

ARTICOLO QUARTO

« Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli strumenti elementari: contributo della geometria analitica » di GUIDO CASTELNUOVO a Roma ⁽¹⁾.

Nel corso del secolo XIX l'interesse dei geometri fu più volte attratto dall'esame della possibilità di risolvere una determinata classe di problemi geometrici, algebrici, od analitici con mezzi prestabiliti.

La importanza di siffatte ricerche fu ampiamente dimostrata dalle risposte esaurienti che furon date a questioni, che da lungo tempo avevano invano affaticato la mente degli scienziati più insigni.

Fu l'algebra che per prima entrò in quest'ordine di idee, collo studio delle equazioni risolubili per radicali. Le scoperte di cui si arricchì la teoria delle equazioni per merito di GAUSS, ABEL, e sopra tutti di GALOIS, gettarono viva luce sopra i rami più svariati delle matematiche. E la stessa geometria elementare, che era rimasta quasi immobile al punto in cui l'avevano portata i geometri greci, risentì il contraccolpo dei progressi dell'algebra. Ricorrendo infatti al sussidio della geometria analitica, si ripresero in esame alcuni problemi famosi che sempre aspettavano una soluzione, e si mostrò in modo sicuro come fosse inutile cercarla per la via battuta fino allora, poichè quei problemi non erano risolubili cogli strumenti tradizionali, riga e compasso. E si riuscì d'altra parte a risolvere coi mezzi della geometria elementare altri

⁽¹⁾ In questo articolo il prof. CASTELNUOVO ha gentilmente acconsentito ad esporre, nei nostri *Collectanea*, alcuni argomenti accennati all'Università di Roma, nelle sue lezioni di geometria proiettiva e analitica.

(Nota di F. E.)

problemi (iscrizione nel cerchio di certi poligoni regolari), che i geometri greci certamente ritenevano insolubili.

È merito adunque di due scienze riunite, l'algebra e la geometria analitica, di aver chiuso in modo definitivo dopo venti secoli di ricerche, la questione della risolubilità dei problemi geometrici mediante la riga ed il compasso.

L'esame dei problemi geometrici che si possono risolvere colla riga e col compasso, o più generalmente con determinati strumenti, comporta appunto due stadi, l'uno di pertinenza della geometria analitica, l'altro dell'algebra (o dell'analisi). Infatti occorre esaminare anzitutto quale effetto produca sopra una figura geometrica una costruzione eseguita mediante un determinato strumento. E poichè, col mezzo della geometria analitica, ogni operazione geometrica trova riscontro in una operazione analitica, si dovrà ricercare *quale sia la operazione analitica a cui equivale una costruzione eseguita con un determinato strumento (riga, compasso....)*. Poi, quando si sia risposto a questa prima questione, rimane da fare un'altra ricerca, che appartiene all'algebra o all'analisi; si tratta di esaminare se *ciascuna delle equazioni a cui conduce un problema proposto, trattato colla geometria analitica, si possa risolvere colla detta operazione analitica, applicata una o più volte*; giacchè questa evidentemente è condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema geometrico sia risolubile collo strumento prefisso. Ora, delle due questioni qui proposte, la prima non presenta, a prima vista, nessuna difficoltà, mentre la seconda può esigere il soccorso delle teorie analitiche più elevate. Ciò spiega perchè tutti gli scrittori ⁽¹⁾ che si occuparono dell'argomento qui trattato, siano stati attratti dal problema algebrico, e si siano limitati, per quanto riguarda la parte geometrica, ad enunciare un risultato che sembra evidente: « la riga permette di risolvere ogni problema geometrico che dipenda da una o più equazioni di primo grado; il compasso, aggiunto alla riga, dà la risoluzione dei problemi che dipendono da equazioni di secondo grado, od anche da equazioni di grado superiore, le quali però siano risolubili mediante risoluzione di successive equazioni quadratiche ».

(1) Citerò, tra i più noti, i due libri del PETERSEN: *Metodi e teorie per la risoluzione dei problemi* e *Teoria delle equazioni algebriche*, e l'opuscolo del KLEIN: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*.

Ora, quando si esamini attentamente questo enunciato, si scorge che esso presuppone una serie di nozioni sottintese e mal precisate, trascurando le quali sarebbe facile cadere in errori grossolani. D'altra parte quelle nozioni si riattaccano così strettamente ad una teoria importantissima dell'algebra moderna, la teoria dei *campi di razionalità*, che val la pena di esporle in modo diffuso.

È appunto quello che io mi propongo di fare nel presente articolo. Trattandosi di argomento elementare, cercherò che elementare sia pure l'esposizione; non supporrò noti perciò nel lettore che i principî della geometria elementare e qualche nozione semplicissima di geometria proiettiva. Anzi per ridurre al minimo le cognizioni di quest'ultima scienza di cui si abbisogna, tratterò varie questioni sotto forma metrica per dedurre poi, col mezzo della proiezione centrale, risultati proiettivi, seguendo così una via che non è la migliore sotto l'aspetto teorico, ma è certo preferibile dal punto di vista didattico. Quanto all'ordine tenuto in questo articolo, dirò che tratto, in una prima parte, della *Geometria della riga*, occupandomi anzitutto delle costruzioni sopra una retta data tracciata in un piano ausiliario, il quale serve solo per le operazioni grafiche, poi delle costruzioni sopra un piano dato. In una seconda parte studio le costruzioni mediante *riga e compasso*, ed accenno a qualche strumento che può in parte o in tutto sostituire quest'ultimo.

Avverto ancora che ricercando un metodo *generale*, il quale permetta di risolvere con determinati strumenti ogni problema risolubile con quei mezzi, debbo necessariamente trascurare la semplicità e la eleganza della costruzione; doti queste che si possono raggiungere solo coll'esaminare uno alla volta i problemi da risolvere.

I.

§ 1. **Operazioni che possono eseguirsi mediante la riga sui segmenti di una retta.** — Premetto una osservazione semplicissima che serve a giustificare le costruzioni seguenti.

Siano r, s due rette parallele ⁽¹⁾; sopra una di queste s si

(1) Il lettore è pregato di tracciare le figure, tutte semplici, di cui si parla in questo articolo.

fissi un segmento arbitrario, e lo si proietti sopra r da due punti distinti T, T' . Si otterranno così due segmenti di r . Ora si dimostra subito che *il rapporto tra i due segmenti proiezioni non dipende dal segmento scelto sopra s* , ma dipende solo dalla posizione dei centri di proiezione T, T' (è precisamente uguale alla espressione $\frac{Tr}{Ts} : \frac{T'r}{T's}$, dove Tr indica la distanza di T dalla retta r ecc.). In particolare i due segmenti proiezioni risultano uguali, se la retta TT' che congiunge i due centri è parallela ad r ed s .

Ciò premesso, partiamo da una retta r , sulla quale vogliamo eseguire alcune costruzioni mediante figure tracciate sopra un piano ausiliario passante per essa. Occupandoci per ora di operazioni metriche sopra i segmenti di r , sarà indispensabile adoperare il punto all'infinito della retta r . Per definire graficamente questo punto, supporremo tracciato nel nostro piano una retta ausiliaria s parallela ad r . Sappiamo allora ⁽¹⁾ che è possibile costruire nel piano, *mediante la sola riga*, la retta che passa per un punto dato ed è parallela ad r . Anzi noi dobbiamo riguardare una siffatta costruzione come equivalente a quella, mediante cui si congiunge un punto del piano con un punto qualsiasi di r .

Partendo da questa osservazione, noi siamo in grado di risolvere alcuni problemi fondamentali, valendoci della sola riga e della retta ausiliaria s parallela alla retta data r .

1) *Dato un segmento AB sopra r , costruire sulla r un segmento $A'B' = AB$, di cui un estremo A' o B' cada in un punto assegnato.*

Si assuma ad arbitrio, fuori di r e di s , un punto ausiliario T , per cui si conduca la retta t parallela ad r ed s , e sia T' un nuovo punto di t . Ora si proietti il segmento AB da T sopra s in A_0B_0 , e poi si proietti di nuovo A_0B_0 da T' sopra r in $A'B'$. Sarà allora

$$A'B' = AB.$$

È chiaro inoltre che si potrà sempre fissare il punto T' sopra t in guisa che A' oppure B' sia un punto prefisso di r .

2) *Dati due segmenti sopra r , costruire un terzo segmento*

⁽¹⁾ Vedi art. 3.

che sia uguale alla loro somma o alla loro differenza. Basta applicare la costruzione 1) al secondo segmento dato.

