ARTICOLO TERZO

« Sulla risoluzione dei problemi geometrici colla riga e cogli istrumenti lineari: contributo della Geometria proiettiva »
di Amedeo Giacomini ad Alessandria d'Egitto.

Due scopi, strettamente congiunti, sono proposti a questo articolo: mostrare le più elementari applicazioni del fecondo principio delle *proiezioni*, inteso come *metodo di risoluzione* dei problemi costruttivi; svolgere sistematicamente le costruzioni geometriche coll'*uso della sola riga*, adoperando, ove occorra, una figura fondamentale data nel foglio del disegno (un parallelogramma, un quadrato, un cerchio....). In fine abbiamo dedicato anche un cenno alle principali costruzioni cogli istrumenti lineari (*riga a due orli, squadra e falsa squadra*).

Questi sviluppi si riattaccano alle applicazioni della Geometria proiettiva, della quale abbiamo dovuto quindi riassumere, nella forma più elementare, alcuni concetti e resultati; così per es. il birapporto, i gruppi armonici, le punteggiate proiettive e i loro punti uniti, sono considerati in una rapida trattazione.

I resultati, che formano oggetto della nostra esposizione elementare, sono molto notevoli sotto l'aspetto pratico; essi pongono in luce, anzitutto le costruzioni lineari (grafiche e metriche) relative ai problemi di 1° grado, poi anche le costruzioni relative ai problemi di 2° grado nelle quali la riga è capace di surrogare interamente il compasso quando sia descritto un cerchio fondamentale; la riga a due orli e la squadra o la falsa squadra (opportunamente adoperate) permettono di effettuare le medesime costruzioni senza il cerchio fisso.

Si arriva pertanto a stabilire un giudizio relativo sul valore degli istrumenti elementari, sebbene questo giudizio sia « limitato ad affermare, nei varii casi, la possibilità di effettuare con un istrumento le costruzioni date da un altro istrumento », venendo rimesso alla Geometria analitica e all'Algebra (art. IV, V) il giudizio sulla « impossibilità di risolvere certi problemi con certi istrumenti ».

In compenso la Geometria proiettiva supera il punto di vista analitico nell'insegnamento delle effettive costruzioni più semplici, e porge un metodo istruttivo per la ricerca di esse.

Ci siamo fermati in ispecie sopra un modo particolare di applicazione del metodo proiettivo, cui si collega una elegante risoluzione di varii problemi classici (problemi di sezione d'Apollonio e problema di Giordano d'Ottaiano).

Qualche lettore, familiare coi concetti della Geometria proiettiva, potrebbe desiderare che la trattazione venisse lumeggiata sotto un aspetto più elevato. Questa esigenza, in contrasto col carattere elementare che abbiamo voluto serbare al nostro scritto, non può essere appagata; ma talune osservazioni critiche (ed in ispecie quelle che, sotto questo titolo abbiamo raccolto in uno speciale paragrafo) permetteranno ad un tal lettore di riattaccare i resultati qui esposti alle nozioni più astratte della moderna Geometria, illuminando per es. la considerazione dei problemi metrici col riferimento all'involuzione assoluta del piano.

In luogo di notizie storiche più ampie diamo il seguente indice bibliografico dei principali lavori che si riferiscono all'argomento e di cui ci siamo valsi per questo studio:

Lambert. *Freie Perspective,* (1774) — Servois. *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique,* (Paris, 1805) — Brianchon. *Des applications de la théorie des transversales,* (Paris, 1818) — Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures,* (Paris, 1822) — Steiner. *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises,* (Berlin, 1833, Gesammelte Werke, Berlin, 1881; Osdwald, Klassiker, N. 60, Leipzig, 1895) — Frischauf. *Die geometrischen Contructionen von Mascheroni und Steiner,* (Graz, 1869) — Cremona. *Geometria proiettiva,* (Torino, 1872, Trad. Fr. R. von Frankrest, Stuttgart, 1882) — N. Hankel. *Die Elemente der projektivischen Geometrie,* (Leipzig, 1875) — Adler. *Uber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel* (Sitzungsbe-

richte der math-naturw. Klasse der K. Akademie der Wiss. zu Wien B. 99, 1890) — LONGCHAMPS, *Essai sur la Géometrie de la Règle et de l'Équerre,* (Paris, 1890) — KLEIN. *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria Elementare,* Trad. di F. GIUDICE, (Torino, 1896) — ENRIQUES, *Lezioni di Geometria Proiettiva,* (Bologna, 1898) — SEVERI, *Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso* (Palermo, Circ. mat. Rendiconti, 1904).

§ 1. **Proiezioni; proprietà grafiche e proprietà metriche.** — Prendiamo le mosse dalla seguente osservazione fondamentale: Se si proietta una figura piana F da un qualunque punto esterno (centro) sopra un altro piano qualunque, non passante per esso, si ottiene una figura F' la quale ha comuni con F *certe proprietà* (proprietà *proiettive*).

Volendo analizzare le proprietà che hanno nel senso suddetto carattere proiettivo, vi ha luogo a distinguere anzitutto due classi di relazioni geometriche:

1) le *relazioni grafiche* inerenti all'*appartenersi* di punti e linee, e in particolare di punti e rette, al *susseguirsi* di più punti sopra una linea ecc.;

2) le *relazioni metriche,* in cui si tratta della *grandezza* (o misura) di segmenti o di angoli (uguaglianza e proporzionalità, perpendicolarità di rette ecc.).

Le proprietà grafiche sono proiettive, purchè si faccia la convenzione di riguardare due rette parallele come intersecantisi in un *punto improprio* (*all'infinito*), e due piani paralleli come secantisi in una *retta impropria* contenente tutti i loro punti impropri.

Questa convenzione porta a modificare l'ordinaria intuizione della retta, la quale (conformemente al postulato di EUCLIDE) viene ad essere concepita come una *linea chiusa* attraverso il suo punto improprio [1].

Il parallelismo di due rette deve quindi essere considerato come una relazione metrica, involgente un giudizio sulla (infinità della) distanza del loro punto comune.

Le proprietà metriche sono d'ordinario alterate da una proiezione della figura. Si trovano però alcune relazioni metriche proiettive di cui parleremo tra poco.

Il principio delle proiezioni si può considerare (con

[1] Cfr. per es. ENRIQUES « *Lezioni di geometria proiettiva* ».

Poncelet) come un metodo di generalizzazione e di scoperta, la cui utilità nella risoluzione dei problemi vogliamo appunto mettere in luce.

L'applicazione che ne faremo ricorrerà di frequente alle due proposizioni seguenti, che si giustificano immediatamente:

Si può sempre proiettare due rette secantisi, in due rette parallele (cioè si può proiettare una figura piana in modo che un suo punto proprio vada in uno improprio).

Si può ancora proiettare due coppie di rette secantisi in due coppie di parallele (cioè si può proiettare una figura piana in modo che una sua retta propria vada in una retta impropria).

§ 2. **Osservazioni preliminari sui problemi risolubili colla riga.** — Proponiamoci di cercare la risoluzione dei problemi costruttivi adoperando fin dove è possibile la *sola riga*.

Giova osservare anzitutto che la costruzione fondamentale del congiungere due punti, dataci dall'istrumento, ci porge soltanto il modo di verificare e di esprimere, la relazione grafica dell'appartenersi fra punti e rette. Dunque *i problemi risolubili colla sola riga debbono potersi tradurre nella ricerca di elementi incogniti aventi soltanto relazioni grafiche cogli elementi dati.*

I problemi metrici più elementari non si trovano in questo caso; è impossibile per es. di tradurre in una relazione grafica il parallelismo o la perpendicolarità di due rette, l'uguaglianza di due segmenti ecc., poichè altrimenti queste relazioni dovrebbero conservarsi invariate per una proiezione (cfr. art. IV).

Accade però che certe relazioni metriche si convertono in relazioni grafiche rispetto ad *elementi dati soddisfacenti già a qualche condizione metrica prestabilita;* così per es. dire che « una retta c deve essere parallela a due rette date a e b, parallele fra loro » equivale a dire che « la c passa pel punto (improprio) comune alle due parallele date ».

In questo senso si presentano dunque, accanto ai *problemi* propriamente *grafici* risolubili colla riga, anche dei *problemi metrici.* Il metodo delle proiezioni c'insegnerà quale rapporto passi tra gli uni e gli altri.

§ 3. **I teoremi di *Desargues* e di *Pappo* ed i problemi lineari grafici.** — I problemi grafici elementari risolubili colla riga, si riducono in sostanza a determinare il punto d'incontro di due rette date ed a congiungere con una retta due punti dati. Queste due costruzioni fondamentali, tanto semplici quanto importanti, non darebbero luogo ad alcuna notevole considerazione, se non volessimo riguardarle particolarmente sotto l'aspetto *pratico*. Osserviamo infatti che talvolta i punti e le rette che si considerano come *dati* possono non comparire entro il foglio del disegno, ma essere ciò non ostante *individuati* mediante altri elementi che invece compaiono entro il foglio: così un punto può essere dato fuori del foglio come punto d'incontro di due rette, che hanno una parte nel foglio; una retta può essere data mediante due suoi punti, dei quali uno o entrambi siano dati fuori del foglio.

