5.3 *A. Marino,* Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici del mondo. Lo scienziato della solidarietà e dei diritti umani

Articolo apparso nel quotidiano "Il Tempo", inserto di Napoli, dell' 1 aprile 1997

Un uomo veramente geniale e veramente buono. Coloro che hanno conosciuto Ennio De Giorgi, scomparso a Pisa lo scorso 25 ottobre, sanno quanto questo giudizio su di lui sia profondamente vero. De Giorgi è stato uno dei più insigni scienziati di questo secolo e il suo valore è stato riconosciuto con il conferimento dei massimi premi internazionali e con l' associazione ad alcune delle più prestigiose accademie.

Ma colpiva moltissimo anche la straordinaria ampiezza dei suoi interessi umani e spirituali che permeava i suoi rapporti, la sua cultura e la sua stessa ricerca scientifica. De Giorgi cercava di sondare la realtà profonda dei problemi studiati e nello stesso tempo, con i suoi originali studi di logica, i collegamenti reconditi fra le più diverse discipline: la matematica (compresa l' informatica), la filosofia, la religione e le altre espressioni dello spirito umano. Riflettendo oggi sulla sua vita si può affermare che egli ha volutamente cercato una sintesi fra bontà e intelligenza, convinto che esse siano i lineamenti diversi di uno stesso volto, che nella sua profonda fede cristiana era il Volto di Dio.

Lo scienziato e il maestro.

Nato a Lecce l' 8 febbraio del 1928, Ennio De Giorgi manifestò fin da giovanissimo delle straordinarie doti scientifiche.

Nel 1956 si impose all' attenzione della comunità scientifica internazionale con la soluzione del "XIX problema di Hilbert". David Hilbert (1862-1943), una delle colonne del pensiero scientifico moderno, nel Congresso Internazionale di Matematica di Parigi del 1900 aveva proposto alcuni problemi insoluti che costituivano dei passaggi fondamentali per l' Analisi matematica e per la scienza. Molti di questi problemi diedero origine a nuovi metodi e a nuove scoperte, anche alcuni di quelli che, come il diciannovesimo, sarebbero rimasti a lungo senza risposta [1]. La soluzione di De Giorgi aprì un importante e ricco filone di studi.

Tutta la ricerca scientifica di De Giorgi è stata caratterizzata dalla vastità di orizzonti, e le sue idee ed i suoi nuovi metodi lo hanno portato a elaborare teorie di grande portata: la teoria delle superfici "minime", con

[1] *Mathematical developements arising from Hilbert Problems,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol XXVIII, Americal Mathematical Society.

la risoluzione negli anni sessanta del problema di Plateau sulle proprietà isoperimetriche della sfera e la teoria delle superfici minime, la teoria della $gamma$–convergenza negli anni settanta, la teoria delle curve di evoluzione associate a vari tipi di funzionali e l' evoluzione delle superfici e di altri enti geometrici negli anni ottanta e novanta.

Se gli studi precedenti rientrano nel "calcolo delle variazioni", nel quale fu maestro, De Giorgi ottenne fondamentali risultati anche in altri campi come nello studio del problema di Cauchy negli anni cinquanta e nella risolubilità delle equazioni analitiche nei primi anni settanta.

Profondamente innovatori furono anche i suoi studi sulla logica e sui fondamenti della matematica che negli anni novanta lo portarono a formulare una "teoria base" la cui idea centrale che gli oggetti della Matematica sono caratterizzati dalle loro "qualità" e non solo dalle loro "quantità"; viene posto in tal modo un principio scientifico tendenzialmente non riduzionista alle basi stesse dei ragionamenti logici.

Su quelle idee sono nate diverse scuole di ricerca, alle quali contribuiscono matematici di tutto il mondo.

Lo studio di De Giorgi nella Scuola Normale Superiore di Pisa era diventato la meta di studiosi italiani e stranieri, dai più giovani ai più esperti e famosi, che volevano scambiare con lui idee e progetti. Con gli allievi e i collaboratori aveva una dote eccezionale: era capace di far fiorire le loro capacità, immergendoli in un affascinate orizzonte scientifico e in un rapporto umano di alto livello.

