Gino Palumbo
Funzioni continue

Celia Di Foggia
Derivate ed applicazioni

In preparazione:

Integrali semplici

Integrali doppi

Numeri complessi

Funzioni di due o più variabili

Funzioni di variabili complesse

I testi di questa collana di *Argomenti complementari ed esercizi di Analisi Matematica*, pur mantenendo una loro elementarietà di base, approfondiscono i vari argomenti, confrontando le diverse definizioni che si trovano nei testi più diffusi, e suggeriscono un gran numero di esercizi, dai più classici ad altri più nuovi e stimolanti. I principali risultati teorici sono tutti riportati e commentati, contribuendo così a comprenderne le motivazioni e facilitarne l'approfondimento. Questi volumi sono quindi rivolti sia agli studenti che si stanno preparando a sostenere un esame di Analisi, sia a chiunque abbia interesse ad approfondire i vari argomenti.

ISBN 88-413-3692-7
9 788841 336922
L. 15.000

ANALISI MATEMATICA
ARGOMENTI COMPLEMENTARI ED ESERCIZI
Collana diretta da Bruno Rizzi

Antonio Lungo

Serie numeriche

MASSON
editoriale Veschi

Serie numeriche

DELLA STESSA COLLANA

G. PALUMBO - **Funzioni continue**
C. DI FOGGIA - **Derivate ed applicazioni**

ANALISI MATEMATICA
ARGOMENTI COMPLEMENTARI ED ESERCIZI
Collana diretta da Bruno Rizzi

Antonio Lungo

Serie numeriche

MASSON
editoriale Veschi
1995

Masson S.p.A. Via Statuto, 2/4 - 20121 Milano
Masson S.A. 120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris, Cedex 06
Masson S.A. Avenida Príncipe de Asturias, 20 - 08012 Barcelona

Editoriale Veschi
Printed in Italy

INDICE

1. RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

DEFINIZIONE 1. Si dice *successione reale* una funzione dall'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri reali.

Una successione è dunque una funzione avente per dominio **N** = {1, 2, 3, ...} e per codominio **R**.

I numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ si dicono *termini* o *elementi* della successione, a_k è il termine k-*esimo* o termine *generale* della successione.

Una successione si indica anche con $\{a_k\}_{k \in N}$, o semplicemente con $\{a_k\}$.

Esempi di successioni sono i seguenti

$$\{a_k\} = \{k-2\}, \quad \{a_k\} = \{(-1)^k\};$$

esplicitamente

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots; \quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots.$$

DEFINIZIONE 2. Una successione $\{a_k\}$ si dice *limitata inferiormente* (*superiormente*) se è limitato inferiormente (superiormente) l'insieme numerico costituito dai suoi termini, *limitata* se è limitata sia inferiormente che superiormente, *illimitata* se non è limitata.

ESERCIZIO 1. *Dimostrare che la successione* $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ *è limitata.*

Soluzione. Per dimostrare che la successione è limitata basta osservare che, $\forall\, k \in N$, si ha

$$0 < \frac{1}{k} \leq 1,$$

(il segno uguale solo per k = 1). La conclusione si ha osservando che l'insieme $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, dei valori assunti dai termini della successione, ha 0 come estremo inferiore (non minimo) ed 1 come estremo superiore (massimo), 0 è un punto di accumulazione per $\left\{\frac{1}{k}\right\}$.

DEFINIZIONE 3. Una successione $\{a_k\}$ si dice

a) *crescente* [*decrescente*] se, per ogni indice k, si ha

$$a_k < a_{k+1} \; [a_k > a_{k+1}],$$

b) *non decrescente* [*non crescente*] se, per ogni indice k, si ha

$$a_k \leq a_{k+1} \; [a_k \geq a_{k+1}].$$

Le successioni non decrescenti e quelle non crescenti si chiamano *monotòne*.

Ad esempio la successione $\{3^k\}$ è crescente in quanto

$$3^k < 3^{k+1},$$

mentre la successione $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ è decrescente poiché

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k+1}.$$

Le successioni costanti (in cui tutti i termini sono uguali) sono sia non crescenti che non decrescenti.

DEFINIZIONE 4. Si dice che la successione $\{a_k\}$ ha per limite il numero reale ℓ [1] e si scrive :

(1) $$\lim_{k\to\infty} a_k = \ell, \text{[2]}$$

se comunque si fissi un numero reale positivo ε, esiste in corrispondenza un indice h ∈ N tale che, ∀ k > h, risulti

$$|a_k - \ell| < \varepsilon,$$

ossia

$$\ell - \varepsilon < a_k < \ell + \varepsilon.$$

Le successioni aventi limite si dicono *convergenti*.

Se $\ell = 0$ si dice che la successione $\{a_k\}$ è *infinitesima*.

ESERCIZIO 2. *Dimostrare che la successione* $\left\{\frac{4k+3}{2k+1}\right\}$ *ha per limite* 2.

Soluzione. Bisogna dimostrare che, fissato un numero positivo ε, è possibile determinare un indice h ∈ N tale che per k > h si abbia

$$\left|\frac{4k+3}{2k+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Infatti da questa si ricava, essendo k ≥ 1, $\left|\frac{1}{2k+1}\right| < \varepsilon$, cioè $\frac{1}{2k+1} < \varepsilon$, da cui

$$k > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

---

(1) O che "*converge a* ℓ " oppure che " *tende a* ℓ ".
(2) Nel seguito in luogo della (1) scriveremo $\lim_k a_k = \ell$.

e quindi assumendo $h = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$ si ha

$$\lim_k \frac{4k+3}{2k+1} = 2.$$

Ad esempio, se $\varepsilon = 0.01$, è $\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} = 49.5$, per cui tutti i termini della successione, a partire da quello di indice 100 (è $a_{100} = \frac{403}{201}$), differiscono, in valore assoluto, da 2 meno di $\frac{1}{100}$ (così $a_{101} = \frac{407}{203}$, $|a_{101} - 2| < \frac{1}{100}$).

ESERCIZIO 3. *Dimostrare che la successione* $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ *è infinitesima.*

Soluzione. Occorre provare che, comunque si fissi un numero positivo ε, è possibile determinare in corrispondenza un indice $h \in N$ tale che $\forall\, k > h$ riesca

$$-\varepsilon < a_k < \varepsilon.$$

La disuguaglianza di sinistra è soddisfatta per ogni k (è $\frac{1}{k} > 0$), quella di destra è soddisfatta non appena si sceglie $h = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$[3] (è $a_k < \frac{1}{k} < \varepsilon$, se $k > \frac{1}{h}$) per cui $k > \frac{1}{\varepsilon}$ (ad esempio se $\varepsilon = 0.02$ la $a_k < \varepsilon$ è soddisfatta per $k > 50$).

[3] Con $[\alpha]$ si intende la parte intera del numero reale α, ossia il numero intero k (positivo, negativo, o nullo) per cui $k \le \alpha < k+1$. Così

$$\left[\sqrt{2}\right] = 1,\ [\pi] = 3,\ \left[-\sqrt{2}\right] = -2,\ [-8.7] = -9.$$

ESERCIZIO 4. *Dimostrare che la successione* $\left\{(-1)^k \frac{1}{k}\right\}$ *è infinitesima.*

Soluzione. Occorre provare che $\lim_k (-1)^k \frac{1}{k} = 0$. Si ha infatti

$$|a_k - \ell| = \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k},$$

e quindi per l'esercizio **3** si ottiene

$$\lim_k (-1)^k \frac{1}{k} = 0.$$

DEFINIZIONE 5. Si dice che la successione $\{a_k\}$ è *divergente positivamente* (*negativamente*) e si scrive

$$\lim_k a_k = +\infty \left(\lim_k a_k = -\infty\right),$$

se, comunque si fissi un numero reale positivo m, esiste un numero positivo h, tale che $\forall\, k > h$, risulti $a_k > m$ ($a_k < -m$).

ESERCIZIO 5. *Dimostrare che la successione* $\left\{\frac{k^2-1}{k}\right\}$ *è divergente positivamente.*

Soluzione. Basta scrivere $\frac{k^2-1}{k} = k - \frac{1}{k}$. In dettaglio si ha $\frac{k^2-1}{k} > m$, per $k > \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$, e quindi basta scegliere $h = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$. Ad esempio se poniamo $m = 500$ si ottiene $h = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2} = 500.002$ e quindi per $k > h$ risulta $a_k > 500$; infatti $a_{501} = 500.998\ldots$, $a_{502} = 501.998\ldots$ tutti maggiori di m.

ESERCIZIO 6. *Dimostrare che la successione* $\left\{\log_{\frac{1}{3}} k\right\}$(4) *è divergente negativamente.*

Soluzione. La funzione $\log_{\frac{1}{3}} x$ $(x > 0)$ è decrescente ($\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty$), ossia

$$\log_{\frac{1}{3}} k < -m, \text{ per } k > 3^m,$$

e quindi basta scegliere $h = 3^m$.

DEFINIZIONE 6. Si dice che la successione $\{a_k\}$ è *infinita* se risulta

$$\lim_k |a_k| = +\infty .$$

Ovviamente una successione *divergente positivamente* o *divergente negativamente* è necessariamente *infinita*, mentre il viceversa è falso.

DEFINIZIONE 7. Una successione si dice *regolare* se è *convergente* oppure *divergente* (positivamente o negativamente). In caso contrario si dice *non regolare* o *indeterminata*.

Ad esempio le successioni $\left\{\dfrac{5k^4+3k+2}{2k^4+k^2+10}\right\}$ e $\{k\}$ sono regolari, mentre la successione $\left\{(-1)^k k\right\}$ è non regolare in quanto non è divergente né convergente ($a_{2k} = 2k$, $a_{2k+1} = -(2k+1)$ e quindi $\lim_k a_{2k} = +\infty$ e $\lim_k a_{2k+1} = -\infty$).

(4) Con $\log_a b$ indichiamo il logaritmo di un numero positivo qualunque sia la base, positiva e diversa da 1, mentre con $\ln k$ indichiamo il logaritmo in base e di k (logaritmi neperiani o naturali).

DEFINIZIONE 8. Si dice che una successione $\{a_k\}$ verifica (o assume) *definitivamente* una certa proprietà P, se esiste un indice h tale che, $\forall\, k > h$, i termini a_k godono della proprietà P, cioè tutti i termini, fatta eccezione al più di un numero finito di essi, verificano la proprietà P.

Ad esempio, dire che la successione $\{a_k\}$ è **definitivamente non negativa** equivale a dire che la successione contiene solamente un numero finito di termini negativi o, ciò che è lo stesso, che esiste un indice h a partire dal quale si ha $a_k \geq 0$.

2. PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

In questo paragrafo saranno enunciati i principali teoremi sulle successioni.

TEOREMA 1. **Unicità del limite.** *Una successione regolare non può ammettere due limiti distinti.*

TEOREMA 2. **Permanenza del segno.** *Se la successione* $\{a_k\}$ *è regolare e non è infinitesima, i suoi termini* a_k *assumono definitivamente lo stesso segno del limite.*

Ad esempio la successione

$$\left\{\frac{2k-9}{k}\right\},$$

è convergente al numero 2 ma i primi quattro termini sono negativi (è $a_k > 0$ per $k > 5$) per cui il teorema vale dal quinto termine in poi.

TEOREMA 3. *Se una successione* $\{a_k\}$ *è convergente l'insieme costituito dai valori di* a_k *è un insieme limitato.*

TEOREMA 4. **Primo teorema del confronto**. *Se le due successioni* $\{a_k\}$ *e* $\{b_k\}$ *sono regolari e soddisfano le*

$$a_k < b_k \quad (a_k \leq b_k), \quad \forall\, k \in N,$$

si ha

$$\lim_k a_k \leq \lim_k b_k .$$

Analogamente se $\{a_k\}$ *e* $\{b_k\}$ *sono regolari e soddisfano le*

$$a_k > b_k \quad (a_k \geq b_k) \quad \forall\, k \in N,$$

si ha

$$\lim_k a_k \geq \lim_k b_k.$$

TEOREMA 5. **Secondo teorema del confronto**. *Siano* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *e* $\{c_k\}$ *tre successioni tali che*

$$a_k \leq c_k \leq b_k\,, \quad \forall\, k \in N,$$

e se $\{a_k\}$ *e* $\{b_k\}$ *sono regolari ed ammettono lo stesso limite cioè*

$$\lim_k a_k = \lim_k b_k = \ell\,,$$

allora si ha anche

$$\lim_k c_k = \ell\,.$$

TEOREMA 6. **Le successioni monotòne**. *Ogni successione monotòna è regolare. In particolare converge se la successione è monotòna e limitata, diverge se è monotòna e non limitata.*

Ad esempio la successione $\{3^k\}$ è divergente positivamente in quanto monotòna crescente e non limitata superiormente, mentre la successione $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$ è convergente in quanto monotòna decrescente e limitata.

Inoltre esistono successioni convergenti ma non monotòne come ad esempio la successione $\left\{(-1)^k \frac{1}{k^2}\right\}$ che è convergente a 0, limitata $\left(-1 \leq a_k \leq \frac{1}{4}\right)$ ma non monotòna, infatti i suoi termini di posto dispari sono negativi mentre quelli di posto pari sono positivi.

Dal teorema precedente si ricava il seguente

TEOREMA 7. *Se* $\{a_k\}$ *è non crescente [non decrescente] e limitata allora*

$$\lim_k a_k = \inf\{a_k\} \quad \left[\lim_k a_k = \sup\{a_k\}\right].$$

TEOREMA 8. **Criterio di convergenza di Cauchy**[1]. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione* $\{a_k\}$ *sia convergente è che, comunque si fissi un numero positivo* ε, *esista in corrispondenza un numero naturale* h, *tale che per ogni coppia di indici* p *e* q, *entrambi maggiori di* h, *si abbia*

$$|a_q - a_p| < \varepsilon.$$

Ad esempio la successione di termine generale

$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}, \ (k \in N)^{(2)}$$

non è convergente. Infatti, posto $q = p + s$, si ha :

---

(1) **Augustin Louis Cauchy** [1789-1857].

(2) I numeri $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$ si chiamano *numeri armonici*. Per una trattazione cfr. B. Rizzi - C. Scagliarini "*I numeri armonici*" in Periodico di matematiche - Serie VI - Volume 62 - NN. 1-2 - 1986.

$$a_{p+s} - a_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+s} > \frac{1}{p+s} + \ldots + \frac{1}{p+s} = \frac{s}{p+s},$$

e quindi, per s > p, si ha

$$a_{p+s} - a_p > \frac{1}{2},$$

per cui la successione considerata non converge (non è verificata la condizione di convergenza di Cauchy per $\varepsilon < \frac{1}{2}$). La successione $\left\{\frac{1}{k}\right\}$, in quanto monotòna (decrescente) è regolare e quindi è divergente (non potendo essere convergente).

TEOREMA 9. *Se* $\lim_k a_k = \ell \in \mathbf{R}$ e $\lim_k b_k = m \in \mathbf{R}$ *allora*

$$a_k + b_k \to \ell + m,$$

ossia il limite della somma di due successioni convergenti è uguale alla somma dei limiti.

Altri risultati sono i seguenti

$$a_k \to \ell, \quad b_k \to +\infty \quad \Rightarrow \quad a_k + b_k \to +\infty;$$

$$a_k \to \ell, \quad b_k \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_k + b_k \to -\infty;$$

$$a_k \to +\infty, \quad b_k \to +\infty \quad \Rightarrow \quad a_k + b_k \to +\infty;$$

$$a_k \to -\infty, \quad b_k \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_k + b_k \to -\infty.$$

Se una delle due successioni diverge negativamente e l'altra diverge positivamente si dice che il limite della somma delle due successioni si presenta nella forma *indeterminata* $(+\infty - \infty)$ e può non esistere o esistere.

Ad esempio se

$$\text{a)}\ a_k = \frac{k^2+1}{k}, \quad b_k = -k;$$

$$\text{b)}\ a_k = k^2 + k, \quad b_k = -k;$$

$$\text{c)}\ a_k = k^2 + (-1)^k, \quad b_k = -k^2;$$

si ha, nei tre casi, che $\{a_k\}$ diverge positivamente e $\{b_k\}$ diverge negativamente ma la successione $\{a_k + b_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$ è infinitesima nel caso a), $\{a_k + b_k\} = \{k^2\}$ è divergente positivamente in b) e $\{a_k + b_k\} = \{(-1)^k\}$ è non regolare in c).

TEOREMA 10. *Se* $\lim_k a_k = \ell \in \mathbf{R}$ e $\lim_k b_k = m \in \mathbf{R}$ *allora*:

$$a_k \cdot b_k \to \ell \cdot m,$$

ossia il limite del prodotto di due successioni convergenti è uguale al prodotto dei limiti.

Altri risultati sono i seguenti

$$a_k \to \ell \neq 0, \quad b_k \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |a_k \cdot b_k| \to +\infty;$$

$$a_k \to \ell \neq 0, \quad b_k \to -\infty \quad \Rightarrow \quad |a_k \cdot b_k| \to +\infty;$$

$$a_k \to +\infty, \quad b_k \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |a_k \cdot b_k| \to +\infty;$$

$$a_k \to -\infty, \quad b_k \to -\infty \quad \Rightarrow \quad |a_k \cdot b_k| \to +\infty.$$

Se una delle successioni è infinitesima e l'altra diverge si dice che il limite del prodotto delle due successioni si presenta nella forma *indeterminata* $(0 \cdot \infty)$ e può non esistere o esistere.

Ad esempio se

$$\text{a) } a_k = k, \quad b_k = \frac{1}{k}; \qquad \text{b) } a_k = k, \quad b_k = \frac{1}{k^2};$$

$$\text{c) } a_k = k^2, \quad b_k = \frac{1}{k}; \qquad \text{d) } a_k = k, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{k};$$

si ha, nei quattro casi, che $\{a_k\}$ diverge positivamente e $\{b_k\}$ è infinitesima ma la successione $\{a_k \cdot b_k\} = \{1\}$ è convergente nel caso a), $\{a_k \cdot b_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$ è infinitesima nel caso b), $\{a_k \cdot b_k\} = \{k\}$ è divergente nel caso c), e $\{a_k \cdot b_k\} = \{(-1)^k\}$ è non regolare in d).

TEOREMA 11. *Se* $\lim_k a_k = \ell \in \mathbf{R}$ e $\lim_k b_k = m \in \mathbf{R}$ *e* $m \neq 0$ *allora*

$$\frac{a_k}{b_k} \to \frac{\ell}{m},$$

cioè il limite del rapporto di due successioni convergenti è uguale al rapporto dei limiti.

Altri risultati sono i seguenti

$$a_k \to \ell, \quad b_k \to +\infty \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} \to 0;$$

$$a_k \to \ell, \quad b_k \to -\infty \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} \to 0;$$

$$a_k \to \pm\infty, \quad b_k \to m \Rightarrow \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \to +\infty;$$

$$a_k \to \ell \neq 0, \; b_k \to 0 \Rightarrow \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \to +\infty.$$

Se le due successioni sono entrambe divergenti o entrambe infinitesime si dice che il limite del rapporto delle due successioni si presenta nella forma *indeterminata* $\left(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}\right)$ e può esistere o non esistere.

Ad esempio se

$$\text{a) } a_k = 2k^2 + k + 1, \quad b_k = k^2 + 1; \qquad \text{b) } a_k = k, \quad b_k = k^2;$$

$$\text{c) } a_k = k\left[2 + (-1)^k\right], \quad b_k = k; \qquad \text{d) } a_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad b_k = \frac{1}{k};$$

$$\text{e) } a_k = e^{\frac{1}{k}} - 1, \quad b_k = \frac{1}{k}; \qquad \text{f) } a_k = \frac{(-1)^k}{k}, \quad b_k = \frac{1}{k};$$

si ha nei casi a), b) e c) che le due successioni sono entrambe infinite ma la successione $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ è convergente nel caso a), è infinitesima nel caso b), non regolare nel caso c); nelle altre le due successioni sono entrambe infinitesime ma la successione $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ è convergente nei casi d) ed e) mentre non è regolare nel caso f).