In questi casi, la risoluzione di tutti i problemi grafici di primo grado si può raggiungere mediante il seguente *teorema dei triangoli omologici* di DESARGUES.

Se due triangoli senza elementi comuni (lati o vertici), sono riferiti fra loro lato a lato, vertice a vertice, e se le coppie di lati omologhi si incontrano rispettivamente in tre punti appartenenti ad una stessa retta, le tre congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto; ed inversamente, se le tre congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto, i lati omologhi s'incontrano in tre punti della medesima retta.

Sono a considerarsi come casi particolari in questo teorema, quelli in cui i due triangoli abbiano due lati omologhi paralleli alla retta che congiunge i punti di incontro delle altre due coppie, ovvero abbiano i lati omologhi rispettivamente paralleli, ovvero le tre congiungenti i vertici omologhi siano parallele anzichè concorrenti in un punto.

Fissiamo la nostra attenzione sul caso particolare di due triangoli (*omotetici*) coi lati paralleli.

In questo caso il fatto che le congiungenti i vertici opposti passino per un punto (proprio o improprio) è una conseguenza delle proprietà elementari delle proporzioni (cfr. art. VII del vol. I).

Orbene la figura piana costituita da due triangoli tali che le coppie di lati corrispondenti concorrano in punti di una medesima retta r, può sempre pensarsi come proiezione di quella costituita da due triangoli omotetici, precisamente quelli che si otterrebbero proiettando i triangoli dati da un punto arbitrario P, sopra un piano parallelo al piano Pr.

E poichè si tratta di una proprietà grafica, avente perciò carattere proiettivo, il teorema resta così dimostrato.

La sua inversione non presenta difficoltà.

Con l'aiuto del teorema di DESARGUES esporremo qui la soluzione dei quattro problemi più semplici che si possano presentare, quelli cioè nei quali si chiede di congiungere due punti mediante una retta quando uno di essi o entrambi siano dati fuori del foglio, come intersezione di coppie di rette assegnate; e di determinare il punto comune a due rette quando una di esse od ambedue siano date fuori del foglio, mediante coppie di punti individuate nel modo detto innanzi.

1°. - *Condurre una retta per due punti, dei quali uno è dato fuori del foglio* (fig. 1). Siano P ed (aa') i due punti dati.

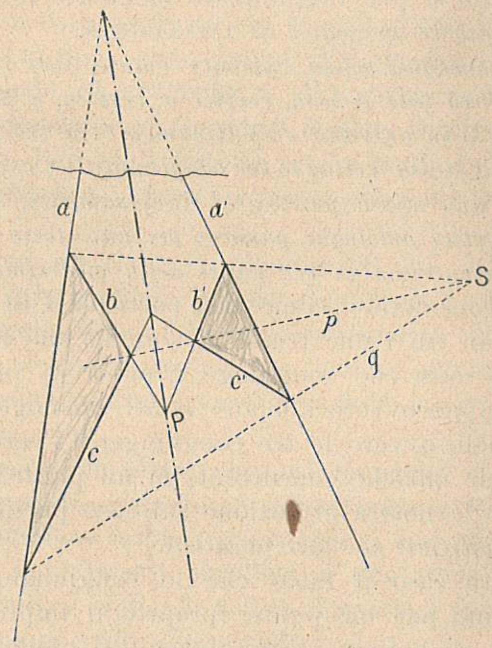

Fig. 1.

Si conducano per P due rette arbitrarie b, b'; per il punto S, scelto arbitrariamente sulla congiungente i punti (ab), $(a'b')$, si tirino i due raggi arbitrarî p, q, e si completino i due trilateri omologici abc, $a'b'c'$. Il loro *asse di omologia*, determinato sul disegno dai punti (cc') e $(bb') \equiv P$, sarà la retta richiesta.

Può essere comodo scegliere per la retta p quella che congiunge i punti (ab'), $(a'b)$: in tal caso solamente le rette b, b', q si tracciano in modo arbitrario, e la costruzione prende l'aspetto della fig. 2.

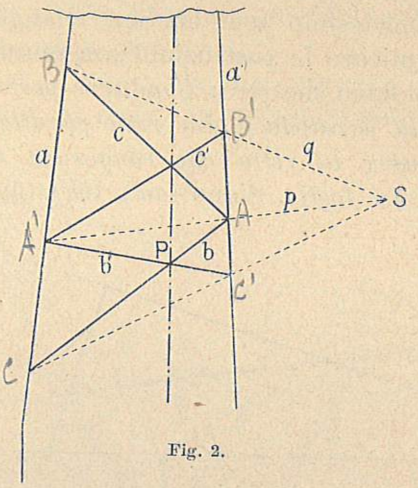

Fig. 2.

Un' altra soluzione del medesimo problema, fondata anch' essa sulla omologia, consiste nel fissare un asse di omologia r (fig. 3) e nel costruire un triangolo che abbia un vertice

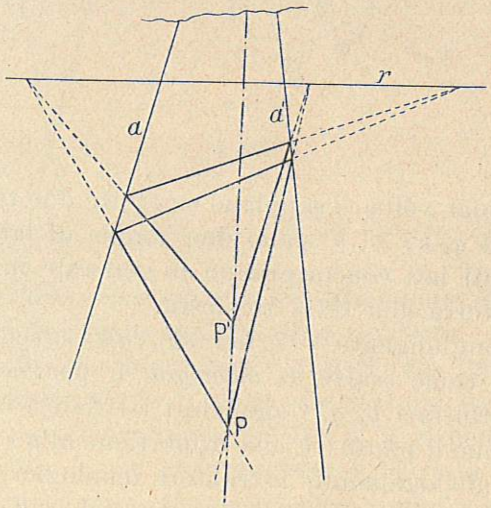

Fig. 3.

in P e gli altri due sulle a, a'; ogni altro triangolo omologico col primo, determina la retta richiesta come congiungente i vertici omologhi P, P'.

Evidentemente queste costruzioni permettono anche di congiungere due punti dati entro il foglio, quando la loro distanza superi la lunghezza della riga che si possiede.

Inoltre, il medesimo teorema sui triangoli omologici ci permette di applicare le costruzioni ora enumerate alla risoluzione del problema metrico: *Condurre per un punto* P *dato entro il foglio la parallela a due rette parallele date* a, a'.

2°. - *Condurre la retta che congiunga due punti, dati entrambi fuori del foglio.* Siano (aa'), (bb'), (fig. 4) i due punti

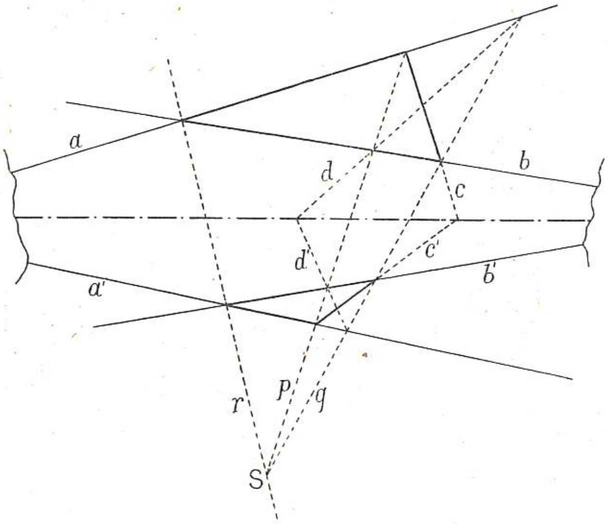

Fig. 4.

dati. Ogni qual volta si sappiano costruire due triangoli omologici, di cui a, b; a', b' siano due coppie di lati omologhi, i due rimanenti lati concorreranno in generale in un punto, il quale apparterrà alla retta richiesta.

Sulla congiungente i vertici (ab), $(a'b')$ si scelga un punto arbitrario S come *centro di omologia*, e per S si conducano due raggi arbitrari p, q. Completati i trilateri omologici abc, $a'b'c'$, si ottiene il punto (cc') che appartiene alla retta richiesta; completati analogamente i trilateri omologici abd, $a'b'd'$, si ottiene pure il punto (dd'). La retta richiesta è quella che passa per i punti (cc'), (dd'). Può accadere che essa cada intieramente fuori del foglio; in tal caso apprenderemo tuttavia a intersecarla con una retta del foglio (problema 3°).