In generale, dati sopra r più segmenti, i cui valori (rispetto ad una data unità di lunghezza, e tenuto conto del verso positivo scelto su r) indicheremo con a, b, c, \dots , si potrà costruire sopra r un segmento di lunghezza $x = \pm a \pm b \pm c \pm \dots$; in particolare $x = na$ per n intero; si potrà dunque eseguire l'*addizione algebrica dei segmenti*.

3) *Dati sopra r tre segmenti, costruirvi un segmento che sia quarto proporzionale dopo quelli.*

Siano $AB, A'B, CD$ i tre segmenti. Scelto, come sopra, il punto ausiliario T , si proiettino da questo i segmenti AB e CD sulla retta s : indichiamo con A_0B_0 e C_0D_0 le proiezioni. Si costruisca ora quel punto T' da cui A_0B_0 vien proiettato in $A'B'$; dallo stesso punto il segmento C_0D_0 verrà proiettato in un segmento $C'D'$ di r , tale che

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Detti a, b, c, x i valori dei quattro segmenti, rispetto ad una unità di lunghezza arbitraria, sarà $x = \frac{bc}{a}$; e quindi se il primo segmento si sceglie come unità ($a = 1$), allora $x = bc$; se invece il terzo segmento si sceglie come unità ($c = 1$), allora $x = \frac{b}{a}$. Ne viene che la operazione 3) può considerarsi, secondo i casi, come *moltiplicazione* o *divisione* dei segmenti, ricordando che il risultato dipende dall'unità di misura, a differenza di ciò che succede nell'addizione.

Si osservi inoltre che se $a = nb$, dove n è intero, (operazione 2)) si ottiene $x = \frac{c}{n}$, risultato indipendente dall'unità di lunghezza e dal valore di a ; ricorrendo ancora all'operazione 2), si può adunque costruire, dato il segmento c , un segmento di valore $x = \frac{m}{n}c$, dove m ed n sono due numeri interi.

In breve, dati sopra una retta più segmenti, noi possiamo, mediante costruzioni geometriche della specie indicata, seguire graficamente ogni serie di operazioni *razionali* (addizione algebrica, moltiplicazione algebrica), in numero finito, che venga

eseguita sui valori dei segmenti; possiamo costruire ogni espressione razionale formata coi valori dei dati segmenti. Volendo enunciare in forma più precisa il risultato, diremo:

Siano dati sopra una retta uno o più segmenti (in numero finito), uno dei quali si assume come unità di lunghezza, mentre gli altri, se esistono, avranno certi valori a, b, c, \dots ; sia tracciata inoltre una parallela alla retta primitiva. Allora si può, servendosi della sola riga, costruire sulla prima retta ogni segmento, il cui valore si ottenga mediante operazioni razionali applicate alle quantità $1, a, b, c, \dots$ ⁽¹⁾.

La costruzione si eseguisce sopra un piano ausiliario, del quale si adoperano due elementi ausiliari (tutti gli altri rimanendo determinati da questi e dai dati): precisamente la parallela suddetta ed un punto T fuori di questa e della retta data.

§ 2. **Digressione relativa ai campi di razionalità.** — Noi vogliamo enunciare il nostro risultato sotto altra forma, introducendo il concetto moderno di *campo di razionalità*. Giova perciò fare qui una digressione per fissarne nettamente il senso.

⁽¹⁾ L'aver scelto uno dei segmenti dati come unità di lunghezza ci permette di costruire ogni espressione $x = R(a, b, c, \dots)$, dove R è simbolo di funzione razionale a coefficienti razionali, senza badare alla condizione di *omogeneità* che si presenta invece quando la unità di lunghezza è scelta diversamente. Ecco in che consiste la detta condizione. Misuriamo i segmenti che sinora avevano i valori $1, a, b, c, \dots, x$ con una nuova unità, e diciamo $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \xi$ i nuovi valori dei segmenti stessi; sarà allora

$$a = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad b = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \text{ecc.}$$

L'antica espressione da costruire diventa con ciò

$$\frac{x}{\lambda} = R\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}, \dots\right);$$

e quindi

$$x = \lambda R\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}, \dots\right)$$

sarà il valore del segmento richiesto, espresso mediante una *funzione razionale ed omogenea, col grado di omogeneità 1*, delle quantità date $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$. Ciò si verifica subito notando che se le dette quantità vengono moltiplicate per un parametro arbitrario t , tutto il secondo membro dell'uguaglianza risulta moltiplicato per t^1 .

Si dice *campo di razionalità* un insieme di numeri, il quale contenga ogni numero che si possa ottenere dai numeri stessi mediante le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Il più semplice campo di razionalità è l'insieme di tutti i numeri razionali, *campo assoluto di razionalità*, il quale può riguardarsi come ottenuto dall'unità, operando su questa mediante le operazioni razionali, e perciò si suole indicare con [1]. Ogni altro campo contiene il campo assoluto, poichè se il primo campo contiene una quantità a , esso contiene pure $\frac{a}{a} = 1$.

Un campo di razionalità dato *si estende* o *si amplia*, quando ai numeri che lo compongono *si aggrega* o *si aggiunga* un numero che non ne faccia parte: il nuovo campo conterrà allora tutti i risultati delle operazioni razionali eseguite sopra i numeri del campo primitivo e sopra il numero aggiunto. Così se partiamo dal campo assoluto [1], composto di tutti i numeri razionali, e vi aggiungiamo un irrazionale a , otteniamo un nuovo campo più ampio che potrà indicarsi con [1, a] (od anche con [a]). E di qua mediante successive aggiunte, potremo ottenere i campi [1, a , b] (ossia [a , b]), ecc.

Perveniamo così al concetto di campo di razionalità definito da una *base* [1, a , b ,...] composta di un numero finito di quantità; un siffatto campo è costituito da ogni quantità che si ottenga dalle primitive mediante un numero indeterminato, ma finito, di operazioni razionali. Naturalmente non ogni campo di razionalità possiede una base come mostra l'esempio del campo formato da tutti i numeri reali (razionali e irrazionali).

Giova notare pel seguito che un campo di razionalità definito da una base [1, a , b ,...] può ampliarsi, non soltanto mediante l'aggiunta di una quantità estranea al campo, ma pure mediante *l'aggiunta di una determinata operazione irrazionale* Ω ; intendendosi allora che il nuovo campo è formato da ogni quantità che si ottenga dalle quantità date 1, a , b ,..., mediante un numero indeterminato, ma finito, di operazioni razionali e di operazioni Ω . Così appunto nel seguito dovremo considerare il caso che Ω sia la estrazione di radice quadrata.

Avvertiamo infine, tornando alla definizione di campo di razionalità, che in certe questioni occorre distinguere, tra le quantità che definiscono un campo, quelle che hanno un

valor numerico fisso (*numeri*), e quelle che nel corso della questione possono assumere valori arbitrari (*parametri*). Allora ogni elemento del campo \mathcal{O} è un nuovo *numero* appartenente al campo più ristretto definito dai *numeri dati*, oppure è una funzione razionale dei *parametri* avente per coefficienti numeri del campo più ristretto ora nominato. Così se x è un parametro, il campo $[1, x]$ è costituito dai numeri razionali e dalle funzioni razionali di x a coefficienti razionali.

§ 3. **Altre forme dell'enunciato del § 1.** — Riprendiamo ora in esame il risultato del § 1. Approfittando dei concetti esposti nella digressione, possiamo enunciarlo sotto la forma seguente:

Dati sopra una retta uno o più segmenti, in numero finito, aventi i valori 1, a, b, c...., e segnata una parallela alla retta, si può, coll' aiuto della sola riga, costruire sulla retta ogni segmento, il cui valore appartenga al campo di razionalità [1, a, b, c....].

Supponiamo in particolare che i segmenti dati sopra r abbiano un estremo O comune; allora i numeri (positivi o negativi) 1, a , b , c misurano le distanze degli altri estremi da O , le *ascisse* di quei punti rispetto alla *origine* O ; il punto di ascissa 1 si dirà *punto unità*.

Dunque: *Dati sopra una retta due o più punti, dei quali uno si assume come origine di un sistema di ascisse, un secondo come punto di unità, mentre gli altri avranno le ascisse a, b, c...., segnata inoltre una retta parallela alla data, si può colla sola riga costruire sulla retta primitiva ogni punto, la cui ascissa appartenga al campo di razionalità [1, a, b, c....].*

§ 4. **Enunciato proiettivo delle operazioni che la riga permette di eseguire sopra una retta.** — Si può rilevare che nelle costruzioni precedenti interviene sempre l'uso di una retta ausiliaria s parallela alla retta data r . Ora è naturale di chiedere quali costruzioni permetta di eseguir la sola riga, quando si abbandoni l'uso della parallela nominata. Con ciò si viene a far astrazione dal punto all'infinito della retta r , e si passa quindi dalle questioni di natura *metrica* alle questioni di natura *proiettiva*. Non occorre però ritornare sul cammino già percorso per ottenere nuovi risultati, ma basta trasformare il risultato metrico del § 3 mediante il metodo delle proiezioni, per aver subito un risultato proiettivo.

