ARTICOLO SECONDO

« Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso » di Ermenegildo Daniele a Pavia.

Il raggruppamento in un corpo organico, compiuto dagli antichi geometri, delle costruzioni che si eseguono col solo uso della riga e del compasso, o, come si suol dire, con metodo Euclideo, risponde senza dubbio al bisogno da essi sentito di separare dal rimanente della scienza geometrica a loro nota, una parte, la quale si potesse considerare come il capitolo più semplice della geometria, quel capitolo che dovesse riuscirne come la necessaria introduzione. Non vi è bisogno di discorrere della perfezione del lavoro condotto a termine da quei geometri: la resistenza al tempo ed ai continui progressi della scienza dimostrata dall'opera di Euclide (la quale di tutto quel lavoro deve considerarsi come la sintesi) ne è la prova più evidente.

Il metodo impiegato da Euclide per eseguire le costruzioni elementari è fondato sull'uso di due strumenti primordiali, la riga ed il compasso, che egli suppone di poter adoperare senza alcuna restrizione; egli ammette cioè di poter segnare in qualunque parte del piano del disegno una retta, e di potervi descrivere un cerchio col centro in un punto qualunque e di raggio arbitrario. Queste condizioni grafiche sono parti essenziali del metodo di Euclide; e se la natura delle linee, di cui in esso si fa uso, gli conferisce una semplicità grandissima, ognuno vede che vi si gode ancora di una libertà grafica assai ampia; non riesce perciò fuori di luogo domandarsi se quei medesimi problemi non sarebbero egualmente risolubili con mezzi grafici più ristretti. Tale domanda ammette una risposta affermativa: basterà citare, fra gli altri, i tentativi, completamente riusciti, dei geometri italiani del sec. XVI, Ferrari, Tartaglia, Benedetti, i quali risolvettero tutti i problemi contenuti nei libri di Euclide colla riga ed un compasso ad apertura fissa; la risoluzione di molti problemi ottenuta da Brianchon senza il compasso; la riduzione, fatta da Poncelet e Steiner, nell'uso delle circonferenze, ad una sola fissa nel piano del disegno e di centro noto (cfr. art. 3); in un altro indirizzo la riduzione degli strumenti di disegno al solo compasso, per opera di Lorenzo Mascheroni, coll'abolizione completa della riga.

Non è mio compito di parlare delle ricerche che ebbero per iscopo di limitare al minimo il tracciamento di circonferenze, poichè di questo argomento altri avrà da occuparsi in un successivo articolo; mi fermerò invece su quella che può chiamarsi la « Geometria del compasso », dimostrando come ogni problema, risolubile colla riga e col compasso, si possa risolvere soltanto con quest'ultimo, senza la riga. Tutto ciò che occorre per questa dimostrazione è contenuto nel libro di L. Mascheroni intitolato *Geometria del compasso*, che è il primo, cronologicamente, ed il più importante studio sulle costruzioni con sole circonferenze. Pubblicata a Pavia nel 1797, l'opera del Mascheroni incontrava tosto molto favore, tanto che nel 1798 ne compariva la traduzione francese fatta dal Carette; questa traduzione si ristampava nel 1828, mentre quasi contemporaneamente, il Grüson pubblicava la versione tedesca della *Geometria del compasso*. Accennerò appena, fra i varii estratti o rimaneggiamenti del libro di Mascheroni, a quelli di Frischauf (Graz, 1869) e di Hutt (Halle, 1880); ricorderò ancora due Note, una del sig. Eugenio Dubouis (*Journal de Math.*, 22, 1897), l'altra del sig. G. Cesaro (*Mémoires de la société royale des sciences de Liège*, 1899), i quali, entrambi, ignorando l'esistenza di precedenti lavori sull'argomento, ritrovano, mediante costruzioni dello stesso tipo di quelle del Mascheroni, la possibilità di sostituire il compasso alla riga in tutte le costruzioni elementari. Degna di menzione, come applicazione dei metodi di Mascheroni, è poi la divisione della circonferenza in 17 parti eguali, eseguita col solo compasso prima dal signor Gérard (*Math. Ann.*, 48, 1897), e poi da varii altri Autori: di queste costruzioni si parlerà nell'art. 6.

I procedimenti geometrici di cui si fa uso nei lavori di Mascheroni e degli altri autori nominati in seguito, sono di natura affatto elementare. Di fronte a questi va collocato un breve studio di ADLER (*Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen*; Wiener Berichte, 99, 1890), il quale, uscendo dal campo propriamente elementare, ed esaminando la questione della Geometria del compasso da un punto di vista più elevato, riuscì a dimostrare la risolubilità, col solo compasso, dei problemi Euclidei, giovandosi di un unico principio, e precisamente della trasformazione per raggi vettori reciproci.

§ 1. **Considerazioni preliminari.** — In un problema di Geometria gli elementi, che si tratta di determinare in relazione e in conseguenza ai dati, si riducono sostanzialmente a punti, poichè, quand'anche il problema richieda il tracciamento di rette o di circonferenze, esse si possono costruire, mediante la riga ed il compasso, quando se ne conoscano rispettivamente due punti, oppure il centro e la lunghezza del raggio (questa lunghezza a sua volta è determinata mediante due punti). Quanto ai punti che si cercano, essi sono sempre determinati dall'intersezione mutua di rette e di circonferenze; ora ammettendo che si possa adoperare con piena libertà tanto la riga che il compasso, si possono ritenere risolti senz'altro i problemi seguenti:

A) Trovare il punto comune a due rette,

B) Trovare i punti comuni ad una retta e ad una circonferenza,

C) Trovare i punti comuni a due circonferenze.

Imponendoci al contrario la condizione di non adoperare la riga (nel qual caso si potranno ancora avere sul disegno le circonferenze completamente descritte, ma una retta verrà rappresentata soltanto mediante due suoi punti), dei problemi precedenti solo il terzo sarà di soluzione immediata, mentre per i due primi bisognerà indicare delle costruzioni apposite, che non si trovano nei libri di EUCLIDE. Volendo dunque dimostrare che i problemi risolubili con metodo Euclideo si risolvono pure facendo uso del solo compasso, basterà, in ultima analisi, risolvere senza l'aiuto della riga i due problemi *A*) e *B*), dove, ripeto, ogni retta s'intenda rappresentata da due suoi punti. Il principio ora detto, da cui si può partire per procedere alla nostra dimostrazione, è quello su cui poggia il metodo di MASCHERONI.