Intanto osserviamo anche qui il caso particolare metrico:

Date due rette parallele a, a', *e dato un punto fuori del foglio* (bb'), *condurre per questo punto la parallela a quelle.*

3° - *Data una retta del foglio, e data una retta fuori del foglio, determinare il loro punto d'incontro, mediante un'altra retta del foglio che passi per esso.*

Siano (aa'), (bb') i punti che determinano la retta data fuori del foglio (fig. 5) e sia c la retta data nel foglio. Basterà

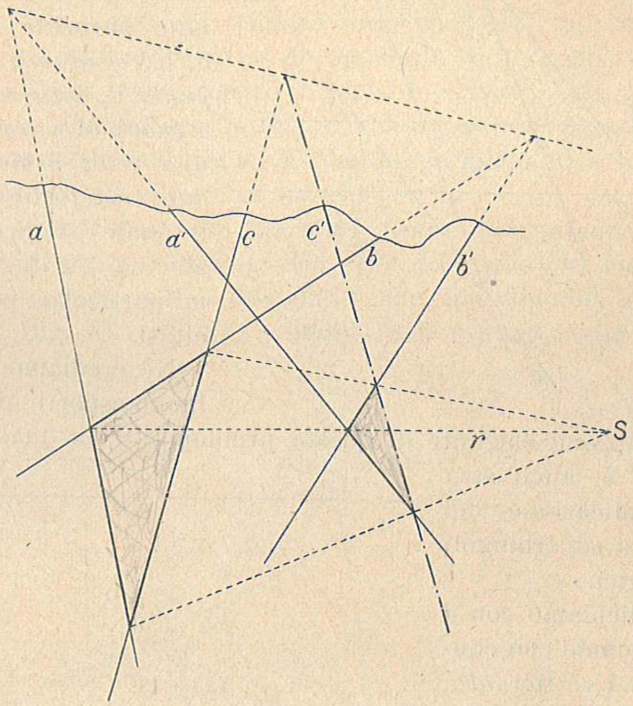

Fig. 5.

anche qui costruire una coppia di trilateri omologici abc, $a'b'c'$; il terzo lato c' incognito sarà la retta richiesta.

Sulla retta r che congiunge i vertici (ab), $(a'b')$ si scelga un centro di omologia S: i raggi che partono da S e vanno ai punti (cb), (ca) determinano sui lati b', a' rispettivamente i vertici $(c'b')$, $(c'a')$, la cui congiungente è la retta richiesta c'.

Si ottengono quante si vogliono rette che rispondono al problema facendo variare il centro di omologia S sulla r. E se si voglia determinare quella che passa per un punto P, dato nel foglio o fuori, converrà congiungerlo col punto (cc') mediante le costruzioni indicate nei due problemi precedenti;

altrimenti si potrà sostituire alla a' la retta a'' che congiunge P col punto (aa'), e scegliere per centro di omologia il punto in cui la r incontra la retta P (ac).

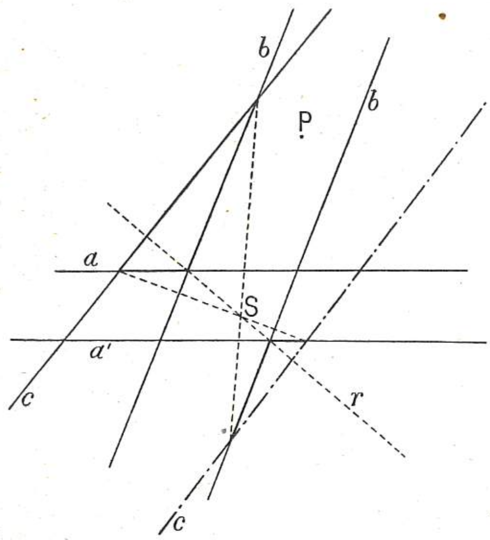

Fig. 6.

La costruzione esposta si applica evidentemente al caso particolare metrico: *Date sul foglio del disegno due coppie di rette parallele* a, a' *e* b, b', *condurre per un punto* P, *dato nel foglio o fuori, la parallela ad una retta arbitraria* c *data nel foglio* (fig. 6), il quale si ricondurrà ad uno dei due problemi particolari più sopra citati.

Nè crediamo fuori di luogo esporre qui un'altra soluzione elegante di questo problema (1), la quale in sostanza è anch' essa un' applicazione del teorema sui triangoli omologici.

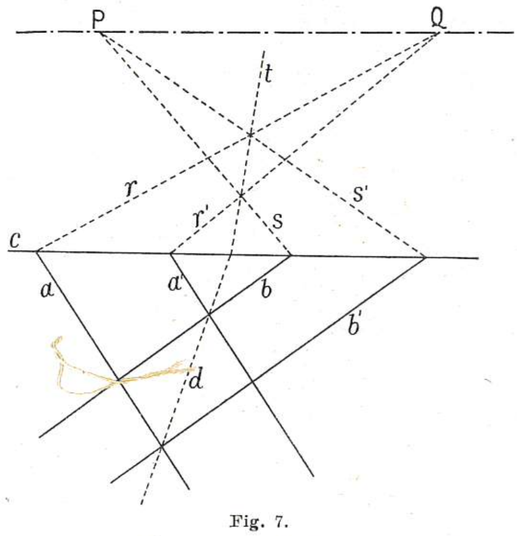

Fig. 7.

Indichiamo con d la diagonale che congiunge i vertici (ab'), $(a'b)$ del dato parallelogramma (fig. 7), con s, s' le rette che congiungono P rispettivamente coi punti (bc), $(b'c)$, e finalmente con t una qualsivoglia retta passante per il punto (dc).

La retta r che congiunge i punti (ac), (ts') incontra la retta r' che congiunge i punti $(a'c)$, (ts) in un punto Q, il

(1) Lambert, l. c.

quale starà con P sopra una medesima parallela alla retta data c.

Si consideri infatti la c come intersezione di due piani, dei quali l'uno, α, contenga le rette date a, a', b, b' e l'altro, β, contenga le rette r, r', s, s'; si vedrà intanto, che i due piani (ar), $(a'r')$ si intersecano secondo una retta q passante per Q e parallela al piano α, e che analogamente i piani (bs), $(b's')$ si intersecano secondo una retta p passante per P e parallela al piano α.

Le due coppie di trilateri omologici abd, rst; $a'b'd$, $r's't$ hanno un comune centro di omologia S, il quale dovendo giacere sopra tutti quattro i piani (ar), $(a'r')$, (bs), $(b's')$ giacerà sopra entrambe le rette p, q. Queste ultime stanno dunque sopra un medesimo piano, il quale è parallelo ad α; e la PQ è parallela quindi alla retta data c.

4°. - *Date due rette fuori del foglio, determinare il loro punto d'incontro, mediante due rette del foglio che passino per esso.* Siano (ab), $(a'b')$ i due punti che individuano la prima retta r (fig. 8), (ef), $(e'f')$ quelli (non segnati nella figura),

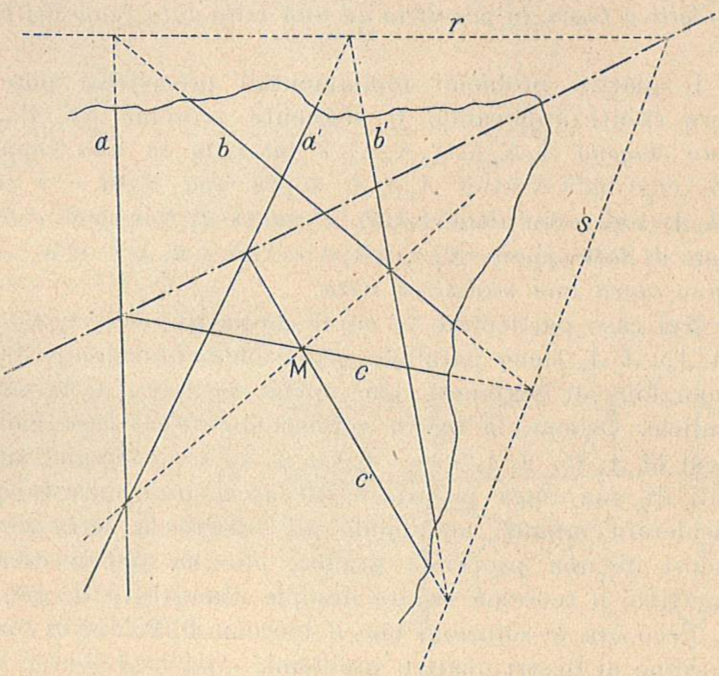

Fig. 8.

che individuano la seconda retta s. Conviene qui di considerare il punto d'incontro delle due rette date come centro di omologia di due triangoli omologici. Se a, b sono due lati di uno di questi triangoli, e a', b' sono i lati omologhi dell'altro, il loro asse di omologia è la retta che passa per i punti (aa'), (bb').

Con le costruzioni precedenti, e valendosi dei punti (ef), $(e'f')$, si determini una qualunque retta del foglio che passi per il punto in cui la b incontra la s: sia c questa retta, e sia M il suo punto d'incontro coll'asse di omologia. Si congiunga M col punto $(b's)$. Si avranno così i due triangoli omologici abc, $a'b'c'$; e la retta che congiunge i vertici (ac), $(a'c')$ passa per il centro di omologia.