3. MASSIMO E MINIMO LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

DEFINIZIONE 1. Sia $\{a_k\}$ una successione e g un'applicazione crescente di **N** in **N**, cioè tale che per m > n si abbia g(m) > g(n). Posto $g(m) = k_m$, si dice *successione estratta* (o *sottosuccessione*) di $\{a_k\}$ la successione che ha per termine m-*esimo* l'elemento a_{k_m} della successione data, ossia

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_m}, \cdots.$$

Ad esempio se $k_m = 2k$ si ottiene la successione estratta da $\{a_k\}$ costituita dai soli termini di indice pari della $\{a_k\}$ cioè la

$$a_2, a_4, \cdots, a_{2k}, \cdots,$$

mentre se $k_m = 2k - 1$ si ottiene la successione estratta da $\{a_k\}$ costituita dai soli termini di indice dispari cioè la

$$a_1, a_3, \cdots, a_{2k-1}, \cdots.$$

La $\{a_{k+m}\}$ è la successione estratta da $\{a_k\}$ ottenuta sopprimendo i primi k termini, ad esempio se k = 5 la $\{a_{k+m}\}$ è la successione di termini

$$a_6, a_7, a_8, \cdots.$$

Ovviamente se $\{a_k\}$ è *limitata* lo è anche $\{a_{k+m}\}$.

Per le successioni estratte si hanno i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. *Se la successione $\{a_k\}$ è convergente verso il limite ℓ, ogni sua successione estratta $\{a_{k+m}\}$ è convergente verso lo stesso limite.*

TEOREMA 2. *Una successione a termini positivi e crescente è divergente se da essa si può estrarre una sottosuccessione divergente (positivamente).*

TEOREMA 3. Di Bolzano-Weierstrass[1]. *Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente.*

Se e'_k ed e''_k sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $\{a_k\}$ e valgono le

$$e'_k \le e'_{k+1} \le \cdots \le e''_{k-1} \le e''_k,$$

possiamo affermare che l'insieme numerico formato dai numeri e'_k è separato da quello formato dai numeri e''_k.

DEFINIZIONE 2. Si dice *minimo limite* (*massimo limite*) della successione $\{a_k\}$ *l'estremo superiore* degli e'_k (*l'estremo inferiore* degli e''_k); verranno indicati con $\underline{S}$ ed ($\overline{S}$) cioè

$$\underline{S} = \varliminf_{k\to\infty} a_k = \lim_k \inf a_k \; \left(\overline{S} = \varlimsup_{k\to\infty} a_k = \lim_k \sup a_k\right).$$

Se la successione $\{a_k\}$ è limitata solo inferiormente si pone $\overline{S} = +\infty$.

Se la successione $\{a_k\}$ è limitata solo superiormente si pone $\underline{S} = -\infty$.

Se invece la successione $\{a_k\}$ non è limitata né superiormente né inferiormente ($\{a_k\}$ è non regolare) si ha

$$\underline{S} = -\infty, \quad \overline{S} = +\infty.$$

È importante il seguente

TEOREMA 4. *Una successione è regolare se e solo se risulta* $\underline{S} = \overline{S} = \lambda$ $(\lambda \in \overline{\mathbf{R}})$[2].

---

[1] **Bernard Bolzano** [1781-1848], **Karl Weierstrass** [1815-1897].
[2] Con $\overline{\mathbf{R}}$ si intende l'insieme **R** ampliato, ossia $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

ESERCIZIO 1. *Determinare il minimo limite ed il massimo limite della successione*

$$\{a_k\} = \left\{(-1)^k \frac{k}{k+1}\right\}.$$

Soluzione. Si ha $\underline{S} = -1$ e $\overline{S} = +1$. Infatti a seconda che k sia dispari o pari si ottengono le due successioni estratte

$$a_{2k-1} = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots, -\frac{2k-1}{2k}, \ldots, \qquad a_{2k} = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{2k}{2k+1}, \ldots,$$

da cui

$$\lim_k a_{2k-1} = -1, \qquad \lim_k a_{2k} = 1,$$

e poiché non esistono altre successioni estratte tendenti a limiti diversi da questi si può affermare che -1 e $+1$ sono rispettivamente il minimo limite ed il massimo limite della successione (la successione considerata è non regolare).

ESERCIZIO 2. *Determinare il minimo limite ed il massimo limite della successione*

$$\{a_k\} = \left\{\sin\frac{k\pi}{2}\right\}.$$

Soluzione. Si ha $\underline{S} = -1$ e $\overline{S} = +1$ in quanto

$$a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ a_2 = \sin\frac{2\pi}{2} = \sin\pi = 0,\ a_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ a_4 = \sin 2\pi = 0,\ \ldots,$$

per cui

$$a_{2k} = 0, \quad a_{4k-3} = 1, \quad a_{4k-1} = -1,$$

e quindi

$$\lim_k a_{2k} = 0,\ \lim_k a_{4k-3} = 1,\ \lim_k a_{4k-1} = -1.$$

ESERCIZIO 3. *Determinare il minimo limite ed il massimo limite della successione*

$$\{a_k\} = \left\{(-1)^k \frac{k^2}{k+3}\right\}.$$

Soluzione. A seconda che k sia dispari o pari si hanno le

$$a_{2k-1} = -\frac{4k^2 - 4k + 1}{2k+1}, \qquad a_{2k} = \frac{4k^2}{2k+3};$$

e quindi

$$\lim_k a_{2k-1} = -\infty, \qquad \lim_k a_{2k} = +\infty,$$

per cui

$$\underline{S} = -\infty, \quad \overline{S} = +\infty.$$

ESERCIZIO 4. *Determinare il minimo limite ed il massimo limite della successione*

$$\{a_k\} = \{\operatorname{arctg}(-1)^k k\}.$$

Soluzione. Si ha $\underline{S} = -\frac{\pi}{2}$, $\overline{S} = +\frac{\pi}{2}$. Infatti a seconda che k sia dispari o pari si hanno le

$$a_{2k-1} = -\operatorname{arctg}(2k-1), \quad a_{2k} = \operatorname{arctg} 2k,$$

e quindi

$$\lim_k a_{2k-1} = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_k a_{2k} = +\frac{\pi}{4}.$$

4. DEFINIZIONE DI SERIE NUMERICA

Considerata la successione $\{a_k\}$ di numeri reali :

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots,$$

si chiama *serie numerica reale* (o semplicemente *serie*) ad essa relativa, il simbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k ; \tag{1}$$

i numeri $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots$ sono i *termini* della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Costruiamo a partire dalla $\{a_k\}$ la successione $\{S_k\}$ i cui termini sono così definiti

$$S_1 = a_1 ,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$

. . . .

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k = \sum_{h=1}^{k} a_h ,$$

. . . .

Ad S_k si dà il nome di *somma parziale di ordine* k o *ridotta di ordine* k della serie.

Indicati con $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ rispettivamente il *minimo limite* ed *il massimo limite* della $\{S_k\}$, riesce evidentemente

$$\underline{S} \le \overline{S} ;$$

a) se $\underline{S} < \overline{S}$ si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è *non regolare* (o *indeterminata* od *oscillante*) e $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ si chiamano *minima e massima somma* della serie,

b) se $\underline{S} = \overline{S}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice *regolare* ed il comune valore S di $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ si chiama *somma* della serie e si scrive

$$S = \lim_k S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \tag{2}$$

In particolare se S esiste ed è finito la serie si dice *convergente*, se invece S è infinito la serie si dice *divergente*: *divergente positivamente* o *negativamente* a seconda che risulti

$$S = +\infty \text{ oppure } S = -\infty,$$

e scriveremo (con abuso di notazione)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty .$$

È evidente il teorema seguente

TEOREMA 1. *Se la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente con somma* S *allora la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$$

(*ottenuta moltiplicando tutti i termini della serie per una costante non nulla*) *converge con somma* $c \cdot S$ ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

ESERCIZIO 1. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$.

Soluzione. Si tratta di provare che, posto $S_k=\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h(h+1)}$, $\lim_k S_k=1$. Si può scrivere

$$a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

e quindi

$$S_1=1-\frac{1}{2},\ S_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3},\dots,\ S_k=1-\frac{1}{k+1},\dots$$

da cui

$$S=\lim_k S_k=\lim_k\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1.$$

La $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ è la serie di **Mengoli**(1). Dalla $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$ si deduce che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}=2,$$

ossia la serie avente per termini gli inversi dei *numeri triangolari*(2) è convergente con somma 2.

---

(1) **Pietro Mengoli** [1625-1686].
(2) Il *numero triangolare* di ordine k è la somma dei primi k numeri naturali, ossia: $T_k=1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Lo studio dei numeri triangolari ha origine molto antica, risalendo alla scuola pitagorica [VI sec. a.C.].

ESERCIZIO 2. *Dimostrare che* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}$.

Soluzione. Si ha

$$a_k=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+3)},$$

$$S_k=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+3)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2k+3)},$$

e quindi

$$S=\lim_k S_k=\lim_k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2k+3)}\right)=\frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 3. *Dimostrare che* $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$.

Soluzione. Poiché

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right),$$

si ha

$$S_k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right),$$

e quindi

$$S=\lim_k S_k=\lim_k\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}.$$

ESERCIZIO 4. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$.

Soluzione. Poiché $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, si ha

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(k+1)!},$$

da cui

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(1 - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1.$$

La $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ prende il nome di serie di **Bernoulli**[3].

ESERCIZIO 5. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

Soluzione. Si può scrivere $a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, e quindi

$$S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \quad S_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \dots$$

da cui

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1.$$

---

[3] **Daniel Bernoulli** [1700-1782].

ESERCIZIO 6. *Dimostrare che* $\sum_{k=2}^{\infty} \ln \frac{k^2}{k^2-1} = \ln 2$.

Soluzione. Si ha

$$\ln \frac{k^2}{k^2-1} = \ln \frac{k}{k-1} - \ln \frac{k+1}{k},$$

per cui

$$S_k = \left(\ln 2 - \ln \frac{3}{2}\right) + \left(\ln \frac{3}{2} - \ln \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\ln \frac{k}{k-1} - \ln \frac{k+1}{k}\right) = \ln 2 - \ln \frac{k+1}{k},$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(\ln 2 - \ln \frac{k+1}{k}\right) = \ln 2.$$

ESERCIZIO 7. *Dimostrare che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ *è divergente*.

Soluzione. Dalle

$$a_k = 1 \ (k = 1, 2, 3, \dots)$$

si deduce che

$$S_1 = 1, \ S_2 = 1 + 1 = 2, \dots, S_k = k, \dots$$

da cui

$$S = \lim_k S_k = +\infty,$$

e quindi la serie considerata è *divergente* (*positivamente*).

La $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ è la **serie naturale** (le sue somme parziali sono i naturali).

ESERCIZIO 8. *Dimostrare che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ *è divergente*.

Soluzione. Dalle

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

si deduce subito

$$S_k = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{h} - \sqrt{h+1}} = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{k+1} - 1,$$

da cui

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(\sqrt{k+1} - 1\right) = +\infty,$$

ossia la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ è divergente (positivamente).

ESERCIZIO 9. *Dimostrare che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$ *è divergente*.

Soluzione. Si può scrivere

$$a_k = \ln(k+1) - \ln k,$$

per cui

$S_k = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(k+1) - \ln 1 = \ln(k+1)$.

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \ln(k+1) = +\infty.$$

ESERCIZIO 10. *Dimostrare che la serie*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots$$

è divergente.

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{1}{h} \quad \text{se} \quad \frac{(k-1)k}{2} \leq h \leq \frac{(k+1)k}{2}, \quad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considerando le somme parziali aventi per indici i *numeri triangolari*

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots,$$

si ha

$$S_1 = 1, \; S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2, \; S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3, \cdots, S_{\frac{k(k+1)}{2}} = k, \cdots$$

e quindi, poiché la successione $\{S_k\}$ è *crescente* e si può estrarre da essa una successione divergente (cfr. teor. **2** pag. 14) riesce

$$S = \lim_k S_{\frac{k(k+1)}{2}} = \lim_k k = +\infty,$$

per cui la

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots$$

è divergente positivamente.

ESERCIZIO 11. *Dimostrare che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *è divergente.*

Soluzione. Poiché la successione $\{S_k\}$ delle somme parziali è crescente, per provare la divergenza della serie in questione sarà sufficiente determinare una sottosuccessione divergente positivamente. Riferendosi per questo alla successione $\{S_{2^k}\}$

$$S_{2^0}, S_{2^1}, S_{2^2}, \cdots, S_{2^k}, \cdots,$$

con

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k},$$

od anche

$$S_{2^k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k}\right),$$

avendo raggruppato i successivi termini in modo che nella seconda coppia di parentesi vi sono due addendi, nella terza quattro e così via sino all'ultima in cui vi sono 2^{k-1} addendi $\left[2^k - \left(2^{k-1} + 1\right) + 1 = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}\right]$, si ottiene subito per $k > 1$ la seguente maggiorazione

$$S_{2^k} > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2},$$

poiché

$$\lim_k \frac{k+1}{2} = +\infty,$$

si deduce la **divergenza** della $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

La $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ prende il nome di *serie armonica*, ad essa faremo spesso riferimento.

ESERCIZIO 12. *Dimostrare che la serie*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} + \cdots$$

è divergente.

Soluzione. Si ha

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} \qquad \text{e} \qquad a_{2k} = \frac{-1}{\sqrt{k+1}+1},$$

e raggruppando i termini a due a due si ottiene

$$S_{2k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right) =$$
$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right),$$

e quindi

$$\lim_k S_{2k} = +\infty,$$

e poiché

$$S_{2k-1} = S_{2k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq S_{2k},$$

si conclude con la

$$\lim_k S_k = +\infty.$$

ESERCIZIO 13. *Dimostrare che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ *è non regolare.*

Soluzione. Poiché

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\cdots,\ S_{2k-1} = 1,\ S_{2k} = 0,\cdots,$$

si deduce che

$$\underline{S} = \min\lim_k S_k = 0,\quad \overline{S} = \max\lim_k S_k = 1,$$

e la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ è *non regolare*. La $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ è la serie di **Grandi**[4].

ESERCIZIO 14. *Dimostrare che la serie*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\cdots$$

è non regolare.

Soluzione. A seconda che k sia dispari o pari si ha

$$S_1 = 1,\ S_3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,\cdots, S_{2k-1} = 1,\cdots$$
$$S_2 = 1-\frac{1}{2},\ S_4 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3} = 1-\frac{2}{3},\cdots, S_{2k} = 1-\frac{k}{k+1},\cdots$$

per cui

$$\lim_k S_{2k-1} = 1,\qquad \lim_k S_{2k} = \lim_k\left(1-\frac{k}{k+1}\right) = 1-1 = 0,$$

e quindi la serie è *non regolare* ($\underline{S} = 0$ e $\overline{S} = 1$).

---

(4) **Guido Grandi** [1671-1742].

ESERCIZIO 15. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin\left(\pi\sqrt{k}\right)-\sin\left(\pi\sqrt{k-1}\right)\right]$$

è non regolare.

Soluzione. Si può scrivere

$$a_k = \sin\pi\sqrt{k}-\sin\pi\sqrt{k-1} = 2\sin\frac{\pi(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}{2}\cdot\cos\frac{\pi(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{2\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}\cdot\cos\frac{\pi(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{2},$$

per cui

$$S_k = \sin\pi-\sin 0+\sin\pi\sqrt{2}-\sin\pi+\cdots+\sin\pi\sqrt{k}-\sin\pi\sqrt{k-1} = \sin\pi\sqrt{k},$$

e quindi

$$\underline{S} = -1 \text{ e } \overline{S} = +1.$$

5. LA SERIE GEOMETRICA

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

è detta serie *geometrica*, in quanto i suoi termini costituiscono una progressione geometrica di *ragione* x (e *primo termine* 1), questa serie converge solo per particolari valori di x.

La serie è di importanza fondamentale e come si vedrà converge solo per i valori di x appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$.

Due casi ci sono già noti, quello relativo ad $x = 1$ e quello relativo ad $x = -1$.

Nel primo caso la serie geometrica si riduce a quella naturale che è divergente positivamente (cfr. es. **7** pag. 23), nel secondo caso si ottiene la serie di **Grandi** che è non regolare (cfr. es. **13** pag. 28).

Se $x \neq 1$ consideriamo l'identità[1]:

$$S_k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}, \tag{2}$$

e distinguiamo i seguenti casi

a) se $-1 < x < 1$ si ha

$$\lim_k x^k = 0,$$

---

[1] La somma S_k dei primi k termini di una progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ e di primo termine a_1, è

$$S_k = \frac{a_1(1-q^k)}{1-q}.$$

Se $q = 1$ risulta $S_k = k \cdot a_1$.

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \frac{1}{1-x},$$

si conclude pertanto con l'importante formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}, \qquad -1 < x < 1; \tag{3}$$

b) se $x > 1$, poiché

$$\lim_k x^k = +\infty, \ \lim_k \frac{x^k}{x-1} = +\infty,$$

dalla (2) si ha :

$$S = \lim_k S_k = +\infty.$$

Tenuto anche conto di quanto sopra detto per $x = 1$ si ha che la serie geometrica è *divergente positivamente* se $x \geq 1$.

c) se $x < -1$, poiché

$$\min\lim_k x^k = -\infty, \quad \max\lim_k x^k = +\infty,$$

si hanno dalla (2) le

$$\underline{S} = \min\lim_k S_k = -\infty, \quad \overline{S} = \max\lim_k S_k = +\infty.$$

Si conclude che se $x \leq -1$ la serie geometrica è *non regolare* (*indeterminata*).

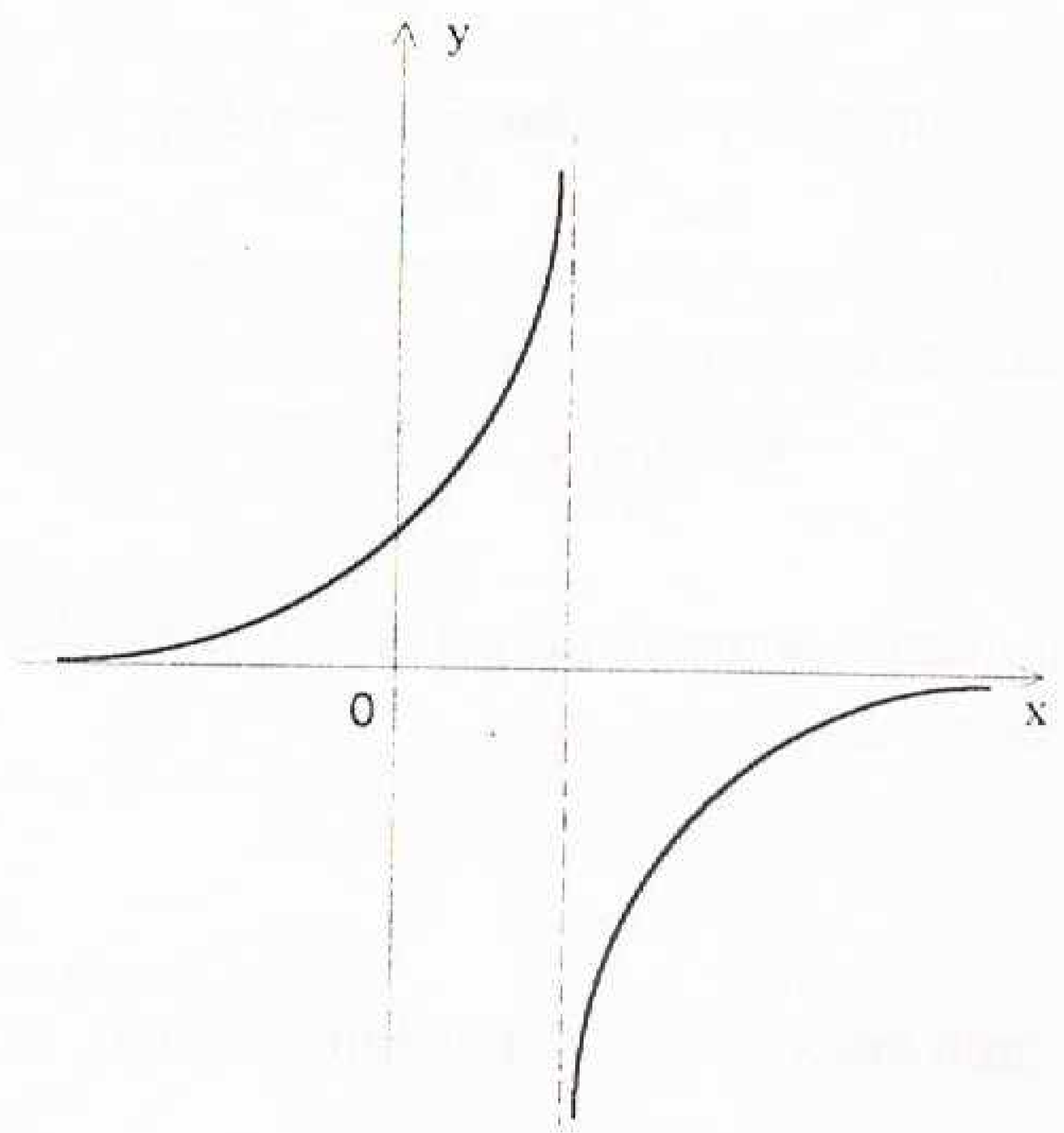
Riprendendo la

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}, \qquad -1 < x < 1,$$

si ha che solo nell'intervallo $(-1, 1)$ la somma della serie geometrica coincide con i valori della funzione

$$y = \frac{1}{1-x},$$

(il cui grafico è indicato in figura).