Per comprendere il suo amore per la scienza e la sua predilezione per la collaborazione si può ricordare il suo costante riferimento alla Sapienza biblica, una Sapienza che non si identifica in una particolare dote umana ma che va ricercata in ogni pensiero e in ogni atto, una Sapienza "conviviale" che è aperta a tutti e invita tutti:

> *Venite, mangiate il mio pane, bevete il vino che ho preparato. Abbandonate l' ingenuità e vivrete, camminate nella mia intelligenza!*
> (Proverbi, 9, 1-5)

La difesa dei diritti umani.

La solidarietà con tutti, portò De Giorgi ad impegnarsi in campagne internazionali per la difesa dei diritti umani in ogni parte del mondo. Nel 1974 una azione sorretta da uomini di molti Paesi, in gran parte scienziati, portò alla liberazione di Leonid Pliusc, il matematico ukraino detenuto per motivi di opinione in un ospedale psichiatrico in Unione Sovietica.

In quel periodo si assistette alla rinascita della "speranza" nei rapporti internazionali, le iniziative in favore di persone non violente imprigionate solo per le loro opinioni ("razza", religione.....) si moltiplicavano in tutto il mondo. In collaborazione con Amnesty International ottenemmo altre liberazioni, come quella di José Louis Massera, uomo politico uruguaiano, detenuto ed anche torturato per le sue opinioni politiche.

De Giorgi aveva molta fiducia nel valore impegnativo che la Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10. XII. 1948, poteva avere per gli Stati che fanno parte dell'ONU. Egli la riteneva un testo semplice ed efficace.

> *È importante il fatto che il preambolo della Dichiazione parli apertamente della fede nella dignità dell' uomo: in fondo ci dice che all' origine del diritto e della giustizia, non c' è il risultato di una indagine scientifica ma c' è un atto di fede, e dalla fede nella dignità dell' uomo discendono tutti i diritti umani....*[2].

Un appello.

Da alcuni anni De Giorgi insisteva sulla necessità di inserire la Dichirazione dei Diritti Umani nella Costituzione italiana. Rivolgiamo ancora per lui questo appello a tutta l' opinione pubblica, al Presidente della Repubblica e ai Presidenti della Camera e del Senato.

Le realtà invisibili.

Spesso De Giorgi discuteva del senso della ricerca scientifica e questo è uno dei temi principali dei suoi numerosi scritti "sapienziali". Vorrei qui cercare di comunicare almeno un aspetto di quelle affascinanti prospettive che egli sembrava proporci con una intima gioia.

> *Continua pure a sorprendermi il riemergere di alcune strutture matematiche nei più diversi campi delle scienze naturali e della tecnica, simile ad un motivo che si ripresenta in varie parti di una sinfonia.*
>
> *Questo ci ricorda le idee di Pitagora sulle sfere celesti, il salmo che comincia con le parole: "i cieli narrano la gloria di Dio", o la frase di Einstein: "Dio è sottile ma non malizioso". Il significato ultimo del pensiero matematico risiede secondo me nell' idea di una sottile complessa armonia fra tutte le realtà visibili e invisibili* [3].

Gli orizzonti scientifici e spirituali di De Giorgi erano vastissimi, ma su quelle "realtà invisibili" vorrei fare qualche considerazione, soffermandomi su *uno* dei significati *scientifici*, e precisamente matematici, di questi invisibili. Naturalmente esporrò le cose a modo mio.

Gli enti matematici e la realtà.

C' è un atteggiamento scientifico che percorre tutta la matematica: l' idea di cogliere qualche elemento di quelle che chiamerei le "strutture nascoste"

[2] *La matematica e la Sapienza,* in ENNIO DE GIORGI, "Riflessioni su Matematica e Sapienza", Quaderni dell'Accademia Pontaniana, 1996.

[3] *Una conversazione con Ennio De Giorgi,* in "Riflessioni . . . ", cit.

delle cose, nella fiducia, o, per chi lo preferisce, nella finzione, che "esista" davvero una struttura nascosta da indagare.

Si tratta di quella "struttura nascosta" che comprende ad esempio l' idea di numero, idea fondamentale nella scienza e probabilmente in tutti i nostri ragionamenti. Si tratta di quella struttura costituita da enti logici, e in particolare matematici, che ci permettono di "capire" qualcosa del *grandissimo libro* della natura, che, come scrive Galileo Galilei (1564-1642), *è scritto in lingua matematica*[4].