Facendo variare la retta c, e quindi la c', si hanno quante si vogliano rette passanti per il punto richiesto: basterà determinarne due qualunque per poter poscia congiungere il loro punto di concorso, cioè il punto (rs), con un punto P dato arbitrariamente nel foglio o fuori.

Notiamo anche qui il caso particolare metrico: *Date due coppie di rette parallele* a, b *e* a', b' *condurre da un punto* P, *dato nel foglio o fuori, la parallela ad una retta data fuori del foglio.*

I quattro problemi fondamentali precedenti potevano essere risolti applicando il seguente teorema (di Pappo): *Se un esagono* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *è inscritto in una coppia di rette* (cioè ha i vertici $A_1A_3A_5$ sopra una retta e i vertici $A_2A_4A_6$ sopra un'altra retta), *i punti di concorso delle tre coppie di lati opposti* A_1A_2, A_4A_5; A_2A_3, A_5A_6; A_3A_4, A_6A_1 *stanno sopra una medesima retta.*

Nel caso particolare in cui le coppie di rette A_1A_2, A_4A_5 e A_2A_3, A_5A_6 sieno parallele, segue elementarmente da una proporzione di segmenti, che anche le A_3A_4, A_6A_1 saranno parallele. Orbene, la figura corrispondente al caso generale in cui le A_1A_2, A_4A_5 e le A_2A_3, A_5A_6 s'incontrano in due punti di una retta propria r, si lascia proiettare in quella considerata innanzi mandando all'infinito la retta r. Trattandosi di una proprietà grafica, che ha perciò carattere proiettivo, il teorema risulta dunque dimostrato in generale.

Ecco ora le soluzioni che il teorema di Pappo ci fornisce in ordine ai nostri quattro problemi:

1°. - *Dato il punto* R *e le rette* a, b *sul foglio del disegno, si tratta di congiungere* R *col punto* P (*inaccessibile*) *comune alle rette* a, b (fig. 9). Tracciate le due rette arbitrarie r, s, indichiamo con le lettere A_2, A_4, A_1, A_5 i punti ar, br, as, bs rispettivamente; e congiungendo poscia il punto R con A_1 e con A_4 completiamo l'esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ inscritto nelle rette r, s. Per il teorema enunciato, la retta che congiunge i punti $R \equiv (A_3 A_4\,,\ A_6 A_1)$, $Q \equiv (A_2, A_3\ A_5 A_6)$ passerà per il punto $P \equiv (a,\ b)$.

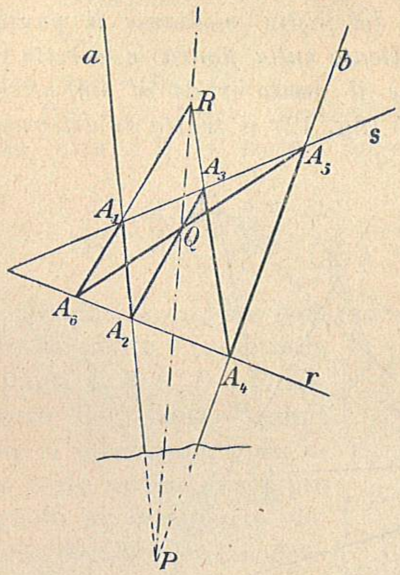

Fig. 9.

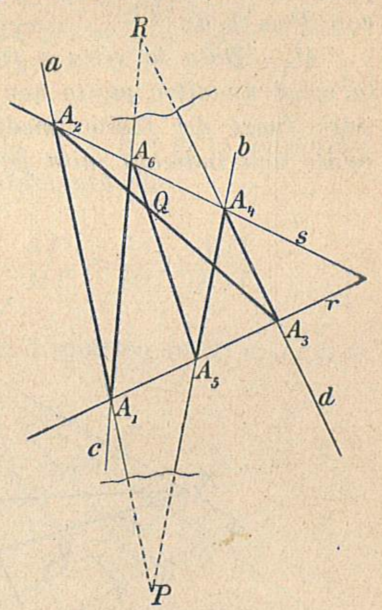

Fig. 10.

2°. - *Date le rette* a, b; c, d (fig. 10), *si tratta di tracciare la retta dei due punti* (*inaccessibili*) P ≡ (a, b) *ed* R ≡ (c, d). Se si traccia una retta arbitraria r per $A_1 \equiv (a, c)$ e un'altra s per $A_4 \equiv (b, d)$, si determina l'esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ inscritto nella coppia r, s; il punto $Q \equiv (A_2 A_3\,,\ A_5 A_6)$ è allineato con P ed R. In modo analogo se ne trova un altro Q' pure allineato con P ed R e si può quindi tracciare la retta $QQ' \equiv PR$.

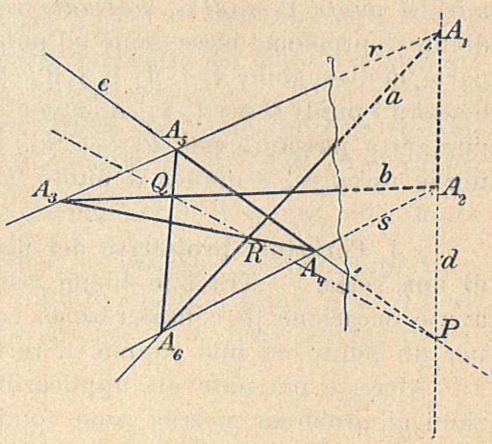

Fig. 11.

3°. - *Data la retta* c *nel foglio del disegno* (fig. 11) *e la retta* d *fuori del foglio* (*determinata mediante i due punti* (r, a), (s, b), *si tratta di determinare una retta passante per* P $\equiv$ (c, d). I sei punti $A_1 \equiv (r, a)$, $A_2 \equiv (s, b)$, $A_3 \equiv (r, b)$, $A_4 \equiv (s, c)$, $A_5 \equiv (r, c)$, $A_6 \equiv (s, a)$ ci dànno un esagono inscritto nella coppia r, s; i punti $Q \equiv (A_2 A_3, A_5 A_6)$ ed $R \equiv (A_3 A_4, A_6 A_1)$ sono allineati con $P \equiv (c, d)$.

4°. - *Data la retta* a *fuori del foglio* (*mediante il punto* (c, s) *ed un altro punto non indicato sulla figura*) *e la retta* b *pure fuori del foglio* (*mediante il punto* (r, d) *ed un altro punto non indicato sulla figura*) (fig. 12) *si tratta di determinare il punto* P $\equiv$ (a, b) *mediante rette passanti per esso.* Mediante i problemi precedenti si può sempre tracciare quella parte dell'esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ che rimane entro il foglio; e allora i punti $Q \equiv (A_2 A_3, A_5 A_6)$ ed $R \equiv A_3 A_4, A_6 A_1)$ ci dànno una retta passante per $P \equiv (a, b)$. Analogamente si può ottenerne un'altra, e quindi il punto P rimane determinato.

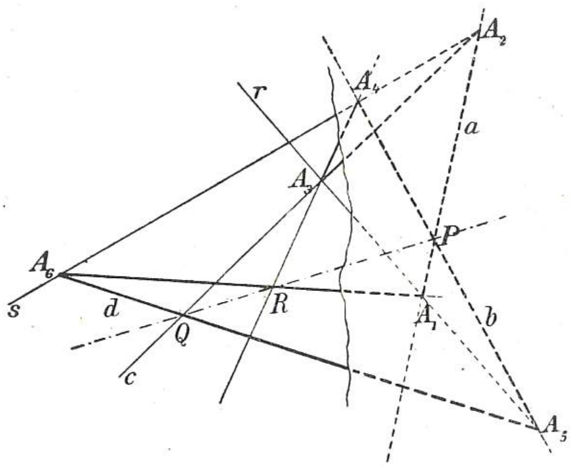

Fig. 12.

§ 4. **Carattere proiettivo del birapporto di quattro punti di una retta.** — Tra i problemi risoluti innanzi abbiamo già avuto occasione di considerare la costruzione della parallela per un punto ad una coppia di rette parallele date.

Altre, e più notevoli, applicazioni del metodo delle proiezioni ai problemi metrici sono fondate sopra la conoscenza di alcune relazioni metriche aventi carattere proiettivo.

La più semplice di queste relazioni ci è offerta dal considerare il *birapporto* (o *rapporto anarmonico*) di quattro punti di una retta. Sussiste infatti il teorema: *Se quattro punti* A, B, C, D *di una retta si proiettano da un punto* O *sui punti* A′, B′, C′, D′ *di un' altra retta, i birapporti*

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad (A'B'C'D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

sono eguali (fig. 13).

Per dimostrarlo conduciamo da A e da B le parallele alla retta $A'D'$; si scorge immediatamente che:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{BR} : \frac{AP}{BS} = \frac{AN}{MN} : \frac{AP}{MP} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

Segando dunque con una retta i quattro raggi *a, b, c, d* che dal punto O proiettano i punti A, B, C, D il birapporto dei quattro punti che si ottengono, presi in un certo ordine, è sempre eguale al birapporto dei punti dati, presi nel medesimo ordine: esso dicesi anche *birapporto* (abcd) *dei quattro raggi* a, b, c, d [1].