Di più i valori dell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ sono somme di serie geometriche di ragione $x \in (-1, 1)$, e quindi ogni numero reale compreso tra 0 ed 1 che, come è noto, è definito dalla successione $0.c_1c_2...c_k...$, dove i c_k sono numeri tali che $0 \le c_k \le 9$, altro non è che la somma della serie geometrica

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}.$$

Così ad esempio per il numero $0.\overline{28}$ si ha

$$0.\overline{28} = \frac{2}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}$$

dove c_k vale 2 per k dispari e 8 per k pari[2].

Allo stesso modo possiamo dire che ogni numero reale che ha una rappresentazione decimale del tipo

$$r = N.c_1c_2 \cdots c_k \cdots,$$

con $0 \le c_k < 9$ e $k \ge 1$, può essere espresso come somma di una serie geometrica.

Infatti tra il numero reale r e le cifre c_k sussistono le

$$(1) \qquad N + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} \le r < N + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k + 1}{10^k}.$$

Se poniamo

$$S_k = \sum_{h=0}^{k} \frac{c_h}{10^h},$$

e sottraiamo S_k da ogni membro della (1), otteniamo $0 \le r - S_k < \frac{1}{10^k}$, per cui passando al limite per $k \to \infty$, avremo che $S_k \to r$ e ciò mette in evidenza che il numero reale r è esprimibile come somma della serie geometrica convergente

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{10^h}.$$

[2] Cfr. G. Palumbo, "*Funzioni continue*", di questa collana, pag. 101.

ESERCIZIO 1. *Determinare la somma delle serie*

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k}}, \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}, \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty}\cos^{2k}x, \ (x \neq h\pi,\ h \in \mathbf{Z}).$$

Soluzione. Le quattro considerate sono serie geometriche di ragione rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{4}$, $\cos^2 x$, sono convergenti in quanto la loro ragione è strettamente compresa tra -1 ed 1. Si può dunque applicare la

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

ottenendo le

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\cos^{2k}x = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Quest'ultima serie, nel caso in cui $x = h\pi$, diverge in quanto si riduce alla serie naturale (cfr. es. 7 pag. 23). Le serie geometriche di ragione $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}} = \frac{4}{3},$$

saranno chiamate rispettivamente serie di **Zenone**[3] e serie di **Archimede**[4], l'ultima si ritiene che sia il più antico esempio "**documentato**" di serie convergente.

(3) **Zenone di Elea** [495-435 a.C.].
(4) **Archimede di Siracusa** [287-212 a.C.].

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty}3^{k-1}, \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}, \quad \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}3^{k-1}$$

Soluzione. Le a) e b) divergono positivamente in quanto serie di ragione 2 e 3, mentre le c) e d) sono non regolari in quanto serie di ragione -2 e -3.

Evidentemente anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty}ax^{k-1}$ di ragione x e primo termine $a \neq 0$, è *convergente* per $|x| < 1$, e si ha

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty}ax^{k-1} = \frac{a}{1-x}.$$

Sono evidenti le $\sum_{k=1}^{\infty}ax^{k-1} = +\infty$, se $a > 0$ e $x \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty}ax^{k-1} = -\infty$ se $a < 0$ e $x \geq 1$, la $\sum_{k=1}^{\infty}ax^{k-1}$ è *non regolare* se $a \neq 0$ ed $x \leq -1$. Ad esempio la serie

$$3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \cdots,$$

è *convergente* ($S = \frac{9}{5}$) in quanto geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$ (e primo termine 3), mentre la serie

$$4 + 6 + 9 + \frac{27}{2} + \frac{81}{4} + \cdots,$$

diverge positivamente in quanto è la serie geometrica di ragione $\frac{3}{2}$ (e primo termine 4). Dalla (4) per $a = x$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^k = \frac{x}{1-x}, \quad \text{se } |x| < 1.$$

ESERCIZIO 3. *Studiare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^k$ $(x \neq 1)$.

Soluzione. Si tratta della serie geometrica di ragione $\frac{x^2+1}{x-1}$, per cui si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x^2+1}{x-1}} = \frac{1-x}{x^2-x+2}, \quad \text{se} \quad \left|\frac{x^2+1}{x-1}\right| < 1.$$

Quest'ultima disequazione conduce ai due sistemi

$$\alpha)\ \begin{cases} -x+1 > x^2+1 \\ x^2+1 > x-1 \end{cases} \quad \text{se } x < 1, \qquad \beta)\ \begin{cases} -x+1 < x^2+1 \\ x^2+1 > x-1 \end{cases} \quad \text{se } x > 1,$$

dal sistema α) si ottiene $-1 < x < 0$, ed il sistema β) non ammette soluzioni in quanto se $x > 1$ è $x^2+1 > x-1$. Dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^k = \frac{1-x}{x^2-x+2} \quad \text{se} \quad -1 < x < 0.$$

Riassumendo la $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^k$ è

a) *convergente* con somma

$$S = \frac{1-x}{x^2-x+2}, \quad \text{se} \quad x \in (-1,0),$$

b) *divergente positivamente* se $x \in (1, +\infty)$,

c) *non regolare* se $x \in (-\infty,-1) \cup [0,1)$.

ESERCIZIO 4. *Studiare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{(-x^2+x)k}$.

Soluzione. La serie è a termini positivi in quanto la ragione e^{-x^2+x} è positiva e quindi non è mai *indeterminata*. La serie *converge* se $e^{-x^2+x} < 1$, cioè se $-x^2+x < 0$, e si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{(-x^2+x)k} = \frac{1}{1-e^{-x^2+x}}, \quad \forall\, x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty),$$

è invece *divergente positivamente* $\forall\, x \in [0,1]$, per $x = 0$ ed $x = 1$ si riduce alla serie naturale.

ESERCIZIO 5. *Studiare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty}[\ln(1+x)]^k$.

Soluzione. Si riconosce subito che la serie è

convergente se $|\ln(1+x)| < 1$ ossia se $x \in \left(\frac{1}{e}-1, e-1\right)$,

divergente positivamente se $\ln(1+x) \geq 1$ ossia se $x \in [e-1,+\infty)$,

non regolare se $\ln(1+x) \leq -1$ ossia se $x \in \left(-1, \frac{1}{e}-1\right]$.

ESERCIZIO 6. *Studiare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2+\cos x}\right)^k$.

Soluzione. La serie è geometrica e di ragione $\frac{1}{2+\cos x}$ positiva e minore od uguale ad 1, infatti

$$0 < \frac{1}{2+\cos x} \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Allora la serie è *convergente* se $0 < \frac{1}{2+\cos x} < 1$ ossia se $x \neq (2h+1)\pi$, $h \in \mathbf{Z}$,

divergente se $\frac{1}{2+\cos x} = 1$ ossia se $x = (2h+1)\pi$, $h \in \mathbf{Z}$.

ESERCIZIO 7. *Studiare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\ln(x^2-x)\right]^k$

Soluzione. Deve essere $x^2-x>0$, pertanto in queste ipotesi, la serie è *convergente*, *divergente* (*positivamente*) o *non regolare* a seconda che riesca

$$-1<\ln(x^2-x)<1,\ \ln(x^2-x)\geq 1,\quad \ln(x^2-x)\leq -1.$$

Dai sistemi

$$\alpha)\begin{cases}x^2-x>0\\ -1<\ln(x^2-x)<1\end{cases}\qquad \beta)\begin{cases}x^2-x>0\\ \ln(x^2-x)\geq 1\end{cases}\qquad \gamma)\begin{cases}x^2-x>0\\ \ln(x^2-x)\leq 1\end{cases}$$

si deducono le

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\ln(x^2-x)\right]^k=\frac{1}{1-\ln(x^2-x)}=\frac{1}{\ln\frac{e}{x^2-x}},$$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{1+4e}}{2},\frac{e-\sqrt{e(e+4)}}{2e}\right)\cup\left(\frac{e+\sqrt{e(e+4)}}{2e},\frac{1+\sqrt{1+4e}}{2}\right),$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\ln(x^2-x)\right]^k=+\infty,\ x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1+4e}}{2}\right]\cup\left(\frac{1+\sqrt{1+4e}}{2},+\infty\right).$$

La serie è *non regolare* se

$$x\in\left[\frac{e-\sqrt{e(e+4)}}{2e},0\right)\cup\left(1,\frac{e+\sqrt{e(e+4)}}{2e}\right].$$

6. IL CALCOLO DEI LOGARITMI

Abbiamo visto nel paragrafo precedente la fondamentale identità

$$(1)\qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ -1<x<1;$$

dalla quale subito si deducono le

$$a)\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^kx^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k,\ |x|<1,$$

$$b)\ \frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k},\quad |x|<1,$$

$$c)\ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^kx^{2k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k},\ |x|<1.$$

La a) si ottiene dalla (1) cambiando x con $-x$, la b) dalla (1) cambiando x in x^2, la c) dalla a) cambiando x in x^2.

Con ulteriori considerazioni, che in questo volume non tratteremo, si deducono le

$$(2)\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots,\quad -1<x\leq 1.$$

Se nella (2) poniamo x in luogo di $-x$ otteniamo la

$$(3)\qquad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^k}{k}-\cdots,\quad -1\leq x<1^{(1)}.$$

---

(1) Può meravigliare il fatto che la serie converge solo per $|x|<1$, passando però al campo complesso si ottiene la funzione $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ che ha due **poli** in $z=i$ e $z=-i$. Per altre considerazioni cfr. E. Ambrisi, B. Rizzi "*Considerazioni sui concorsi a cattedre*" Periodico di Matematiche, A.1984 n. 3-4, pagg. 71-75.

Inoltre dalla c) si deduce la

(4) $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots, \qquad -1 < x \le 1.$$

Queste serie si prestano al calcolo di alcune costanti elementari come ln2 e π.

Dalle (2) e (3), sottraendo membro a membro, si ottiene la

(5) $$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots, \quad -1 < x \le 1,$$

in particolare per $x = \frac{1}{3}$ si ottiene la

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot 3^{2k-1}} + \dots\right),$$

e addizionando gli addendi sino a $\frac{1}{15 \cdot 3^{15}}$ si ottiene

$$\ln 2 = 0.69314718\dots,$$

con 8 cifre decimali esatte. Usando la (2) avremmo dovuto sommare i primi 100'000'000 di termini per ottenere lo stesso valore di ln2.

La serie (5) si presta al calcolo dei logaritmi di tutti i numeri naturali, infatti posto in essa

$$x = \frac{1}{2k+1},$$

si ottiene la

(6) $$\ln(k+1) = \ln k + 2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \frac{1}{5(2k+1)^5} + \frac{1}{7(2k+1)^7} + \dots\right),$$

che converge per $k \ge 1$.

Se si pone $k = 2$ si ha

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots\right) = 1.09861228\dots.$$

Dalla conoscenza di ln2 e di ln3 possiamo calcolare ln6, infatti

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 = 0.69314718 + 1.09861228 = 1.79175946$$

e si può continuare per il calcolo dei logaritmi neperiani[1].

Per calcolare i logaritmi decimali (o logaritmi di Briggs[2]) basta tener conto che il modulo di trasformazione che consente di calcolare il logaritmo decimale da quello neperiano è

$$M = \log_{10} e = \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 2 + \ln 5} = 0.43429448\dots.$$

7. SERIE TELESCOPICHE

Per le ordinarie somme finite valgono le proprietà di additività e di omogeneità

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

e la proprietà *telescopica* (o del *cannocchiale*)

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

---

(1) **John Napier** [1550-1617].
(2) **Henry Briggs** [1561-1639].

Assegnata la successione $\{b_k\}$ e posto

(1) $$a_k = b_k - b_{k+1},$$

per la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si ha il teorema seguente.

TEOREMA 1. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente se e solo se è convergente la successione* $\{b_k\}$ *e si ha*

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim_k b_k .$$

Ogni serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ può essere interpretata come *serie telescopica* in quanto è sempre possibile soddisfare la (1) fissando b_1 e ponendo $\forall\ k \geq 1$,

$$b_{k+1} = b_1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

Ad esempio la serie di **Mengoli**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$$

è *telescopica* in quanto il suo termine generale si può scrivere

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ed è perciò soddisfatta la (1) con $b_k = \dfrac{1}{k}$, inoltre dalle $b_1 = 1$ e $\lim_k b_k = 0$ si ritrova che la serie di Mengoli è convergente con somma 1 (cfr.es. **1** pag. 20).

Negli esercizi che seguono indicheremo con $\mathbf{Z}_-$ gli interi negativi, con $-2\mathbf{Z}$ gli opposti dei pari $\{ -2, -4, -6, \ldots \}$.

ESERCIZIO 1. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{1}{a+1} \qquad (a \notin \mathbf{Z}_-).$$

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+1},$$

per cui

$$S_1 = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2+a}, S_2 = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{3+a}, \ldots, S_k = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{k+1+a}, \ldots,$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{k+1+a} \right) = \frac{1}{1+a}.$$

Per $a = 0$ si ritrova la serie di Mengoli.

Per $a = 1$ ed $a = (\sqrt{2} - 1)$ si hanno rispettivamente le

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\sqrt{2}-1)(k+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 2. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+a)(2k+a+2)}=\frac{1}{2(a+2)}\qquad (a\notin -2\mathbf{Z}).$$

Soluzione. Si ha

$$a_k=\frac{1}{(2k+a)(2k+a+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+a}-\frac{1}{2k+a+2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k+\frac{a}{2}}-\frac{1}{k+\frac{a}{2}+1}\right),$$

per cui

$$S_k=\frac{1}{4}\sum_{h=1}^{k}\left(\frac{1}{h+\frac{a}{2}}-\frac{1}{h+\frac{a}{2}+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{2}}-\frac{1}{k+\frac{a}{2}+1}\right),$$

e quindi

$$S=\lim_k S_k=\frac{1}{4}\lim_k\left(\frac{1}{1+\frac{a}{2}}-\frac{1}{k+\frac{a}{2}+1}\right)=\frac{1}{2(a+2)}.$$

In particolare per $a=1$ e per $a=(\sqrt{2}-2)$ si hanno rispettivamente le

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+\sqrt{2}-2)(2k+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 3. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(bk+a)(bk+a+b)}=\frac{1}{b(b+a)}\qquad (\frac{a}{b}\notin \mathbf{Z}_-).$$

Soluzione. Si ha

$$a_k=\frac{1}{(bk+a)(bk+a+b)}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{bk+a}-\frac{1}{bk+a+b}\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{k+\frac{a}{b}}-\frac{1}{k+\frac{a}{b}+1}\right),$$

$$S_k=\frac{1}{b^2}\sum_{h=1}^{k}\left(\frac{1}{h+\frac{a}{b}}-\frac{1}{h+\frac{a}{b}+1}\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}}-\frac{1}{k+\frac{a}{b}+1}\right),$$

e quindi

$$S=\lim_k S_k=\frac{1}{b^2}\lim_k\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}}-\frac{1}{k+\frac{a}{b}+1}\right)=\frac{1}{b(a+b)}.$$

Per $b=1$ e $b=2$ si ritrovano le serie degli esercizi precedenti.

ESERCIZIO 4. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)}=\frac{1}{2(a+1)(a+2)}\qquad (a\notin \mathbf{Z}_-).$$

Soluzione. Si ha

$$a_k=\frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+a)(k+a+1)}-\frac{1}{(k+a+1)(k+a+2)}\right),$$

$$S_k = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{k}\left(\frac{1}{(h+a)(h+a+1)} - \frac{1}{(h+a+1)(h+a+2)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(k+a+1)(k+a+2)}\right),$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \frac{1}{2(a+1)(a+2)}.$$

In particolare per $a = 0$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{3}{4}$ si hanno rispettivamente le[3]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{12},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)(4k+5)} = \frac{1}{64}\cdot\frac{8}{5} = \frac{1}{40}.$$

ESERCIZIO 5. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)(k+a+3)} = \frac{1}{2(a+1)(a+2)(a+3)}, \quad a \notin \mathbf{N}.$$

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)(k+a+3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)} - \frac{1}{(k+a+1)(k+a+2)(k+a+3)}\right),$$

---

[3] Nei casi $a = -\frac{1}{2}$ ed $a = -\frac{3}{4}$, i termini delle serie corrispondenti sono moltiplicati rispettivamente per $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{64}$.

$$S_k = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} - \frac{1}{(k+a+1)(k+a+2)(k+a+3)}\right),$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \frac{1}{3(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

In particolare per $a = 0$, per $a = -\frac{1}{2}$ ed $a = -\frac{2}{3}$ si ottengono rispettivamente le

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{18},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{2^3}{45} = \frac{1}{90},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)(3k+4)(3k+7)} = \frac{1}{3^4}\cdot\frac{3^2}{28} = \frac{1}{252}.$$

La (3) è la serie di **De Moivre**[4].

ESERCIZIO 6. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)\cdots(k+a+m)} = \frac{1}{m(a+1)(a+2)\cdots(a+m)}, \quad a \notin \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}.$$

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{1}{(k+a)(k+a+1)(k+a+2)\cdots(k+a+m)} =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(k+a)(k+a+1)\cdots(k+a+m-1)} - \frac{1}{(k+a+1)(k+a+2)\cdots(k+a+m)}\right),$$

---

[4] **Abraham De Moivre** [1667-1754].

$$S_k = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+m)} - \frac{1}{(k+a+1)\cdots(k+a+m)}\right),$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \frac{1}{m(a+1)(a+2)\cdots(a+m)}.$$

Sono stati già studiati i casi particolari per m = 2 ed m = 3. È notevole il caso corrispondente ad a = 0

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}.$$

Ad esempio dalla (4) per m = 4 ed m = 5 si hanno rispettivamente le

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4!} = \frac{1}{96},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5!} = \frac{1}{600}.$$

ESERCIZIO 7. *Dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+a+m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+a}, \quad a \notin \mathbf{Z}, \; m \in \mathbf{N}.$$

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{1}{(k+a)(k+a+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+m}\right),$$

$$S_k = \frac{1}{m}\left[\left(\frac{1}{1+a}+\ldots+\frac{1}{m+a}\right) - \left(\frac{1}{k+a+1}+\ldots+\frac{1}{k+a+m}\right)\right],$$

$$S = \lim_k S_k = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\cdots+\frac{1}{m+a}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+a}.$$

Per m = 1 si ritrova la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$

Per a = 0 si ha

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = \frac{1}{m}H_m,$$

Per m = 1, m = 2, m = 3 si hanno, rispettivamente, le

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

La (6) è la serie di **Mengoli**, la (7) quella di di **De Moivre**, la (8) è la serie di **Stirling**(5).