Riprendiamo perciò la retta r sinora considerata, e il piano π per essa, sopra cui si operava. Sia π' un nuovo piano qualsiasi. Proiettiamo ora la figura costruttiva appartenente a π sopra π' da un punto S , che non appartenga nè a π , nè a π' . Otterremo su π' una nuova figura che conterrà tanti punti e rette quante la iniziale; e punti e rette, per quel che riguarda la reciproca posizione, saranno disposti nello stesso modo nelle due figure; colla sola avvertenza che a rette parallele della prima (concorrenti in un punto all'infinito) corrispondano generalmente nella seconda figura rette secantisi in un punto proprio. Esaminiamo in particolare che cosa avvenga dei punti di r e dei punti corrispondenti sulla retta proiezione r' . Sopra r era fissato un sistema di ascisse avente una origine O e un punto unità U . Se x è l'ascissa di un punto qualsiasi M di r , sarà

$$x = \frac{OM}{OU}.$$

Ora noi possiamo porre questa espressione sotto forma di *doppio rapporto* (o *rapporto anarmonico*) di quattro punti, purchè introduciamo il punto all'infinito X_∞ della retta r . Infatti è noto che

$$x = \frac{OM}{OU} = (MUOX_\infty) = (X_\infty OUM),$$

dove i simboli in parentesi indicano doppi rapporti dei punti nominati.

Se ora designiamo con X' , O' , U' , M' le proiezioni sopra la retta r' dei punti X_∞ , O , U , M di r , avremo per la notissima proprietà del doppio rapporto,

$$(X'O'U'M) = x,$$

dove per definizione è

$$(X'O'U'M) = \frac{X'U'}{O'U'} \cdot \frac{X'M'}{O'M'}.$$

Ricordo qui che il doppio rapporto x formato da un punto M' , variabile sopra una retta, con tre punti fissi di questo X' , O' , U' , prende il nome di *coordinata proiettiva* di M' rispetto ai *punti fondamentali* X' , O' , U' (i quali, tenendo conto delle loro coordinate $= \infty, 0, 1$, diconsi ordinatamente punto

infinito, punto zero, e punto unità); i tre punti fondamentali possono occupare posizioni arbitrarie sulla retta.

Con ciò abbiamo visto che l'ascissa di un punto generico M di r uguaglia la coordinata proiettiva del punto corrispondente M' di r' , riferito a convenienti punti fondamentali. In forma concisa: « un sistema di coordinate ascisse sopra una retta dà mediante proiezione un sistema di coordinate proiettive sopra un'altra retta »; ed è vera anche l'inversa, purchè si scelga il centro di proiezione in modo conveniente.

La digressione che precede ci permette di trasformar subito l'enunciato del § 3 sotto la seguente forma proiettiva:

Dati sopra una retta tre o più punti, dei quali tre si assumono come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, mentre gli altri avranno certe coordinate a, b, c, \dots , si può, mediante la sola riga, costruire sulla retta ogni altro punto, la cui coordinata appartenga al campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$.

Vedremo poi che il teorema, insieme alle proposizioni metriche da cui segue (§§ 1, 3), può essere invertito.

Naturalmente nella costruzione si dovranno adoperare alcuni elementi ausiliari del piano su cui si opera; ma gli elementi ausiliari possono sempre ridursi ad una retta arbitraria passante per uno dei punti fondamentali, e ad un punto arbitrario fuori di questa retta e della retta data, restando poi completamente determinata la costruzione (cfr. § 1). Comunque si operi, del resto, gli elementi ausiliari non lasciano traccia nel risultato, il quale è indipendente da quelli.

§ 5. Le costruzioni metriche di planimetria eseguibili colla riga quando sia dato un parallelogramma. — Ora siamo in grado di trattare la questione di geometria piana analoga a quella risolta sulla punteggiata. Seguendo lo stesso ordine, partiremo da considerazioni metriche per giungere poi a un risultato di carattere proiettivo.

Siano date sopra un piano due coppie di rette parallele limitanti un parallelogramma. Indichiamo con O un vertice di questo, con x, y le due rette uscenti da O , con U il vertice del parallelogramma opposto ad O . Possiamo allora stabilire un sistema di coordinate cartesiane, di cui O sia l'origine, x ed y gli assi, U il punto unità (di coordinate 1, 1). Con quest'ultima scelta veniamo a dire che se U_x, U_y sono i due

rimanenti vertici del parallelogramma, appartenenti rispettivamente ad x e ad y , noi assumiamo il segmento OU_x come unità di misura delle ascisse (cioè dei segmenti aventi la direzione di x), ed il segmento OU_y come unità di misura delle ordinate (cioè dei segmenti aventi la direzione di y). Le due unità possono essere distinte od uguali; nel primo caso occorre ricordare che due segmenti l'uno sopra x , l'altro sopra y , aventi lo stesso valore *numerico*, non sono *geometricamente uguali*; nel secondo caso, quando il parallelogramma è equilatero, l'avvertenza non ha più luogo; a questo secondo caso può riferirsi, se crede, il lettore.

Notiamo subito che la retta OU ha l'equazione $x = y$; se da un punto di essa si conducono le parallele ad x, y fino ad incontrare gli assi y, x (operazione che si può eseguire colla sola riga), si ottengono su questi, a partire da O , due segmenti che hanno gli stessi valori. È adunque possibile, dato un segmento sopra x , di costruire colla sola riga un segmento numericamente uguale sopra y ; e dato un punto di coordinate a, b , è possibile costruire colla sola riga il punto di coordinate b, a .

Ciò premesso, siano dati nel nostro piano xy il punto U , ed eventualmente altri punti in numero finito; valutiamo le coordinate di tutti questi, ed indichiamone i valori promiscuamente con $1, a, b, c, \dots$. Allora noi possiamo costruire colla sola riga, sopra ciascuno dei due assi, punti aventi da O distanze misurate da $1, a, b, c, \dots$, rispetto alle unità di misura convenute. Possiamo in conseguenza, in virtù del teorema del § 3, costruire colla sola riga, sopra ciascun asse, un punto la cui distanza da O abbia un valore x , oppure y , appartenente al campo di razionalità $K = [1, a, b, c, \dots]$; e quindi possiamo nel piano costruire il punto (x, y) . Dunque:

Dato in un piano un parallelogramma, di cui due lati si assumono come assi ed un vertice come punto unità di un sistema di coordinate cartesiane, dati eventualmente altri punti di cui le coordinate promiscuamente abbiano i valori a, b, c, \dots , si può mediante la sola riga costruire ogni punto del piano, le cui coordinate appartengano al campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$.

È lecito adoperare nella costruzione punti ausiliari, ma non è necessario, e basta ricorrere ai dati, giacchè ad es. per la costruzione di un segmento sopra x basta (§ 3) la cono-

scenza di una retta (lato del parallelogramma) parallela ad x e di un punto ulteriore (centro del parallelogramma).

Qui è notevole il fatto che il teorema può invertirsi nel seguente modo:

Ogni punto a cui si perviene mediante una costruzione della specie indicata, ha coordinate che appartengono al nominato campo di razionalità K , dal quale sarà dunque impossibile uscire. La dimostrazione si fonda sulle prime nozioni di geometria analitica. Infatti la costruzione si limita a congiungere con una retta due punti dati, o già ottenuti mediante costruzioni anteriori, e a determinare l'intersezione di due rette ottenute nel detto modo. Ora se due punti hanno coordinate appartenenti al nostro campo di razionalità K , la retta congiungente avrà una equazione $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, di cui i coefficienti α, β, γ (o, se si vuole, i loro rapporti) apparterranno al campo stesso; e se due rette $\alpha x + \dots = 0, \alpha' x + \dots = 0$ hanno coefficienti che appartengono al detto campo, le coordinate x, y del punto comune certo apparterranno al campo stesso. Quindi ecc.