Riguardo a questo universo ed alla sua "esistenza" si può citare per esempio questo brano tratto da una conferenza divulgativa di De Giorgi:

> *Gli "enti matematici" possono essere considerati da tre punti di vista. Un primo punto di vista quello secondo cui gli enti matematici esistono in sé; cioè ad esempio esistono effettivamente l' insieme di tutti i numeri interi, l' insieme di tutte le rette, dei cerchi, dei quadrati. Un secondo punto di vista concerne gli oggetti fisici che rappresentano gli enti matematici. Un terzo punto di vista riguarda poi il mondo delle formule, degli assiomi, del linguaggio tecnico mediante il quale questi enti vengono descritti. Questi tre mondi sono strettamente collegati fra di loro ma non sono la stessa cosa*[5].

È interessante l' esempio che in quello stesso testo De Giorgi porta per mettere bene in evidenza la differenza che intercorre fra tutti i quadrati che è possibile disegnare ed il quadrato ideale, che è l' oggetto proprio dello studio del matematico. Egli si serve del teorema (tramandatoci dalla scuola pitagorica del IV secolo a.C.) che afferma che il lato del quadrato e la sua diagonale sono "incommensurabili" e cioè che non è possibile "misurare" la diagonale del quadrato usando come unità di misura un sottomultiplo del lato: per quanto questo sottomultiplo sia piccolo, esso non sta esattamente un numero intero di volte nella diagonale. In altre parole il rapporto fra le lunghezze del lato e della diagonale non è esprimibile con il rapporto fra due numeri interi, e cioè con un numero "razionale". D' altra parte non è assolutamente possibile disegnare un quadrato che metta in evidenza questa proprietà perché non è possibile distinguere in un disegno i numeri razionali dagli altri. *Quindi questo è un esempio di una proprietà centrale del concetto matematico di quadrato che non ha nessun riscontro in quelle che sono invece le proprietà visibili dei quadrati disegnati*[6].

Un altro esempio famoso di enti matematici "sottesi" alla realtà è dato dai concetti di derivata e di equazione differenziale; si può dire che essi

[4]*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua, a conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola*, GALILEO GALILEI, Il Saggiatore.

[5]*Sviluppi dell'Analisi funzionale del Novecento,* in "Riflessioni su Matematica e Sapienza", cit.

[6]ibidem

siano stati “fatti vivere” da Newton per esprimere la sua grandiosa unificazione contenuta nelle leggi della dinamica che regolano il movimento dei corpi nei cieli e sulla terra, dall’ oggetto più vicino e familiare a quello più inaccessibile e sconosciuto.

Enti logici, dunque, legati in relazioni logiche (come le equazioni) che permettono grandiose descrizioni della natura. In questo universo nascosto, che lo si pensi “esistente” o no, si scoprono collegamenti profondi e inattesi fra cose che, direi “nella loro parte visibile”, appaiono a volte del tutto estranee l’ una all’ altra.

Gli “spazi di funzioni”.

Sono moltissimi i problemi che consistono nell’ individuare alcune proprietà delle funzioni che soddisfano una equazione associata ad un certo fenomeno (fisico, chimico, economico...). Sono funzioni per esempio la distribuzione delle temperature nei vari punti di un corpo o la distribuzione nei vari istanti di tempo della posizione di un corpo in movimento.

Gli “spazi di funzioni” sono spazi nei quali il matematico si muove pensando alle proprietà geometriche dello spazio fisico, ma sono costituiti non dai “punti” dello spazio fisico, ma da “funzioni”, e sono realmente utili per comprendere ed inquadrare il comportamento di molte equazioni che descrivono fenomeni della realtà visibile. Uno spazio di funzioni è ad esempio costituito da tutte le ipotetiche distribuzioni di temperatura nei vari punti di un corpo, comprese le distribuzioni che *non* sono fisicamente possibili. Così tutte le distribuzioni pensabili, *possibili o no*, nei diversi istanti di tempo, delle posizioni di un corpo in movimento costituiscono un altro esempio di spazio di funzioni.