Specializzando nella (5) m nei successivi valori 4, 5, 6, 10, 100, 1000, si ottengono, rispettivamente, le

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+5)} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{137}{300},$$

(5) **James Stirling** [1692-1670].

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+6)}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{147}{360},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+10)}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)=\frac{7381}{25200},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+100)}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{100}\right)=0.051874\ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1000)}=\frac{1}{1000}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)=0.007486\ldots$$

Dalla

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+a+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+a},$$

è possibile ottenerne altre ad esempio per $a=-\frac{1}{2}$ si ottiene la

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}+m\right)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}=\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1},$$

ossia

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k-1+2m)}=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1},$$

oppure sostituendo $\frac{b}{a}$ ad a si ottiene la

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(ak+b)(ak+b+ma)}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+\frac{b}{a}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{ak+b}.$$

Specializzando nella (9) m nei successivi valori 1, 2,..., 10, si ottengono, rispettivamente, le

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+5)}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{23}{90},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+7)}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{22}{105},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+9)}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=\frac{563}{3150},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+19)}=\frac{1}{20}\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}\right)=0.106628\ldots$$

ESERCIZIO 8. *Dimostrare che* $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2-m^2}=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}$ $(m\in\mathbb{N})$.

Soluzione. Poiché $k^2-m^2=(k-m)(k+m)$, ponendo $h=k-m$, si ha

$$h+2m=(k-m)+2m=k+m,$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2-m^2}=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{(k-m)(k+m)}=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+2m)},$$

tenendo conto delle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2m)}=\frac{1}{2m}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k},$$

si ottiene

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2-m^2}=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+2m)}=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}.$$

ESERCIZIO 9. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$.

Soluzione. Si ha

$$a_k = \frac{2k+1+k^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)^2} - \frac{k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$

per cui

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2^2},\quad S_2 = 1 - \frac{1}{3^2}, \cdots,\quad S_k = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}, \cdots,$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1.$$

ESERCIZIO 10. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 1$.

Soluzione. Si tratta di una serie a termini di segno alterno e si ha

$$a_k = (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right),$$

per cui

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2},\quad S_2 = 1 - \frac{1}{3}, \cdots,\quad S_k = 1 - (-1)^k \frac{1}{k+1}, \cdots$$

e quindi

$$S = \lim_k S_k = \lim_k \left(1 - (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

ESERCIZIO 11. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione. Dall'identità[6] si ha

$$\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \text{ [7]}. \tag{10}$$

In particolare se $\alpha = \frac{1}{2k-1}$ e $\beta = \frac{1}{2k+1}$ si ha

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{1}{2k^2},$$

per cui

$$a_k = \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2k-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1},$$

e quindi

$$S_k = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1},$$

ossia

$$S = \lim_k S_k = \lim_k (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1}) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

---

[6] Si ottiene dalla

$$\operatorname{arctg} \alpha \pm \operatorname{arctg} \beta = \lambda\pi + \frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta},$$

nella quale valgono simultaneamente i segni superiori od inferiori; in essa inoltre si deve intendere $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, a seconda che $\operatorname{arctg} \alpha \pm \operatorname{arctg} \beta$ sia compresa, rispettivamente, negli intervalli $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

[7] Cfr. B. Rizzi (a cura di C. D'Aniello), "*Argomenti di matematica propedeutici agli studi universitari* ", pagg. 332-333, Liguori Editore 1990.

ESERCIZIO 12. *Dimostrare che* $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione. Dall'identità

$$\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta},$$

per $\alpha = \frac{1}{k}$ e $\beta = \frac{1}{k+1}$ si ha

$$\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{1}{k^2+k+1},$$

e quindi [8]

$$a_k = \operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1},$$

per cui

$$S_k = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1},$$

ossia

$$S = \lim_k S_k = \lim_k(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

---

[8] Poiché è $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} \le \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, (cfr. la nota (5)) si ha

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}.$$

8. LA SERIE RESTO

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si chiama *resto* k-*esimo* o *resto* di ordine k la serie

$$(1) \qquad R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots = \sum_{h=k+1}^{\infty} a_h,$$

che si ottiene dalla serie data sopprimendo i primi k termini. Si chiama invece *resto* k-*esimo* , di ordine m, la serie

$$(2) \qquad R_{k,m} = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m} = \sum_{h=k+1}^{k+h} a_h,$$

ossia la ridotta m-*esima* del resto k-*esimo*.

Ad esempio per le serie: geometrica, di Mengoli, armonica e di Grandi, si ha

$$R_k = \sum_{h=k+1}^{\infty} x^{h-1}, \quad R_k = \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)}, \quad R_k = \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{1}{h}, \quad R_k = \sum_{h=k+1}^{\infty} (-1)^{h-1}.$$

Relativamente alla serie resto si ha il seguente:

TEOREMA 1. *La serie resto ha lo stesso carattere della serie data ossia le due serie sono insieme convergenti, divergenti o indeterminate.*

Se in particolare la serie data $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente con somma* S *anche* R_m *è convergente, con somma* T *data da*

$$(3) \qquad T = S - \sum_{k=1}^{m} a_k,$$

e viceversa se la serie resto è convergente con somma T *allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente con somma* S *data da*

$$S = T + \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

ESERCIZIO 1. *Determinare la somma della serie*

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Soluzione. La serie è convergente in quanto resto della serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k,$$

e la sua somma può essere calcolata in uno dei modi seguenti

$$\text{a)}\quad \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18},$$

$$\text{b)}\quad \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{3^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{18}.$$

Il carattere di una serie - ossia il fatto di essere convergente, divergente o non regolare è una ***proprietà asintotica***, nel senso che il carattere di una serie non si altera sopprimendo, aggiungendo o modificando un numero finito di suoi termini.

Inoltre il carattere di una serie non si altera se tutti i suoi termini sono moltiplicati per una costante diversa da zero.

9. IL CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY[1]

Dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni (cfr. teor. **8** pag. 9) si ottiene il *criterio generale di convergenza* per le serie numeriche.

TEOREMA 1. **Criterio generale di convergenza.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sia convergente è che, fissato comunque un numero positivo* ε, *esista in corrispondenza un indice* h *tale che*, $\forall\, k>h$ *si ha*, $\forall\, m\in\mathbf{N}$, *la*

$$\left|\sum_{h=k+1}^{k+m} a_h\right|=\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+m}\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

ESERCIZIO 1. *Dimostrare che la serie armonica* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *è divergente*.

Soluzione. Il risultato è stato già provato (cfr. es. **11** pag. 26). Un'altra dimostrazione è la seguente. Riferendosi per $k>1$ al resto *k-esimo* della serie armonica si ha

$$R_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\geq\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\cdots+\frac{1}{2k}=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2},$$

e quindi per $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ il criterio di convergenza di Cauchy non è soddisfatto in quanto $R_k\geq\frac{1}{2}$, e si ritrova che la *serie armonica* non *converge*, infatti la successione delle ridotte $\left\{S_k=\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h}\right\}$ è a termini positivi e crescente e come tale ammette limite, che non potendo essere finito, è necessariamente infinito.

---

[1] **Augustin Louis Cauchy** [1789-1857].

Le serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ e $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ sono due esempi particolarmente notevoli di serie (la seconda è a termini di segno alterno), nei due esercizi che seguono ne sarà provata la convergenza mentre successivamente ne verrà determinata la somma.

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere della serie* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$:

Soluzione. Si ha di seguito

$$R_{k,m}=\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+m)^2}<$$

$$<\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\frac{1}{(k+m-1)(k+m)}=$$

$$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k+m-1}-\frac{1}{k+m}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}$$

ed osservando che qualunque sia m, riesce $R_{k,m}>\frac{1}{m}$ e quindi $\forall\ k>\frac{1}{\varepsilon}$ si ha $R_{k,m}<\varepsilon$. Dalla $0<R_k<\frac{1}{k}$ si deduce che $\lim_k R_k=0$.

Dal criterio di Cauchy, applicato come condizione sufficiente, segue che la serie data è *convergente*, (verrà dimostrato in seguito):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

La $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ verrà chiamata la serie di **Eulero**(2).

(2) **Leonhard Euler** [1707-1783].

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere della serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$.

Soluzione. Si ha di seguito

$$(*)\qquad R_{k,m}=(-1)^k\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{k+m}\right],$$

e raggruppando a due a due i successivi termini in parentesi quadra, partendo dal secondo, si ottiene a seconda che k sia dispari o pari

$$(-1)^k\left[\frac{1}{k+1}-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{k+m-1}-\frac{1}{k+m}\right)\right],$$

$$(-1)^k\left[\frac{1}{k+1}-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{k+m-2}-\frac{1}{k+m-1}\right)-\frac{1}{k+m}\right],$$

e poiché tutte le differenze nelle parentesi tonde sono positive, la quantità in parentesi nella (*) è positiva e minore di $\frac{1}{k+1}$, per cui si ha

$$R_{k,m}<\frac{1}{k+1},\quad R_{k,m}<\varepsilon,\quad \forall\ k>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

e applicando il criterio di Cauchy si deduce la convergenza della serie. In seguito sarà provata la

$$(**)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2.$$

La $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ è la serie di **Mercator**(3) (o serie armonica alternata).
La (**) è stata ottenuta anche da **Brouncker**(4).

(3) **Gerard Mercator** [1620-1687].
(4) **William Brouncker** [1620?-1684].

10. CONDIZIONI NECESSARIE PER LA CONVERGENZA

Dal criterio di Cauchy (cfr. teor. 1 pag. 57) segue subito il seguente:

TEOREMA 1. *Condizione necessaria affinché la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sia convergente è che il suo termine* $a_k \to 0$ *(per* $k \to \infty$*), ossia*

$$\lim_k a_k = 0. \tag{1}$$

La condizione è necessaria ma non sufficiente in quanto, ad esempio, per la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

risulta $\lim_k \frac{1}{k} = 0$ mentre si è provato (cfr. pagg. 26 e 57) che è divergente.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+1},$$

non è *convergente* in quanto $\lim_k \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = 1 \neq 0$ (la serie è divergente in quanto $\{S_k\}$ è crescente).

Anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k$ è divergente (non soddisfa la (1)). Poiché non esiste il $\lim_k (-1)^{k-1}$ la serie di Grandi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ non è convergente (precisamente è non regolare, cfr. es. **13** pag. 28).

Se nella

$$\left|\sum_{h=k+1}^{k+m} a_h\right| = |a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}| < \varepsilon,$$

si fa divergere k e si attribuiscono ad m valori costanti o variabili con k, si ottiene

$$\lim_k (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}) = 0. \tag{2}$$

Ciascuna di queste infinite relazioni, presa a sé, è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

Ad esempio per la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ si ha, con m = 1, $\lim_k \frac{1}{k+1} = 0$, ma riesce anche, qualunque sia il naturale m,

$$\lim_k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+m}\right) = 0, \tag{3}$$

infatti se

$$1 \le h \le m \Rightarrow k \le k+h \le k+m,$$

la quantità in parentesi della (3) non supera $\frac{m}{k}$ che $\to 0$ per $k \to \infty$.

Anzi la (3) sussiste anche quando $m \to \infty$, purché il rapporto $\frac{m}{k} \to 0$, è il caso, ad esempio, di $m = \left[\sqrt{k}\right]$.

La serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sin\pi\sqrt{\ln k} - \sin\pi\sqrt{\ln(k-1)}\right), \tag{*}$$

fornisce un altro esempio della non sufficienza della (3), considerata per un dato valore di m.

Sia infatti m = k, poiché con riferimento alla (*) si ha

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=$$

$$=\left(\sin\pi\sqrt{\ln(k+1)}-\sin\pi\sqrt{\ln k}\right)+\left(\sin\pi\sqrt{\ln(k+2)}-\sin\pi\sqrt{\ln(k+1)}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\sin\pi\sqrt{\ln 2k}-\sin\pi\sqrt{\ln(2k-1)}\right)=$$

$$=\sin\pi\sqrt{\ln 2k}-\sin\pi\sqrt{\ln k}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\ln 2k}-\sqrt{\ln k}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\ln 2k}+\sqrt{\ln k}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi\ln 2}{2(\sqrt{\ln 2k}+\sqrt{\ln k}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\ln 2k}+\sqrt{\ln k}\right),$$

per cui

$$\lim_k(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k})=0,$$

ed è pertanto soddisfatta la (3) con m = k. Tuttavia la serie considerata è *non regolare* in quanto si ha

$$S_k=\left(\sin\pi\sqrt{\ln 2}-\sin\pi\sqrt{\ln 1}\right)+\cdots+\left(\sin\pi\sqrt{\ln k}-\sin\pi\sqrt{\ln(k-1)}\right)=\sin\pi\sqrt{\ln k},$$

($\underline{S}=-1$ e $\overline{S}=$).

D'altra parte considerando il termine generale della (*) si ha $\lim_k a_k=0$, infatti

$$a_k=\sin\pi\sqrt{\ln k}-\sin\pi\sqrt{\ln(k-1)}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\ln k}-\sqrt{\ln(k-1)}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\ln 2k}+\sqrt{\ln k}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln\sqrt{k(k-1)}\right).$$

Allo stesso modo la serie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sin\pi\sqrt{k}-\sin\pi\sqrt{k-1}\right)$ è non regolare (cfr. es. **15** pag. 29), eppure non soddisfa la condizione $\lim_k a_k=0$.

Pertanto se $\lim_k a_k=0$, la $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ può essere

a) *convergente* - (cfr. la serie di Mengoli o quella di Zenone);

b) *divergente* - (cfr. la serie armonica o quella di Mercator);

c) *non regolare* - (cfr. la $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin\left(\pi\sqrt{k}\right)-\sin\left(\pi\sqrt{k-1}\right)\right]$).

Se invece $\lim_k a_k\neq 0$ la $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ non è convergente (può essere *divergente* o *non regolare*).

TEOREMA 2. *Se i temini della successione* $\{a_k\}$ *sono positivi e decrescenti, e se la* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è convergente si ha*

(4) $$\lim_k k\cdot a_k=0.$$

La condizione (4) **non è però sufficiente** in quanto esistono serie *divergenti* per le quali la (4) è soddisfatta. È il caso, ad esempio, della serie

(5) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k},$$

in cui è soddisfatta la (4) poiché

$$\lim_k k\cdot\frac{1}{k\ln k}=\lim_k\frac{1}{\ln k}=0.$$

Successivamente sarà provato che la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ è divergente.

La $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ è la serie di **Abel**[1].

Da osservare che $\lim_k k \cdot a_k = 0$ vale solo se la serie è a termini positivi, ad esempio la serie di Mercator (cfr. es. **3** pag. 59) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$, che è a termini di segno alterno è convergente (= ln2), tuttavia non esiste il limite $\lim_k k \cdot a_k$, in quanto non esiste

$$\lim_k \left(k \cdot (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right) = \lim_k (-1)^{k-1}.$$

Analogamente la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \cdots,$$

(è $a_k = \frac{1}{k^2}$ se k non è quadrato e $a_k = \frac{1}{k}$ se k è un quadrato) è convergente, tuttavia $k \cdot a_k$ non tende a 0 (è = 1 se k è un numero quadrato).

La

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \cdots,$$

è la serie di **Cesàro**[2]

---

[1] **Niels Henrik Abel** [1802-1829].
[2] **Ernesto Cesàro** [1859-1906].

11. SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

<u>DEFINIZIONE</u> 1. Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice a termini non negativi se $\forall\ k \in \mathbf{N}$ risulta $a_k \geq 0$.

Le serie considerate sono *regolari* poiché la successione costituita dalle somme parziali è non decrescente in quanto

$$S_{k+1} - S_k = a_{k+1} \geq 0,$$

e quindi esiste (finito o infinito) il $\lim_k S_k$.

Evidentemente se la successione $\{a_k\}$ non è *infinitesima*, ossia $\lim_k a_k > 0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è *divergente positivamente*. Ad esempio la

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1},$$

è divergente positivamente in quanto

$$\lim_k \frac{k}{k+1} = 1 > 0.$$

Sono immediati i seguenti teoremi

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie a termini non negativi sia divergente positivamente è che la successione* $\{S_k\}$ *delle sue somme parziali non sia superiormente limitata.*

TEOREMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie a termini non negativi sia convergente è che la successione* $\{S_k\}$ *delle sue somme parziali sia superiormente limitata.*

Le serie seguenti sono convergenti in quanto a termini positivi e con le somme parziali limitate

a) per la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ si ha

$$S_k = 1-\frac{1}{k+1}<1;$$

b) per la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ si ha

$$S_k = \frac{1}{1-x}-\frac{x^k}{1-x}<\frac{1}{1-x}<1,\quad x\in(0,1);$$

c) per la serie di Eulero $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ si ha

$$S_k=\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h^2}=1+\sum_{h=2}^{k}\frac{1}{h^2}<1+\sum_{h=2}^{k}\frac{1}{h(h-1)}=1+\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h(h+1)}=2-\frac{1}{k}<2.$$

Quello successivo è un esempio di serie a termini non negativi divergente per cui non esiste il $\lim_k a_k$

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2}\left[1+(-1)^k\right]=0+2+0+4+0+6+\cdots,$$

si ha infatti $a_{2k-1}=0$, $a_{2k}=2^k$, e quindi $\lim_k a_{2k-1}=0$ e $\lim_k a_{2k}=+\infty$, per cui non esiste $\lim_k a_k$. La (1) è *divergente* in quanto

$$S_{2k}=0+2+0+4+0+\cdots+0+2k=2+4+\cdots+2k=\frac{2+2k}{2}\cdot k=k(k+1),$$

e

$$\lim_k S_{2k}=+\infty.$$

Riesce poi $S_{2k+1}=S_{2k}+a_{2k+1}=S_{2k}$, e quindi

$$\lim_k S_{2k+1}=+\infty,\qquad \lim_k S_k=+\infty.$$

12. IL CRITERIO DEL CONFRONTO

Se consideriamo le due serie a termini non negativi

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots,\quad a_k\ge 0,$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}b_k=b_1+b_2+\cdots+b_k+\cdots,\quad b_k\ge 0,$$

si dice che la $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ è una serie ***minorante*** della $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$, o che la $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ è una serie ***maggiorante*** della $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, se risulta

(3) $$a_k\le b_k,\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

Se la $a_k\le b_k$ è verificata da un certo indice in poi si dice che la $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ è ***definitivamente minorante*** della $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$, o che la $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ è ***definitivamente maggiorante*** della $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$.

TEOREMA 1. Criterio del confronto o criterio di Gauss [1] *Consideriamo le due serie a termini non negativi* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$, *e sia* $\forall$ k, $a_k\le b_k$, *allora*

α) *se* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ *è convergente è anche convergente la* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$,

β) *se* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è divergente è anche divergente la* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$,

cioè una minorante (definitivamente) di una serie a termini non negativi convergente è convergente, una maggiorante (definitivamente) di una serie divergente positivamente è divergente positivamente.

[1] **Karl Friederich Gauss** [1777-1855].