Osservazione. Nel ragionamento qui fatto si suppone che si operi esclusivamente sui punti dati, senza intervento di elementi estranei. Ma la conclusione vale anche quando nella costruzione si introducano punti *ausiliari*, purchè questi abbiano il vero carattere dei punti *ausiliari*, quello cioè di potersi assumere *ad arbitrio* (sia nel piano, sia sopra rette date), e di *non influire in nessun modo sul risultato della costruzione*, il quale deve essere assolutamente indipendente da quelli. Sia infatti P , di coordinate m, n , un punto ausiliario che si possa prendere o completamente ad arbitrio, o ad arbitrio sopra una retta della figura. E sia (x, y) il punto risultante da una costruzione colla riga, in cui si adopera anche P , in modo però che il risultato (x, y) non dipenda da P . Il ragionamento precedente prova soltanto che x ed y apparterranno al campo di razionalità

$$K' = [1, a, b, c, \dots, m, n].$$

Ma per l'arbitrio nella scelta di P si può sempre fare in modo che m, n appartengano al campo di razionalità primitivo K ; ciò è chiaro se P è completamente arbitrario; e risulta pur subito anche se P è soggetto alla sola condizione di appartenere ad una retta $\alpha x + \dots = 0$ della figura, giacchè, scelto

allora m entro K , risulterà n mediante operazioni razionali da eseguirsi sopra m e sopra numeri di K . Fatta questa scelta per P , il campo K' viene a coincidere con K , e quindi sempre il punto costruito x, y ha coordinate appartenenti a K ⁽¹⁾.

§ 6. **Le costruzioni grafiche di planimetria eseguibili colla riga.** — Trasformiamo la proposizione del paragrafo precedente, proiettando il piano π che contiene la nostra costruzione sopra un nuovo piano π' ; il centro di proiezione S sia scelto ad arbitrio fuori di π e π' . Otterremo così un risultato avente carattere proiettivo.

Per enunciarlo dobbiamo esaminare come si trasformi nella detta operazione il sistema di coordinate cartesiane considerato su π . Questo sistema è definito dagli assi x, y di cui O è l'intersezione, e di cui X_∞, Y_∞ siano i punti all'infinito, inoltre dal punto unità U . Fissato su π un punto M qualsiasi, cerchiamo di scriverne le coordinate x, y sotto forma di doppi rapporti. Notiamo perciò che, volendo l'ascissa x di M , basta proiettare i punti U ed M da Y_∞ sull'asse x ; otterremo così i punti U_x, M_x e sarà (cfr. § 4):

$$x = \frac{OM_x}{OU_x} = (X_\infty OU_x M_x) = Y_\infty(X_\infty OUM),$$

dove coll'ultimo simbolo indichiamo il doppio rapporto delle quattro rette che uniscono il punto Y_∞ coi punti segnati tra parentesi. Analogamente si avrà

$$y = X_\infty(Y_\infty OUM).$$

Ora se proiettiamo i punti $O, X_\infty, Y_\infty, \dots$ del piano π sopra un piano π' da un centro qualsiasi, e chiamiamo O', X', Y, \dots i punti proiezioni (punti generalmente propri), si avrà subito

$$x = Y(X'O'U'M'), \quad y = X'(Y'O'U'M').$$

Qui conviene rammentare che, dato sopra un piano π' un triangolo qualsiasi $O'X'Y'$ ed un punto U' non appartenente a nessun lato, in corrispondenza ad ogni punto generico M' del piano rimane pienamente definita una coppia di numeri x, y

⁽¹⁾ Per l'ultima considerazione cfr. le *Lezioni di algebra complementare* del prof. CAPELLI (1895) pag. 429.

mediante i valori dei due ultimi doppi rapporti; e viceversa, noti x ed y è individuato il punto M (fatta eccezione soltanto per i valori $x = \pm \infty$, $y = \pm \infty$, e per i punti del lato $X'Y'$, ai quali elementi occorrerebbe applicare una nota convenzione che è inutile qui specificare). I due numeri x , y , così associati ad M , si sogliono dire *coordinate proiettive* di M rispetto al *triangolo fondamentale* $O'X'Y'$ ed al *punto unità* U' , o, brevemente, rispetto ai *quattro punti fondamentali* $O'X'Y'U'$. I quattro punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive possono scegliersi comunque, purchè mai tre di essi siano allineati.

Riassumendo la nostra osservazione, diremo che le coordinate cartesiane del punto generico M di π coincidono colle coordinate proiettive del punto proiezione M' su π' , riferito a convenienti punti fondamentali. In breve: « un sistema di coordinate cartesiane di un piano dà per proiezione sopra un secondo piano un sistema di coordinate proiettive »; ed è vera anche l'inversa, purchè si scelgano convenientemente centro e piano di proiezione.

In base a questa osservazione, siamo in grado di enunciare subito un risultato proiettivo analogo al teorema metrico del § 4:

Siano dati in un piano quattro o più punti in numero finito, tra cui supponiamo si trovino sempre quattro punti che siano vertici di un quadrangolo; presi questi ultimi come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, e rette a , b , c ,... le coordinate dei punti rimanenti (se esistono), è possibile costruire colla sola riga ogni altro punto, le cui coordinate appartengano al campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$; e viceversa, ogni punto raggiungibile mediante una costruzione determinata da eseguirsi colla sola riga, ha coordinate appartenenti al detto campo. Nella costruzione non occorre (ma è lecito) adoperare punti o rette ausiliarie, che possano assumersi ad arbitrio.

Il risultato che precede può esser anche presentato sotto la forma seguente che ne mette in rilievo tutta l'importanza:

« Siano dati in un piano più punti in numero finito; si congiungano questi a due a due, si determinino le intersezioni delle rette così ottenute, si estenda il gruppo dei punti primitivi aggregandovi i nuovi punti trovati, si operi sul nuovo gruppo come sull'antico, e così si continui all'infinito. Si otterrà in tal guisa una classe di infiniti punti, eccettuato il caso che i punti primitivi siano tutti, o tutti

« meno uno, allineati (eccezione questa che apparisce nell'« enunciato precedente). Si domanda di caratterizzare in qualche modo la classe dei punti così ottenuti, la quale, « come subito si verifica, non comprende tutti i punti del « piano ». La risposta è data dall'ultima proposizione :

« Se tra i punti dati si scelgono quattro, che siano vertici di un quadrangolo, come punti fondamentali di un « sistema di coordinate proiettive, e si chiamano a, b, c, \dots « le coordinate degli altri punti dati, ove esistano, la nostra « classe di punti si compone di tutti quei punti, le cui coordinate appartengono al campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$ ».

Le operazioni geometriche che conducono alla costruzione di una siffatta classe di punti, trovano dunque riscontro nelle operazioni aritmetiche che conducono alla costruzione di un campo di razionalità partendo da una *base* ⁽¹⁾. Il caso più semplice di quattro soli punti, il quale conduce alla classe di tutti i punti aventi le due coordinate razionali, fu considerato la prima volta dal MÖBIUS, che chiamò *rete* quella classe.

§ 7. Quali siano i problemi risolubili colla sola riga. — Ora possiamo rispondere completamente ad una delle questioni fondamentali del nostro scritto :

Quali sono i problemi geometrici che si possono risolvere colla sola riga ?

È chiaro che tanto i *dati*, quanto i *risultati*, dovranno potersi tracciare colla sola riga, e saranno quindi o punti, o rette, in numero finito. Ma per maggiore uniformità ci conviene di ridurci al caso di soli punti, il che può sempre ottenersi, per esempio, nel modo seguente. Fissato un triangolo che abbia i vertici o i lati compresi possibilmente tra gli elementi dati (o, quando non sia possibile, abbia qualche elemento in posizione generica rispetto ai dati), noi potremo sostituire ad ogni retta (che sia data o da costituirsi) la coppia di punti che essa sega sopra due lati del triangolo fondamentale ⁽²⁾. E così il problema si ridurrà sempre ad uno o

⁽¹⁾ La traduzione per dualità piana dell'ultimo risultato, riferendosi a rette anziché a punti, è immediata. Così pure è immediata l'estensione allo spazio.

⁽²⁾ Dal punto di vista analitico ciò equivale a considerare la retta come data dai rapporti di due dei tre coefficienti della sua equazione, al terzo coefficiente, ossia dalle sue due coordinate proiettive.

più problemi del tipo seguente: *Dati più punti, in numero finito, costruire un punto che abbia con quelli date relazioni.* Per tradurre sotto forma analitica il problema, riferiremo i punti dati e il punto incognito ad un sistema di coordinate proiettive, di cui il triangolo nominato sia fondamentale, e di cui il punto unità sia uno dei punti dati, quando ciò sia possibile, o sia un punto generico del piano nel caso opposto. Riguarderemo allora come *date* le coordinate a, b, c, \dots dei punti dati, come *incognite* le coordinate x, y del punto incognito. Se il problema è determinato, le relazioni in esso contenute dovranno tradursi alla fine in due equazioni contenenti l'una x , l'altra y , equazioni che possiamo supporre ridotte alla forma più semplice (spogliate dalle soluzioni estranee, per quanto è possibile). Orbene:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un problema geometrico sia risolubile colla sola riga, è che le equazioni da cui il problema dipende, siano lineari ed abbiano i coefficienti appartenenti al campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$ determinato dai dati. Infatti in questo, ed in questo solo caso, le coordinate incognite x, y apparterranno al detto campo.