Nel § 2 di questo articolo espongo quelle costruzioni che è necessario premettere alla risoluzione dei due problemi fondamentali suddetti, andando direttamente allo scopo, tralasciando cioè tutti quei problemi, i quali, ancorchè assai interessanti e affini con quelli esposti, non vengono però utilizzati nel seguente § 3, che è dedicato alla risoluzione dei problemi A) e B). Con questi due paragrafi lo scopo primo del mio articolo sarebbe raggiunto. Suppongasi difatti che si abbia da risolvere un qualunque problema di geometria elementare: si prenda una qualunque delle soluzioni che si conoscono, ottenuta mediante la riga ed il compasso, e la si applichi tale e quale; poichè la riga non si adopera se non per risolvere i problemi A) e B), ogni qualvolta si presenterà l'occasione di farne uso si potrà sempre sostituirla colle costruzioni del § 3: il problema proposto viene così risolto col solo compasso.

Che il metodo ora accennato complichi i procedimenti e le figure, si comprende, ed è chiaro che una costruzione, nella quale si dovessero applicare parecchie volte i problemi A) e B), diventerebbe tutt'altro che comoda. Questo spiega perchè il Mascheroni, volendo rendere il suo metodo possibilmente pratico, non si sia limitato a risolvere quei due problemi fondamentali, ma abbia ricercato per parecchi altri delle nuove soluzioni, col solo compasso, che potessero sostituire, anche per semplicità, quelle comunemente note, in cui si fa pure uso della riga. Il non far cenno, per parte mia, di alcuni di questi esempi, sarebbe stato un voler presentare l'opera del Mascheroni monca di una delle sue parti più interessanti; ed è per questo che dedicai i due paragrafi successivi ad esporre le soluzioni date dal Mascheroni per alcuni dei problemi elementari più comuni e più caratteristici. Ben inteso non tolsi che pochi degli esempi di cui abbonda la *Geometria del compasso*, trascurando quelli la cui soluzione è è troppo complicata.

Il Mascheroni dedica l'ultimo capitolo del suo libro alla risoluzione, in via approssimata, di parecchi problemi di grado superiore al secondo e di problemi trascendenti, come la moltiplicazione e la suddivisione del cubo, la rettificazione della circonferenza, la quadratura del circolo, la cubatura della sfera, ecc. Su quest'ultimo soggetto non volli entrare in molti particolari, per non invadere un campo riserbato ad altri collaboratori; credetti bene tuttavia di mostrare nel § 6 come il MASCHERONI ottenga la duplicazione del cubo e la rettificazione della circonferenza, usando dei metodi che, se sono da un lato raccomandabili per la loro speditezza, danno d'altra parte un'approssimazione più che sufficiente per la pratica.

Di varii problemi il MASCHERONI espone più soluzioni; io ebbi cura di scegliere ogni volta quella che presentava l'aspetto della maggiore semplicità e simmetria.

Dopo aver indicato, nei primi sei paragrafi, come il MASCHERONI dimostri il teorema fondamentale della Geometria del compasso, e come ottenga, per via nuova, la soluzione di varii problemi senza far uso della riga, vien naturale di far vedere in che modo a quel medesimo teorema si pervenga applicando il principio dell'inversione, secondo il concetto dell'ADLER. I §§ 7 e 8 sono destinati precisamente all'esposizione succinta della dimostrazione dell'ADLER, la quale, se non è così elementare come quella del MASCHERONI, presenta però il vantaggio d'una maggiore brevità, e serve, d'altronde, a mettere sotto una nuova luce le costruzioni del solo compasso, in quanto che rivela il loro legame coi metodi della Geometria proiettiva.

L'ADLER non fa, nella sua Nota, alcuna applicazione ai problemi elementari; onde però mostrare che quel metodo può condurre a costruzioni eleganti ed istruttive, accennai nel § 9, che chiude l'articolo, a pochi problemi notissimi che ricevono dal principio dei raggi reciproci soluzioni nuove e condotte con procedimento uniforme. Non vi è alcuna difficoltà, del resto, a moltiplicare a proprio talento le applicazioni del metodo.

§ 2. **Prime costruzioni.** — 1) *Da un punto* A *condurre la parallela ad una retta* BC.

Basterà formare il parallelogramma $ABCD$, determinando il punto D come intersezione delle due circonferenze $A(BC)$ e $C(AB)$ [1]: la retta AD è parallela alla BC.

Questa costruzione non è poi che una di quelle comunemente usate.

[1] Scrivo « circonf. $A(BC)$ » per « circonferenza di centro A e raggio eguale a BC »; questo modo abbreviato verrà usato anche nel seguito.

2) *Raddoppiare, triplicare, ecc. un dato segmento* OA.

Con centro in uno degli estremi, ad es. in O, e con raggio OA si descriva una circonferenza (Fig. 1); indi si determini su questa i punti B, C, D in modo che sia

$$AB = BC = CD = OA:$$

il punto D sarà diametralmente opposto ad A, e quindi il segmento AD sarà doppio di OA.

Colla ripetizione di questa medesima costruzione si può triplicare il segmento OA, quadruplicarlo,... in generale moltiplicarlo per n (n intero).

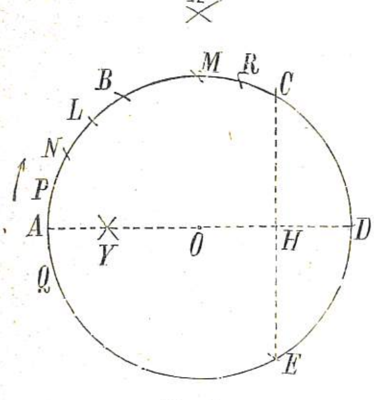

Fig. 1.

3) *Costruire il simmetrico di un punto* C *rispetto ad una retta* AB.

Le due circonferenze

$$A(AC) \text{ e } B(BC)$$

si tagliano ulteriormente nel punto richiesto.

4) *Dividere un arco di circonferenza per metà.*

Sia AB l'arco dato appartenente ad una circonferenza di centro O (Fig. 2). Mediante le circonferenze $A(OA)$, $B(OA)$ e $O(AB)$ determino i punti C e D per modo d'avere i due parallelogrammi $ABOC$ e $ABDO$, eguali fra loro e colla stessa base AB; indi coi centri C e D e raggio $CB = DA$ descrivo due circonferenze di cui considero uno qualunque dei due punti d'intersezione, e sia E questo punto: chiamando allora F uno qualunque dei due punti d'incontro delle circonferente $C(OE)$ e $D(OE)$, il punto F starà sulla

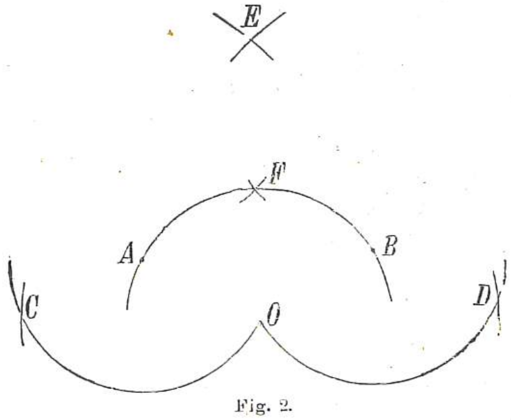

Fig. 2.

circonferenza data, e dividerà per metà uno dei due archi AB.