A differenza dello spazio fisico che ha tre dimensioni, molti spazi di funzioni hanno infinite dimensioni, e tuttavia il matematico che ricerca la soluzione di un problema regolato da una certa equazione, (ad esempio la distribuzione delle temperature in un corpo in certe condizioni) “esplora” il corrispondente spazio di tutte le distribuzioni pensabili alla ricerca di quella che veramente si attua, con un atteggiamento mentale e con degli strumenti geometrici spesso *analoghi a quelli usuali nell’ ordinario spazio fisico tridimensionale*.

La grande opera dei matematici del XX secolo è stata precisamente quella di studiare la struttura geometrica di tali spazi, di vedere che in questi spazi i cui elementi sono funzioni, si possono trasferire molti concetti, come quello di “geodetica”, o quello di “linea di livello”, propri della geometria elementare.[7]

Questo brano ci porta a fare almeno un cenno ad un argomento che era impossibile evitare dato che De Giorgi ne era un appassionto cultore: il “calcolo delle variazioni”. Vi sono molti problemi, per esempio del tipo di quelli appena citati, che sono “variazionali” . Si tratta di problemi che possono

[7] ibidem

essere inquadrati introducendo opportuni spazi di funzioni nei quali, *come su una carta geografica, si trovano i monti e le vallate*: le vette dei monti, i punti più bassi delle valli ed anche i punti di "sella", e cioè i "passi" che mettono in comunicazione due valli vicine, *sono proprio le funzioni che risolvono l' equazione* associata al problema. E le analogie si possono moltiplicare. Insomma l' uso della nostra comune esperienza nell' affrontare un problema in un opportuno spazio di funzione è di una efficacia ed anche di una bellezza estetica che stupiscono e meravigliano.

Il teorema di Gödel: l' "incompletezza" dei nostri ragionamenti "formali".

Vorrei fare ancora un solo passo nella breve "esplorazione" di questo universo logico nascosto, che ci riserva infinite sorprese, citandone un' altra fondamentale proprietà: potremmo dire che *questo universo non ha confini*. Credo infatti che così si possa interpretare una scoperta decisiva della logica matematica, la disciplina che studia le basi stesse del ragionamento, e precisamente il teorema di "incompletezza" di Kurt Gödel[8] (1906-1978). Questo teorema *mette in discussione la nostra capacità di fondare in modo "formalmente" sicuro i nostri ragionamenti*. De Giorgi lo citava spesso, cercando di metterne in evidenza la grandissima portata filosofica.

Per intuire qualcosa di questi bellissimi studi, possiamo fare un rapido cenno ai procedimenti "formali" e agli "assiomi" fondamentali della matematica. Devo premettere che la logica matematica non è la mia materia; la mia disinvoltura intende solo incoraggiare la discussione su un argomento difficile ma di grande interesse culturale.

Negli ultimi anni del secolo scorso, con le ricerche sui fondamenti della matematica, erano state incontrate sensazionali "antinomie", e cioè enunciazioni contraddittorie, come quella scoperta nel 1899 da Georg Cantor (1845-1918) sugli insiemi con infiniti oggetti, che avevano mostrato come non ci si può affidare del tutto all'intuizione nemmeno nelle nozioni matematiche apparentemente più elementari. Per rendere "sicuri" i loro procedimenti alcuni matematici si impegnarono nella loro "formalizzazione". Si era infatti scoperto che si può introdurre un certo numero di simboli logici in modo tale che i ragionamenti matematici possano essere interamente espressi mediante sequenze di tali simboli e con una proprietà decisiva: la correttezza di un ragionamento corrisponde al fatto che la sequenza che lo esprime obbedisce a precise *regole formali, indipendentemente* dalla nostra interpretazione del significato concreto del procedimento in questione, e dalle nostre intuizioni al riguardo. Si pensi, per analogia, al calcolo aritmetico, che è corretto se obbedisce alle regole della aritmetica elementare, indipendentemente dai particolari oggetti ai quali di volta in volta viene applicato (caramelle, chili di mele, litri di carburante, eccetera).

[8]Vedi ad es. PAUL J. COHEN, *La teoria degli insiemi e l' ipotesi del continuo,* Feltrinelli.