ESERCIZIO 1. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\ln k}}, \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{\sqrt{k^5}}, \qquad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}, \quad \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^k}.$$

Soluzione. La a) è convergente in quanto è definitivamente minorante della serie convergente (di Eulero) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ (cfr. es. **2** pag. 58), infatti dalle

$$\ln k \geq 2, \;\; \text{per } k \geq 8,$$

si ha definitivamente ($k \geq 8$)

$$\frac{1}{k^{\ln k}} \leq \frac{1}{k^2}.$$

La b) è convergente in quanto è definitivamente minorante della serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$, infatti essendo

$$\lim_k \left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{\sqrt{k}} = \frac{1}{e},$$

si deduce che esiste un numero naturale p tale che

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{\sqrt{k^5}} < \frac{1}{2^k}, \;\forall\, k > p.$$

Anche la c) e la d) sono convergenti in quanto si hanno, rispettivamente, le

$$\frac{1}{k^k} < \frac{1}{2^k} \;\;\text{per}\;\; k > 1, \qquad \frac{1}{1+2^k} < \frac{1}{2^k}.$$

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere delle serie* :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3+1}, \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}, \quad \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}, \quad \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{2k-1}.$$

Soluzione. Le serie sono tutte divergenti. Le a), b) e c) perché maggioranti della serie armonica in quanto

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}, \qquad \frac{k^2}{k^3+1} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty,$$

le serie d) ed e) in quanto $\frac{\sqrt{k}}{2k-1} \geq \frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2k}$.

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere delle serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right).$$

Soluzione. La serie è convergente in quanto a termini positivi ed è minorante della serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, infatti dalle disuguaglianze

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$

si deducono le

$$\frac{1}{k+1} < \ln\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k},$$

e quindi

$$\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}.$$

ESERCIZIO 4. *Determinare il carattere della serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione. Proviamo che se $\alpha \le 1$ la serie è divergente mentre se $\alpha > 1$ è convergente. Preliminarmente osserviamo che la serie è divergente se $\alpha \le 0$ in quanto il suo termine generale non è infinitesimo, infatti per $\alpha = 0$ si ha $\lim_k \frac{1}{k^0} = 1$, per $\alpha < 0$ si ha $\lim_k \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$, è divergente anche per $\alpha = 1$ in quanto si riduce a quella armonica. Per $0 < \alpha < 1$ la serie è divergente in quanto è maggiorante della serie armonica $\left(\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}\right)$.

Facciamo vedere che per $\alpha > 1$ la serie è convergente, infatti raggruppando i termini della serie a 2, 4, 8, … alla volta, a partire dal secondo, si ha

$$1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{9^\alpha}+\frac{1}{10^\alpha}+\frac{1}{11^\alpha}+\frac{1}{12^\alpha}+\frac{1}{13^\alpha}+\frac{1}{14^\alpha}+\frac{1}{15^\alpha}\right)+\cdots$$

ed essendo

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<\frac{2}{2^\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}<\frac{4}{4^\alpha}=\frac{1}{4^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{9^\alpha}+\frac{1}{10^\alpha}+\frac{1}{11^\alpha}+\frac{1}{12^\alpha}+\frac{1}{13^\alpha}+\frac{1}{14^\alpha}+\frac{1}{15^\alpha}<\frac{8}{8^\alpha}=\frac{1}{8^{\alpha-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

si ottiene la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < 1 + \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, ed è pertanto convergente in quanto minorante della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è la serie *armonica generalizzata* o serie di **Riemann**[2].

[2] **Georg Friederich Bernhard Riemann** [1826-1866].

ESERCIZIO 5. *Determinare il carattere della serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Soluzione. La serie è convergente in quanto per $k \ge 3$ si ha

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^k},$$

per cui è definitivamente minorante della serie geometrica convergente (di ragione $\frac{1}{2}$). La convergenza della serie si può anche ottenere da quella di Bernoulli (cfr.es. 4 pag. 22) in quanto si ha definitivamente ($k \ge 2$) $\frac{1}{k!} \le \frac{k-1}{k!}$, e quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 3.$$

Poiché la successione di termine generale

$$S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!},$$

converge, chiamando "e" il suo limite si ha

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Si ha per il resto (k+1)-*esimo*

$$R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \cdots = \frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+3)(k+2)} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k \cdot k!},$$

ossia

$$(*) \qquad R_{k+1} < \frac{1}{k \cdot k!}.$$

La serie si presta al calcolo effettivo del numero "e". Ad esempio per $k = 12$ si ha

$$R_{13} < \frac{1}{12 \cdot 12!} < \frac{1}{10^9},$$

e quindi

$$2.718281826 < e < 2.718281832.$$

La (*) consente anche di provare **<u>l'irrazionalità</u>** di "e", infatti se "e" fosse razionale esisterebbero due interi positivi h e k con il M.C.D =1 tali da aversi

$$e = \frac{h}{k},$$

ossia

$$\frac{h}{k} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + R_{k+1};$$

moltiplicando, entrambi i membri, per k! si ha

$$h(k-1)! = k! + \frac{k!}{1!} + \frac{k!}{2!} + \cdots + \frac{k!}{k!} + R_{k+1} \cdot k!,$$

da cui

$$h(k-1)! - k!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = R_{k+1} \cdot k! < \frac{1}{k}.$$

e l'ultima uguaglianza è assurda (il primo membro è intero mentre il secondo non lo è).

ESERCIZIO 6. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k^2 + k + 1}}, \quad \text{c)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k - \sqrt{k}}},$$

$$\text{d)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k - \sqrt{k}}, \quad \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k - \ln k}, \quad \text{f)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^{\rho}}{k}, \quad \rho \geq 0.$$

Soluzione. Le serie sono tutte divergenti in quanto

$$\frac{1}{\sqrt{k \cdot (k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2k + 1}} = \frac{1}{k+1},$$

$$\frac{1}{k + \sqrt{k^2 + k + 1}} > \frac{1}{k + \sqrt{k^2 + 2k + 1}} = \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3k},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k - \sqrt{k}}} > \frac{1}{k - \sqrt{k}} > \frac{1}{k}, \qquad \frac{1}{k - \ln k} \geq \frac{1}{k}, \qquad \frac{(\ln k)^{\rho}}{k} > \frac{1}{k} \text{ per } \rho > 0 \text{ e } k \geq 3.$$

(L'ultima serie è divergente anche per $\rho = 0$).

ESERCIZIO 7. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}, \quad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}, \quad \text{c)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}+1}{k^3 - 1}, \quad \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(kx)|}{k^2}, \quad \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^3}.$$

Soluzione. Le serie a) e b) sono convergenti in quanto, per $k \geq 3$, si ha

$$\frac{1}{k \cdot 2^k} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k}, \quad \frac{1}{(k!)^2} < \frac{4}{4^k}.$$

La convergenza della $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$ si deduce subito anche dalla divergenza della $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $\left(\frac{1}{(k!)^2} \leq \frac{1}{k!}\right)$; più in generale è convergente la $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

ESERCIZIO 1. *Determinare il carattere delle serie*

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$, b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+\sqrt{k}}$,

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k-k}$, e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}$, f) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\sin\frac{1}{k}$.

Soluzione. Scelto per a), b), c) $b_k=\frac{1}{k}$, per d) $b_k=\frac{1}{2^k}$, per e) ed f) $b_k=\frac{1}{k^2}$, si hanno le

$$\lim_k\frac{k}{3k-1}=\frac{1}{3},\qquad \lim_k \ln k=+\infty,\qquad \lim_k\frac{k}{k+\sqrt{k}}=1,\qquad \lim_k\frac{2^k}{2^k-k}=1,$$

$$\lim_k\frac{\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_k k\sin\frac{1}{k}=1,\quad \lim_k\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_k\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=1,$$

tenuto conto della divergenza della serie armonica e della convergenza delle serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ segue la divergenza delle a), b), c) e la convergenza delle altre.

Dal criterio precedente si ricava il seguente comodo criterio.

TEOREMA 3. **Criterio degli infinitesimi o criterio di Riemann**. *Se la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è a termini non negativi ed esiste finito il limite*

$$\lim_k k^{\alpha}a_k,$$

allora la serie è convergente (divergente) per $\alpha>1$ $(\alpha\le 1)$. *Se tale limite è zero la serie converge se* $\alpha>1$, *se invece tale limite vale* $+\infty$ *la serie diverge se* $\alpha\le 1$.

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere delle serie*

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k\sqrt{5k}}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k^2+1}{k^5+k}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty}k\sin^2\frac{1}{k}$, d) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$.

Soluzione. Per le a) e b) si hanno le

$$\lim_k k^{\alpha}a_k=\lim_k k^{\frac{3}{2}}\frac{5}{k^{\frac{3}{2}}\sqrt{5}}=\sqrt{5},\qquad \lim_k k^{\alpha}a_k=\lim_k k^3\frac{5k^2-1}{k^5+1}=5,$$

e quindi le serie sono convergenti in quanto è, rispettivamente, $\alpha=\frac{3}{2}$, $\alpha=3$.

Per le c) e d) si hanno le

$$\lim_k k^{\alpha}a_k=\lim_k k\frac{\ln k}{k}=\lim_k \ln k=+\infty,\ \lim_k k^{\alpha}a_k=\lim_k k^{-2}\sin^2\frac{1}{k}=\lim_k\frac{\sin^2\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}=1,$$

e quindi le due serie divergono in quanto è rispettivamente $\alpha=1$, $\alpha=-3$.

TEOREMA 4. **Criterio di condensazione o di Cauchy**. *Se* $\{a_k\}$ *è una successione decrescente di numeri non negativi le due serie* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ *hanno lo stesso carattere.*

Ponendo $a_k=\frac{1}{k}$, $a_{2^k}=\frac{1}{2^k}$, la

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

è divergente in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}1=+\infty.$$

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere delle serie*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}},\qquad b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k},\qquad c)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}.$$

Soluzione. La a) è la serie di Riemann (cfr. es. **4** pag. 70), il suo carattere si può determinare applicando il criterio di condensazione. Se $\alpha < 0$ la serie diverge banalmente. Per $\alpha \geq 0$ i termini della serie non crescono per cui posto $a_{2^k} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}2^k\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)k}$$

quest'ultima è la serie geometrica di ragione $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}$ che converge se $2^{\alpha-1} > 1$ $(\alpha > 1)$, diverge se $2^{\alpha-1} \leq 1$ $(\alpha \leq 1)$.

La b) è divergente (serie di Abel) (i suoi termini decrescono in quanto è decrescente la funzione $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$) poiché

$$\sum_{k=2}^{\infty}2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k\ln 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Per la c) si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty}2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k(\ln 2^k)^{\alpha}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2^k)^{\alpha}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k\ln 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}.$$

l'ultima serie è quella di Riemann (privata del primo termine) per cui la $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ diverge se $\alpha \leq 1$ e converge se $\alpha > 1$. La serie $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ prende il nome di serie di **Bertrand** [1], per s = 1.si ha la serie di Abel.

---

[1] **Joseph Bertrand** [1822-1900].

14. IL CRITERIO DEL RAPPORTO

In questo paragrafo e nel successivo considereremo esclusivamente serie a termini positivi. I criteri di convergenza che esporremo consentono di stabilire il carattere di numerose serie.

TEOREMA 1. <u>Criterio del rapporto o criterio di D'Alambert</u>[1]. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, *a termini strettamente positivi, è convergente se esiste un numero* ρ *positivo e minore di* 1, *tale che*

(1) $$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \rho < 1,$$

mentre è divergente se risulta

(2) $$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1.$$

Per concludere sulla convergenza o divergenza di una serie è sufficiente che la (1) o la (2) siano soddisfatte ***definitivamente***.

Il criterio del rapporto nel caso in cui esiste $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k}$ si enuncia nel modo seguente.

TEOREMA 2. *Se la* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è a termini positivi ed esiste il*

(3) $$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell,$$

allora

a) *se* $0 \leq \ell < 1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è convergente,*

b) *se* $\ell > 1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è divergente.*

---

[1] **Jean le Rond D'Alambert** [1717-1783].

Ad esempio la $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ è convergente (cfr. anche es. 5 pag. 71) in quanto

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_k \frac{1}{k+1} = 0 \ (< 1).$$

Analogamente la $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ è convergente in quanto

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \lim_k \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2}.$$

Poiché

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad k \geq 2, \qquad \frac{k+1}{2k} < \frac{3}{4} \quad \text{per} \quad k \geq 3,$$

sono soddisfatte ***definitivamente*** le (1) con $\rho = \frac{1}{2}$ e con $\rho = \frac{3}{4}$.

Nessuna conclusione si può trarre nel caso in cui $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, esistono infatti sia serie convergenti che serie divergenti soddisfacenti la condizione di sopra.

Riferendoci ad esempio alle serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, di Eulero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ed armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, riesce rispettivamente,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+2}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1};$$

in tutti e tre i casi si ha $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, sappiamo che le prime due serie sono convergenti, la terza è divergente.

In accordo con le (2) si deduce che la $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è **divergente** se

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 \text{ e } \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1.$$

Ad esempio la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ è divergente in quanto $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, e

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{k^2+2k+1}{k^2+2k} = 1 + \frac{1}{k^2+2k} > 1.$$

Il criterio del rapporto non è applicabile se sono soddisfatte le

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1.$$

Torneremo sul caso $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$.

ESERCIZIO 1. *Studiare il carattere delle serie*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}, \quad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{k!}, \quad \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \quad \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}.$$

Soluzione. Le serie sono convergenti in quanto si hanno le

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{e^{-(k+1)^2}}{e^{-k^2}} = \lim_k e^{-2k-1} = \frac{1}{e} \lim_k e^{-2k} = 0,$$

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_k \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_k \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{(k+1)^2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^s} = \lim_k \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha} \frac{1}{k+1} = 0,$$

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{[(k+1)!]^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \lim_k \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{[(k+1)!]^2}{2^{(k+1)^2}} \cdot \frac{2^{k^2}}{(k!)^2} = \lim_k \frac{(k+1)^2}{2^{2k+1}} = 0.$$

ESERCIZIO 2. *Studiare il carattere delle serie*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}}{2^{3k}},\quad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^\alpha},\quad c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot e^k}{k+1},\quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}.$$

Soluzione. Le quattro serie sono divergenti in quanto si hanno le

$$\lim_k\frac{3^{2k+2}}{2^{3k+3}}\cdot\frac{2^{3k}}{3^{2k}}=\frac{9}{8},\quad \lim_k\frac{2^{k+1}}{(k+1)^\alpha}\cdot\frac{k^\alpha}{2^k}=2\lim_k\left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha=2,$$

$$\lim_k\frac{(k+1)e^{k+1}}{k+2}\cdot\frac{k+1}{k\cdot e^k}=e\lim_k\frac{(k+1)^2}{k(k+1)}=e,$$

$$\lim_k\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k}=\lim_k\left(k+\frac{1}{k}\right)^k=e.$$

ESERCIZIO 3. *Studiare il carattere delle serie*

$$a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\ (x\geq 0),\ b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^k}\ (x\geq 0),\ c)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^\alpha}\ (x\geq 0),\ d)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k k!}{k^k}\ (x\geq 0).$$

Soluzione. Le a) e b) sono convergenti in quanto si hanno le

$$\lim_k\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}=x\lim_k\frac{1}{k+1}=0,\quad \lim_k\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{x^k}=\lim_k\frac{x}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k=0.$$

Per la c) si ha

$$\lim_k\frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha}\cdot\frac{k^\alpha}{x^k}=x\lim_k\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha=x,$$

quindi la serie data converge per $0\leq x<1$ e diverge per $x>1$, per $x=1$ converge solo per $\alpha>1$ (si riduce alla serie di Riemann).

Per la d) si ha

$$\lim_k\frac{x^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{x^k k!}=\lim_k\frac{x}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{x}{e},$$

e quindi la serie converge per $x<e$, diverge per $x>e$. Se $x=e$ si ottiene la $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k k!}{k^k}$ che è divergente in quanto si ha

$$\lim_k\frac{a_{k+1}}{a_k}=1,\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}>1.$$

In conclusione la $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k k!}{k^k}$ converge per $0\leq x<e$ (in particolare per $x=1$ si ritrova la b) dell'esercizio **1**).

ESERCIZIO 4. *Stabilire il carattere delle serie*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+h}{k}x^k\ (x\geq 0),\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}\ (x\geq 0),$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty}x^k\frac{(k!)^2}{(2k)!}\ (x\geq 0),\qquad d)\ \sum_{k=1}^{\infty}k^\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Soluzione. Per la a) si ha

$$\lim_k\binom{k+h+1}{k+1}x^{k+1}\cdot\frac{1}{\binom{k+h}{k}x^k}=x\lim_k\frac{k+h+1}{k+1}=x.$$

e quindi la serie converge se $0<x<1$ e diverge se $x>1$, se $x=1$ è divergente in quanto si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+h+1}{k+1}>1.$$

Per la b) si ha

$$\lim_k \frac{x^{k+1}}{1+x^{2k+2}} \cdot \frac{1+x^{2k}}{x^k} = x \lim_k \frac{1+x^{2k}}{1+x^{2k+2}} ,$$

per $0 < x < 1$ è ($\lim_k x^{2k} = 0$),

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = x < 1,$$

per $x > 1$ è ($\lim_k x^{2k} = +\infty$),

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = x \cdot \lim_k \frac{\frac{1}{x^{2k}} + 1}{\frac{1}{x^{2k}} + x^2} = \frac{1}{x} < 1,$$

e quindi la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$ è convergente per $x \neq 1$ ($x \geq 0$). Per $x = 1$ è $a_k = \frac{1}{2}$, per cui la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$ è divergente.

Per la c) si ha

$$\lim_k \frac{x^{k+1}[(k+1)!]^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{x^k (k!)^2} = x \lim_k \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{x}{2} \lim_k \frac{k+1}{2k+1} = \frac{x}{4},$$

e quindi la

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

è convergente per $\frac{x}{4} < 1$ e divergente per $\frac{x}{4} > 1$.

Per $x = 4$ si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+2}{2k+1} > 1,$$

e quindi la serie è divergente.

La d) è a termini positivi in quanto

$$0 < \frac{\pi}{2^{k+1}} \leq \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+1}} \leq ,$$

ed inoltre

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{(k+1)^\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+2}}}{k^\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \lim_k \left(\frac{k+1}{k} \right)^\alpha \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+2}}}{\operatorname{tg} 2 \frac{\pi}{2^{k+2}}} =$$

$$= \lim_k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^\alpha \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+2}}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{k+2}} \right) = \frac{1}{2} \lim_k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^\alpha \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{k+2}} \right) = \frac{1}{2},$$

e perciò la

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

è convergente $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$.

15. IL CRITERIO DELLA RADICE

TEOREMA 1. Criterio della radice o criterio di Cauchy. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente se esiste un numero positivo* $\rho < 1$ *tale che riesca*

(4) $$\sqrt[k]{a_k} \le \rho < 1\,,$$

mentre è divergente se risulta

(5) $$\sqrt[k]{a_k} \ge 1.$$

(È sufficiente che le precedenti siano soddisfatte ***definitivamente***).

Nel caso particolare in cui esiste il $\lim_k \sqrt[k]{a_k}$ il criterio della radice prende la forma seguente.

TEOREMA 2. *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è a termini non negativi ed esiste*

(6) $$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \ell\,,$$

allora

a) *se* $0 \le \ell < 1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente*,

b) *se* $\ell > 1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è divergente*.

Semplici applicazioni del criterio si hanno riferendosi alle serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+1}{3k-1}\right)^k,$$

si hanno evidentemente

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^k}} = \lim_k \frac{1}{\ln k} = 0, \qquad \lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\frac{k}{3^k}} = \frac{1}{3} \lim_k k^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{3}^{(1)},$$

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\frac{3^k}{k}} = 3 \lim_k \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = 3, \quad \lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{4k+1}{3k-1}\right)} = \lim_k \frac{4k+1}{3k-1} = \frac{4}{3}.$$

Dunque nei primi due casi è $0 \le \ell < 1$ e negli altri due è $\ell > 1$, per cui solo le prime due serie convergono.

Nel caso in cui $\lim_k \sqrt[k]{a_k} = 1$, non si può trarre alcuna conclusione circa il carattere della serie.