Difatti per le costruzioni eseguite i punti C, O, D stanno in una medesima retta parallela alla AB. Inoltre poichè nel parallelogramma $ABOC$ la diagonale AO è uguale ai lati AC e BO, si avrà:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + 2\cdot\overline{CO}\cdot \text{proi}\cdot \overline{OB} \text{ su } OC\\ &= \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{CO}\cdot 2 \text{ proi}\cdot \overline{OB} \text{ su } AB\\ &= \overline{AO}^2 + 2\cdot\overline{CO}^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Gli angoli EOC, EOD sono inoltre retti, e quindi

$$\overline{CE}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2,$$

e poichè $\overline{OE} = \overline{CF}$, sarà:

$$\overline{CB}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CF}^2; \qquad (2)$$

dal confronto delle (1) e (2) si trae: $\overline{CF}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$. Essendo poi l'angolo FOC evidentemente retto, avremo: $\overline{CF}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OF}^2$; da questa e dalla precedente si deduce: $OA = OF$, il che dice che il punto F sta sulla circonferenza $O(OA)$. Di più se dagli angoli eguali FOC, FOD si tolgono rispettivamente gli angoli pure eguali AOC, BOD rimane:

$$\widehat{FOA} = \widehat{FOB}.$$

Questo prova che il punto F divide per metà l'arco AFB.

5) *Costruire il segmento quarto proporzionale rispetto a tre segmenti dati* m, n, p.

Descriviamo le circonferenze $O(m)$ e $O(n)$ (Fig. 3), O essendo un punto qualunque del piano, e siano A, B due punti della prima tali che la corda AB sia eguale a p; fatto centro successivamente in A e in B, con un medesimo raggio arbitrario si tagli poi la circonferenza $O(n)$ nei due punti $A'B'$: sarà $A'B'$ il segmento cercato.

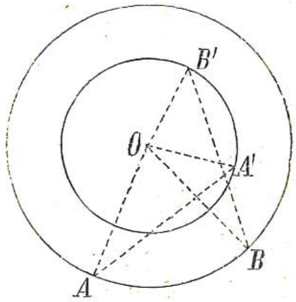

Fig. 3.

Difatti i triangoli OAA', OBB', avendo i lati rispettivamente eguali, sono eguali, onde sarà $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$; se da questi angoli si toglie poi (o si aggiunge, secondo i casi) l'angolo comune BOA', si avrà

$A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'$. Ne segue che i triangoli AOB, $A'OB'$ sono simili, e fra i loro lati passa la proporzione:

$$OA : OA' = AB : A'B';$$

ricordando che è

$$OA = m, \quad OA' = n, \quad AB = p,$$

e si conchiude che $A'B'$ è il quarto proporzionale dopo m, n, p.

Quando fosse $p > 2m$, sarebbe impossibile segnare nel primo cerchio la corda $AB = p$; tuttavia si può ancora applicare la costruzione indicata, sostituendo ai segmenti m e n i loro doppi, e, se non basta, i loro tripli, ecc.; poichè si ha sempre, qualunque sia il numero k:

$$km : kn = m : n.$$

Il problema del quarto proporzionale offre uno degli esempi più caratteristici di problemi elementari che si risolvono col solo compasso più semplicemente che non coi metodi noti in cui si adopera pure la riga: è vero però che questa maggiore semplicità va perduta nel problema attuale quando non sono soddisfatte certe condizioni di diseguaglianza fra m, n, p, poichè allora vi è da applicare (e forse più di una volta) anche il secondo problema di questo paragrafo.

§ 3. **I problemi fondamentali nel metodo di L. Mascheroni.** — 6*a*) *Trovare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta che non passi pel suo centro.*

Sia O il centro del cerchio e AB la retta data. Costruisco il punto P simmetrico di O rispetto alla retta AB; detti allora C e D i punti (supposti esistenti) comuni alla circonferenza ed alla retta AB, il quadrilatero $OCPD$ ha evidentemente i lati tutti eguali fra di loro. Per avere i punti C e D basterà dunque tagliare la circonferenza data colla $P(OC)$.

6*b*) *Trovare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta passante pel suo centro.*

Se A è un punto della retta diverso dal centro O della circonferenza, si descriva con raggio arbitrario una circonferenza che abbia il centro in A e tagli la circonferenza data in due punti B, C; dividendo per metà i due archi determinati sulla data circonferenza dai punti B e C, i punti di divisione saranno i punti domandati.

7a) *Determinare il punto comune a due rette non perpendicolari.*

Siano AB, CD le due rette date (Fig. 4). Costruiamo i punti C' e D' simmetrici di C e D rispetto alla retta AB, indi determiniamo sulla CC' il punto E in modo che il quadrilatero $C'D'DE$ sia un parallelogramma. È chiaro che per il punto H comune alle AB e CD passa anche la $C'D'$; ora si ha la seguente proporzione:

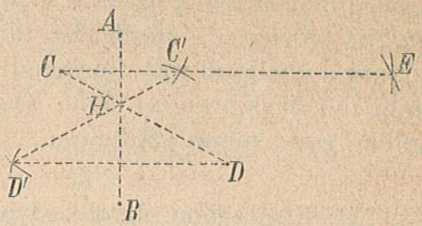

Fig. 4.

$$CE : CC' \doteq CD : CH,$$

nella quale i tre primi termini sono segmenti di lunghezza nota: noi possiamo dunque col probl. 5) determinare la lunghezza del segmento CH, e quindi la posizione del punto H, che sarà uno dei punti comuni alle due circonferenze $C(CH)$ e $C'(CH)$.

La costruzione ora indicata cessa di applicarsi quando le rette AB e CD sono perpendicolari, come è facile verificare. Per risolvere il problema anche in questo caso speciale cominciamo col premettere la risoluzione di quest' altro, che è un' applicazione dei precedenti.

8) *Trovare il punto medio di un segmento* AB.

Segnato il punto C simmetrico di A rispetto a B, si costruisca il segmento terzo proporzionale rispetto ad AC e AB; indicando con m la sua lunghezza, si descriva la circonferenza $A(m)$, e si determini il suo punto, situato fra A e B, che sta sulla retta AB: quello sarà il punto medio del segmento AB.

Possiamo ora

7b) *trovare il punto comune a due rette* AB *e* CD *perpendicolari fra di loro.*

Si cerchi il punto C' simmetrico di C rispetto alla retta AB; il punto domandato non è altro che il punto medio del segmento CC'.

