

page:38 E, secondo il principio di continuità, queste curve composte dovranno ritenersi come curve eccezionali, laddove le parti di esse (ad es. $\omega_1 \omega_2 \ldots, \omega_{s-1}$) non costituiranno *intere* curve eccezionali, bensì soltanto *componenti* di esse. Invero la componente $\omega$ si troverà in corrispondenza biunivoca, non già coll'intorno di $O$ (preso nella sua interezza), bensì con quest'intorno privato del punto $O_1$, e così $\omega_1$ si troverà in corrispondenza coll'intorno di $O_1$ privato del punto $O_2$, ecc. Potremo passare dalla superficie $F$ alla $\Phi$ mediante più trasformazioni successive da $F$ a $F_1$, da $F_1$ a $F_2$, ..., da $F_{s-1}$ a $F_s = \Phi$; la prima di queste trasformazioni muterà $O$ in una curva $\omega$, la seconda muterà un punto $O_1$ di $\omega$ in una curva $\omega_1$, la terza muterà un punto $O_2$ di $\omega_1$ (diverso dal punto comune ad $\omega$ e $\omega_1$) in una curva $\omega_2$, ecc. Perciò ciascuna $\omega_i$ (per $i < s$) si troverà connessa in un punto colla successiva $\omega_{i+1}$ e il suo grado (che è $-1$ sopra $F_i$) diventerà $-1-1=-2$ sopra $F_{i+1}$ e su $\Phi$. Per conseguenza la *curva eccezionale composta* $\Omega = \omega+\omega_1+\cdots+\omega_s$, corrispondente ad una serie di *punti* $OO_1\ldots O_s$ *infinitamente vicini, succedentisi su un ramo lineare*, avrà il *genere*

$$\rho = 0+0+\cdots+0+(s-1)-(s-1)=0$$

e il *grado*

$$\nu = -2-2\cdots-2-1+2(s-1)=-1.$$

Insomma si ritrovano così i caratteri delle curve eccezionali irriducibili di cui le curve composte $\Omega$, $\Omega_1$, $\Omega_2, \ldots, \Omega_2$ appariscono come curve limiti.

Questa coincidenza di caratteri dovrà prodursi ancora quando i punti $O, O_1, O_2 2, \ldots, O_s$ vengano a succedersi sopra un ramo superlineare, ma nella definizione delle curve limiti andiamo incontro ad una sorpresa: le componenti delle curve $\Omega_i$ diventano in generale curve multiple!

Riferiamoci, per semplicità, al caso di tre punti $O$, $O_1$, $O_2$, succedentisi sopra un ramo cuspidale: questo caso si può trattare ritenendo il ramo cuspidale come limite di un ramo lineare, dove $O_2$, variabile nell'intorno di $O_1$, assuma la posizione del suo punto satellite. Qui appare che la curva d'ordine $i-i_1$, trasformata dell'intorno di $O$ (privato di $O_1$), viene a ridursi ad una curva $\omega$ d'ordine $i-i_1-i_2$ e alla curva $\omega_2$, d'ordine $i_2$, rispondente all'intorno di $O_2$; per conseguenza quest'ultima curva viene a comparire due volte in

$$\omega+\omega_1+2\omega_2.$$

Per comprendere più chiaramente le ragioni di ciò che qui accade si effettui-
page:39 no tre trasformazioni successive della superficie $F$, mutando anzitutto $O$ in $\omega$,

e poi ancora un punto $O_1$ di $\omega$ in $\omega_1$, e finalmente il punto $O_2$ comune ad $\omega$ e $\omega_1$ in $\omega_2$: la posizione del punto $O_2$ così definita risponde al punto satellite di $O_1$ sopra la superficie $F$. Ma poiché $O_2$ è punto doppio per la curva $\omega + \omega_1$, la curva eccezionale trasformata $\omega_1$ dovrà contarsi come doppia, in accordo a ciò che si è detto innanzi. Le molteplicità delle curve eccezionali composte che rispondono ai punti successivi di un ramo superlineare sono state determinate da E. Barber e O. Zariski[29], rilevando anche l'ordine delle connessioni di queste curve e illustrando così, sotto un nuovo aspetto, la teoria delle singolarità di Enriques. [30] Noi ci limiteremo a riportare la regola generale seguente: *la curva eccezionale composta* $\Omega$*, che risponde ad una serie di punti* $O_1, \dots, O_s$ *infinitamente vicini ad un punto proprio* $O$*, succedentisi sopra un ramo superlineare, comprende* $s+1$ *componenti, e la componente* $\omega_i^{h_i}$*, che occupa il posto* $i$*, vi figura colla molteplicità* $h_i$ *eguale all'ordine minimo del ramo uscente da* $O$ [31] *che contiene gli* $i$ *punti* $0_1, O_2, \dots, O_i$.