In forma concisa: *sono risolubili colla sola riga i problemi geometrici di primo grado e questi soltanto.*

Qui si noti che il risultato è vero, sia quando nella costruzione si adoperano soltanto i punti (o rette) dati, sia anche quando a questi si aggiungano punti (o rette) ausiliari, i quali possano assumersi o completamente ad arbitrio nel piano, o ad arbitrio sopra rette date (o passanti per punti dati se si tratta di rette). Ciò segue dalla *Osservazione* del § 5, dalla quale risulta che coll'aggiungere ai punti dati un punto (o, per dualità, una retta) ausiliario da assumersi ad arbitrio nel modo detto, non si riesce mai ad ampliare effettivamente un campo di razionalità.

Osservazione. Piuttosto è necessario che ci fermiamo a considerare i problemi che contengono in modo più o meno esplicito nozioni metriche.

Supponiamo anzitutto che i dati siano soltanto punti *propri* (cioè non all'infinito), tra i quali non passi nessuna relazione metrica particolare (all'infuori, si intende, delle relazioni che traducono caratteri grafici, allineamenti ecc.); fra i dati dunque non compariranno nè lunghezze di segmenti, nè valori di angoli.... Volendo assumere un sistema di coordi-

nate che sia strettamente collegato coi dati, dovremo riferirci a coordinate proiettive. Ma allora non saremo in grado di esprimere una relazione metrica (di parallelismo, o segmentaria, o angolare, eccezion fatta per i doppi rapporti) che interceda tra i punti dati e un punto richiesto. Non potremo adunque, non solo risolvere, ma nemmeno porre in equazione un problema *metrico* che si riferisca ai dati. Dunque *non è possibile risolvere colla sola riga un problema che contenga nozioni metriche (parallelismo, valori di segmenti, angoli, aree...), quando i dati siano punti (o rette) tra i quali non passi nessuna relazione metrica prestabilita.*

Che questa impossibilità sia *assoluta*, indipendente cioè da sistemi di coordinate, da metodi analitici, ecc., si può del resto mostrare per la via che qui accenno. Siano dati in un piano π più punti propri $A, B, C...$ non aventi alcuna relazione metrica tra di loro, e sia P un punto a cui si perviene mediante una costruzione colla sola riga eseguita sui dati. Siano $A', B', C'...$ P' le proiezioni dei punti precedenti sopra un piano generico π' da un centro generico. La figura costruttiva in π si proietterà in una figura costruttiva di π' (poichè rette si proiettano in rette...); quindi si potrà dire che la costruzione, la quale conduce da $A, B, C...$ al punto P sopra il piano π , condurrà nel piano π' dai punti $A', B', C'...$ al punto P' . Tanto basta per affermare che le relazioni che legano il punto costruito P ai punti dati $A, B, C...$ hanno carattere proiettivo (e non metrico), cioè non si alterano mediante una proiezione (mentre i caratteri metrici, parallelismo, lunghezze, angoli, ecc. si alterano per proiezione).

Le cose mutano quando i punti dati abbiano relazioni particolari colla retta all'infinito. Così se ad es. il punto A è all'infinito, ed è quindi determinato graficamente mediante due rette parallele, allora, nel fissare il sistema di coordinate, si potrà assumere A come un vertice del triangolo fondamentale, e si potrà quindi esprimere analiticamente il passaggio di una retta per A , si potrà porre in equazione la condizione che una retta richiesta, condotta ad es. per B , sia parallela alle due rette parallele assegnate; dall'esser lineare l'equazione risulta subito che la costruzione della retta domandata può eseguirsi colla sola riga, come è notissimo.

Ma finchè non siano dati (direttamente o indirettamente) altri punti impropri, non si potrà costruire la parallela ad una

retta assegnata avente direzione diversa da A , e il problema corrispondente non si potrà nemmeno porre in equazione.

Se però fosse dato un parallelogramma, si potrebbe adoperare un sistema di coordinate cartesiane (§ 5), e quindi si potrebbe porre in equazione ogni problema che riguardasse questioni di parallelismo, di rapporti di segmenti paralleli, rapporti di aree, ecc....; non ancora i problemi che riguardano l'uguaglianza dei segmenti e degli angoli in posizione generica, la perpendicolarità.... (almeno finchè non sia dato il coseno dell'angolo del parallelogramma).

Si possono invece porre in equazione tutti i problemi metrici, appena si conosca un quadrato, perchè allora si dispone di un sistema cartesiano ortogonale; se la equazione sarà lineare, allora e allora soltanto il problema potrà risolversi colla sola riga ⁽¹⁾.

II.

§ 8. **Quale contributo porti l'aggiunta del compasso alla riga.** — Esaminate così le costruzioni che si possono eseguire colla riga, vediamo ora quale contributo porti l'uso del compasso aggiunto all'uso della riga.

Ci domandiamo dunque come si estenda la classe dei punti costruibili colla riga (partendo da punti dati), quando a quelli si aggiungano tutti i punti raggiungibili mediante costruzioni eseguite col compasso; od anche come si estenda il campo di razionalità $[1, a, b, c, \dots]$ contenente le coordinate dei primi punti, quando si aggiungano le coordinate dei secondi punti.

Poichè il compasso ci permette la costruzione di un angolo retto, anzi di un quadrato, ci converrà riferire i nostri punti ad un sistema di coordinate *cartesiane ortogonali*, e di assumere la stessa unità di misura per le ascisse e per le ordinate. Potremo ad es. scegliere uno dei punti dati O come origine, la retta congiungente O con un altro punto come asse x , e la distanza dei due punti come unità di lunghezza.

Indichiamo con a, b, c, \dots le coordinate dei punti dati, in numero finito; allora sappiamo intanto che mediante la riga

⁽¹⁾ Per la risoluzione effettiva dei più elementari problemi metrici lineari, dato un quadrato (o un parallelogramma e due coppie di direzioni ortogonali), cfr. art. 3.

è costruibile ogni punto, le cui coordinate appartengano al campo di razionalità

$$K = [1, a, b, c, \dots].$$

Sia k un numero positivo qualsiasi del campo K , numero che possiamo riguardare come valore di un segmento noto situato sopra l'asse x . Ora mediante il compasso noi sappiamo costruire sopra x (o sopra y) un segmento la cui lunghezza sia $\sqrt{k} = \sqrt{k \cdot 1}$, giacchè tutto si riduce a costruire la media geometrica tra due segmenti dati aventi le lunghezze k ed 1 . Dunque mediante il compasso noi possiamo ottenere una prima estensione del campo K aggiungendovi la radice quadrata di ogni numero positivo in esso contenuto. Arriveremo così ad un campo di razionalità K' , che potremo a sua volta estendere (interpretando analiticamente le costruzioni tracciate mediante il compasso) coll'aggiungervi la radice quadrata di ogni numero positivo in esso contenuto. E così possiamo continuare all'infinito.

Il campo di razionalità più ristretto che contiene i campi K, K', \dots a cui via via perveniamo, si può rappresentare mediante il simbolo

$$K^{\frac{1}{2}} = [1, a, b, c, \dots]^{\frac{1}{2}},$$

ed è completamente caratterizzato dalle due proprietà seguenti:

1) il campo $K^{\frac{1}{2}}$ contiene le quantità $1, a, b, c, \dots$ in numero finito;

2) esso contiene inoltre ogni quantità reale che si ottenga da quelle applicando un numero indeterminato ma finito di volte le operazioni razionali e le estrazioni di radici quadrate.

Alla condizione 2) si potrebbe anche sostituire la condizione equivalente che: il campo $K^{\frac{1}{2}}$ sia il più ristretto campo contenente le radici reali di ogni equazione quadratica i cui coefficienti appartengano al campo stesso.

In base alle considerazioni suesposte possiamo dunque asserire che, quando si parta da punti in numero finito, le cui coordinate definiscano un campo di razionalità $K = [1, a, b, c, \dots]$, e si operi su quelli mediante riga e compasso, si potrà costruire ogni punto le cui coordinate appartengano al campo $K^{\frac{1}{2}}$.