Nella costruzione non s'è fatto uso del punto D: la cosa è naturale, perchè la CD è già individuata dalle condizioni di passare pel punto C e di essere perpendicolare ad AB. Il problema si poteva anche enunciare così: *Determinare il piede della perpendicolare condotta da un punto ad una retta.*

Il Dubouis trova il punto comune a due rette con un procedimento che presenta su quello del Mascheroni il vantaggio teorico di applicarsi tanto al caso di rette oblique quanto a quello di rette perpendicolari. A parte ciò, le costruzioni del Mascheroni sono ancora preferibili praticamente, perchè assai meno artificiose.

§ 4. **Risoluzione di alcuni problemi sui segmenti e sugli angoli.** — Si è già indicata una costruzione del punto medio di un segmento, che si deduce come conseguenza di problemi risolti precedentemente; essa non è però la più breve; e se ciò malgrado le fu data la preferenza, questo fu fatto soltanto per ridurre al minimo possibile il numero delle costruzioni preliminari. In pratica sarà però da preferirsi la seguente, che sta assolutamente a sè.

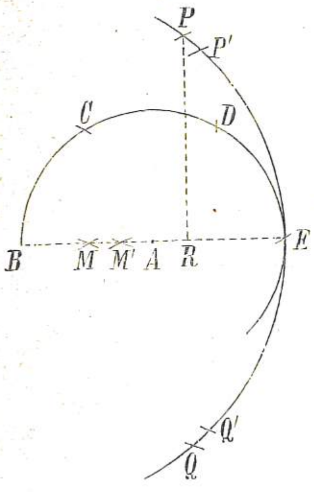

Fig. 5.

9) *Nuova costruzione del punto medio di un segmento.*

Sia AB il segmento dato (Fig. 5). Descriviamo, col centro in A, la semicirconferenza $BCDE$, e poi la circonferenza $B(BE)$; su questa determiniamo i punti P, Q in modo che sia $EP = EQ = EC$, quindi descriviamo le circonferenze $P(EC)$ e $Q(EC)$. Esse si tagliano in due punti della retta BE; uno di questi, M, dico che è il punto medio fra A e B.

Infatti dal triangolo BPE (isoscele e quindi coll' angolo BEP acuto) si ha:

$$\overline{BP}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{PE}^2 - 2.\ \overline{BE} \text{ proi. } \overline{PE} \text{ su } BE,$$

ossia, essendo $\overline{BP} = \overline{BE}$,

$$\overline{PE}^2 = \overline{BE} \cdot 2 \text{ proi. } \overline{PE} \text{ su } BE.$$

Ricordando ora che è per costruzione $\overline{PE} = \overline{PM}$, si ha:

$$2 \cdot \text{proi. } \overline{PE} \text{ su } BE = \overline{EM},$$

onde

$$\overline{PE}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{EM} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EM};$$

ma $\overline{PE} = \overline{EC} = \overline{AB}\sqrt{3}$: allora l' ultima eguaglianza diventa

$$3 \cdot \overline{AB}^2 = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EM},$$

da cui si deduce

$$3 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \overline{EM},$$

e togliendo $2 \cdot \overline{AB}$ da ambo i membri: $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM}$, il che dice che M è il punto medio fra A e B.

Valendoci della costruzione ora fatta possiamo procedere a trovare il punto medio M' del segmento AM, e poi il punto medio M'' del segmento AM'; e così via. Per avere il punto M' basterà segnare sulla circonferenza $B(BE)$ i punti P' e Q' tali che sia $EP' = EQ' = AP$, quindi, fatto centro successivamente in P' e Q', descrivere due circonferenze col medesimo raggio AP: esse determinano il punto M', che è il cercato. Difatti è chiaro anzitutto che il punto M' sta sulla retta BE. Inoltre se diciamo R il piede della perpendicolare condotta da P sulla BE, si hanno le seguenti relazioni:

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 + 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AR}$$
$$\overline{PE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AR},$$

donde sommando e osservando che è $AB = AE$:

$$\overline{BP}^2 + \overline{PE}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 + 2 \cdot \overline{AP}^2.$$

Ora

$$\overline{BP} = \overline{BE} = 2 \cdot \overline{AB},\ \overline{PE} = \overline{CE} = \overline{AB} \cdot \sqrt{3};$$

sostituendo nella precedente eguaglianza si ha:

$$7 \cdot \overline{AB}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 + 2 \cdot AP^2,$$

ossia

$$\frac{5}{2}\,\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 = \overline{EP'}^2.$$

Dai triangoli isosceli e simili $BP'E$, $P'M'E$ si ha poi: $\overline{EP'}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{M'E}$, quindi $\frac{5}{2}\overline{AB}^2 = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{M'E}$, donde $\frac{5}{4}\overline{AB} = \overline{M'E}$, e togliendo $\overline{AB}$ da ambo i membri: $\frac{1}{4}\overline{AB} = \overline{AM'}$. Dunque M' è il punto medio fra A e M.

Il punto M'' medio fra A e M' si otterrebbe prendendo sulla circonferenza $B(BE)$ i punti P'' e Q'' per cui si ha $EP'' = EQ'' = AP'$, e poi descrivendo la circonferenza $P''(AP')$ e $Q''(AP')$: la dimostrazione si conduce in modo analogo alla precedente.

10) *Il terzo proporzionale rispetto a due segmenti* m *e* n si costruisce secondo il metodo generale che serve a trovare il quarto proporzionale rispetto a tre segmenti; quando però è $n < 2m$, si può utilmente sostituire a quella soluzione quest' altra, che è assai notevole per la sua eleganza. Siano (Fig. 6) A e B gli estremi di un segmento eguale a m; descrivo le circonferenze $A(AB)$ e $B(n)$, le quali si taglieranno in due punti C, D: se C' è il simmetrico di C rispetto a B, sarà $C'D$ il terzo proporzionale rispetto a m e n.

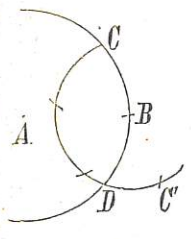

Fig. 6.

Difatti l' angolo CDC' essendo retto, le rette AB e DC' sono parallele, onde gli angoli ABD, BDC' sono eguali; allora i due triangoli isosceli ADB, BDC' sono simili, e fra i loro lati vi ha la proporzione

$$AB : BD = BD : DC',$$

cioè DC' è terzo proporzionale rispetto a m e n.

11) *La costruzione di un segmento eguale alla* n^{ma} *parte di un segmento dato* si eseguisce in modo generale formando un segmento eguale a n volte il dato, indi cercando il terzo proporzionale rispetto al nuovo segmento ed al primo. Praticamente si presta assai bene la costruzione del terzo proporzionale data or ora.