Ad esempio per la serie di Eulero (convergente) e per la serie armonica (divergente) si ha

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = 1.$$

---

(1) Il $\lim_k k^{\frac{1}{k}} = 1$ in quanto, considerando la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}.$$

ed applicando la regola di de l'Hopital [1661-1704] si ottiene

$$e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

ESERCIZIO 1. *Studiare il carattere delle serie*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2},\quad b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^{\frac{k}{2}}},$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}},\quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k^{\alpha}}\right)^{k^{\alpha+1}}.$$

Soluzione. Le prime due serie sono convergenti, la terza è divergente in quanto

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_k \left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e},$$

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^{\frac{k}{2}}}} = \lim_k \frac{1}{\sqrt{k-1}} = 0,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\frac{3^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}} = 3\cdot\lim_k \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{3}{e}\ (3>e).$$

Per la d) si ha

$$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \lim_k \sqrt[k]{\left(1-\frac{x}{k^{\alpha}}\right)^{k^{\alpha+1}}} = \lim_k \left(1-\frac{x}{k^{\alpha}}\right)^{k^{\alpha}} = e^{-x},$$

per cui la serie converge se $e^{-x}<1$ $(x>0)$, mentre diverge se $e^{-x}>1$ $(x<0)$, se $e^{-x}=1$ $(x=0)$ la serie si riduce a quella naturale.

ESERCIZIO 2. *Stabilire il carattere delle serie*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^k,\ x>0,\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2},\qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)e^k},$$

$$d)\ \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)^k,\qquad e)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{arctang}^k k},\qquad f)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+\ln k}{k}\right)^k.$$

Soluzione. Le serie sono convergenti in quanto

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{x}{k}\right)^k} = \lim_k \frac{x}{k} = 0,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \lim_k e^{k\ln\frac{k}{k+1}} = e^{\lim_k \frac{\ln\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\frac{k}{(k+1)\cdot e^k}} = \frac{1}{e}\lim_k\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)^k} = \lim_k \frac{\ln\ln k}{\ln k} = 0,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\frac{1}{\mathrm{arctang}^k k}} = \lim_k \frac{1}{\mathrm{arctang}\, k} = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{1+\ln k}{k}\right)^k} = \lim_k \frac{1+\ln k}{k} = 0.$$

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}, \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^3}, \qquad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\frac{2}{k}}-1}{\frac{1}{k}}\right)^k.$$

Soluzione. Le serie sono divergenti in quanto

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_k \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = e,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^3}} = 2\lim_k\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^3 = 2,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{\left(\frac{e^{\frac{2}{k}}-1}{\frac{1}{k}}\right)^k} = \lim_k \frac{e^{\frac{2}{k}}-1}{\frac{1}{k}} = 2\ln e = 2.$$

16. ANCORA SUI CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE

Una forma più sofisticata del criterio del rapporto è la seguente:

TEOREMA 1. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a termini strettamente positivi è convergente se*

$$\limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

mentre è divergente se

$$\liminf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1.$$

ESERCIZIO 1. *Stabilire il carattere delle serie*

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}, \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-(-1)^k}.$$

Soluzione. Osserviamo che in entrambi i casi non esiste il

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

infatti con riferimento alle due serie

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{2^{(-1)^{k+1}}}{2^k\cdot 2}\cdot\frac{2^k}{2^{(-1)^k}} = \lim_k \frac{2^{(-1)^{k+1}}}{2^{(-1)^k+1}},$$

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{2^{k+1}}{2^{(-1)^{k+1}}}\cdot\frac{2^{(-1)^k}}{2^k} = \lim_k \frac{2^{(-1)^k+1}}{2^{(-1)^{k+1}}}.$$

La a) è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k-k} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^5}+\cdots,$$

per cui

$$a_{2k} = 2^{-2k},\ a_{2k+1} = 2^{-2k-1},$$

e quindi la serie è convergente in quanto

$$\limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{2^{-2k-3}}{2^{-2k-1}} = \frac{1}{4}.$$

La b) è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-(-1)^k} = 2^2+2+2^4+2^3+2^5+\cdots,$$

per cui

$$a_{2k} = 2^{2k},\ a_{2k+1} = 2^{2k+1},$$

e quindi la serie è divergente in quanto

$$\liminf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{2^{2k+3}}{2^{2k+1}} = 4.$$

Ovviamente il carattere delle due serie si sarebbe potuto ottenere tramite il criterio della radice.

Osserviamo che se esiste finito o infinito il

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

allora esiste, con il medesimo valore, $\lim_k \sqrt[k]{a_k}$.

Anche per il criterio della radice segnaliamo una forma più sofisticata.

TEOREMA 2. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a termini strettamente positivi è convergente se*

$$\limsup_k \sqrt[k]{a_k} < 1,$$

mentre è divergente se

$$\liminf_k \sqrt[k]{a_k} > 1.$$

Sussiste la

$$\liminf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \liminf_k \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_k \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere delle serie*

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{5+(-1)^k}{2}\right]^{-k}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{5+(-1)^k}{2}\right]^{k}.$$

Soluzione. Esplicitando si ha per la a)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots,$$

per cui

$$a_{2k} = 3^{-2k}, \qquad a_{2k+1} = 3^{-2k-1},$$

e la serie è convergente in quanto

$$\limsup_k \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2},$$

per la b)

$$2 + 3^2 + 2^3 + 3^4 + 2^5 + \cdots,$$

per cui

$$a_{2k} = 3^{2k}, \qquad a_{2k+1} = 3^{2k+1},$$

e la serie è divergente in quanto

$$\liminf_k \sqrt[k]{a_k} = 2.$$

17. ALTRI CRITERI DI CONVERGENZA

TEOREMA 1. **Il criterio di Kummer**[1]. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a termini positivi è convergente se esiste una successione di numeri positivi*

$$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, \cdots$$

per la quale si abbia

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \geq b, \tag{1}$$

dove b *è un numero reale positivo. Se invece risulta definitivamente*

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \leq 0, \tag{2}$$

e se inoltre la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ *è divergente allora* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è divergente.*

Un altro criterio capace di stabilire il carattere di una serie, a termini positivi, è quello di **Raabe**, che si ottiene dal criterio di **Kummer** con $b_k = k$.

TEOREMA 2. **Il criterio di Raabe**[2]. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a termini positivi è convergente se esistono due numeri interi* p *e* q, *con* $p > 1$, *tali che si abbia*

$$k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > p, \quad \forall\, k \geq q. \tag{1}$$

Se invece risulta

$$k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall\, k \geq q \tag{2}$$

la serie è divergente.

---

(1) **Ernst Eduard Kummer** [1810-1893].
(2) **Joseph Raabe** [1801-1859].

Dal criterio di Raabe si deduce il teorema seguente.

TEOREMA 3. *Se la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è a termini positivi, ed esiste il limite*

$$\lim_k k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \ell,$$

allora la $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è*

α) ***convergente*** *se* $\ell > 1$,

β) ***divergente*** *se* $\ell < 1$.

Il teorema precedente può essere applicato anche alle serie per cui il

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1.$$

Ad esempio, per la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, con $\alpha > 0$, si ha

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{k^{\alpha}}{(k+1)^{\alpha}} = \lim_k \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\alpha} = 1.$$

Dal criterio di Raabe si ha

$$\lim_k k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_k k \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^{\alpha} - 1 \right] = \lim_k \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha}}{\frac{1}{k}} = \alpha,$$

e quindi la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 < \alpha < 1$. Se $\alpha = 1$ la serie diverge in quanto si riduce alla serie armonica.

ESERCIZIO 1. *Determinare il carattere delle serie*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \ln k}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{2}(k+1)$, c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)\cdot(2k)!!}$,

d) $\frac{a}{b} + \frac{a\cdot(a+c)}{b\cdot(b+c)} + \frac{a\cdot(a+c)\cdot(a+2c)}{b\cdot(b+c)\cdot(b+2c)} + \ldots$.

Soluzione. Applichiamo il criterio di **Raabe**: la a) è convergente in quanto

$$\lim_k k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_k k\left[\frac{(k+1)^2 - \ln(k+1)}{k^2 - \ln k} - 1 \right] =$$

$$= \lim_k k \frac{k^2 + 2k + 1 - \ln(k+1) - k^2 + \ln k}{k^2 - \ln k} =$$

$$= \lim_k \frac{k\left(2k + 1 - \ln \frac{k}{k+1}\right)}{k^2 - \ln k} = \lim_k \frac{2 + \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}}{1 - \frac{\ln k}{k^2}} = 2.$$

La b) è divergente in quanto

$$\lim_k k\left(\frac{k!(k+1)}{2!(k-2)!} \cdot \frac{2!(k-1)!}{(k+1)!(k+2)!} - 1 \right) = \lim_k k\left(\frac{k-1}{k+2} - 1 \right) = -3.$$

La c) è convergente in quanto si ha[3]:

$$\lim_k k\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \cdot \frac{(2k+3)(2k+2)!!}{(2k+1)!!} - 1 \right) =$$

$$= \lim_k k\left(\frac{(2k+3)}{(2k+1)} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2k+2)(2k)!!}{(2k+1)(2k-1)!!} - 1 \right) =$$

$$= \lim_k k\left(\frac{(2k+3)(2k+2)}{(2k+1)^2} - 1 \right) = \lim_k \frac{k(6k+5)}{(2k+1)^2} = \frac{3}{2}.$$

[3] Con k!! si ndica il doppio fattoriale di k: se k è dispari si tratta del prodotto dei dispari da k a 1, se k è pari si tratta del prodotto dei pari da k a 2 (ad esempio $5!! = 5\cdot 3\cdot 1 = 15$, $6!! = 6\cdot 4\cdot 2 = 24$).

Per la d) essendo

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{b+kc+c}{a+kc+c},$$

si ha

$$\lim_k k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_k \frac{k(b-a)}{kc+a+c} = \frac{b-a}{c},$$

per cui converge se $(b-a) > 0$, diverge se $(b-a) < 0$, mentre nulla si può concludere se $(b-a) = 0$.

TEOREMA 4. **Il criterio dell'integrale**. *Sia* $f(x)$ *una funzione continua, positiva e non crescente sull'intervallo* $[1, +\infty)$ *e posto* $a_k = f(k)$, *allora l'integrale improprio* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$(4) *e la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hanno lo stesso carattere ossia sono entrambi convergenti o entrambi divergenti positivamente.*

Il teorema continua se si sostituisce $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ con $\int_h^{+\infty} f(x)dx$, valgono inoltre le disuguaglianze

(3) $$\int_1^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le a_1 + \int_1^{k} f(x)dx.$$

---

(4) $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_t \int_1^t f(x)dx$. Si dice che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

è *convergente*, *divergente* o *indeterminato* a seconda che il limite a secondo membro esiste ed è finito, infinito o non esiste.

ESERCIZIO 2. *Stabilire il carattere delle serie*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1} e^{-k^{\alpha}}$ $(\alpha \ge 1)$, c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$ $(\alpha \ge 1)$, d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$,

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} k}}{k^2+1}$, f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k\right)$, g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{\beta k^{\alpha+1} - 1}$ $\alpha > -1$, $\beta > 1$.

Soluzione. Per la a) consideriamo per $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = x^{-\alpha},$$

che è continua, positiva e non crescente in $[1,+\infty)$ per cui la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ è convergente se e solo se l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \lim_b \int_1^b x^{-\alpha}dx$$

esiste ed è finito, diverge se tale integrale è divergente. Se

α) $\alpha \ne 1$ allora

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \lim_t \int_1^t x^{-\alpha}dx = \lim_t \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t = \lim_t \frac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

e si ritrova che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ converge per $\alpha > 1$ e diverge per $0 < \alpha < 1$;

β) se $\alpha = 1$ allora

$$\int_1^{+\infty} x^{-1}dx = \lim_t \int_1^t x^{-1}dx = \lim_t [\ln x]_1^t = \lim_t \ln t = +\infty,$$

e quindi si ritrova la divergenza della serie armonica.

Per la b) consideriamo $\forall\ x \geq 1$ e $\forall\ \alpha \geq 1$ la funzione

$$f(x) = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x^\alpha},$$

che è continua, positiva e non crescente in $[1,+\infty)$, e facciamo vedere che la serie è convergente. Infatti

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} dx = \lim_t \int_1^t x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} dx = \lim_t \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-x^\alpha} \right]_1^t =$$

$$= \lim_t \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-t^\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-1} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-1} < 1,$$

e perciò la $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1} \cdot e^{-k^\alpha}$ converge.

Per la c) consideriamo $\forall\ x \geq 2$ la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^\alpha x}$, che è continua e non crescente sull'intervallo $[2, +\infty)$ e facciamo vedere che per $\alpha = 1$ la serie è divergente e per $\alpha > 1$ è convergente. Infatti per

α) $\alpha = 1$ si ottiene

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_t \int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_t \left[\ln(\ln x) \right]_2^t = \lim_t \left[\ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \right] = +\infty,$$

β) $\alpha > 1$ si ottiene

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^s x} dx = \lim_t \int_2^t \frac{1}{x \ln^s x} dx = \lim_t \left[\frac{(\ln x)^{1-s}}{1-s} \right]_2^t =$$

$$= \lim_t \frac{(\ln t)^{1-s} - (\ln 2)^{1-s}}{1-s} = \frac{(\ln 2)^{1-s}}{s-1}.$$

Le serie d) ed e) sono divergenti in quanto le corrispondenti funzioni risultano essere positive, continue e non crescenti e i corrispondenti integrali impropri divergono, infatti si hanno, rispettivamente, gli

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\beta x^{\alpha+1} - 1} dx = \lim_t \int_1^t \frac{x^\alpha}{\beta x^{\alpha+1} - 1} dx =$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha+1)} \lim_t \int_1^t \frac{\beta(\alpha+1) x^\alpha}{\beta x^{\alpha+1} - 1} dx = \frac{1}{\beta(\alpha+1)} \lim_t \left[\ln(\beta x^{\alpha+1} - 1) \right]_1^t = +\infty,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_t \int_2^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_t \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_2^t = +\infty.$$

Per la f) consideriamo la $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, che è positiva, continua e decrescente per $x > 0$ e si ha

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx = \lim_t \int_0^t \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx =$$

$$= \lim_t \left[\frac{\pi}{2} x - x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{1+x^2} \right]_0^t = \lim_t \left[\frac{\pi}{2} t - t \operatorname{arctg} t + \ln \sqrt{1+t^2} \right] = +\infty,$$

per cui la $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k \right)$ è divergente.

La g) converge in quanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx = \lim_t \int_1^t \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx = \lim_t \left[e^{\operatorname{arctg} x} \right]_1^t = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Facciamo vedere una notevole relazione esistente tra il logaritmo naturale di k e i numeri armonici

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k},$$

utilizzando il criterio dell'integrale.

Infatti considerata la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \ , \quad x > 0,$$

ed essendo

$$\int_1^k \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^k = \ln k,$$

dalla (3) di pag. 98 si ricava la relazione

$$\ln(k+1) < H_k < \ln k + 1.$$

Ad esempio ponendo, nell'ultima disuguaglianza, successivamente i valori

$$k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

si ha

$$\ln 2 < H_1 < \ln 1 + 1,$$

$$\ln 3 < H_2 < \ln 2 + 1,$$

$$\ln 4 < H_3 < \ln 3 + 1,$$

$$\ln 5 < H_4 < \ln 4 + 1,$$

. . . .

18. SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Abbiamo considerato sin qui prevalentemente serie a termini non negativi. Studiamo ora le serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi ossia serie del tipo

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k-1} a_k + \cdots$$

dove i termini a_k sono tutti positivi, si può anche scrivere $b_k = (-1)^{k-1} a_k$ ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Un classico esempio di serie a termini di segno alterno è dato dalla <u>serie di Mercator</u> $(a_k = \frac{1}{k})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \cdots ,$$

della quale abbiamo provato la convergenza (= ln2 cfr. es. **3** pag. 59).

Per le serie a termine di segno alterno è fondamentale il criterio di **Leibniz**(1).

TEOREMA 1. **<u>Il criterio di Leibniz</u>**. *Se* $\{a_k\}$ *è una successione di numeri positivi, monotòna decrescente ed infinitesima, allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *è convergente. Inoltre, se* S *ed* S_k *sono rispettivamente la sua somma e la sua ridotta* k*-esima, risulta*

$$(2) \qquad |S - S_k| \le a_{k+1}, \qquad \forall\, k \in \mathbf{N},$$

ossia l'errore che si commette sommando i primi k *termini della serie anziché tutta la serie non supera, in valore assoluto, il primo termine trascurato.*

(1) **Gottfried Wilhelm von Leibniz** [1646-1716].

Ecco alcune semplici applicazioni del criterio di Leibniz.

ESERCIZIO 1. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1},$$

con un errore minore di 0.1.

Soluzione. La serie è convergente in quanto posto $a_k=\dfrac{1}{2k-1}$ la successione $\{a_k\}$ è decrescente ed infinitesima, infatti $a_k>a_{k+1}$ e $\lim_k \dfrac{1}{2k-1}=0$. Per calcolare la somma con l'errore indicato, basta osservare che $\forall\ k\in\mathbf{N}$ si ha

$$|S-S_k|\le a_{k+1}=\frac{1}{2k+1},$$

per cui la somma della serie è calcolata con un errore minore di $\dfrac{1}{10}$ se

$$\frac{1}{2k+1}<\frac{1}{10},$$

cioè se $k>\dfrac{9}{2}$, basta pertanto scegliere $k=5$ per avere

$$\left|S-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\right|=|S-0.835|<0.1,$$

per cui il valore approssimato della somma a meno di $\dfrac{1}{10}$ è 0.8.

Per $k=6$ si ha

$$\left|S-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right|=|S-0.744|<0.1.$$

ESERCIZIO 2. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{2k+\cos k}.$$

Soluzione. Posto $a_k=\dfrac{1}{2k+\cos k}$, si ha $a_k>0$,

$$\lim_k\frac{1}{2k+\cos k}=0.$$

La $\{a_k\}$ è decrescente poiché la funzione $f(x)=\dfrac{1}{2x+\cos x}$ è decrescente in quanto si ha

$$f'(x)=\frac{-2+\sin x}{(2x+\cos x)^2}<0,\ \forall\ x\in\mathbf{R}.$$

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{k}.$$

Soluzione. La serie è a termini di segno alterno e converge in quanto la $\left\{\dfrac{\ln k}{k}\right\}$ è decrescente ed infinitesima. Infatti posto $a_k=\dfrac{\ln k}{k}$ si ha subito $\lim_k\dfrac{\ln k}{k}=0$, e per dimostrare che la successione $\{a_k\}$ è decrescente basta osservare che la funzione $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, per $x>e$, è decrescente in quanto

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\ \ \forall\ \ x>e,$$

pertanto

$$\frac{\ln k}{k}>\frac{\ln(k+1)}{k+1},\ \ \forall\ \ k\ge 3.$$

ESERCIZIO 4. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k-\ln k}.$$

Soluzione. La serie è convergente in quanto posto $a_k = \dfrac{1}{k-\ln k}$ si ha $\lim\limits_k \dfrac{1}{k-\ln k} = 0$, ed inoltre la $\{a_k\}$ è decrescente poiché la funzione

$$f(x) = x - \ln x,$$

per $x \geq 1$ è crescente ($f'(x) = \dfrac{x-1}{x} > 0,\ \forall\, x > 1$), pertanto

$$\frac{1}{k-\ln k} > \frac{1}{k+1-\ln(k+1)},\ \forall\, k \geq 1$$

Il successivo esercizio calcola il limite della differenza tra il k-*esimo* armonico ($H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$) ed il logaritmo di k.