Ora dico che è pur vera l'inversa: ogni punto a cui si pervenga operando mediante riga e compasso sopra i punti dati, ha coordinate appartenenti al campo di razionalità $K^{\frac{1}{2}}$ nominato. Infatti si parta da una certa classe di punti, per es. da quei punti le cui coordinate appartengono al campo di razionalità K . I nuovi punti che a questi potranno aggiungersi mediante determinate costruzioni da eseguirsi col compasso, si otterranno come intersezioni di una retta e di un cerchio, oppure di due cerchi, che a loro volta saranno individuati dai punti primitivi. Anzi possiamo sempre ridurre al caso di una retta e di un cerchio, perchè quando fossero dati due cerchi

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0, \\x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' &= 0,\end{aligned}$$

al secondo si potrebbe sostituire la retta (asse radicale)

$$(ax + by + c) - (a'x + b'y + c) = 0,$$

che può costruirsi linearmente, partendo dai centri e raggi dei cerchi dati ⁽¹⁾. D'altra parte un cerchio è individuato quando se ne conosca il centro ed il raggio, oppure il centro ed un punto, oppure tre punti; ma gli ultimi due casi si possono subito ridurre al primo con operazioni lineari. Ora se riguardiamo come noti i punti definiti da un certo campo di razionalità K , potremo dire che un cerchio è pienamente determinato quando il centro abbia coordinate α, β appartenenti a K , ed il raggio r sia un numero di K , o sia la distanza di due punti della classe, nel qual caso, se non r , certo r^2 appartiene a K . Comunque, l'equazione del cerchio

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

avrà i coefficienti appartenenti a K . Altrettanto si potrà dire dell'equazione di una retta

$$mx + ny + p = 0$$

definita da due dei nostri punti. Ora la determinazione delle intersezioni della retta e del cerchio si riduce a risolvere il sistema delle due equazioni, e quindi, in sostanza, a risolvere

⁽¹⁾ Cfr. art. 3.

una equazione di secondo grado nella sola x , della quale i coefficienti appartengono a K , per dedurre poi razionalmente y . Dunque le coordinate di ogni punto che possa aggiungersi alla classe primitiva mediante una operazione da eseguirsi col compasso (unita ad operazioni eseguite colla riga), apparterranno certo a quel campo di razionalità K' che si ottiene da K aggiungendovi le radici quadrate di tutti i numeri positivi contenuti in K . Ormai è chiaro come si prosegua quando si operi più volte col compasso, e come si pervenga in conseguenza al campo $K^{\frac{1}{2}}$ sopra definito.

Sicchè possiamo senz'altro enunciare il risultato fondamentale:

Si parta da un numero finito di punti, che riferiti ad assi cartesiani ortogonali abbiano le coordinate 1, a, b, c..., e su quelli si operi mediante costruzioni determinate, da eseguirsi colla riga e col compasso. Ogni punto a cui si perverrà dopo un numero finito di costruzioni, avrà coordinate appartenenti al campo di razionalità $K^{\frac{1}{2}}$, che è generato dai numeri dati 1, a, b, c... quando sopra essi si operi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate da basi positive (in numero finito); e viceversa, ogni punto di cui le coordinate appartengano a $K^{\frac{1}{2}}$, potrà costruirsi mediante la riga ed il compasso.

In breve: colla riga e col compasso si può costruire ogni espressione reale, formata colle quantità date, la quale non contenga altre irrazionalità che estrazioni di radici quadrate.

✕ § 9. Quali problemi possano risolversi colla riga e col compasso. — Il risultato precedente permette subito di rispondere alla domanda: quali sono i problemi che possono risolversi colla riga e col compasso?

Notiamo anzitutto che tanto i dati quanto gli elementi da costruirsi dovranno esser o punti, o rette, o cerchi, in numero finito. Però ad una retta e ad un cerchio si potrà sostituire un certo numero di punti atti a determinare quegli enti, punti che a loro volta siano determinati quando siano noti gli enti stessi; così ad es. ad un cerchio si potrà sostituire il centro ed una intersezione del cerchio colla parallela all'asse x condotta pel centro. Si potrà dunque supporre

che siano dati soltanto punti, e che si ricerchino solo punti. Riferiamo i punti dati e gli incogniti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, che sia legato ai dati nel modo sopra esposto. Siano $1, a, b, c, \dots$ le coordinate dei punti dati, e sia x una coordinata di un punto incognito; il ragionamento che faremo sopra x si ripeterà per ogni altra coordinata di ogni punto incognito. Affinchè il nostro punto incognito possa costruirsi colla riga e col compasso, la quantità x (reale) dovrà potersi calcolare mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate da eseguirsi sui numeri dati $1, a, b, c, \dots$. Uguagliando x ad una espressione formata in tal guisa coi dati, e liberando da irrazionalità, otterremo una equazione algebrica razionale, intera nella x , della quale i coefficienti apparterranno al campo di razionalità $K = [1, a, b, c, \dots]$.

Dunque potremo dire intanto che, traducendo analiticamente le condizioni del problema, ed eseguendo eliminazioni in guisa da ridurre ad una o più equazioni, ciascuna con una sola incognita x, \dots , queste equazioni dovranno essere algebriche e potranno porsi sotto forma razionale intera, in guisa da aver per coefficienti quantità del campo K .

Ma le condizioni qui espresse non saranno generalmente sufficienti; a parte il caso, che ciascuna equazione risulti di grado ≤ 2 , giacchè allora evidentemente il problema potrà risolversi con riga e compasso. Che se una almeno delle dette equazioni risulterà di grado superiore a 2, si esigerà ancora che la radice richiesta di quella equazione possa calcolarsi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate da eseguirsi sui dati, o in altre parole mediante risoluzioni di successive equazioni quadratiche. E la successione di queste potrà sempre pensarsi così ordinata, che la prima equazione quadratica abbia i coefficienti appartenenti al campo K , la seconda equazione abbia i coefficienti nel campo che si ottiene da K mediante aggiunta delle radici della prima equazione, e così via, finchè l'ultima equazione avrà come radice la quantità richiesta, e per coefficienti numeri appartenenti al campo che si ottiene da K coll'aggiunta delle radici di tutte le equazioni quadratiche precedenti. Diremo adunque, riassumendo la parte essenziale, e sottointendendo il resto:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un problema geometrico possa risolversi colla riga e col compasso, è che cia-

scuna delle equazioni da cui il problema dipende sia algebrica razionale intera, con coefficienti appartenenti al campo di razionalità formato coi dati, e che inoltre ciascuna delle dette equazioni sia o di grado ≤ 2 , o risolubile mediante risoluzione di una successione di equazioni di secondo grado formata nel modo esposto.

In forma anche più concisa :

I problemi risolubili colla riga e col compasso sono i problemi di primo e di secondo grado, ed inoltre i problemi di grado superiore, la cui risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di una successione di problemi di grado ≤ 2 .

Osservazione. Anche qui, per non complicar le cose, ho ragionato esclusivamente sui dati e non sugli elementi (punti o rette) ausiliari che può esser utile di introdurre per eseguire la costruzione. Si intende che un elemento, ad es. un punto ausiliario, dovrà potersi assumere ad arbitrio sia in tutto il piano, sia sopra una retta determinata dai dati, sia sopra un cerchio determinato dai dati; e comunque quel punto venga scelto esso non deve influire sul risultato della costruzione. Ma allora, ragionando come nella *Osservazione* del § 5, si vede che è lecito assumere una almeno delle coordinate del punto entro al campo K ; e l'altra coordinata o rientrerà nel campo K , o nel campo $K^{\frac{1}{2}}$ che si ottiene da K coll'aggiunta della estrazione di radice quadrata. E ciò prova che la introduzione del punto ausiliario non permette di uscire dal campo $K^{\frac{1}{2}}$, a cui, come dicemmo, devono appartenere le coordinate del punto incognito, perchè questo possa costruirsi mediante riga o compasso. Sicchè il risultato precedente rimane vero anche se, accanto ai dati, si introducano elementi ausiliari.

§ 10. **Cenno sopra alcuni problemi classici.** — Le considerazioni dell'ultimo paragrafo ci mostrano come la questione di decidere se un determinato problema sia risolubile colla riga e col compasso, possa ricondursi, col mezzo della geometria analitica, alla questione di decidere se certe equazioni sono risolubili introducendo le sole irrazionalità che provengono da estrazioni di radici quadrate. La questione appartiene all'algebra; e l'algebra oggi dispone di mezzi per riconoscere se una determinata equazione *algebraica* sia risolubile nel detto modo.