La stessa regola si applica alle curve eccezionali composte $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s$.[32] Inoltre la curva $\omega_i$ viene *connessa*, non sempre alla successiva $\omega_{i+1}$, bensì — in generale — alla curva $\omega_{i+t}$, *che le succede dopo* $t$ *posti*, in corrispondenza alla circostanza che i *punti* $O_{i+1}, \dots, O_{i+t}$ *siano prossimi ad* $O_i$ (come risulta anche evidente dall'ispezione dello schema grafico del ramo $O_{i+1}, \dots, O_{i+t}$). Aggiungasi che la detta curva $\omega_i$ riesce di *grado* $-1-t$, come appare da ciò che essa rappresenta l'intorno di un punto $O_i$ da cui sono tolti $t$ punti prossimi. Tenuto conto delle molteplicità che spettano alle curve $\omega_i$ in $\Omega_i$, le curve eccezionali composte $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ risultano sempre di grado $\nu = -1$ e di genere $\rho = 0$ come le curve eccezionali irriducibili di cui sono limiti.

Infine rileveremo che l'insieme delle curve eccezionali irriducibili sconnesse fra loro, di cui qui si considera il limite in seguito all'avvicinarsi di $O_1, O_2, \dots$

[29] Barber e Zariski, l. c. Ann. Journ. of Math., 1935.

[30] ???

[31] Quando si parla di un ramo uscente dal punto $O_1$ (ovvero da $O_2$ ecc.) s'intende di aver prima eseguita la trasformazione che muta $O_1$ in un punto proprio.

[32] Cfr. Enriques-Chisini, *Lezioni* ecc., Libro I, vol. II.

ad $O$, tende ad una curva

$$\Omega + \Omega_1 + \cdots + \Omega_s$$

che risulta composta con le $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, contate ciascuna con una molteplicità che è la somma delle molteplicità che essa possiede per riguardo alle $\Omega_i$ page:40 di cui fa parte. Vedremo più avanti il significato di quest'osservazione.

## 2.13 Serie caratteristica virtuale

n:1:13

Abbiamo spiegato come si determinino i caratteri virtuali, e in particolare il grado $n$ di una curva $C$ tracciata sopra la superficie $F$ anche se questa sia una *curva isolata*, non contenuta in un sistema $|C|$ di dimensione $r > 0$. Il procedimento che conduce a valutare $n$[33], conduce altresì a definire, per $n > 0$, la serie caratteristica di $C$, anche indipendentemente dalla circostanza che essa appartenga ad un sistema più ampio[34].

Infatti si associ a $C$ un sistema lineare irriducibile $|K|$, tale che $|C+K|$ riesca irriducibile: la serie caratteristica di $C$ verrà definita dalle curve di $|C+K|$ che passano per le intersezioni di una $C$ con una $K$. Questa serie invero riesce indipendente dalla scelta di $|K|$, come si vede paragonando le serie definite in relazione a due sistemi $|C+K|$ e $|C+L|$ ed al sistema $|C+K+L|$. Si noti che, come avremo occasione di spiegare nel seguito, sarà sempre lecito scegliere $|K|$ in modo che le curve di $|C+K|$ seghino sopra $C$ una serie completa, e così si ottenga sulla $C$ la intera *serie caratteristica virtuale.*

L'importanza di questa serie si manifesta sopratutto nello studio dei sistemi continui di curve $C$ non costituiti di curve equivalenti; allora la serie caratteristica virtuale della $C$ viene segata (tutta o in parte) dalle curve del sistema ad essa infinitamente vicine.

**Nota.** – In questa maniera la serie caratteristica di una $C$ appartenente ad un sistema continuo si è presentata implicitamente a G. Castelnuovo, siccome appare da una sua comunicazione epistolare ad Enriques[35]. In seguito

[33] Cfr. F. Enriques, *Introduzione* ecc., 1896: nn. 15 e 16.

[34] F. Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve.* Atti Acc. Torino, 1904.