A questo punto occorre riflettere sul fatto che qualsiasi sistema logico, ad esempio la matematica, deve poggiare necessariamente su alcuni "assiomi" iniziali dai quali partire: dati per buoni quelli, e cioè fissati chiaramente gli oggetti e le regole con cui possono essere maneggiati, da lì in poi si può procedere in modo "rigoroso". Si può dire che la celebre antinomia sugli insiemi[9] trovata nel 1902 da Bertrand Russel (1872-1970) mostrò che, *nonostante la formalizzazione dei procedimenti logici*, la stessa nozione di "insieme" di oggetti non poteva essere lasciata all' intuizione, per quanto essa sembri elementare, ma che era necessario regolarne l' uso mediante opportuni assiomi "iniziali". Di importanza fondamentale fu l' introduzione nel 1908, del sistema di assiomi[10] di Ernst F. F. Zermelo (1871-1953), che evita tutte le antinomie note.

Si diffuse così la fondata speranza che "formalizzazione" e "assiomatizzazione" avrebbero risolto ogni problema realizzando finalmente in modo compiuto il mito della "certezza matematica".

Ma si poneva, naturalmente, un problema essenziale: è possibile essere sicuri che un giorno non vengano trovate, magari dopo un numero enorme di passaggi, nuove antinomie? Più precisamente, è possibile dimostrare in modo *formale*, e quindi "ineccepibile", che non è possibile dedurre dagli assiomi due proposizioni contraddittorie? Attorno a questo problema si accanirono le ricerche all' inizio del secolo, con la fiducia di molti, mi pare, di poter rispondere positivamente al quesito. Ma nel 1930 Kurt Gödel dimostrò il contrario, lasciando di sale un sacco di studiosi.

Approssimativamente il teorema di Gödel dice che, dato un qualunque sistema logico che contenga almeno l' aritmetica (insomma i numeri interi), non è possibile dimostrare *dal suo interno* che esso non è contraddittorio. Per valutarne la non contraddittorietà, occorre ambientarsi in un più ampio sistema di assiomi, ma allora anche per quest' ultimo si ripropone il problema, e siamo daccapo.

È chiaro che questo teorema ha una importanza enorme, e che, in particolare, diventa essenziale un "atto di fiducia" iniziale dei matematici nella "ragionevolezza" del sistema di assiomi di base. Devo anche dire che questa "incertezza" aggiunge maggior sapore alla ricerca, perché le scelte fondamentali non sono razionalmente assicurate ma sono un "rischio" che riguarda la nostra responsabilità e che decidiamo di correre facendo anche ricorso all' "intuizione", al "buon senso", al "senso dell'armonia", insomma a tutte le nostre virtù "sapienziali", per usare un termine assai caro a De Giorgi.

Parlando con De Giorgi del risultato di Gödel, una volta dissi che esso mette in evidenza un limite della mente umana. Egli non fu d'accordo sul punto di vista. Non ricordo bene le sue parole esatte, ma grosso modo mi disse che quel teorema mostra non che la nostra ragione ha un limite ma

[9]Vedi ad es. R. COURANT E H. ROBBINS, *Che cos' è la Matematica,* Boringhieri
[10]Vedi ad es. PAUL J. COHEN, cit.

piuttosto che *è l'universo che noi esploriamo che non ha limite*: quando cerchiamo di arrivare ai suoi confini, troviamo che essi sono spostati più in là, all' infinito. Mi rendo conto che sto parlando di questo Universo come se esso "esistesse" davvero. Devo però dire che se alcuni matematici ritengono che gli enti matematici abbiano una qualche forma di esistenza, altri pensano che la matematica si *riduca* alle pure formule costituite da quelle sequenze di simboli di cui abbiamo parlato. Intorno a questo profondo problema filosofico le posizioni sono molto variegate. De Giorgi, che dava estrema importanza ai contenuti "reali" della matematica, riteneva che il confronto fra i diversi punti di vista sul problema fosse fonte di idee preziose e interessanti. Egli citava spesso una frase tratta dal quinto atto dell'Amleto di Shakespeare:

> *Vi sono pi cose in cielo e in terra, Orazio, che non ne sogni la tua filosofia*.