ESERCIZIO 5. *Provare che esiste ed è finito il*

$$\text{(3)} \qquad \lim_k (H_k - \ln k).$$

Soluzione. Abbiamo già provato che $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right)$ è convergente (cfr. es. **3** pag. 70), per cui indicato con γ la somma di tale serie e con γ_{2k} la somma dei primi 2k termini si ha

$$\gamma_{2k} = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \ln\frac{k}{k-1} + \frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \left(\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{k}{k-1} + \ln\frac{k+1}{k}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \left(\ln 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k+1}{k}\right) = H_k - \ln(k+1),$$

ossia

$$(*) \qquad \gamma_{2k} = H_k - \ln(k+1).$$

Sottraendo ln k ad entrambi i membri della (*) si ha

$$(**) \qquad H_k - \ln k = \gamma_{2k} + \ln\frac{k+1}{k},$$

e poiché il secondo membro della (**) tende a γ per $k \to \infty$ si ha

$$\lim_k (H_k - \ln k) = \gamma$$

Il limite γ è la costante di **Eulero-Mascheroni** ed il suo valore approssimato sino alla quindicesima cifra decimale è 0.577215664901532... (non si sa se γ è razionale o irrazionale).

ESERCIZIO 6. *Determinare la somma della serie armonica alternata*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

Soluzione. La $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ converge in quanto $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ è decrescente ed infinitesima. Separando i termini di indice pari da quelli di indice dispari, si può scrivere

$$S_{2k} = \sum_{h=1}^{k}\frac{1}{2h-1} - \sum_{h=1}^{k}\frac{1}{2h} = \left(\sum_{h=1}^{2k}\frac{1}{h} - \sum_{h=1}^{k}\frac{1}{2h}\right) - \sum_{h=1}^{k}\frac{1}{2h} = \sum_{h=1}^{2k}\frac{1}{h} - \sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h}.$$

D'altra parte dalla $\lim\limits_k(H_k - \ln k) = \gamma$, (cfr. esercizio precedente), si ha

$$H_k = \gamma + \ln k + \omega_k,$$

con ω_k infinitesimo per $k \to \infty$, e quindi

$$S_{2k} = \ln 2k + \gamma + \omega_{2k} - \ln k - \gamma - \omega_k = \ln 2 + (\omega_{2k} - \omega_k),$$

e tenuto conto della $\lim\limits_k \omega_k = 0$, si ha

$$\lim_k S_{2k} = \ln 2.$$

La $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ non si presta bene al calcolo di ln2, la sua convergenza è infatti "**lenta**". La ridotta parziale di ordine k rappresenta la somma della serie con un errore minore di $\frac{1}{k+1}$, ossia $|\ln 2 - S_k| < \frac{1}{k+1}$, quindi per ottenere il valore della somma con 5 cifre decimali esatte, ossia con un errore minore di 10^{-5}, occorre, soddisfare $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{100'000}$, da cui

$$k + 1 > 100'000 \Rightarrow k > 99'999.$$

Conosciamo esempi di serie a termini di segno alterno non convergenti, un esempio è dato dalla serie geometrica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ con $x \leq -1$ (non regolare).

ESERCIZIO 7. *Dimostrare che la* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1}$ *è non regolare.*

Soluzione. La serie è non convergente in quanto non esiste il $\lim\limits_k a_k$. Facciamo vedere che la serie è non regolare calcolando S_{2k+1} ed S_{2k}

$$S_{2k+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k+1}\right) + \frac{2k+1}{2k+2},$$

ed osservando che si può scrivere

$$\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k} - \frac{2k}{2k+1} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \quad \text{e} \quad \frac{2k+1}{2k+2} = 1 - \frac{1}{2k+2},$$

si ottiene

$$S_{2k+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+1} + \frac{2k+1}{2k+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2},$$

e quindi

$$\lim_k S_{2k+1} = \ln 2;$$

calcoliamo ora S_{2k}

$$S_{2k} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k+1}\right),$$

ed essendo

$$\frac{2k-1}{2k} - \frac{2k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k} - \frac{2k}{2k+1} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1},$$

si ha

$$S_{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+1} = -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+1},$$

e quindi

$$\lim_k S_{2k} = -1 + \ln 2.$$

Ossia $\lim\limits_k S_{2k} \neq \lim\limits_k S_{2k+1}$, e la $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1}$ è non regolare.

19. SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie dei suoi valori assoluti ossia se converge la serie (a termini non negativi)

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_n| + \cdots.$$

(Ovviamente la convergenza assoluta coincide con la convergenza se la serie è a termini di segno costante).

TEOREMA 1. *Se una serie è assolutamente convergente è anche convergente e risulta*

(2) $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Il teorema, in generale, non è invertibile, nel senso che una serie può convergere senza che essa sia assolutamente convergente. Ad esempio si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2,$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^{k-1} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Le serie convergenti ma non assolutamente convergenti si dicono **semplicemente convergenti** (pertanto l'assoluta convergenza di una serie è una condizione più restrittiva della semplice convergenza).

Ovviamente i criteri di convergenza per una serie a termini non negativi sono altrettanti criteri di convergenza assoluta.

TEOREMA 2. <u>**Criterio del confronto**</u>. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se la* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *è maggiorata da una serie convergente.*

Ad esempio la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sin} k}{k^2}$$

è assolutamente convergente in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sin} k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

TEOREMA 3. <u>**Criterio del rapporto**</u>. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se esiste un numero positivo* ρ, *con* $\rho < 1$, *tale da aversi (almeno definitivamente)*

$$|a_{k+1}| \leq \rho \cdot |a_k|, \ \forall\, k \in \mathbf{N},$$

mentre la serie non converge se risulta (definitivamente)

$$|a_{k+1}| \geq |a_k|, \ \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

In particolare se esiste finito il limite

$$\lim_k \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lambda,$$

la serie converge assolutamente se $\lambda < 1$, *non converge se* $\lambda > 1$ *(nulla si può concludere se* $\lambda = 1$).

ESERCIZIO 1. *Stabilire il carattere delle serie*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k},\ \forall x \in \mathbf{R}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k+1)e^k}.$$

Soluzione. Dal criterio del rapporto si deduce l'assoluta convergenza delle 2 serie. Per la a) si può supporre $x \neq 0$ (per $x = 0$ la convergenza è evidente) ottenendo

$$\lim_k \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_k \left|\frac{\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{x^k}{k!}}\right| = \lim_k \left|\frac{x}{k+1}\right| = |x| \cdot \lim_k \frac{1}{k+1} = 0.$$

Per la b) si ha

$$\lim_k \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_k \frac{k+1}{(k+2)e^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)e^k}{k} = \frac{1}{e}\lim_k \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{1}{e}.$$

TEOREMA 4. <u>**Criterio della radice**</u>. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se esiste un numero positivo* ρ, *tale da aversi (definitivamente)*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \rho < 1,\ \forall k \in \mathbf{N},$$

mentre la serie non converge se risulta (definitivamente)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1\ ,\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

In particolare se esiste il

$$\lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = \lambda,$$

la serie converge assolutamente se $\lambda < 1$, *non converge se* $\lambda > 1$ (*nulla si può concludere se* $\lambda = 1$).

ESERCIZIO 2. *Studiare il carattere delle serie*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{(k+1)e^k}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

Soluzione. Per la a) si ha

$$\lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{e} \cdot \lim_k \sqrt[k]{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{e}.$$

Per la b) si ha

$$\lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_k \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} = |x|,$$

per cui la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ converge assolutamente se $|x| < 1$, non converge se $|x| > 1$, $x \notin (-1, 1)$, se $x = 1$ si riduce alla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ che converge a ln2, se $x = -1$ si riduce alla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$ che diverge negativamente.

<u>**Osservazioni**</u>

Abbiamo visto che i due criteri precedenti non sono applicabili se $\lambda = 1$, in tal caso risultano utili il successivo criterio di Raabe ed il seguente

TEOREMA 5. <u>**Criterio dell'ordine degli infinitesimi**</u>. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è assolutamente convergente se la successione* $\{a_k\}$ *è infinitesima di ordine maggiore di 1, non è assolutamente convergente se tale successione è infinitesima di ordine minore o uguale ad 1.*

ESERCIZIO 3. *Determinare il carattere delle serie* :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{k}}}{3k-1}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k-\ln k}{k^3+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\pi k-\sin k}{k^3-\frac{1}{2}}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k-\ln k}$.

Soluzione. Applicando il criterio dell'ordine degli infinitesimi le prime tre serie sono assolutamente convergenti in quanto le successioni dei termini sono infinitesime di ordini rispettivamente $\frac{3}{2}$, 2, 2, infatti

$$\lim_k k^\alpha a_k = \lim_k k^{\frac{3}{2}} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{k}}}{k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{k}}\,k\left(3-\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{3}\lim_k \frac{k^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_k k^\alpha a_k = \lim_k k^2 \frac{2k-\ln k}{k^3+1} = \lim_k \frac{k^2\cdot k\left(2-\frac{\ln k}{k}\right)}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} = 2,$$

$$\lim_k k^\alpha a_k = \lim_k k^2 \frac{\pi k-\sin k}{k^3-\frac{1}{2}} = \lim_k \frac{k^2\cdot k\left(\pi-\frac{\ln k}{k}\right)}{k^3\left(1-\frac{1}{2k^3}\right)} = \pi.$$

La d) non è assolutamente convergente in quanto infinitesima di ordine 1, si ha

$$\lim_k k^\alpha a_k = \lim_k \frac{k}{k-\ln k} = \lim_k \frac{1}{1-\frac{\ln k}{k}} = 1,$$

(la $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k-\ln k}$ è convergente, cfr. es. **4** pag. 106.

TEOREMA 6. **Criterio di Raabe**. *La* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se si ha* (*definitivamente*)

$$k\cdot\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}-1\right)>1,$$

non converge assolutamente se si ha (*definitivamente*)

$$k\cdot\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}-1\right)\le 1$$

Se esiste $\lim_k k\cdot\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}-1\right)$ il criterio di Raabe si scrive nella forma seguente

TEOREMA 7. *Se*

$$\lim_k k\cdot\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}-1\right)=\lambda,$$

allora

a) *se* $\lambda>1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente*,

b) se $\lambda<1$, *la* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *non converge assolutamente*,

c) *nulla si può concludere se* $\lambda=1$.

Ad esempio per la serie armonica generalizzata si ha :

$$\lim_k k\cdot\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}-1\right)=\lim_k\left[k\cdot\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha-1\right)\right]=\alpha,$$

per cui se $\alpha>1$ la serie converge mentre se $\alpha<1$ la serie diverge.

TEOREMA 8. <u>**Criterio dell'integrale**</u>. *La serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *è assolutamente convergente se esiste una funzione* f(x) *positiva, continua non crescente e integrabile su* $[0, +\infty)$, *tale che* $\forall\, x \in (k, k+1)$ *risulta*

$$|a_k| \leq f(x)\,.$$

Ad esempio se $\alpha > 1$ è assolutamente convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}}.$$

Infatti ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ x^{-\alpha} & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Invece la $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+1}$ è semplicemente convergente in quanto per il criterio di Leibniz è convergente (la $\left\{\frac{k}{k^2+1}\right\}$ è decrescente ed infinitesima) ma la serie dei moduli è divergente in quanto posto $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{+\infty} = +\infty.$$

20. PROPRIETÀ DELLE SERIE

Le proprietà delle somme (finite) non si estendono alle serie.

a) ***Proprietà associativa***

TEOREMA 1. *La somma di una serie regolare non cambia associando (con una legge qualsiasi) gruppi, in un numero finito, di termini consecutivi.*

La stessa proprietà non si estende alle serie non regolari, infatti raggruppando a due a due i termini della serie di Grandi $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ si ha la

$$(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots$$

che converge con somma 0, se invece i termini si raggruppano a due a due a partire dal secondo si ottiene la

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-\cdots$$

che converge con somma 1.

b) ***Proprietà commutativa***

Per le somme finite vale la proprietà commutativa ossia la somma non cambia se si cambia l'ordine degli addendi, per le serie questa operazione non sempre è lecita.

Una serie convergente (divergente) per la quale vale la proprietà commutativa si dice **commutativamente convergente (divergente)**.

TEOREMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia commutativamente convergente è che sia assolutamente convergente.*

Ad esempio le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k\cdot 2^k},$$

sono commutativamente convergenti in quanto assolutamente convergenti.

Vale inoltre il seguente teorema dovuto a **Riemann** (1854).

TEOREMA 3. *Una serie semplicemente convergente può essere ordinata opportunamente in modo da ottenere una nuova serie con somma un numero reale prefissato (o che risulti divergente oppure non regolare).*

Ad esempio se consideriamo la serie convergente (non assolutamente)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2, \tag{1}$$

possiamo permutare i suoi termini in modo che due termini positivi siano seguiti da un termine negativo (tutti presi nell'ordine) si ottiene la

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{2}$$

che converge con somma $\frac{3}{2}\ln 2$. Infatti raggruppando i termini della la (2), a tre a tre, si ha

$$S_{3k}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=H_{4k}-\frac{1}{2}H_{2k}-\frac{1}{2}H_k=$$
$$=(H_{4k}-\ln 4k)-\frac{1}{2}(H_{2k}-\ln 2k)-\frac{1}{2}(H_k-\ln k)+\frac{3}{2}\ln 2,$$

e, poiché (cfr. es.5 pag. 106) $\lim_k(H_k-\ln k)=\gamma$, si ha

$$S=\lim_k S_{3k}=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Possiamo quindi concludere che la (2) pur essendo un riordinamento della (1) è convergente con somma diversa dalla (1).

Si può anche dimostrare che permutando i termini della (1) in modo che ciascun termine negativo (preso nell'ordine) segua k termini positivi (presi nell'ordine) si ottiene una serie convergente con somma $\ln(2\sqrt{k})$, invece permutando i termini della (1) in modo che tra il $(k-1)$-*esimo* termine ed il k-*esimo* termine negativo siano interposti 2^{k-1} termini positivi si ottiene una serie divergente positivamente.

21. LA SOMMA DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

La serie che ha per termini gli inversi dei quadrati degli interi, ha interessato molti matematici del XVII e XVIII secolo. La (semplice) dimostrazione della sua convergenza invitava a determinarne la somma.

In una lettera del 1673 Henry Oldenburg [1615?-1667] chiese a Leibniz quale fosse la somma della serie in questione, ma non ottenne risposta; Jacques Bernoulli [1654-1705] nel 1689 ammise la propria incapacità a venire a capo della questione, che interessò anche Pietro Mengoli.

Il successo spetta, come spesso, ad Eulero un secolo più tardi.

Quando Jean Bernoulli [1667-1748] venne a conoscenza del risultato ottenuto da Eulero scrisse[1]

"*e così viene soddisfatto l'ardente desiderio di mio fratello che, rendendosi conto che la ricerca di tale somma era più difficile di quanto si sarebbe potuto pensare confessava apertamente che tutti i suoi ferventi sforzi erano stati vani. Se almeno fosse vivo ora!*"

Eulero ottenne il risultato nel 1736 ed è probabile che lo abbia comunicato a Daniel Bernoulli [1700-1790]: la lettera di Eulero è andata smarrita, estraiamo dalla risposta il seguente passo

" The theorem on the sum of the series

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{pp}{6}{}^{(2)} \quad \text{and} \quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{p^4}{90},$$

is very remarkable. You must no doubt have came upon it a posteriori. I should very much like to see your solution".

---

(1) Cfr. Carl B. Boyer, "*Storia della matematica* ", ISEDI - 1976, pag. 514, traduzione di Adriano Carugo.

(2) Con p si indicava il rapporto tra circonferenza e diametro di uno stesso cerchio.

Diamo una dimostrazione elementare della relazione (le formule che useremo sono, per lo più, quelle della scuola secondaria)

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partendo dalla formula di de Moivre (e tenendo conto dell'identità binomiale) si ha

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{h} \cos^{n-k}\varphi (i\sin\varphi)^k.$$

Poiché i^k è reale se k è pari, immaginario se k è dispari[3] si possono separare i termini. Si ottiene così (con $\left[\frac{n}{2}\right]$ ed $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ si indicano la parte intera di $\frac{n}{2}$ e quella di $\frac{n-1}{2}$)

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi =$$
$$= \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2h} \cos^{n-2h}\varphi (i\sin\varphi)^{2h} + \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h-1}\varphi (i\sin\varphi)^{2h+1} =$$
$$= \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h}\varphi \sin^{2h}\varphi + i \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h-1}\varphi \sin^{2h+1}\varphi.$$

(3) Si ha

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i;\ i^{4h} = 1,\ i^{4h+1} = i,\ i^{4h+2} = -1,\ i^{4h+3} = -i;$$

e quindi

$$i^{2h} = \left(i^2\right)^h = (-1)^h,\quad i^{2h+1} = i \cdot i^{2h} = (-1)^h i.$$

Uguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei due membri si hanno le

(2) $$\cos n\varphi = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h}\varphi \cdot \sin^{2h}\varphi,$$

(3) $$\sin n\varphi = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h-1}\varphi \cdot \sin\varphi^{2h}.$$

Dunque cos $n\varphi$ (cfr. la (2)) si può esprimere con un polinomio in $\cos\varphi$[4].

Se n è dispari e quindi $n - 2h - 1$ pari, si può esprimere $\sin n\varphi$ mediante un polinomio in $\sin\varphi$[5]; se invece n è pari e quindi $n - 2h - 1$ dispari, si può esprimere $\sin n\varphi$ mediante un polinomio in $\cos\varphi \sin\varphi$[6].

Dalle (2) e (3) si hanno, per $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e per $\varphi \neq k\pi$, rispettivamente, le

(4) $$\cos n\varphi = \cos^n\varphi \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \mathrm{tg}^{2h}\varphi,$$

(5) $$\sin n\varphi = \sin^n\varphi \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \mathrm{cotg}^{n-2h-1}\varphi.$$

(4) Basta tener conto della $\sin^{2h}\varphi = \left(1 - \cos^2\varphi\right)^h$.

(5) Ponendo $\cos^{n-2h-1}\varphi = \left(1 - \sin^2\varphi\right)^{\frac{n-2h-1}{2}}$.

(6) Basta porre $\sin^{2h+1}\varphi = \sin\varphi \cdot \left(1 - \cos^2\varphi\right)^h$.

Da quest'ultima partiamo per il calcolo di $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Posto n = 2m + 1 si ha

$$\sin(2m+1)\varphi = \sin^{2m+1}\varphi\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{2m+1}{2h+1}\cot g^{2m-2h}\varphi, \tag{6}$$

e posto

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2m+1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

si ha

$$\sin(2m+1)\varphi_k = \sin k\pi = 0, \quad \sin\varphi_k \neq 0,$$

pertanto

$$\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{2m+1}{2h+1}\cot g^{2m-2h}\varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

ossia l'equazione algebrica di grado m

$$\binom{2m+1}{1}x^m - \binom{2m+1}{3}x^{m-1} + \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1} = 0 \tag{7}$$

ammette le m soluzioni[7]

$$\cot g^2\frac{\pi}{2m+1}, \cot g^2\frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \cot g^2\frac{m\pi}{2m+1}. \tag{8}$$

---

[7] Posto $P_m(x) = \sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{2m+1}{2h+1}x^{m-h}$, tutte, e sole, le equazioni algebriche di grado m che ammettono le m soluzioni (8) sono del tipo $\rho\cdot P_m(x) = 0$ con $\rho \neq 0$ e peraltro arbitrario.