Supponiamo, ad es., che si voglia costruire la terza parte di un segmento AB. Cominciamo (Fig. 7) a determinare il segmento AD triplo di AB, poi costruiamo il segmento $L'M$ terzo proporzionale rispetto a AD e ad AB: sarà $L'M$ eguale alla terza parte di AB. Se poi si trova il punto N in cui si tagliano le circonferenze $M(AB)$ e $A(L'M)$, sarà N uno dei punti di divisione del segmento AB in tre parti eguali.

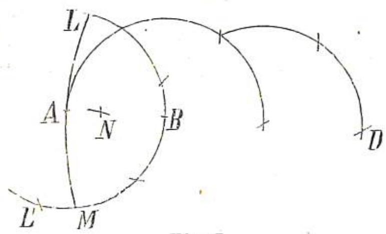

Fig. 7.

Un angolo possiamo imaginarlo dato mediante il vertice e due punti, ciascuno dei quali insieme col vertice individui un lato. Sono ovvie allora le soluzioni, col solo compasso, dei problemi fondamentali sugli angoli.

12) *Raddoppiare, triplicare, ecc. l'angolo* BAC.

Si descriva (Fig. 8) la circonferenza $A(AB)$; questa è tagliata dalla $C(CB)$ in un punto D, e l'angolo BAD è doppio del dato. Descrivendo poi la circonferenza $A(AC)$ e tagliandola in E colla $D(DC)$, si ha l'angolo BAE triplo di BAC, ecc.

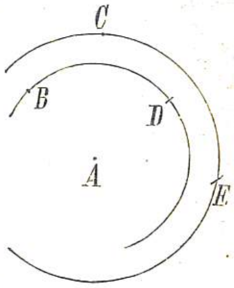

Fig. 8.

13) *Costruire la bisettrice dell'angolo* BAC.

Si descriva la circonferenza $A(AB)$ e si determini la sua intersezione D col lato AC; coi centri B e D e con un medesimo raggio qualunque si descrivano due circonferenze che si taglino in un punto M. Sarà AM la bisettrice domandata.

14) *Sopra una retta* A'B' *e col vertice in* A' *costruire un angolo eguale ad un angolo dato* BAC.

Si cerchi il quarto proporzionale dopo i segmenti AB, $A'B'$, AC, e con questo segmento come raggio si descriva una circonferenza col centro in A'; similmente si segni una seconda circonferenza di centro B' e raggio eguale al quarto proporzionale dopo AB, $A'B'$, BC. Le due circonferenze si taglieranno in due punti situati da bande opposte rispetto alla retta $A'B'$: detto C' uno qualunque di essi, sarà l'angolo $B'A'C'$ eguale al dato BAC.

15) *Dividere un segmento in media ed estrema ragione.*

Sia OA il segmento dato (Fig. 1), e si voglia determinare sulla retta OA il punto Y tale che sia $\overline{OY}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{AY}$. Descriviamo la circonferenza $O(OA)$, e determiniamo su di essa i punti B, C, D, E tali che sia $AB = BC = CD = DE = OA$; si determini poi il punto X intersezione delle circonferenze $A(AC)$ e $D(AC)$, indi il punto Y intersezione delle $C(OX)$ e $E(OX)$. Il punto Y sta evidentemente sulla retta OA. Volendo dimostrare che OY è la parte aurea di OA, cominciamo coll'osservare che nel triangolo rettangolo AOX si ha, supposto per semplicità $OA = 1$:

$$AX = AC = \sqrt{3},$$

onde

$$OX = \sqrt{2}.$$

Immaginiamo ora le rette AOD, CY, CE, e si chiami H il punto comune a CE e ad AD; abbiamo:

$$CY = OX = \sqrt{2}, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

onde dal triangolo rettangolo CHY:

$$HY = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

allora sarà

$$OY = HY - OH = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

cioè OY è eguale alla parte aurea del raggio, supposto eguale ad 1.

Osservazione. — Dalla stessa Fig. 1, abbiamo ancora:

$$DY = DO + OY = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$DY \cdot OY = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

onde

$$\overline{DY} \cdot \overline{OY} = \overline{OD}^2,$$

cioè OD è la parte aurea di DY. Adunque la medesima costruzione serve pure per risolvere il problema:

16) *Costruire un segmento, conoscendone la parte aurea.*

§ 5. **Divisione della circonferenza in 3, 4, 5, 10 parti eguali.** — Coll' analisi fatta nel problema precedente ci siamo procurati tutti gli elementi che permettono di inscrivere, mediante il solo compasso, in una circonferenza tutti i poligoni regolari la cui inscrizione era già stata eseguita dagli antichi geometri facendo uso anche della riga. È questo uno dei più bei risultati ottenuti dal Mascheroni; insieme colle soluzioni date negli ultimi anni al problema dell' inscrizione dell' ettadecagono regolare, esso costituisce uno dei capitoli più eleganti della Geometria del compasso. Convien notare che la divisione della circonferenza in parti eguali fu appunto il primo argomento che il Mascheroni affrontò, e l' esservi bene riuscito gli diede animo a stabilire in modo generale la teoria delle costruzioni col solo compasso.

17*a*) L' inscrizione dell' *esagono*, e quindi del *triangolo* regolare, fu ottenuta nel precedente problema mediante la costruzione dei punti A, B, C, D (Fig. 1).

17*b*) Tagliando la circonferenza $O(OA)$ colla $A(OX)$ nel punto M, sarà AM il lato del *quadrato* inscritto, poichè è $AM = OX$, e fu trovato $OX = \sqrt{2}$.

17*c)* Il lato dell' *ottagono* si ottiene dividendo per metà l' arco AM; per questo non occorre però fare uso della costruzione data al § 2: se si taglia difatti la $O(OA)$ colla $X(OA)$ nel punto L, nel triangolo OLX si ha:

$$OL = LX = 1, \quad OX = \sqrt{2}.$$

Quindi l' angolo OLX è retto, onde l' angolo LOX vale mezzo retto, dal che segue che L è il punto medio dell' arco AM, e il segmento AL è il lato dell' ottagono regolare inscritto.

17*d)* Il lato del *decagono* regolare è eguale ad OY, perchè OY è la parte aurea del raggio. Si ottiene anche in tal modo la divisione della circonferenza in cinque parti eguali; il lato del *pentagono* regolare non sarebbe poi altro che MY, perchè ipotenusa del triangolo rettangolo MOY, i cui cateti sono il raggio e la sua parte aurea.