[35] Cfr. Rendic. Circolo Matematico di Palermo, 25 dic. 1898 (n. 4).

il Castelnuovo stesso ebbe a rilevare esplicitamente il significato di essa, in rapporto alla superficie (iperellittica) che rappresenta le coppie di punti di una curva del genere due, e attrasse su tale esempio l'attenzione di Severi; che fu indotto quindi alla definizione esposta innanzi, siccome egli stesso accenna in una nota a piè della prima pagina del suo lavoro.

# 3 Sistemi covarianti e invarianti

## 3.1 Curve jacobiane

Sopra la superficie $F$, che possiamo supporre priva di qualsiasi singolarità in un iperspazio, consideriamo un sistema lineare irriducibile $|C|$ di dimensione 2, cioè una *rete*. Il luogo dei punti della superficie che sono doppi per una curva della rete, è una linea algebrica $C_j$, che diremo *jacobiana* della rete. La $C_j$ si può anche definire come luogo dei punti di contatto di due curve della rete; infatti il fascio da queste determinato contiene una curva che ha un punto doppio nel punto di contano. Nel piano la jacobiana di una rete di curve dell'ordine $n$ $(> 1)$ è una curva dell'ordine $3n - 3$; ed un punto base $i$-plo della rete ha in generale per questa la molteplicità $3i - 1$; così un punto base semplice $O$ è, in generale, doppio per la jacobiana, ma se le curve della rete hanno in $O$ una tangente fissa la jacobiana ha in essa un punto triplo, con quella tangente fissa.[36] Queste proprietà si conservano inalterate anche per le reti date sopra una qualunque superficie $F$, giacché la determinazione delle molteplicità d'un punto base $O$ per la jacobiana di una rete $|G|$ dipende soltanto dai caratteri differenziali delle curve $C$ considerate e della superficie che le contiene, la quale, in un ordine d'approssimazione grande quanto si vuole, si può approssimare con un paraboloide osculatore nel punto $O$, che a sua, volta si lascia rappresentare punto per punto sul piano. Per le curve jacobiane delle reti estratte da un più ampio sistema lineare $|C|$ sussiste il seguente teorema:

[36]Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro III, vol. II, cap. I, § 5.

*Le jacobiane delle reti contenute in un medesimo sistema lineare irriducibile $|C|$ di dimensione $r > 2$ sono equivalenti.*

Estragghiamo da $|C|$ due reti qualsiansi e confrontiamo le loro jacobiane, page:42 supponendo anzitutto che le due reti abbiano a comune un fascio, e perciò appartengano insieme ad un sistema lineare $\infty^3$.[37] Un punto generico $P$ della superficie $F$ è doppio per una curva $\overline{C}$ del sistema $\infty^3$ anzidetto, e la $\overline{C}$, insieme col fascio comune alle due reti, determina una rete di curve $C$ la cui jacobiana passa per $P$. Si vede in tal guisa che le jacobiane delle $\infty^1$ reti di curve $C$ contenute nel sistema $\infty^3$ ed aventi un fascio comune, formano un fascio (per ogni punto di $F$ ne passa una); ma questo fascio è certo lineare perchè è razionale, trovandosi in corrispondenza biunivoca col fascio delle reti di un sistema lineare $\infty^3$ che hanno a comune un fascio[38]. Ora se si assumono entro $|C|$ (supposto di dimensione $r > 3$) due reti di curve aventi a comune una curva $\overline{C}$, si può costruire una rete ausiliaria che contenga $\overline{C}$ ed abbia un fascio a comune con ciascuna delle due reti: la jacobiana della rete ausiliaria risulterà equivalente alla jacobiana delle due reti; e, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, queste saranno dunque equivalenti fra loro.

Infine se si hanno entro $|C|$ due reti senza curva comune (il sistema $|C|$ avendo la dimensione $r > 4$), si potranno paragonare le loro jacobiane costruendo una rete ausiliaria che abbia a comune una curva con ciascuna di esse. Le jacobiane delle due reti risulteranno quindi equivalenti, c. d. d.

## 3.2 Sistema jacobiano

n:2:2

Da ciò che si è dimostrato innanzi segue che:

*Le jacobiane delle reti di curve contenute in un sistema lineare irriducibile $|C|$ sopra la superficie $F$ appartengono ad un medesimo sistema lineare completo che si dirà il sistema jacobiano $|C_j|$ di $|C|$.* La dimensione di $|C|$ viene supposta per ora $\leq 2$.

[37]Questo sistema viene determinato dal fascio comune e da duo curve prose rispettivamente nello duo reti, fuori di esso.

[38]Insieme da assimilarsi ad un fascio di piani dello $S_3$.