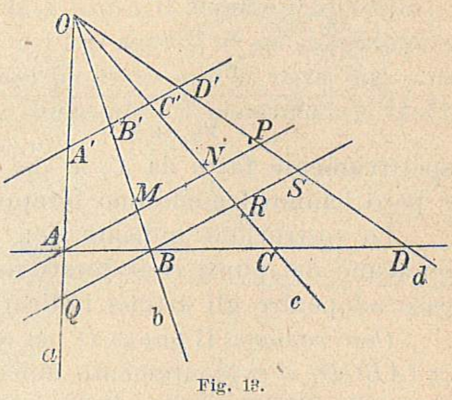

Fig. 13.

Concludiamo quindi che *il birapporto di quattro punti di una retta si conserva invariato per quante si vogliano proiezioni e sezioni.*

Questo teorema sussiste senza eccezione, purchè si convenga che « il birapporto di quattro punti $(ABCD)$ si riduca al rapporto semplice $\frac{AC}{BC}$, quando D è il punto all'infinito della retta », e si stabiliscano le analoghe convenzioni relative al caso in cui sia all'infinito uno dei punti C o B o A, conformemente a ciò che si è indotti a fare da ragioni di continuità.

[1] Giova notare pel seguito che « se due quaterne di raggi formano a due a due angoli uguali, i loro birapporti sono uguali ».

Il carattere proiettivo del birapporto ci permette subito di risolvere colla riga il seguente

Problema. *Date due rette* u, u′ (*di un piano*) (fig. 14), *e sopra di esse rispettivamente i punti* A, B, C, D; A′, B′, C′, *costruire il punto* D′ *per cui il birapporto*

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

Proiettiamo da A' i punti B, C, D, da A i punti B', C'; sieno

$$B'' = AB' \cdot A'B, \quad C'' = AC' \cdot A'C,$$

$u'' = B''C''$.

Proiettiamo quindi D da A' su u'' in D'' e D'' da A su u' in D'. Il punto D' risolve il problema.

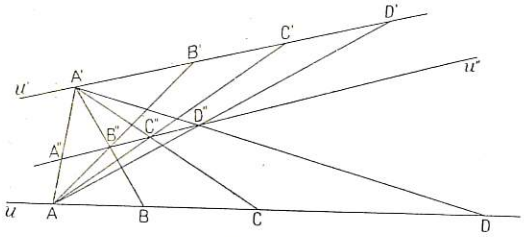

Fig. 14.

Se infatti si considera l'intersezione A'' di AA' con u'', si ha che i gruppi di punti $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono due proiezioni (rispettivamente fatte da A', A) del medesimo gruppo $A''B''C''D''$, e però hanno il medesimo birapporto.

La costruzione indicata non patisce eccezione se anche qualcuno dei punti considerati risulti improprio; basta in tal caso adoperare gli artifici indicati nel precedente paragrafo.

Osservazione. Il punto D' per cui il birapporto $(A'B'C'D') = (ABCD)$ è evidentemente unico, perciò la costruzione conduce allo stesso punto D' ove si prendano come centri di proiezione B, B' (o C, C') al posto di A, A'.

D'altronde in forza del teorema di Pappo (§ 3) la retta u'' non muta, poichè l'intersezione delle BC', $B'C$ cade appunto sulla congiungente di $B'' = A'B \cdot AB'$ e $C'' = A'C \cdot AC'$.

Si noti il caso particolare in cui per es. i punti C, C' coincidano nel punto comune ad u, u'; allora il problema si risolve più semplicemente proiettando D su u' dal punto d'incontro delle AA', BB'.

Il problema precedente può essere posto e risoluto anche nel caso in cui i punti A, B, C, D e A', B', C' sieno sopra una medesima retta u. Ci si può infatti ridurre al caso precedente proiettando il gruppo $ABCD$, da un qualsiasi punto sopra una retta u' diversa da u.

§ 5. **Gruppi armonici.** — Rileviamo ora un caso particolare importante del teorema del birapporto.

Un gruppo di 4 punti A, B, C, D sopra una retta dicesi *armonico* se il birapporto

$$(ABCD) = -1;$$

C e D diconsi *coniugati armonici* rispetto ad A e B, e similmente A e B coniugati rispetto a C, D.

Due punti coniugati armonici rispetto ad altri due, ne dividono il segmento, internamente ed esternamente, nello stesso rapporto.

Il precedente teorema generale ci dice che « la proiezione di un gruppo armonico è un gruppo armonico ».

Questa osservazione può essere utilizzata per costruire in generale, sopra una retta, il coniugato armonico di un punto rispetto ad altri due.

Tale costruzione è fondata sopra il teorema seguente:

I due punti d'incontro dei lati opposti di un quadrilatero, sono divisi armonicamente dai punti in cui la retta loro congiungente è intersecata dalle diagonali del quadrilatero stesso.

La dimostrazione si ottiene riducendosi con una proiezione ad un caso particolare.

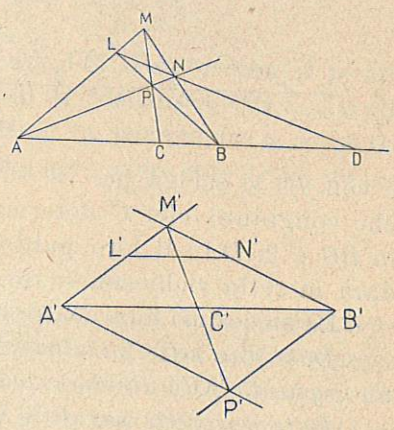

Fig. 15.

Sia $LMNP$ un quadrilatero (fig. 15), $A \equiv LM \cdot NP$, $B \equiv MN \cdot LP$, C e D i punti d'incontro della retta AB colle diagonali MP, LN.

Proiettiamo la figura sopra un altro piano in guisa che la retta LN vada all'infinito; indicando colle lettere accentate le proiezioni dei punti A, B, C, D, L, M, N, P si ha che $A'M'B'P'$ sono i vertici di un parallelogramma; *perciò* $M'P'$ biseca $A'B'$, mentre $L'N'$ incontra $A'B'$ nel punto all'infinito D'_∞. I punti C', D'_∞ essendo coniugati armonici rispetto ad A', B', altrettanto accade di C, D rispetto ad A, B, c. d. d.

§ 6. **Problemi lineari metrici.** — La proprietà grafica del gruppo armonico dimostrata nel precedente paragrafo, ci permette di costruire *colla sola riga* il coniugato armonico di un punto di una retta, rispetto ad altri due.

In particolare se si considera *dato graficamente il punto all'infinito* mediante una parallela alla retta, vediamo che « si può bisecare colla sola riga un segmento quando è data una parallela, ad esso » e viceversa « si può condurre una parallela ad una retta data, quando sia dato sopra di essa il punto medio di un segmento ».

Ecco le più semplici costruzioni, che risolvono i suddetti problemi.

Dati sopra una retta due segmenti eguali contigui, condurre per un punto esterno M *la parallela alla retta.* Siano AC, CB i due dati segmenti eguali (fig. 16) si congiunga M con A

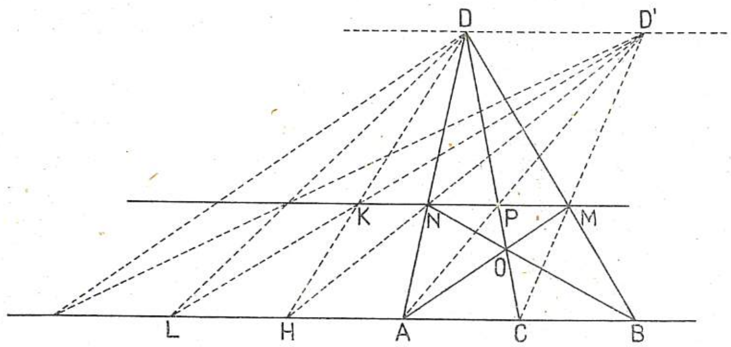

Fig. 16.

e con B; si scelga per es. sulla AM un punto qualunque O, che congiunto con C determinerà il punto D; si descrivano la BO e la DA; il loro punto d'incontro N, congiunto con M, darà la retta richiesta.

La medesima figura offre la soluzione dei seguenti problemi:

Date due rette parallele MN, AB, *e sopra una di queste un segmento* AC, *dividere questo segmento in due parti eguali.*

Date due rette parallele MN, AB, *e sopra una di queste un segmento* AB, *raddoppiare questo segmento.*

E quest'ultimo, ripetuto più volte, permette di *costruire colla sola riga un segmento multiplo di un segmento dato*, purchè si conosca una parallela al medesimo.