Si può osservare, per l'eleganza delle costruzioni, che i problemi, risolti in questo paragrafo, richiedono l' uso di tre sole aperture di compasso, eguali rispettivamente a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

§ 6. **Problemi risolti per approssimazione: Rettificazione della circonferenza, duplicazione del cubo.** — Sia O il centro d' una circonferenza (Fig. 1), sulla quale si contino gli archi da un suo punto A e positivamente nel senso indicato dalla freccia. Sia P un punto qualunque della circonferenza, e per fissare le idee supponiamo l' arco AP appartenente all' uno dei due primi quadranti; diciamo poi Q il simmetrico di P rispetto al diametro OA. Costruito il punto X come nel problema 15) del § 4, dal triangolo OPX si ha:

$$\begin{aligned}\overline{PX}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot 2 \text{ proi. } \overline{OP} \text{ su } OX \\ &= \overline{OA}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot \overline{PQ} \\ &= \overline{AX}^2 - \overline{OX} \cdot \overline{PQ}.\end{aligned}$$

Ora posto $OA = 1$, arco $AP = \alpha$ (in gradi), si ha:

$$AX = \sqrt{3}, \; OX = \sqrt{2}, \; PQ = 2 \text{ sen } \alpha,$$

e indicando con b la lunghezza del segmento PX, l' ultima formola si scrive:

$$b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \text{ sen } \alpha. \qquad (1).$$

Questa formola vale qualunque sia il punto P sulla circonferenza. In essa inoltre b può sempre essere considerata come una corda del dato cerchio, salvo per posizioni del punto P nel terzo e quarto quadrante, alle quali corrisponda una distanza $PX > 2$.

Supposto $\alpha < 180°$ (onde $b < 2$), possiamo dare alla (1) una nuova forma. Chiamando β l'arco del cerchio $O(OA)$ di cui b è la corda, si ha:

$$b = 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2},$$

e quindi

$$\frac{b^2}{4} = \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{2}. \tag{2}$$

D'altronde dalla (1) abbiamo

$$\frac{b^2}{4} = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4} - \operatorname{sen} \alpha \cos 45°; \tag{3}$$

dal confronto delle (2) e (3) si deduce

$$\cos\beta = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 45° - \frac{1}{2}$$

$$= \operatorname{sen}(\alpha + 45°) + \operatorname{sen}(\alpha - 45°) - \operatorname{sen} 30°,$$

che si può anche scrivere:

$$\cos\beta = \cos(45° - \alpha) - \operatorname{sen}(45° - \alpha) - \operatorname{sen} 30°. \tag{4}$$

È questa la formola che volevamo ottenere, e che ci servirà nella risoluzione dei due problemi seguenti.

18) *Rettificazione approssimata della circonferenza.*

Se $O(OA)$ è la circonferenza da rettificare, si costruisca il punto X come nella Fig. 1, indi si descriva la $B(BX)$ e si chiami R il suo punto d'incontro colla $O(OA)$ situato nell'arco BCD. L'errore che si commette prendendo il segmento AR come misura del quarto di circonferenza è di circa 0,0004 in eccesso.

Se difatti nell'equazione (4) si fa $\alpha = \widehat{AB} = 60°$, si ha per β il valore $\beta = 43°33' \frac{286}{2005}$; ora β è l'arco di cui la corda è BX, ossia BR: ne viene che l'arco ABR sarà di $103°33' \frac{286}{2005}$.

Il doppio del seno della sua metà ci dà la lunghezza della sua corda; ora abbiamo:

$$\frac{\text{arco } ABR}{2} = 51°46'\frac{1145}{2005},$$

ed il seno di quest' arco è 0,7855998; dunque la corda AR sarà misurata da 1,5711996. D'altronde la quarta parte della circonferenza ha per misura 1,5707963, numero che differisce in meno per circa 0,0004 da quello trovato per la corda AR.

19) *Duplicazione approssimata del cubo.*

Sia $OA = 1$ lo spigolo di un cubo (Fig. 1), e si voglia determinare lo spigolo di un altro cubo doppio del primo. Descritta la circonferenza $O(OA)$, costruito il punto X come nei problemi precedenti, ed il punto M, vertice del quadrato inscritto di cui un altro vertice è A (§ 5, 17*b*), si descriva la circonferenza $M(MO)$; questa taglierà l'arco AB in un punto N, la cui distanza da X rappresenta lo spigolo del cubo doppio del dato con un errore in difetto che non raggiunge 0,0007.

Difatti l'arco AN, che è la dodicesima parte della circonferenza, è di 30°; sostituendolo nella formola (4) in luogo dell'arco α, si ha per l'arco β, la cui corda è NX:

$$\beta = 78°2'\frac{2358}{2846};$$

ed in conseguenza

$$NX = 2 \text{ sen } 39°1'\frac{1179}{2846} = 1,2592800.$$

Si ha d'altra parte: $\sqrt[3]{2} = 1,2599209$, e questo numero supera il valore trovato per NX di circa 0,00064.

§ 7. **Le trasformazioni per raggi vettori reciproci e le costruzioni col solo compasso: problemi fondamentali.** — La dimostrazione, che dà il signor Adler, del teorema fondamentale della Geometria del compasso, richiede che si premetta la risoluzione, con sole circonferenze, di alcuni problemi, che ora indicheremo. Dei problemi già risolti da Mascheroni non ci occorrono che il 2) ed il 3), del § 2; dopo ciò possiamo venire ai seguenti.

20) *Dato in un piano un cerchio* k *di centro* O *e raggio* r, *costruire, col solo compasso, di un punto* M *l' inverso rispetto a* k*; cioè determinare sulla retta* OM *il punto* M′ *definito dalla condizione:* OM · OM′ = r².

a) Suppongasi in primo luogo $OM > \frac{r}{2}$. La circonferenza $M(MO)$ taglia k in due punti A, B (Fig. 9); le circonferenze $A(r)$ e $B(r)$ si tagliano sulla retta OM nel punto domandato M'. Difatti chiamando X il punto comune alle due ultime circonferenze, e situato con M dalla stessa banda rispetto ad O, dai due triangoli simili MOA, AOX si ha:

$$OM \cdot OX = \overline{OA}^2 = r^2.$$

Questo dice che X coincide col punto M'.

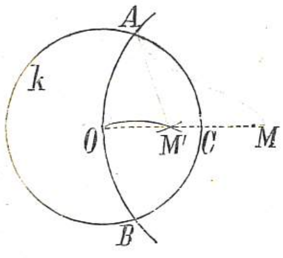

Fig. 9.

b) Sia ora $OM < \frac{r}{2}$. Poichè la circonferenza $M(MO)$ non taglia più, come in *a)*, il cerchio k, si costruisca il segmento $ON = n \cdot OM$, indicando con n un numero abbastanza grande perchè sia $ON > \frac{r}{2}$; si potrà allora segnare, colla costruzione precedente, il punto N' inverso di N: infine il punto M' sarà definito dalla relazione: $OM' = n \cdot ON'$.

In sostanza noi possiamo, mediante il solo compasso, costruire l' inverso rispetto a k di un punto *qualunque* del piano.