La definizione che precede è senz'altro perfetta quando il sistema $|C|$ non abbia punti base, dove s'intenda che il sistema delle jacobiane $C_j$ dovrà completarsi senza l'imposizione di alcun punto base. Se invece $|C|$ abbia un *punto base i-plo*, s'intenderà che questo venga assegnato come punto di molteplicità, $3i-1$ al sistema completo $|C_j|$, poiché, come abbiamo detto, $3i-1$ è in generale la molteplicità della jacobiana di una rete contenuta in $|C|$.

Ciò vale anche se i punti base sono infinitamente vicini, così, per esempio, se $|C|$ possiede un punto base semplice con la tangente fissa, cioè due punti base
page:43 semplici $O$, $O_1$, infinitamente vicini. le jacobiane delle reti contenute in esso avranno effettivamente in $O$ un punto triplo con la tangente fissa $OO_1$[39], ma il sistema di queste curve sarà contenuto generalmente in un sistema più ampio con due punti base doppi $O$ e $O_1$, che costituirà il nostro sistema jacobiano completo $|C_j|$. Se anche l'ampliamento non sia effettivamente possibile, la singolarità costituita da un punto triplo e da un punto semplice infinitamente vicino dovrà ritenersi virtualmente come costituita dai due punti doppi $O$ ed $O_1$. Abbiamo supposto sin qui che il sistema $|C|$ fosse irriducibile, ma è chiaro come la definizione debba estendersi al caso in cui $|C|$ contenga una parte fissa $K$ (che supporremo semplice). Qui ogni punto della $K$ appare come un punto base con tangente fissa per una rete qualunque contenuta in $|C|$, perciò la curva $K$ si staccherà 3 volte dalle jacobiane di tutte le reti contenute in $|C|$. Essa dovrà aggiungersi 3 volte a codeste jacobiane e il sistema riducibile cosi definito sarà contenuto in generale nel più ampio sistema irriducibile completo $|C_j|$.

A dir vero viene così dimostrato che la $K$ si stacca *almeno* tre volte dalle jacobiane delle reti di $|C|$. Per riconoscere che di fatto non si stacca più di tre volte, si potrà ricondurre la cosa dalla superficie al piano sostituendo ad $F$ un conveniente paraboloide osculatore, in un punto della curva $K$ o anche una superficie razionale che abbia un contatto assai elevato con la $F$ lungo tutta la curva $K$.[40] Si riconosce così che una curva $K$ la quale si aggiunga come *componente fissa* di una *rete* di curve irriducibili $C$, figura *tre volte nella*

[39] Cfr. §1.

[40] Cfr. Enriques-Chisini, Libro XV, cap. IV, §39, vol. II, pag. 634 e seg.

*jacobiana* di questa rete; essa non può comparirvi più di 3 volte, a meno che non sia una parte della jacobiana di $|C|$.

**Nota.** – Si può dare una verifica analitica diretta del teorema a cui siamo pervenuti. Per far ciò occorre sapere come un sistema lineare completo venga segato sopra una superficie $F$ (con singolarità normali) dello spazio ordinano, cioè che «le superficie $\varphi$ aggiunte ad $f$, ossia passanti semplicemente per la curva doppia di $f$, segano su $f$ sistemi completi»[41]. Per semplicità di discorso supporremo che $f$ sia una superficie d'ordine $n$, affatto priva di singolarità, cosicché le intersezioni complete di essa con la totalità delle superficie di un dato ordine $m$ formino un sistema completo.

Data su $f$ una rete di curve irriducibili $|C|$ che non siano intersezioni complete, a cui si aggiunga una componente fissa $K$, si può sempre supporre che la rete $|C|$ sia residua di una curva $L$ non contenente la $K$ come parte, in modo page:44 che le $C+L$ siano intersezioni complete con superficie $\varphi_i$ d'ordine $m$. Quindi la rete $|K+C|$ è contenuta parzialmente nella rete rappresentata da un'equazione del tipo:

$$\varphi(x_1x_2x_3x_4)\,[\lambda_1\varphi_1(x_1x_2x_3x_4)+\lambda_2\varphi_2(x_1x_2x_3x_4)+\lambda_3\varphi_3(x_1x_2x_3x_4)]=0,$$