Valgano gli esempi negativi della trisezione di un angolo dato ω , corrispondente all'equazione

$$4x^3 - 3x - \cos \omega = 0,$$

della duplicazione del cubo ($x^3 - 2 = 0$), e l'esempio positivo della divisione di un cerchio in un numero primo p di parti uguali quando p è della forma $2^n + 1$ (equazione $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$) ⁽¹⁾. Di gran lunga più difficile è in certi casi la questione preliminare di decidere se la equazione da cui dipende il problema sia algebrica o trascendente, giacchè qui manca un metodo generale di trattazione. E così solo pochi anni or sono, nel 1882, fu dimostrato dal LINDEMANN che il problema della rettificazione e quadratura del cerchio è *trascendente*, giacchè π non è radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali (appartenenti al campo di razionalità [1] determinato dalla sola grandezza data, *raggio del cerchio*, che si assume come unità di misura) ⁽²⁾.

Ma noi non possiamo fermarci sopra tali questioni d'indole analitica, senza uscire dai limiti che ci siamo prefissi.

§ 11. **Di alcuni semplici strumenti che possono servire a risolvere problemi geometrici: il trasportatore di segmenti.** — Notiamo piuttosto che le considerazioni esposte sinora possono applicarsi allo studio di altri strumenti geometrici (oltre alla riga ed al compasso), atti a risolvere problemi d'indole più elevata. Ma noi preferiamo di passare in rassegna qualche strumento che può sostituire parzialmente o totalmente il compasso nella risoluzione dei problemi sopra considerati. Cominciamo dal *trasportatore dei segmenti* ⁽³⁾.

Osserviamo perciò che una delle operazioni eseguite più spesso col compasso consiste nel trasportare sopra una retta data, a partire da un punto dato, un segmento assegnato in un'altra posizione del piano; la operazione equivale a determinare l'intersezione di un cerchio dato con una retta *passante pel centro*. Ora una siffatta operazione si eseguisce spesso

(1) Cfr. rispett. gli art. 7 e 5.

(2) Cfr. art. 8.

(3) Cfr. per le osservazioni di questo paragrafo la *Monografia* ormai classica del signor HILBERT: « *Grundlagen der Geometrie* ». Leipzig, Teubner, 1909.

nella pratica anche senza usare il compasso, ma servendosi di una striscia di carta, o di una riga graduata o graduabile, ecc., insomma di uno strumento che in breve chiameremo *trasportatore dei segmenti*. E val la pena di notare che lo strumento può ridursi anche ad una forma più semplice, ad un *segmento trasportabile di lunghezza prefissa* che si potrà assumere come unità di lunghezza (*trasportatore dell'unità*); giacchè trasportata l'unità da una retta r sopra una retta s , si può, con una costruzione di quarta proporzionale (eseguibile colla sola riga), trasportare ogni altro segmento di r sopra s .

Ciò posto, si chiede ora: *col trasportatore dell'unità e colla riga, sono risolvibili tutti quei problemi che possono risolversi col compasso e colla riga? o in caso negativo, quali sono i problemi risolvibili coi primi strumenti?*

Cominciamo a costruire col trasportatore un angolo retto. A tal fine sopra due rette arbitrarie r, s incrociantisi in un punto O , portiamo da una banda e dall'altra di O la unità di lunghezza. Otteniamo così i quattro vertici di un rettangolo, di cui le mediane x, y (costruibili colla riga) sono perpendicolari; sono precisamente le bisettrici dell'angolo rs ⁽¹⁾.

Ora partendo dalle due rette x, y e servendoci della unità di lunghezza, possiamo costruire un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, a cui riferiremo i punti dati di un problema che venga proposto. Sia K il campo di razionalità più ristretto che contiene le coordinate di questi punti. Ricordiamo ora che l'operazione più generale che possiamo eseguire col nostro strumento, consiste nel costruire un segmento uguale all'unità, il quale abbia un estremo in un punto dato (a, b) , e giaccia sopra una retta data

$$y - b = m(x - a) \quad (a, b, m \text{ quantità di } K).$$

L'estremo costruito del segmento avrà coordinate x, y tali che risulti

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = (x - a)\sqrt{1 + m^2} = 1,$$

⁽¹⁾ Si noti a questo proposito che il nostro strumento permette di bisecare ogni angolo dato. Ma è pur vera l'inversa: uno strumento che permetta di bisecare un angolo qualsiasi (bisettore), permette di trasportare un segmento da una retta ad un'altra.

donde

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{x-a}.$$

Vediamo di qua che col trasportatore dei segmenti noi possiamo costruire una espressione (per es. valore di un segmento) del tipo $\sqrt{1+m^2}$, ogniqualvolta m è un numero dato (valore di un dato segmento); ed anzi è questa la operazione più generale che il nostro strumento permette di compiere.

E concludiamo infine che, se si parte da più punti aventi coordinate (cartesiane ortogonali) $1, a, b, c, \dots$, ed a questi si applicano costruzioni mediante riga e trasportatore di segmenti, ogni punto a cui si giungerà avrà coordinate appartenenti a quel campo di razionalità che si genera operando sui numeri dati mediante le operazioni razionali e la operazione $\sqrt{1+m^2}$, dove m è un numero dato, o un numero già ottenuto dai dati mediante le dette operazioni. E viceversa, ogni punto le cui coordinate appartengano all'ultimo campo, potrà ottenersi operando cogli strumenti nominati.

Sia $K = [1, a, b, c, \dots]$ il campo primitivo di razionalità determinato dai dati: indichiamo con $(K^{\frac{1}{2}})$ il campo a cui si arriva aggiungendo alle operazioni razionali la operazione $\sqrt{1+m^2}$, mentre continuiamo a indicare col simbolo $K^{\frac{1}{2}}$ il campo a cui si perviene da K aggiungendo l'operazione generale di estrazione di radice quadrata \sqrt{m} da una base positiva m appartenente al campo K , o ai campi che via via si ottengono nel detto modo. $K^{\frac{1}{2}}$ è, per dir così, il campo dei numeri costruibili colla riga e col compasso, mentre $(K^{\frac{1}{2}})$ è il campo dei numeri costruibili colla riga e col trasportatore. Risulta subito dalla definizione che ogni numero di $(K^{\frac{1}{2}})$ è contenuto in $K^{\frac{1}{2}}$; si domanda però se sia vero l'inverso, vale a dire se i due campi coincidano o no. Vedremo facilmente con un esempio che il campo $(K^{\frac{1}{2}})$ è più ristretto del campo $K^{\frac{1}{2}}$, concluderemo quindi che non ogni costruzione eseguibile colla riga e col compasso può eseguirsi colla riga e col

trasportatore dei segmenti. L'ultimo strumento non può adunque sostituire interamente il compasso.

Per dimostrar ciò nel modo più semplice partiamo da un campo K particolare, per esempio dal campo $K = [1, a]$ dove a è un *parametro* (§ 2), vale a dire una quantità che può assumere valori arbitrari nel corso della questione. E consideriamo la espressione $\sqrt{1 - a^2}$ che appartiene al campo $K^{\frac{1}{2}}$, ed è costruibile colla riga e col compasso per tutti i valori di a compresi tra -1 e $+1$. Ammettiamo, se è possibile, che quella espressione appartenga (per quei valori di a) anche al campo $(K^{\frac{1}{2}})$. Supponiamo adunque di poter scrivere una uguaglianza avente a primo membro $\sqrt{1 - a^2}$, mentre il secondo membro deve contenere uno o più segni di $\sqrt{\quad}$ sotto a ciascuno dei quali starà una espressione del tipo $1 + m^2$, dove m è una quantità k di K , o una quantità k' del campo più esteso che si ottiene aggiungendo a K le quantità del tipo $\sqrt{1 + k^2}$, ecc. In qualunque caso sarà m una quantità reale, $1 + m^2$ una quantità positiva, e $\sqrt{1 + m^2}$ una quantità reale. Dunque il secondo membro della nostra uguaglianza ipotetica ha valore *reale*, qualunque sia la quantità reale a . D'altra parte la nostra uguaglianza vale per infiniti valori di a ($-1 \leq a \leq 1$), e quindi, trattandosi di una relazione algebrica, deve sussistere per *ogni* valore di a . Ora ciò non è possibile; infatti il primo membro $\sqrt{1 - a^2}$ è immaginario ad es. per $a > 1$, mentre il secondo membro è reale qualunque sia a . L'assurdo a cui siamo giunti così, ci prova che $\sqrt{1 - a^2}$ non può appartenere al campo $(K^{\frac{1}{2}})$, e quindi che questo campo è più ristretto del campo $K^{\frac{1}{2}}$. Geometricamente parlando, il nostro esempio mostra che, dati due segmenti non aventi relazioni tra loro, è impossibile costruire col trasportatore un triangolo rettangolo di cui il segmento maggiore sia ipotenusa e l'altro un cateto.