Le costruzioni precedenti c'insegnano anche a risolvere in un nuovo modo il problema di « *condurre per un punto la parallela a due rette parallele date* » (cfr. § 3); basterà assumere sopra una delle rette date un segmento arbitrario, che si dividerà in due parti eguali; e si proseguirà poscia colla costruzione sopra indicata.

Ma è utile fare la osservazione seguente. Se sono date le parallele AB ed MN ed il punto D, e se si indica con P il punto di mezzo del segmento MN (fig. 16), si può subito trovare un punto che stia con D sulla stessa parallela ad AB; esso è il punto D' in cui si intersecano le AP, CM; infatti i due rapporti $DN : DA$, $D'P : D'A$ sono entrambi eguali al rapporto $NP : AC$.

È anche notevole che le rette $D'N$, DH; $D'K$, DL, ecc. offrono un mezzo semplice per costruire un segmento multiplo di BC o di PM.

Le costruzioni precedenti ci permettono ora di risolvere colla riga un altro problema fondamentale:

Date due rette parallele, fare scorrere un segmento di una di esse, sopra la retta medesima.

Sia AB un segmento, C un punto della retta AB e vogliasi costruire il punto D per cui è, in grandezza e segno,

$$AB = CD.$$

Servendosi della parallela ad AB, si determini il punto medio O del segmento BC, quindi si costruisca $OD = AO$ (1).

Questa costruzione ci apprende in particolare *a sommare e sottrarre due segmenti dati comunque sopra una retta*, mercè una parallela a questa.

Passiamo ora ad un nuovo problema.

Dati sopra una retta tre segmenti a, b, c la *costruzione del quarto proporzionale* dopo di essi, si effettua subito quando si abbia una parallela alla retta, adoperando il teorema di Talete (cfr. art. IV). Si ha così la *moltiplicazione del segmento* c pel rapporto $b : a$, geometricamente dato.

La moltiplicazione di un segmento si presenta sotto un aspetto diverso se il moltiplicatore è un numero, dato aritmeticamente. Possiamo ancora risolvere questo problema colla riga, se il moltiplicatore è un numero razionale.

(1) Un'altra risoluzione dello stesso problema, fondata sul teorema di Talete, viene indicata nell'art. IV.

Cominciamo a vedere come si possa:

Dividere un segmento in n *parti eguali conoscendosi una retta parallela al segmento.*

Sopra questa retta si segneranno, colla costruzione testè indicata, n segmenti eguali e contigui AB, BC, CD,.... KL. Se M ed N sono gli estremi del segmento dato, e se O è il punto d'incontro delle rette AM, LN (ovvero AN, LM), basterà congiungere O con B, C, D,.... K; le congiungenti divideranno il segmento MN in n parti eguali.

Profittando però di quanto fu esposto sui gruppi armonici, possiamo più speditamente *determinare la* n^{esima} *parte di un segmento dato* AB, quando si conosca una parallela a questo segmento. Si determini infatti, colla solita costruzione, il punto di mezzo C del dato segmento; e si congiunga C con M, D con C (fig. 17). Il punto E è coniugato armonico di A rispetto alla coppia C, B, onde

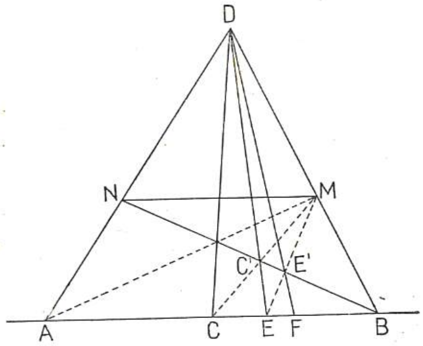

Fig. 17.

$$EC : EB = AC : AB = 1 : 2$$

ed il segmento EB è dunque la *terza* parte di AB.

Si congiunga ancora E con M, D con E'. Il punto F è il coniugato armonico di C rispetto alla coppia E, B, onde:

$$FE : FB = CE : CB = 1 : 3$$

ed il segmento FB è dunque la *quarta* parte di AB.

Così proseguendo si perviene a determinare la n^{esima} parte di AB.

Dato quindi un segmento ed una parallela ad esso (oppure dato un segmento ed il suo punto medio), si apprende a *determinare colla sola riga, un segmento che stia al dato in un rapporto razionale* $\frac{m}{n}$.

Osservazione. Le costruzioni fondamentali accennate conducono ad effettuare sopra una retta, mediante la riga, tutte le operazioni razionali su segmenti, quando sia data una parallela alla retta medesima (cfr. art. IV).

Passiamo ora ad esaminare le costruzioni planimetriche che si effettuano colla riga quando sono *assegnate sul foglio* del disegno *due coppie di rette parallele*, formanti entro il foglio un parallelogramma $ABCD$ (fig. 18). È facile vedere come in tal caso si possono risolvere colla sola riga tutte le quistioni finora trattate, relativamente però a qualunque retta od a qualunque segmento del piano. Si osservi infatti che quando si conduca per il centro del parallelogramma per es. la parallela ai lati AB, DC, le tre parallele AB, EF, DC staccheranno in generale sopra una qualsiasi retta del piano due segmenti eguali e contigui. (E se questa retta avrà tale posizione da incontrare quelle parallele fuori del foglio, si potrà far uso delle altre BC, AD, HL, oppure si condurranno per gli estremi di una diagonale le parallele all'altra diagonale del parallelogramma, ecc.).

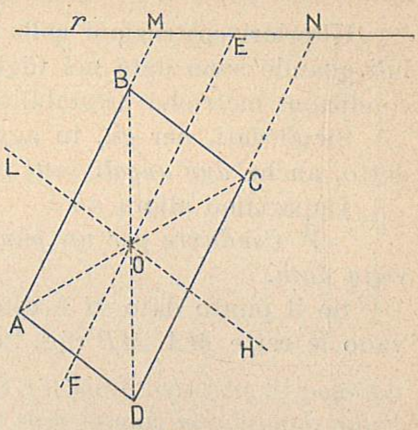

Fig. 18.

Ne viene la conseguenza immediata che *si può trasportare un segmento dato* AB *parallelamente a se stesso, in modo che l'estremo* A *si trasporti in un punto prestabilito* C; infatti basta tracciare, con l'aiuto del dato parallelogramma, per B la parallela ad AC e per C la parallela ad AB.

E vediamo perciò, come:

Dato sul piano del disegno un parallelogramma, si ottenga con la sola riga di:

1° *costruire per un punto qualunque la parallela ad una retta qualunque;*

2° *trasportare un dato segmento parallelamente a se stesso;*

3° *sommare o sottrarre due segmenti paralleli.*

Diamo ancora un esempio.

Sia dato sopra una retta r un segmento qualunque, e si voglia dividerlo in m parti eguali. Per mezzo del parallelogramma fondamentale si staccheranno sopra r due segmenti eguali e contigui ME, EN. Si potrà allora costruire una retta $M'N'$ parallela alla r, e sulla $M'N'$ m segmenti eguali e contigui; si perverrà quindi, nel modo più sopra accennato, alla divisione del dato segmento in m parti eguali.

Abbiamo così anche un' altra soluzione del problema (§ 3): *dato sul foglio un parallelogramma, condurre per un punto dato la parallela ad una retta data.*

Ulteriori costruzioni colla sola riga si rendono effettuabili quando sono date nel foglio altre figure soddisfacenti a condizioni metriche prestabilite.

Sieno dati, per es., in aggiunta al parallelogramma anzidetto, anche *due angoli retti* ab, a′b′, coi lati non paralleli.

Impariamo allora a:

1° *Condurre per un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Se il punto dato M è esterno alla retta data r, si descrivano le rette MA, MB (fig. 19) rispettivamente parallele alle

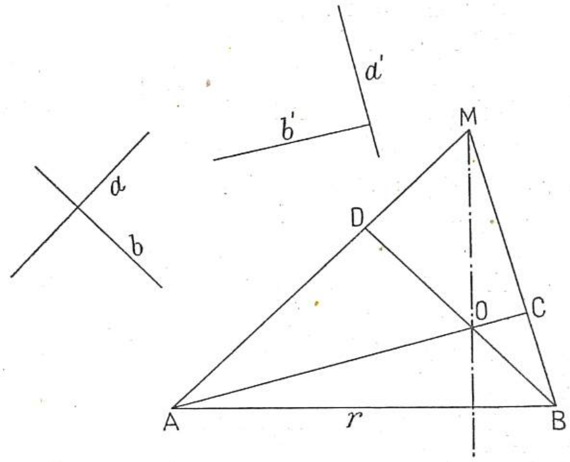

Fig. 19.

rette a, a', e quindi le AC, BD rispettivamente parallele alle b', b. La retta MO sarà la perpendicolare richiesta, perchè O è il punto di concorso delle tre altezze del triangolo MAB. Quando poi il punto M sia sulla r, converrà tracciare una qualsivoglia parallela alla r, ecc.