dove secondo le nostre ipotesi le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, non si annulleranno simultaneamente sulla $K$, che invece fa parte della $\varphi = 0$ il cui ordine verrà indicato con $s$. Ora si tratta di scrivere l'equazione della jacobiana della rete così rappresentata, e di riconoscere che la curva $\varphi = 0$, ed in particolare la $K$ che ne costituisce una parte, figura in essa 3 volte come componente. I punti della jacobiana sono punti di contatto di una superficie del sistema segante la rete, e della $f$. Scrivendo le condizioni per il contatto si ottiene un sistema di equazioni lineari, per la cui compatibilità deve annullarsi il determinante

$$D(x_1x_2x_3x_4)=\begin{vmatrix} \frac{\partial(\varphi\varphi_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\varphi\varphi_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\varphi\varphi_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\varphi\varphi_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\varphi\varphi_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\varphi\varphi_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\varphi\varphi_1)}{\partial x_3} & \frac{\partial(\varphi\varphi_2)}{\partial x_3} & \frac{\partial(\varphi\varphi_3)}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\varphi\varphi_1)}{\partial x_4} & \frac{\partial(\varphi\varphi_2)}{\partial x_4} & \frac{\partial(\varphi\varphi_3)}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{vmatrix}=0$$

[41] Cfr. la nota al § 4 e il cap. III.

Ora dopo avere eseguite le derivate di $\varphi\varphi_1, \varphi\varphi_2, \varphi\varphi_3$, si è condotti a scomporre il determinante $D$ in una somma di determinanti: tralasciando quei determinanti che risultino identicamente nulli, gli altri presentano il fattore comune $\varphi^2$, tolto il quale rimangono quattro determinanti di cui uno contiene ancora il fattore $\varphi$. A noi occorre dimostrare che la somma degli altri 3 determinanti si annulla (semplicemente) nei punti della curva comune $\varphi = 0$. Infatti questa page:45 somma si trasforma facilmente in un determinante unico. Scriviamo:

$$\Phi = \varphi_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

$$+ \varphi_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial phi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial phi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial phi}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

$$+ \varphi_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial phi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{vmatrix};$$

scambiando nel primo determinante la 1-a colonna con la 3-a e nel secondo la 2-a con la 3-a, tenuto conto dei segni, appare qui lo sviluppo del determinante del $5^o$ ordine:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

Sottraendo alla 1-a riga moltiplicata per $m$ la 2-a moltiplicata per $x_1$, la 3-a per $x_2$, la 4-a per $x_3$, la 5-a per $x_4$ col tener conio del teorema d'Eulero, si potrà sostituire ad essa la

$$0,\ 0,\ 0,\ -s\varphi,\ -nf$$

poiché con $n, m, s$ abbiamo designato rispettivamente gli ordini di $f$, delle $\varphi_i$ e della $\varphi$.

È chiaro che il determinante in cui figura questa linea si annulla quando siano simultaneamente $\varphi = 0$ e $f = 0$, perchè annullandosi codesti termini la page: prima riga diventa identicamente nulla, c. d. d.

Aggiungiamo che la $K$ non può staccarsi più di tre volte dalla jacobiana della rete; o almeno, se ciò accade, la $K$ fa parte della jacobiana della rete spogliata della parte fissa $K$.

Infatti un successivo staccamento di $K$ dipenderebbe da un contatto fra la superficie $f$ e la $\Phi$ lungo tutta la curva $K$. Ora supponiamo che in un punto $P$ di questa curva coincidano i piani tangenti alla $f$ ed alla $\Phi$. Dovrà aversi

$$\rho\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Calcoliamoci la $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. Possiamo derivare per colonne; in tal modo la derivata verrà espressa come una somma di determinanti ottenuti sostituendo in una delle colonne le derivate rispetto a $x_i$. Ora è chiaro che trovandoci in un punto in cui $\varphi = 0, f = 0$, i determinanti che si ottengono derivando le prime tre colonne sono zero. Quindi resta: (...) Sviluppando i due determinanti secondo page:47 la prima riga si ha: (...) (...)

Indicando brevemente il primo determinante del secondo membro con $A$, il secondo con $B$, questa equazione si può scrivere

$$m\rho\frac{\partial f}{\partial x_i} = s\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}A - n\frac{\partial f}{\partial x_i}B, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

che a priori offre due possibilità:

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, ossia le superficie $f = 0$ e $\varphi = 0$ si toccano, ciò che è contro le ipotesi; ovvero

2) $A = 0$ e allora, come si riconosce subito dalla struttura del determinante $A$, il punto $P$ si trova sulla jacobiana della rete.