Qui si osservi che la dimostrazione data pel campo $[1, a]$, si sarebbe potuta presentare, un po' diversamente, pel campo più ristretto $K = [1]$, considerando allora una espressione contenente (in modo irriducibile) *più* segni di radice quadrata, e formata in tal guisa che i valori che si ottengono variando in tutti i modi i segni dei radicali, siano in parte *reali*, in parte *immaginari*; tale è ad esempio l'espressione $\pm \sqrt{\pm \sqrt{2}}$,

la quale ha due valori reali e due immaginari. Una tale espressione che appartiene al campo $K^{\frac{1}{2}}$, non può certo appartenere al campo $(K^{\frac{1}{2}})$, perchè in quest'ultimo caso dovrebbe aver tutti i suoi valori reali. Da queste osservazioni segue subito il risultato:

Siano dati uno o più segmenti di lunghezze 1, a, b, c, ..., alcune delle quali prefisse (numeriche), altre arbitrarie (parametriche), e si tratti di costruire un segmento di cui il valore sia fornito da una espressione formata mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate eseguite sui dati (dove si suppone che il numero dei radicali sia ridotto per quanto è possibile): affinchè il segmento richiesto si possa costruire colla riga e col trasportatore di segmenti, è condizione necessaria che siano reali tutti i valori che la espressione data assume, sia quando si mutino comunque i segni dei radicali, sia quando si lascino variare comunque i parametri, che entrano tra i dati.

Di fronte a questo risultato, che si giustifica, come abbiamo visto, in modo semplice, il signor HILBERT ne stabilisce un altro molto più importante, a cui egli perviene con un ragionamento troppo elevato per esser qui riprodotto: *la condizione enunciata, non solo è necessaria per la costruzione, ma è pur sufficiente.*

In base a ciò si può dire che ogni problema il quale sia risolvibile colla riga e col compasso, può anche risolversi sostituendo all'ultimo strumento il trasportatore di segmenti, purchè tutte le soluzioni algebriche del problema siano reali (atte quindi a costruzioni grafiche), e ciò anche quando ai dati si lasci la maggior libertà di cui sono suscettibili.

Come esempio, il signor HILBERT nota che il problema della divisione di un cerchio in n parti uguali, quando è risolvibile colla riga e col compasso, è pur risolvibile colla riga e col trasportatore dei segmenti. E si può anche osservare (per via diretta) che cogli ultimi strumenti può risolversi ogni problema di secondo grado (avente soluzioni reali), i cui dati abbiano coordinate razionali.

§ 12. L'uso del cerchio fisso. — Noi abbiamo visto ora che il trasportatore dei segmenti permette di ampliare un campo di razionalità K mediante l'aggiunta della operazione

$\sqrt{1+k^2}$ eseguita sopra un numero k del campo; ma non dà il modo di eseguire in generale la operazione $\sqrt{1-k^2}$, nè la operazione \sqrt{k} (operazione quest'ultima corrispondente all'uso del compasso). Si presenta dunque naturale la questione di esaminare se uno strumento, il quale permettesse di eseguire l'operazione $\sqrt{1-k^2}$ (per $-1 \leq k \leq 1$), fosse in grado di sostituire interamente il compasso. Ora è chiaro che a questa domanda si deve rispondere, affermativamente. Sia infatti a una quantità appartenente al campo di razionalità K ; noi possiamo costruirci colla sola riga la espressione

$$k = \frac{1-a}{1+a},$$

e quindi, collo strumento in discorso, l'espressione

$$x = \sqrt{1-k^2} = \frac{1}{1+a} \sqrt{(1+a)^2 - (1-a)^2} = \frac{2}{1+a} \sqrt{a},$$

e quindi finalmente l'espressione

$$\sqrt{a} = \frac{1+a}{2} x.$$

Dunque lo strumento, a cui alludiamo, permette di ampliare il campo K nello stesso modo come il compasso; e permette, mediante successive estensioni, di arrivare al campo $K^{\frac{1}{2}}$ formato dalle espressioni costruibili mediante riga e compasso. Diremo così:

Uno strumento il quale permetta, quando sono dati due segmenti aventi le lunghezze 1 ed $a < 1$, di costruire un terzo segmento di lunghezza $\sqrt{1-a^2}$, può sostituire interamente il compasso nella risoluzione di ogni problema geometrico che sia risolubile col compasso e colla riga.

Vediamo qualche modo di realizzare una siffatta costruzione.

Sia tracciato (con uno strumento qualsiasi) un cerchio in una determinata posizione del piano, e sia noto il centro O del cerchio. È chiaro intanto che si potranno condurre colla sola riga due rette perpendicolari per O , giacchè basterà

iscrivere nel nostro cerchio un rettangolo di cui due diametri arbitrari possono essere assunti come diagonali, e costruir poi le mediane del rettangolo. Assumendo il raggio del cerchio come unità, avremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali a cui riferiremo i dati.

Sia ora $OA = a$ un segmento noto sopra l'asse x , minore del raggio del cerchio (ad es. ascissa di un punto dato); conduciamo (colla riga) la perpendicolare ad x in A fino ad incontrare il cerchio in P ; il segmento AP così costruito, risulterà uguale a $\sqrt{1 - a^2}$. Dunque:

Quando nel piano sia tracciato, una volta per tutte, un cerchio di cui sia noto il centro, si può, servendosi di quello e della sola riga, risolvere ogni problema che sia risolubile colla riga e col compasso. È questo un risultato notissimo dovuto a PONCELET e STEINER. Da notarsi che la conoscenza del centro del cerchio è necessaria soltanto per la risoluzione dei problemi metrici, ma non dei problemi proiettivi. Per questi anzi il cerchio potrebbe essere sostituito da una conica qualsiasi, purchè non spezzata in due rette.

§ 13. **La riga a due orli paralleli.** — Vediamo ora se il compasso possa essere interamente sostituito dall'uso della *riga a due orli paralleli*, vale a dire dalla riga ordinaria, di cui si adoperino insieme i due orli, in modo da poter condurre due rette parallele distanti quanto l'altezza della riga.

Notiamo anzitutto che, adoperando due volte la riga a due orli si può costruire un parallelogramma equilatero, di cui l'altezza sia uguale all'altezza della riga. Le diagonali del parallelogramma danno una coppia di rette perpendicolari, assi di un sistema cartesiano, del quale prenderemo l'altezza della riga come unità di lunghezza.

Ciò posto, conviene esaminare quali costruzioni fondamentali si possono effettuare colla riga a due orli, e poichè tali costruzioni sono relative al *modo di adoperare la riga*, dobbiamo stabilire una distinzione.

Un primo modo di adoperare la riga a due orli, consiste nel far combaciare un orlo di essa con una retta data, e costruire le parallele alla retta data che ne distano dell'unità di lunghezza. Così il nostro strumento permette di trasportare parallelamente a sè stessa una retta data, di un segmento

uguale all'unità di lunghezza. Ora, se si suppone che quella retta sia la perpendicolare condotta ad una retta r prefissa nel modo sopra indicato, l'ultima operazione permette di costruire sopra una retta r arbitraria un segmento uguale all'unità di lunghezza. Sicchè si conchiude che la riga a due orli, adoperata nel primo modo, può sostituire il trasportatore dei segmenti; ed è chiaro che non dà nulla di più di questo ultimo strumento, come del resto si verificherebbe subito per via analitica.

Ma vi è un secondo modo di adoperare la riga a due orli, che consiste nell'adagiar la riga in modo che i suoi due orli passino rispettivamente per due punti, la cui distanza superi od uguagli l'altezza della riga (unità di lunghezza), tracciando le rette così determinate. In tal guisa, come vedremo, si riesce a risolvere *ogni* problema che sia risolubile colla riga e col compasso.

Per dimostrare ciò partiamo da un segmento $OA = a > 1$ posto sopra l'asse delle x , segmento che riguardiamo come noto. Collocata la riga in guisa che un orlo passi per O , l'altro per A , tracciamo, seguendo quest'ultimo orlo, la retta AB , che incontri in B l'asse y , e sia $OB = b$ il segmento che così si costruisce. Per calcolare b notiamo che la retta indefinita AB ha per equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

e dista dell'unità, dall'origine O ; ricaviamo di qua la equazione

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 1,$$

donde (in valore assoluto)

$$\frac{1}{b} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}.$$

Questo mostra che data la riga a due orli, e noto

$$k = \frac{1}{a} < 1,$$

si può costruire l'espressione $\sqrt{1-k^2}$. E tanto a noi basta per affermare (§ 12):

Ogni problema risolubile colla riga e col compasso, può anche risolversi usando la sola riga a due orli paralleli ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Si confrontino i risultati ottenuti in questi due ultimi paragrafi con quelli dati nell'art. 3.