2° *Costruire un angolo n-uplo di un angolo dato.*

Si costruisca (fig. 20) una perpendicolare MN ad un lato dell'angolo ABC, e si faccia il segmento $MP = MN$, l'angolo ABP è doppio del dato: per ottenere l'angolo n-uplo, non si ha che a ripetere la medesima costruzione.

3° *Dato il centro* O (fig. 21) *ed un punto* M *di un cerchio* (oppure dati tre punti) *determinare il secondo punto d' incontro di una retta per* M *col cerchio.* Si costruisca il diametro *MOM'*, e dal punto *M'* si abbassi la perpendicolare sulla retta data:

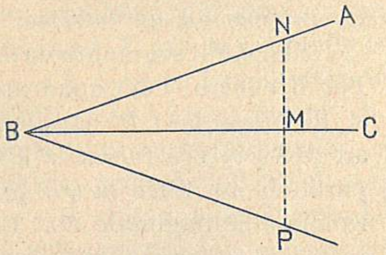

Fig. 20.

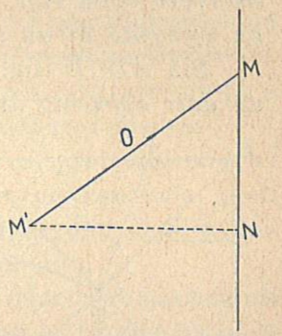

Fig. 21.

il piede di questa perpendicolare è il punto cercato. Si possono in tal modo costruire colla sola riga quanti si vogliano punti della circonferenza. Ciò non significa però che si possano determinare colla sola riga quei punti della circonferenza che appartengono ad una retta arbitrariamente assegnata.

4° *Dato il centro* O *ed una tangente* m *di un cerchio, determinare la seconda tangente passante per un punto dato della* m. Si determini il punto di contatto della *m* e da esso si abbassi la perpendicolare al diametro passante per il punto dato; ecc. Si possono in tal modo determinare quante si vogliano tangenti al cerchio; ma ciò non significa però che si possano determinare colla sola riga quelle tangenti che passano per un punto arbitrariamente assegnato.

I problemi anzidetti si potranno evidentemente ancora risolvere colla sola riga, quando sul foglio i dati metrici fondamentali vengano assegnati mediante una figura più complessa, che li possa fornire.

Ed in questi casi può darsi che la figura *data* permetta ancora di risolvere colla riga altri problemi che nelle condizioni supposte innanzi si cercherebbe invano di risolvere.

Ne abbiamo un esempio [1] quando si supponga assegnato sul foglio del disegno *un quadrato.*

[1] Steiner, l. c.

I suoi lati e le sue diagonali forniscono due coppie di parallele e di perpendicolari.

Ma la costruzione del quadrato esige la *bisezione dell' angolo retto*, e l'avere *dato* un quadrato permette viceversa di risolvere colla riga questo problema, e quindi di *far ruotare un segmento di un angolo retto.*

Sia $ABCD$ (fig. 22) il quadrato dato, e si voglia *ruotare un dato segmento di un angolo retto intorno ad un estremo.*

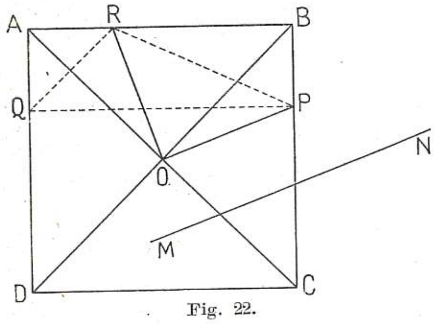

Fig. 22.

Sia MN il segmento dato. Per il centro O del quadrato si descriva la OP parallela ad MN; si costruisca la PQ parallela ad AB e la QR parallela alla diagonale DB. La retta OR sarà perpendicolare ad OP, ciò che si verifica subito osservando la eguaglianza dei triangoli AOR, BOP. Il triangolo ROP è isoscele e rettangolo; e si risolverà dunque il problema proposto tracciando per M la parallela ad OR, o per N la parallela ad RP.

Colle medesime costruzioni si riesce a *far ruotare una retta di 45°.*

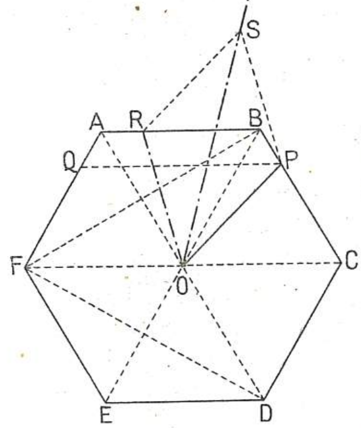

Fig. 23.

Possiamo procurarci un altro esempio supponendo *dato sul foglio del disegno un esagono regolare.*

I lati e le diagonali di questo esagono forniscono due coppie di parallele e di perpendicolari; ma la costruzione di esso richiede la *trisezione dell' angolo retto.* E si vedrà facilmente come la conoscenza dell' esagono regolare permetta di far compiere ad un segmento una rotazione di 60°, e ad una retta una rotazione di 30° (fig. 23).

§ 7. **Osservazioni critiche.** — Tutti i problemi risoluti innanzi colla riga vengono a dipendere analiticamente da equazioni di 1° grado, leganti gli elementi incogniti ai dati, e perciò diconsi *problemi di 1° grado.*

I problemi di 1° grado sono i soli risolubili coll'uso esclusivo della riga (art. IV).

Ma i nostri ultimi esempii pongono bene in luce che l'estensione del campo dei problemi di 1° grado dipende da ciò che si prende come *dato*.

Quando per es. sono dati in generale un parallelogramma e due angoli retti, la bisezione dell'angolo retto costituirebbe un problema di 2° grado; mentre essa viene a costituire un problema di 1° grado, risolubile colla riga, se è dato un quadrato ecc.

A rendere bene determinata la classe dei problemi metrici di 1° grado giova perciò di stabilire per convenzione quali enti (non costruibili colla sola riga) si ritengono *dati*, prima che si proscriva l'uso di ogni altro istrumento.

E si conviene di prendere come *dati metrici fondamentali* quelli strettamente necessari perchè si possa *attribuire un senso grafico* (e quindi proiettivo) *alle relazioni metriche* (cfr. § 2).

Decidere quali sieno questi dati (costituenti un minimo necessario) è una questione molto delicata, che la Geometria proiettiva risolve dimostrando il teorema: *tutte le proprietà metriche di una figura nel piano, si possono riguardare come relazioni grafiche di essa colla retta impropria, e con due coppie di punti impropri* (determinanti su questa l'*involuzione assoluta*) (¹).

Come dati fondamentali per le costruzioni metriche si possono dunque prendere « un parallelogramma e due coppie di direzioni ortogonali ».

A questi dati può essere surrogata un'altra figura qualsiasi, la quale permetta di effettuare linearmente (colla riga) la costruzione di essi. Ma non è escluso che questa figura aggiunga qualche cosa a quei dati, permettendo di risolvere linearmente una classe più estesa di problemi, come appunto abbiam visto cogli esempii del quadrato e dell'esagono regolare (²).

§ 8. **Costruzioni lineari dato un cerchio.** — Una più larga estensione del campo dei problemi risolubili colla riga, risulta dal supporre *tracciata nel piano una linea, per es. un cerchio,* di cui possiamo quindi determinare immediatamente le intersezioni con una retta qualsiasi.

(¹) Cfr. per es. ENRIQUES « *Lezioni di geometria proiettiva* ».

(²) In relazione all'art. IV, può dirsi che il dare un quadrato aggiunge al campo di razionalità la radice di un numero razionale.

In tali condizioni, quando la linea tracciata sia di 2° grado, si perviene a risolvere colla riga tutti i *problemi di 2° grado*, e quelli di grado superiore *riducibili al 2°* (cfr. § 9 e art. IV).

Cerchiamo di mettere in luce sotto l'aspetto geometrico, ciò che può farsi colla riga quando è *dato nel foglio un cerchio* (fondamentale) *completamente descritto* di cui supporremo pure *dato il centro* (1).

Osserviamo anzitutto che il cerchio ci permette di costruire colla riga, quanti si vogliano rettangoli iscritti in esso; e perciò di risolvere i problemi (di 1° grado) già trattati innanzi. Di più alcune costruzioni possono ora essere semplificate; vediamo per es. come si possa:

Determinare una perpendicolare ad una retta data r. Se questa retta non incontra il cerchio fondamentale, oppure se passa per il centro, si costruisca (mediante un qualunque rettangolo inscritto nel cerchio) una qualsiasi retta che incontri il cerchio e che sia parallela alla r. Siano M ed N i suoi punti d'incontro col cerchio, e sia MP il diametro per M. La retta NP è normale alla r (fig. 24). Se la retta data incontra il cerchio fondamentale senza passare per il centro, torna inutile il costruire una corda ad essa parallela.