Osservazione. — Se il punto M è tale che si abbia $OM = \mu r$ (ove μ è un intero qualunque), si deduce $OM' = \frac{r}{\mu}$. Si ha così la seguente costruzione della μ^{ma} parte di un segmento: essendo OC il segmento dato (Fig. 9), si costruisca sulla retta OC il punto M per modo che sia $OM = \mu \cdot \overline{OC}$; chiamando M' l' inverso di M rispetto alla circonferenza $O(OC)$, sarà

$$OM' = \frac{1}{\mu} \cdot \overline{OC}.$$

Se si confronta questa costruzione con quella data per il medesimo problema al § 4 (probl. 11), si vede che l' ultima esposta non è che la prima alquanto semplificata e resa più simmetrica, sicchè in pratica è più conveniente. Più in generale, la costruzione ora indicata risolve il problema: « Costruire il terzo proporzionale dopo due segmenti dati »; ed allora richiama subito alla mente la costruzione corrispondente del § 4 (probl. 10), della quale è un po' più semplice. Del resto, per quel che riguarda la divisione di un segmento in parti uguali, la presente costruzione si trova già esposta nel libro di MASCHERONI per il caso di $\mu = 2$; non vi si fa però cenno, neanche lontanamente, del principio dei raggi reciproci.

Ricorderemo le seguenti proprietà della trasformazione per raggi reciproci.

Una retta *non* passante per O è trasformata in un cerchio che passa per O, ed il cui diametro condotto per O è perpendicolare alla retta. E viceversa.

Un cerchio *non* passante per O è trasformato in un cerchio che corrisponde al primo in un' omotetia di centro O.

Una retta *passante* per O è trasformata in sè stessa.

Vogliasi ora

21) *nell'inversione rispetto a* k *costruire il centro della circonferenza corrispondente alla retta data* RS *non passante per* O.

Sia M (Fig. 10) il simmetrico di O rispetto alla retta RS, e sia M' l' inverso di M rispetto a k; se allora diciamo H il punto comune alle rette OM e RS, e H' il suo inverso, sarà OH' un diametro del cerchio corrispondente alla retta RS, onde il cerchio stesso avrà per centro il punto medio fra O e H'. Ma poichè è

$$OM = 2 \cdot \overline{OH},$$

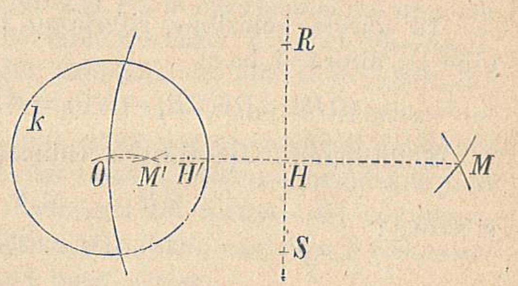

Fig. 10.

sarà di conseguenza $OH' = 2 \cdot OM'$; dunque M' è il punto medio del segmento OH', e quindi è il centro domandato.

22) *Nell' inversione rispetto a* k *costruire il centro della circonferenza* γ' *corrispondente alla data* γ *non passante per* O.

Se M è l' inverso di O rispetto a γ, e M' è l' inverso di M rispetto a k, sarà M' il centro domandato. Difatti: supposte costruite (Fig. 11) le circonferenze γ e γ', diciamo Ω e M' i loro centri rispettivi, e costruiamo il punto M inverso di M' rispetto a k. Siano R e R_1 i punti d'incontro della retta $O\Omega$

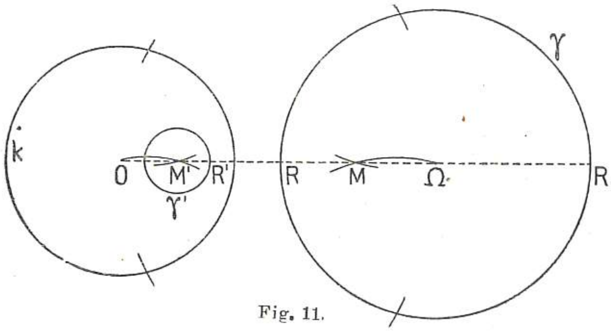

Fig. 11.

colla circonferenza γ, e si chiami R' il punto in cui la retta stessa incontra γ' e che corrisponde a R nell'inversione rispetto a k; vuol dire allora che R' corrisponde a R_1 nell'omotetia di centro O nella quale γ' corrisponde a γ. Avremo così le relazioni:

$$\frac{OR_1}{OR'} = \frac{O\Omega}{OM'} \text{ (per l'omotetia anzidetta),}$$

e $\quad OR \cdot OR' = OM \cdot OM'$ (per l'inversione rispetto a k),

dalle quali, moltiplicando membro a membro, otteniamo:

$$OR \cdot OR_1 = OM \cdot O\Omega.$$

In questa relazione riferiamo tutti i segmenti all'origine Ω; allora si ha:

$$(\Omega R - \Omega O)(\Omega R_1 - \Omega O) = (\Omega M - \Omega O) \cdot \Omega O.$$

Sviluppando i prodotti e riducendo, coll'osservare che è

$$\Omega R = - \Omega R_1,$$

si trova:

$$\Omega O \cdot \Omega M = \overline{\Omega R}^2,$$

la quale prova che i punti O ed M sono inversi rispetto al cerchio γ. Questo dimostra l'esattezza della costruzione indicata pel centro di γ' [1].

[1] La dimostrazione che l'ADLER dà per questa costruzione non è quella da noi esposta: essa è più breve, ma cade in difetto in tutti quei casi in cui da O non si possono tirare le tangenti a γ e a γ': la nostra, se è meno semplice, ha però il vantaggio di esser valida in ogni caso.

Osservazione. — La circonferenza corrispondente di una retta nell' inversione si può senz' altro descrivere quando se ne sia costruito il centro, poichè si sa inoltre che essa deve passare per O. Al contrario la conoscenza del centro non basterà, in generale, per poter descrivere la circonferenza γ' trasformata di un'altra circonferenza γ, ma bisognerà ancora determinare l'inverso di un punto qualunque di γ; quest'ultima operazione diventa inutile nel solo caso in cui γ tagli il cerchio fondamentale della trasformazione, poichè i punti di questo corrispondono a sè stessi.