Poiché la somma delle m radici di un equazione[8] di grado m ($a_0 \neq 0$)

$$\sum_{k=0}^{m}a_k x^{m-k} = 0,$$

è $-\frac{a_1}{a_0}$, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m}\cot g^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}},$$

ossia la notevole identità

$$\sum_{k=1}^{m}\cot g^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}. \tag{9}$$

Dalla precedente e dalla

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \operatorname{cosec}^2\varphi = 1 + \cot g^2\varphi,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cosec}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \sum_{k=1}^{m}\left(1 + \cot g^2\frac{k\pi}{2m+1}\right) = m + \frac{m(2m-1)}{3},$$

---

[8] La somma di tutti i possibili prodotti, k a k, di k radici dell'equazione

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \quad (a_0 \neq 0),$$

è

$$(-1)^k\frac{a_k}{a_0}.$$

ossia

$$(10)\qquad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(m+1)}{3}.$$

Le formule (9) e (10) consentono di determinare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Tenendo conto che, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si hanno le

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \sin^2 x < x^2 < \operatorname{tg}^2 x, \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x},$$

ed in conclusione

$$\operatorname{cotg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \operatorname{cosec}^2 x, \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

In particolare riferendosi agli m numeri $\frac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ si ha

$$\operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} < \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{2m+1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

sommando su k tra 1 ed m e tenendo conto delle

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}, \quad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(m+1)}{3},$$

si ottiene

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)}{3},$$

ossia

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2}{3} \frac{m(m+1)}{(2m+1)^2},$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2m+1}\right) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2m+1}\right),$$

e poiché per $m \to \infty$ il primo e l'ultimo termine tendono a $\frac{\pi^2}{6}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

22. LA SOMMA DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Con considerazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente si può provare la

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Sappiamo, dal paragrafo precedente, che l'equazione

$$(1)\qquad \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1} = 0$$

ammette le m radici

(2) $$\cot g^2 \frac{\pi}{2m+1}, \cot g^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \cot g^2 \frac{m\pi}{2m+1}.$$

Poiché la somma dei prodotti, a due a due, delle radici è $\frac{a_2}{a_0}$ si ha

(3) $$\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{30},$$

tenuto conto dell'identità

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^2 - 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_1 a_m + \cdots + a_{m-1} a_m),$$

e della

$$\sum_{k=1}^{m} \cot g^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

e se in particolare $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sono le m radici della (1) si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \cot g^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{2m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{30},$$

ossia

(4) $$\sum_{k=1}^{m} \cot g^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{15}.$$

D'altra parte

$$\operatorname{cosec}^4 \varphi = \frac{1}{\sin^4 \varphi} = \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi}\right)^2 = (1 + \cot g^2 \varphi)^2 = \cot g^4 \varphi + 2 \cot g^2 \varphi + 1.$$

riferendosi agli m numeri $\frac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ed addizionando membro a membro si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} \cot g^4 \frac{k\pi}{2m+1} + 2\sum_{k=1}^{m} \cot g^2 \frac{k\pi}{2m+1} + m,$$

tenuto conto della (4) e della

$$\sum_{k=1}^{m} \cot g^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45} + \frac{2m(2m-1)}{3} + m,$$

ossia

(5) $$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45}.$$

Le (4) e (5) consentono di determinare subito la somma della $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Tenendo conto che, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si hanno le

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \sin^4 x < x^4 < \operatorname{tg}^4 x, \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} < \frac{1}{x^4} < \frac{1}{\sin^4 x}$$

ed in conclusione

$$\cot g^4 x < \frac{1}{x^4} < \operatorname{cosec}^4 x.$$

Riferendosi a $x = \dfrac{k\pi}{2m+1}$, si ha

$$\cot g^4 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^4}{k^4\pi^4} < \operatorname{cosec}^4 \frac{k\pi}{2m+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

e sommando su k tra 1 ed m e tenuto conto delle (4) e (5) si ottiene

$$\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45} < \frac{(2m+1)^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^4} < \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45},$$

ossia

$$\frac{\pi^4}{45}\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{(2m+1)^4} < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^4} < \frac{8\pi^4}{45}\frac{m(m+1)(m^2+m+3)}{(2m+1)^4},$$

da cui

$$\frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right)\left(1+\frac{3}{2m+1}-\frac{13}{(2m+1)^2}\right) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^4} <$$

$$< \frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)\left(1+\frac{11}{(2m+1)^2}\right),$$

e poiché per $m \to +\infty$ il primo e l'ultimo termine tendono a $\dfrac{\pi^4}{90}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Il procedimento usato per determinare le somme delle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4},$$

consente di determinare le successive somme dei reciproci di potenze pari, ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{12}} = \frac{651\pi^{12}}{638512875}, \ldots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}} = \frac{2^{24}\cdot 76977927\pi^{26}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 27}, \ldots$$

Per le serie dei reciproci di potenze dispari i risultati non si conoscono del tutto, infatti ancora oggi non si sa se la somma dei reciproci dei cubi dei numeri interi positivi sia un multiplo razionale di π^3, mentre si conoscono alcuni risultati significativi come ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^3} = \frac{\pi^3}{32}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^5} = \frac{\pi^5}{360}, \text{ etc.;}$$

é stato dimostrato nel 1978 da Roger Apéry che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = 1.202056\ldots$$

è un <u>numero irrazionale</u>.

23. UN'IDENTITÀ DI EULERO

TEOREMA 1. *Per ogni numero reale $\alpha > 1$ si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1},$$

dove il simbolo $\prod_{p}$ indica il prodotto eseguito su tutti i primi.

Dimostrazione. Sappiamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ converge solo se $\alpha > 1$. Fissato l'intero positivo N diciamo $p_1, p_2, \cdots, p_h$ i primi che non superano N, poiché $p_i^{-\alpha} < 1$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$ si ha di seguito

$$\prod_{p \le N} \left(1 - p_i^{-\alpha}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{h} \left(1 - p_i^{-\alpha}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{i} p_i^{-j\alpha} = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_h) \in N^k} \left(p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{j_h}\right)^{-\alpha} = \sum{}^{*} k^{-\alpha}$$

dove abbiamo indicato con $\sum^{*}$ la somma di tutti i termini $k^{-\alpha}$ ossia la somma di tutti gli interi positivi che non superano N.

Si ha poi

$$\sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha} < \sum{}^{*} k^{-\alpha} \le \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha},$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha} < \prod_{p \le N} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} \le \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha},$$

e per $N \to \infty$ si ha la

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1}.$$

ESERCIZIO 1. *Dimostrare la* $\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1) \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} = 1.$

Soluzione. Con riferimento alla

$$(k + 1)^{-\alpha} < \int_{k}^{k+1} x^{-\alpha} dx < k^{-\alpha},$$

e sommando su k si ha

$$\sum_{k=2}^{\alpha} k^{-\alpha} < \int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx < \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha} < 1 + \int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx,$$

ossia

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx < \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} < 1 + \int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx,$$

e tenuto conto dell'identità di Eulero ed integrando si ha

$$\frac{1}{\alpha - 1} = \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} < 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

ossia

$$1 < (\alpha - 1) \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} < \alpha,$$

e per $\alpha \to 1^+$ si ha

$$\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1) \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} = 1,$$

e quindi anche

$$(*) \qquad \lim_{\alpha \to 1^+} \prod_{p} \left(1 - p^{-\alpha}\right)^{-1} = +\infty.$$

Questo corollario è molto importante, ad esempio da esso segue il noto teorema di Euclide (III sec. a.C.) "***l'insieme dei primi è infinito***". Infatti se l'insieme dei primi avesse <u>cardinalità finita</u> poiché, $\forall$ p, se $\alpha > 1$, si ha $\left(1-p^{-\alpha}\right)^{-1} < 2$, si avrebbe

$$\prod_p \left(1-p^{-\alpha}\right)^{-1} < 2^{-\alpha},$$

in contraddizione con la (*).

Un'altra dimostrazione del teorema sull'infinità dei numeri primi si deduce dall'identità di Eulero per $\alpha = 2$. Infatti

$$\prod_p \left(1-p^{-2}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

per cui se

$$\prod_p \left(1-p^{-2}\right)^{-1}$$

contenesse un numero finito di valori sarebbe razionale in contrasto con il fatto che π^2 (e quindi $\frac{\pi^2}{6}$) è irrazionale.

ESERCIZIO 2. *Dimostrare che*

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty.$$

Soluzione. Preliminarmente dimostriamo la

$$\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} p^{-k} < 1.$$

Si ha infatti

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{-1}p^{-k} < \sum_{k=2}^{\infty} p^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} - 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} = \frac{p}{p-1} - \frac{p+1}{p} = \frac{1}{p(p-1)},$$

e quindi

$$\sum_p k^{-1}p^{-k} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{\alpha\to 1^+} \prod_p \left(1-p^{-\alpha}\right)^{-1} = +\infty,$$

e tenendo conto che

$$\ln \prod_p \left(1-p^{-h}\right)^{-1} = \sum_p \sum_{h=1}^{\infty} h^{-1}p^{-h\alpha} = \sum_p p^{-\alpha} + \sum_p \sum_{h=2}^{\infty} h^{-1}p^{-h\alpha},$$

passando al limite per $\alpha \to 1^+$ si ha

$$\lim_{\alpha\to 1^+} \ln \prod_p \left(1-p^{-h}\right)^{-1} = +\infty,$$

e quindi

$$\sum_p \frac{1}{p} = +\infty.$$

24. LA SERIE DI LEIBNIZ

Consideriamo la seguente espressione:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg} n\varphi = \frac{\sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^h\binom{n}{h}\operatorname{cotg}^{n-2h}\varphi}{\sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^h\binom{n}{2h+1}\operatorname{cotg}^{n-2h-1}},$$

essa è il punto di partenza per esprimère mediante una serie, la serie di Leibniz, il numero π. La dimostrazione sarà analoga a quella che ha condotto al calcolo delle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Ponendo nella (1) n = 2m intero pari si ha

$$\operatorname{cotg} 2m\varphi = \frac{\sum_{h=0}^{[m]}(-1)^h\binom{2m}{2h}\operatorname{cotg}^{2m-2h}\varphi}{\sum_{h=0}^{\left[\frac{2m-1}{2}\right]}(-1)^h\binom{2m}{2h+1}\operatorname{cotg}^{2m-2h-1}},$$

e pertanto, se φ_k è uno dei 2m numeri

$$\text{(2)} \qquad \varphi_k = \frac{\pi}{8m}\left[1+4(k-1)\right], \quad k = 1, 2, \dots, 2m$$

si ha

$$\operatorname{cotg} 2m\varphi_k = 1,$$

ossia

$$\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{2m}{2h}\operatorname{cotg}^{2m-2h}\varphi = \sum_{h=0}^{m-1}(-1)^h\binom{2m}{2h+1}\operatorname{cotg}^{2m-2h-1}\varphi_k, \qquad k = 1,2,\dots,2m$$

e dunque

$$\binom{2m}{0}\operatorname{cotg}^{2m}\varphi_k - \binom{2m}{1}\operatorname{cotg}^{2m-1}\varphi_k + \dots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{2m-1}\operatorname{cotg}\varphi_k + (-1)^m\binom{2m}{2m} = 0,$$

in altri termini, l'equazione completa, algebrica, di grado 2m :

$$\text{(3)} \qquad x^{2m} - \binom{2m}{1}x^{2m-1} + \dots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{2m-1}x + (-1)^m = 0,$$

ha le 2m soluzioni

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8m}(4k-3), \qquad k = 1,2,\dots,2m.$$

Ma essendo

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8m}\left[8m-(4k-3)\right] = \operatorname{cotg}\left[\pi - \frac{\pi}{8m}(4k-3)\right] = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8m}(4k-3),$$

si possono considerare le 2m soluzioni della (3) nella forma

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8m}, \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{8m}, \dots, -\operatorname{cotg}\frac{7\pi}{8m}, -\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{8m};$$

e, considerandole a segni alterni e crescenti in valore assoluto, si ha

$$\text{(4)} \qquad (-1)^{k-1}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8m}(2k-1), \qquad k = 1,2,\dots,2m.$$

Inoltre poiché la somma delle radici dell'equazione

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0$$

è $-\frac{a_1}{a_0}$, si può concludere con riferimento alla (3) ed alle sue soluzioni (4) che

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \cot g \frac{\pi}{8m}(2k-1) = \binom{2m}{1} = 2m. \tag{5}$$

Richiamiamo poi le due identità

$$\cot g\, \alpha - \cot g\, \beta = \sin(\beta-\alpha) \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta, \tag{6}$$

$$\cot g\, \alpha - \cot g\, \beta = \operatorname{tg}(\beta-\alpha)(1 + \cot g\, \alpha \cot g\, \beta), \tag{7}$$

sommando due a due le radici (4) e tenendo conto delle (5) e (6) si ottiene

$$\sin \frac{\pi}{4m} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-3) \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-1) = 2m,$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-3) \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-1) = \frac{2m}{\sin \frac{\pi}{4m}}. \tag{8}$$

D'altra parte con riferimento alla (7) si ha

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4m} \sum_{k=1}^{m} \left[1 + \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-3) \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-1) \right] = 2m,$$

pertanto

$$\sum_{k=1}^{m} \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-3) \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-1) = \frac{2m}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4m}} - m. \tag{9}$$

Ma

$$\cot g\, x < \frac{1}{x} < \operatorname{cosec} x, \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot g\, y < \frac{1}{y} < \operatorname{cosec} y, \qquad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

cioè

$$(\cot g\, x)(\cot g\, y) < \frac{1}{xy} < (\operatorname{cosec} x)(\operatorname{cosec} y),$$

e si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-3) \cot g \frac{\pi}{8m}(4k-1) < \sum_{k=1}^{m} \frac{8m}{\pi(4k-3)} \cdot \frac{8m}{\pi(4k-1)} <$$

$$< \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-3) \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8m}(4k-1).$$

Dalle (8) e (9) segue

$$\frac{2m}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4m}} - m < \sum_{k=1}^{m} \frac{8m}{\pi(4k-3)} \cdot \frac{8m}{\pi(4k-1)} < \frac{2m}{\sin \frac{\pi}{4m}}.$$

e da questa

$$\frac{\pi^2}{16m} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4m}} - \frac{\pi^2}{32m} < \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} < \frac{\pi^2}{16m} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4m}},$$

che si può anche scrivere come

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\frac{\pi}{4m}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}}-\frac{\pi^2}{32m}<\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-1}\right)<\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}},$$

e poiché

$$\lim_m\frac{\frac{\pi}{4m}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}}=1 \quad \text{e} \quad \lim_m\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}=1,$$

si ha in definitiva

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-1}\right)=\frac{\pi}{4},$$

ossia

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-1}+\dots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\dots=\frac{\pi}{4},$$

da cui

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\dots\right).$$

La formula è molto elegante, ma senza ulteriori considerazioni, la serie non è adatta al calcolo di π essendo a convergenza molto "**lenta**" e a tal proposito lo stesso Leibniz affermava

"sebbene questa serie non sia adatta ad una rapida approssimazione, non credo si possa immaginare qualche cosa di più adatto o più semplice per presentare alla mente umana il rapporto tra un cerchio ed il quadrato circoscritto".

25. ESPRESSIONI BINOMIE E TRINOMIE DI π

ESERCIZIO 1. *Dimostrare che, se $z^2 = xy - 1$, si ha l'identità*

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{z}=\operatorname{arctg}\frac{1}{z+x}+\operatorname{arctg}\frac{1}{z+y}.$$

Soluzione. Dall'identità

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

ponendo

$$\xi=\operatorname{tg}\alpha,\ \ \eta=\operatorname{tg}\beta,\ \ \theta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

ossia

$$\alpha=\operatorname{arctg}\xi,\ \ \beta=\operatorname{arctg}\eta,\ \ \alpha+\beta=\operatorname{arctg}\theta=\operatorname{arctg}\xi+\operatorname{arctg}\eta,$$

si ottiene

$$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\xi+\operatorname{arctg}\eta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{arctg}\frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta},$$

ossia

$$\operatorname{arctg}\frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta}=\operatorname{arctg}\xi+\operatorname{arctg}\eta.$$

Se si pone

$$\frac{1}{z}=\frac{\xi+\eta}{1-\xi\mu},\quad \frac{1}{z+x}=\xi,\quad \frac{1}{z+y}=\eta,$$

si ha

$$\frac{1}{z}=\frac{\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}}{1-\frac{1}{z+x}\cdot\frac{1}{z+y}},\quad \frac{1}{z}=\frac{2z+x+y}{z^2+zx+zy-1},$$

per cui

$$z^2+zx+zy+xy-1=2z^2+zx+zy,\quad z^2=xy-1.$$

Pertanto se $z^2 = xy - 1$ si ha

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{z} = \operatorname{arctg}\frac{1}{z+x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z+y}. \tag{1}$$

Se nella (1) si pone

a) $z = 1$, $x = 1$, $y = 2$ si ottiene la seguente espressione binomia per il calcolo di π

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

dovute ad **Eulero**;

b) $z = 2$, $x = 1$, $y = 5$ si ha la formula di **Vega** [1754-1802]

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

c) $z = 3$, $x = 1$, $y = 10$ si ha la formula ottenuta nel 1844 da **Schulz-Dahse**.

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13},$$

d) $z = 3$, $x = 1$, $y = 5$ si ha la formula di **Schulz** (1844)

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

Sostituendo le formule c) e d) nella formula di Eulero si ottengono due espressioni *trinomie* per il calcolo di π, ossia

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13}, \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

26. ALCUNE SERIE RELATIVE A π

Abbiamo visto nel paragrafo **6** la

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1, \tag{1}$$

che converge per $x = 1$, dando luogo alla formula di Leibniz (cfr. paragrafo **24**)

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots\right),$$

formula, molto elegante, che si presta poco però al calcolo di π, occorrono infatti almeno 20'000 termini per avere 4 cifre esatte di π.

Migliore della precedente è la serie dell'arcoseno

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \tag{2}$$

per $x = \frac{1}{2}$ si ha

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \cdots,$$

ossia

$$\pi = 6\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{2^7\cdot 7} + \cdots\right),$$

ed addizionando i primi 30 termini si ottiene π con 20 cifre decimali esatte.

È il metodo usato da **Newton** [1642-1727] nel 1673 per calcolare π con 14 cifre decimali esatte.

Un procedimento, dovuto a **Machin** [1680-1753], è più conveniente dei precedenti. Egli osservò che vale la

(3) $$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}.$$

Infatti considerando l'angolo α tale che sia $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, si ottiene successivamente

$$\mathrm{tg}2\alpha\left(=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\right) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12},\ (\text{è } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}),$$

$$\mathrm{tg}4\alpha\left(=\frac{2\mathrm{tg}2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}\right) = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{144}{119} = \frac{120}{119} = 1+\frac{1}{119},$$

ossia $4\alpha > \frac{\pi}{4}$, per cui posto $4\alpha = \frac{\pi}{4}+\beta$, si ottiene

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{tg}4\alpha - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}4\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\frac{1}{119}-1}{1+1+\frac{1}{119}} = \frac{1}{119}\cdot\frac{119}{239} = \frac{1}{239}.$$

Dalla $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$, segue

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}.$$

e quindi utilizzando la (1) si ha

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1-\frac{4}{3\cdot 100}+\frac{4^2}{5\cdot 100^2}-\frac{4^3}{7\cdot 100^3}+\dots+(-1)^k\frac{4^k}{(2k+1)\cdot 100^k}+\dots\right)+$$

$$-\frac{4}{239}\left(1-\frac{1}{3\cdot 239^2}+\frac{1}{5\cdot 239^4}-\frac{1}{7\cdot 239^6}+\dots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\cdot 239^{2k}}+\dots\right).$$

Quest'ultima è a convegenza molto rapida per cui può essere utilizzata per il calcolo di π, e tramite questo sviluppo è stato determinato da **Shanks** il valore π con 707 cifre decimali esatte.

Con l'avvento delle macchine calcolatrici è stato possibile calcolare π con molte cifre decimali esatte, per esempio

a) nel 1949 la macchina calcolatrice "ENIAC" calcolò 2'036 cifre decimali esatte in 70 ore di lavoro,

b) nel 1954 la macchina calcolatrice "NORC" ne calcolò 3'093 impiegando 13 minuti,

c) nel 1959 fu calcolato fino a 10'000 da "IBM 704" impiegando 100 minuti.

Con l'uso di più sofisticati elaboratori e di programmi dedicati è possibile far crescere il numero di cifre di π (con evidenti "*curiosità*" statistiche, etc.): è possibile calcolare π con un milione di cifre decimali.

Finito di stampare nel mese di luglio 1995
dalla COLORA srl di Lodi