Il procedimento algebrico che qui abbiamo sviluppato si lascia illustrare da alcune semplici considerazioni geometriche che ci limiteremo ad accennare, riferendoci al caso più semplice in cui la $f$ sia una superficie d'ordine $n$ priva di singolarità nello spazio ordinario, le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ siano tre superficie linearmente indipendenti d'ordine $m > n$ e la $\varphi$ sia una superficie d'ordine $s$.

Osserviamo che la superficie $f$ presa insieme con una superficie $\psi$ d'ordine $m - n$ si può combinare linearmente con le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; si costruirà quindi la superficie jacobiana del sistema lineare $\infty^3$ così determinato, cioè il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema, che sarà una superficie $D$ d'ordine $(4m - 4)$.[42] Ora la $D$ segherà $f$ in una curva d'ordine $(4m - 4)n$ che riuscirà composta della jacobiana della rete delle curve $|G|$ segate da

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$$

e della curva $L$ intersezione di $f$ e $\psi$; siccome quest'ultima è d'ordine $n(m-n)$, così la jacobiana della rete $|C|$ risulterà d'ordine $n(3m + n - 4)$.

Ciò posto si aggiunga alla rete

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$$

una superficie $\varphi$ d'ordine $s$, secante $f$ in una curva $K$ d'ordine $ns$; aggiungendo
page:48 la $\varphi$ anche ad $f$ si avrà un sistema lineare $\infty^3$ di super- ficie d'ordine $m + s$ in cui la $\varphi$ figura come parte fissa. Perciò questa $\varphi$ si staccherà 4 volte dalla jacobiana $D$ del sistema; la sua intersezione con $f$ (d'ordine $ns$), figurerà una volta nella curva intersezione di $f$ con $\psi + \varphi$, e quindi comparirà 3 volte nella curva jacobiana della rete $|K + C|$, che è ora d'ordine

$$n[3(m + s) + n - 4].$$

## 3.3 Teorema fondamentale

n:2:3

Dalle osservazioni che precedono segue il

**Teorema fondamentale:** *Dati sopra la superficie $F$ due siatemi lineari irriducibili $|C|$ ed $|L|$, che supponiamo sempre virtualmente privi di punti base e di dimensione non minore di 2, il sistema jacobiano $|C+L|_j$ della loro somma*

[42]Si ha qui un'estensione immediata della jacobiana di una rete di curve piano. Cfr. Enriques-Chisini, Op. cit., Libro III, cap. 1, §5, vol. II, pag. 31.

*viene espresso da*

$$|C+L|_j = |C_j + 3L| = |3C + L_j|.$$

*Infatti nel sistema $|C+L|$ è contenuto il sistema $|C| + L$ con una curva fissa $L$, ed il sistema $C + |L|$ con una curva fissa $C$, i cui sistemi jacobiani completi sono rispettivamente i sistemi*

$$|C_j + 3L| \quad ed \quad |L_j + 3C|,$$

*che coincidono dunque nel sistema $|C+L|_j$.*

*In base al teorema fondamentale si può definire ora il sistema completo jacobiano di un sistema lineare $|C|$ che abbia meno di due dimensioni, riducendosi dunque ad un fascio, od anche ad una curva isolata $C$. Invero basterà sommare alla $C$ un sistema ausiliario $|L|$, $\infty^2$ almeno, ed assumere*

$$|C_j| = |3C + L_j{}^{-}3L|.$$

*Il teorema fondamentale si estende così agli jacobiani di sistemi lineari comunque riducibili. Occorre soltanto un'avvertenza relativa al caso in cui si considerino sistemi lineari $|C|$ ed $|L|$ con* punti base assennati *sopra la superficie $F$. Se $|C|$ possiede un punto base $i$-plo $O$ che non sia base per ed $|L|$ possiede un punto base $s$-pio $O'$ che non sia base per $|C|$, il sistema jacobiano $|C+L|_j$ avrà in $O$ la molteplicità (virtuale) $3i-1$, ed in $O'$ la molteplicità $3s-1$, ed invece $O$ avrà la molteplicità $3i$ per $|3G+L_j|$ ed $O'$ la molteplicità $3s$ per $|3L+C_j|$; quindi l'equivalenza tra i due sistemi $|C_j+3L|$ e $|3C+L_j|$ sussisterà soltanto (piando si aggiungano ai due sistemi rispettivamente gli inforni dei punti $O$ ed $O'$. Si avrà cioè:*

$$|3C + L_j + O| = |3L + C_j + O'|;$$