§ 8. **Dimostrazione, mediante l' inversione, della risolubilità dei problemi elementari col solo compasso.** — Si abbia da risolvere nel piano un problema P, nel quale non intervengano altre linee all' infuori di rette e di circonferenze, e si chiami F la figura che risulta dal considerare tutti i punti e tutte le linee che compaiono nel problema, anche se vi figurano soltanto come elementi ausiliari di costruzione. Si descriva un cerchio k il cui centro O non stia su nessuna di quelle linee, e si costruisca la figura F' inversa di F rispetto a k: per le proprietà poco sopra notate dell' inversione, la F' sarà composta unicamente di cerchi, i quali si potranno ottenere, col solo compasso, dalle linee di F mediante le eleganti costruzioni del § 7. Il problema P, consistente nel tracciare un certo numero di rette e di circonferenze, viene allora trasformato in un altro problema P', la cui risoluzione importa soltanto la costruzione di circonferenze. I punti, che costituiscono la risoluzione del problema P, non sono altro che gli inversi, rispetto a k, dei punti che danno la soluzione del problema P; da quelli adunque si può passare a questi mediante la solita inversione. E poichè tutte queste trasformazioni non richiedono l' uso di altri strumenti all' infuori del compasso, si conclude che *ogni problema, risolubile con riga e compasso, si può risolvere soltanto con quest' ultimo.*

§ 9. **Cenno sull' applicazione dell' inversione alla risoluzione di alcuni problemi elementari.** — Circa l' applicazione sistematica del principio dell' inversione alla risoluzione, col solo compasso, dei problemi elementari, si presenta la stessa osservazione che fu fatta fin dal principio riguardo al metodo di Mascheroni; tanto l' uno, cioè, quanto l' altro metodo, applicati senza ulteriori avvertenze ad un problema qualsiasi, ne complicano, in generale, la risoluzione grafica. Ma allo stesso modo con cui uno studio più minuto del metodo di MASCHERONI ci ha mostrato (v. §§ 4, 5, 6) come in parecchie questioni esso si giovi di artifizi speciali i quali lo rendono preferibile agli altri metodi più noti, così è ovvio pensare che un fatto analogo si verifichi in ordine al metodo dell' ADLER. Per quanto non vi sia dubbio sull' utilità di una ricerca completa delle varie categorie di problemi a cui l' inversione si applica con vantaggio, pure non intendo qui di intraprendere questo studio; dirò soltanto che sono di due specie i riguardi che bisogna avere nell' applicazione del metodo: utilizzare, in primo luogo, per quanto è possibile, le proprietà dell' inversione, e scegliere ciascuna volta con cura il cerchio fondamentale della trasformazione.

Per fare un esempio, supponiamo che si debba risolvere questo problema:

23) *Costruire il centro del cerchio passante per tre punti* A, B, C *non allineati.*

Si potrà procedere nel modo seguente. Descrivo la circonferenza $k \equiv A(AB)$, e nell'inversione rispetto ad essa costruisco il punto C' corrispondente di C: la retta BC' è evidentemente la trasformata del cerchio (A, B, C) nell' inversione medesima. Se allora cerco il simmetrico M' di A rispetto alla retta BC', e di esso l' inverso M rispetto a k, avrò in M il centro richiesto.

Questa costruzione, tenendo conto che si compie col solo compasso, è abbastanza semplice e non manca di eleganza; ed è mediante una scelta appropriata del cerchio k che ad essa si pervenne.

Esiste poi tutta una classe di problemi per i quali il metodo dell' inversione sembra specialmente indicato: sono le costruzioni da eseguirsi entro il foglio su elementi inaccessibili. È chiaro difatti che, trasformando con una conveniente inversione la figura quale ci è data, si potrà sempre, praticamente, agli elementi, che cadono fuori del foglio, sostituirne altri contenuti nei limiti del disegno; a questo punto la soluzione completa della questione diventa ovvia, se pure non è addirittura ottenuta.

Mostriamo su un problema speciale, del quale già si conoscono innumerevoli soluzioni, come si attui il concetto ora espresso. Si voglia

24) *individuare la retta che congiunge un punto* P *col punto* Q *inaccessibile comune a due rette date* AB, CD.

Descritta una circonferenza k di centro P, si costruiscano le circonferenze che corrispondono alle due rette date nell'inversione rispetto a k; quelle due circonferenze passano entrambe per P, e si tagliano perciò in un secondo punto, il quale non sarà altro se non il punto Q' inverso di Q. Siccome i punti P, Q, Q' sono allineati, la retta che si domanda è la PQ'. Si capisce come sia sempre praticamente possibile avere il punto Q' nei limiti del disegno. Se difatti la circonferenza k lascia all'esterno anche una sola delle rette AB, CD, una delle due circonferenze corrispondenti a queste due rette sarà necessariamente tutta interna a k, e quindi il punto Q' cadrà pure entro k. Basterà dunque, pel nostro scopo, scegliere il raggio di k abbastanza piccolo.

Se nel problema medesimo si sostituisse, alle due rette che individuano il punto Q, due circonferenze, si potrebbe ancora eseguire una costruzione analoga: solo vi sarebbe da osservare, per ragioni di semplificazione, che è conveniente, in questo caso, descrivere il cerchio k in modo che tagli entrambe le circonferenze date; e ciò in base all'osservazione con cui finisce il § 7.

Farò ancora un esempio. Si vuole

25) *descrivere la circonferenza il cui centro è un punto dato* O, *e che passa per un punto* P, *inaccessibile, comune a due circonferenze* α *e* β *di centri* A *e* B *rispettivamente.*

Notiamo subito un caso in cui il problema ammette una soluzione immediata senza ricorrere all'inversione: è il caso in cui cadano nel foglio i punti A e B, il punto P_1 in cui le circonferenze α e β si tagliano oltre che in P, ed il punto O_1 simmetrico di O rispetto alla retta AB. Allora difatti si ha $OP = O_1P_1$, e quindi la circonferenza domandata è la $O(O_1P_1)$. Si vede, anzi, che si può fare a meno di uno dei due punti A e B; giacchè se si ha nel disegno, ad es., il solo punto B, una circonferenza qualunque di centro B taglia la α in due punti R, S simmetrici rispetto alla retta AB, e quindi due circonferenze qualunque di centri R e S si tagliano in due punti della retta AB: sicchè possiamo, anche in assenza di A, trovare altri punti della retta AB.

Supposto invece che siano contenuti nel disegno i punti A e B, ma non O_1 (la presenza di P_1 ora non ha più interesse), il problema si risolve comodamente mediante l' inversione. Difatti le circonferenze α' e β', inverse di α e β rispetto ad un cerchio k di centro O, si tagliano in due punti P' e P_1', inversi di P e P_1 rispettivamente; allora la $O(OP')$ sarà l' inversa della circonferenza domandata, onde prendendo su di essa un punto M' e cercandone l' inverso M (avendo cura di scegliere M' in modo che M non cada fuori del foglio), la circonferenza che si richiede sarà la $O(OM)$.

Anche qui si otterrà qualche risparmio di costruzione descrivendo la circonferenza k in maniera che tagli tanto α quanto β.

Lo stesso problema, sostituendo le circonferenze α e β con due rette, si risolve pure facilmente coll' inversione.