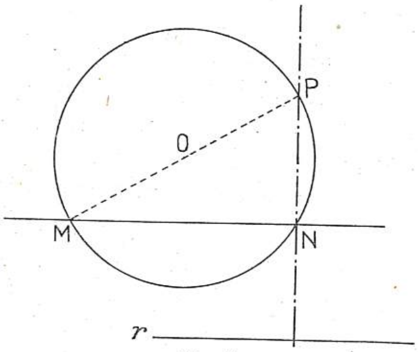

Fig. 24.

Riprendiamo ancora il problema trattato nel § 4, di

Costruire sopra una retta u, *il punto* D' *che forma con tre punti dati* A'B'C', *un birapporto uguale a quello di altri quattro punti* A, B, C, D, *dati sulla medesima retta* (fig. 25).

Proiettiamo i punti A, B, C, D, A', B', C', da un punto O del cerchio fondamentale sopra il cerchio stesso; sieno A_1, B_1, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1', le proiezioni ottenute (2).

Osserviamo ora che se si proiettano quattro punti del

(1) Se il centro non è conosciuto si può costruirlo colla riga quando sia dato nel piano un parallelogramma fondamentale, giacchè si riesce allora a bisecare delle corde parallele del cerchio.

(2) Per togliere ogni eventuale eccezione devesi ritenere il punto O come proiezione del punto in cui la u è intersecata dalla tangente in O.

cerchio da due centri diversi, appartenenti al cerchio stesso si ottengono quaterne di raggi formanti a due a due i medesimi angoli, e perciò aventi uguali birapporti.

In particolare dunque dovranno avere uguali birapporti le quaterne di raggi $A_1'(A_1B_1C_1D_1)$ e $A_1(A_1'B_1'C_1'D_1')$. Perciò si potrà costruire D_1' nel seguente modo: determiniamo i punti $B'' \equiv A_1B_1' \cdot A_1'B_1$, $C'' \equiv A_1C_1' \cdot A_1'C_1$ e $D'' \equiv A_1'D_1 \cdot B''C''$; il punto D_1' è la proiezione di D'' fatta da A_1 sul cerchio. Infatti, detto $A'' \equiv A_1A_1' \cdot B''C''$, le due quaterne di raggi $A_1'(A_1B_1C_1D_1)$,

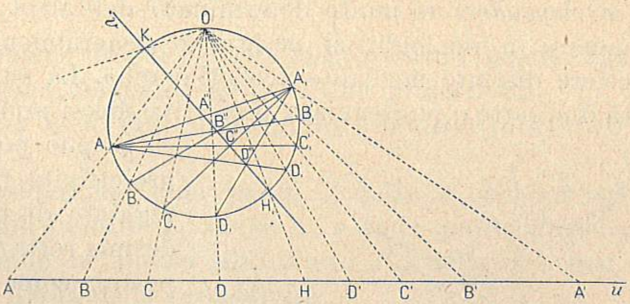

Fig. 25.

$A_1(A_1'B_1'C_1'D_1')$ sono intersecate dalla retta $r = B''C''$ nei medesimi quattro punti A'', B'', C'', D'', e perciò hanno lo stesso birapporto.

§ 9. **Punteggiate proiettive. - Punti uniti.** — La figura relativa al problema ultimamente risolto ci suggerisce subito la soluzione di un altro problema di ordine più elevato:

Determinare sulla retta u *i punti che insieme ad* A, B, C *e ad* A', B', C' *formano lo stesso birapporto.*

Vediamo infatti che i punti H, K risolventi il problema sono le proiezioni (da 0 su u) dei due punti d'incontro della retta v col cerchio fondamentale.

In un caso particolare, quando C' è all'infinito, la costruzione precedente ci permette di: *determinare sopra una retta un punto* H (*supposto esistente*) *per modo che i rapporti delle distanze di esso da due coppie di punti* A, B e A', B' *stieno fra loro nella stessa ragione* λ *di due segmenti assegnati*, cioè:

$$\frac{A'H}{B'H} = \lambda \frac{AH}{BH}.$$

Questo problema fu trattato da Apollonio sotto il nome di « *sectio determinata* ».

Ritorniamo al problema generale risoluto innanzi.

Questa risoluzione acquista un significato più espressivo e si manifesta quindi capace di applicazioni notevoli, ove s'introduca il concetto di « *rette* (o *punteggiate*) *proiettive* ».

Due rette, o due serie di punti A, B, C, D, E...., A', B', C', D', E'.... (punteggiate) date sopra di esse, si diranno « proiettive » allorchè si può passare dall'una all'altra mediante un certo numero di proiezioni, fatte da centri fissi su rette fisse.

Per mezzo di queste proiezioni, ad ogni punto dell'una retta viene a *corrispondere* un punto determinato dell'altra; i punti corrispondenti (o omologhi) si designano generalmente colle stesse lettere distinte mediante accenti o apici. La corrispondenza tra due rette o punteggiate proiettive dicesi *proiettività*.

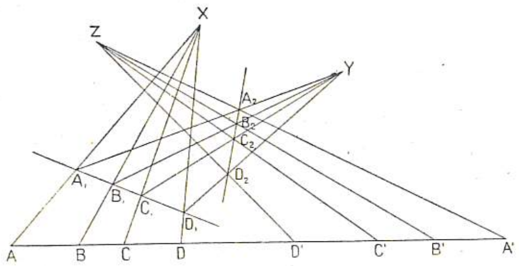

Fig. 26.

Si può porre una proiettività fra punteggiate di una medesima retta (sovrapposte), come per es. nell' annessa fig. 26.

Per ciò che abbiamo stabilito nel § 4: Se due punteggiate sono proiettive, il birapporto di 4 punti qualunque dell'una è uguale al birapporto dei 4 punti omologhi dell' altra.

Viceversa, se mediante una costruzione qualsiasi ad ogni punto di una retta u si fa corrispondere un punto di una retta u', per modo che i birapporti delle quaterne di punti omologhi risultino uguali, le due rette u ed u' possono riguardarsi come proiettive; si può anzi passare da ogni punto dell'una all'omologo sull'altra con due proiezioni (tre se le u, u' sono sovrapposte) mercè la costruzione indicata nel paragrafo 4.

Le precedenti osservazioni appaiono in maggior luce nell'enunciato seguente, che è in esse contenuto:

Nel piano, un sistema di quante si vogliano proiezioni conducenti da una retta u ad una retta (proiettiva) u', può essere surrogato da due oppure da tre proiezioni secondochè le u, u' sieno distinte o sovrapposte; e le proiezioni che fanno corrispondere a tre punti A, B, C della prima retta tre punti dati A', B', C' della seconda, conducono sempre da un punto qualunque della prima al medesimo punto della seconda.

In breve, *la proiettività fra due rette è determinata da tre coppie di punti omologhi*, sebbene possano assegnarsi quantesivogliano costruzioni diverse conducenti da ogni punto al suo omologo.

Ciò posto supponiamo stabilita una proiettività sopra una retta (ossia fra due rette sovrapposte). Un punto che coincida coll'omologo dicesi *unito*.

La costruzione indicata c'insegna a determinare (quando esistano) i punti uniti di una proiettività sopra una retta, non appena sieno date tre coppie di punti omologhi A, A'; B, B'; C, C'.

Vediamo ora di chiarire meglio sotto l'aspetto elementare il problema dei punti uniti di una proiettività.

Sieno u, u' due punteggiate proiettive (distinte o sovrapposte).

Consideriamo quel punto I' della u' che corrisponde al punto dell'infinito I_∞ della u, e quel punto J della u che corrisponde al punto all'infinito J'_∞ della u'; essi diconsi *i punti limiti* della proiettività.

Questi punti sono propri tranne nel caso in cui si corrispondano i due punti all'infinito delle u, u'; in questo caso la proiettività assume un significato particolarmente semplice, poichè i segmenti omologhi risultano proporzionali; essa prende allora il nome di *similitudine*.

Se P, P'; Q, Q' sono due coppie di punti corrispondenti, si ha:

$$(PQJI_\infty) = (P'Q'J'_\infty I')$$

donde:

$$\overline{PJ} \cdot \overline{P'I'} = \overline{QJ} \cdot \overline{Q'I'} = k.$$

Si vede di qui che *in punteggiate proiettive è costante il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti.*

Supponiamo ora che le due punteggiate u, u' sieno sovrapposte, ed escludiamo il caso particolare della similitudine.

Un punto H è unito se

$$\overline{HJ} \cdot \overline{HI'} = k.$$

Risulta di qui che *il problema generale di costruire i punti uniti di una proiettività equivale alla costruzione di due segmenti data la loro somma (o differenza) ed il loro prodotto (rettangolo).*

E perciò *la costruzione dei punti uniti della proiettività equivale alla costruzione grafica delle radici dell'equazione generale di 2° grado,* la quale trovasi già effettuata da EUCLIDE, sia mediante la teoria dell'equivalenza sia mediante le proporzioni.

NOTA. La forma elementare più semplice del problema, si ottiene introducendo il punto medio O del segmento JI'; allora la relazione $\overline{HJ} \cdot \overline{HI'} = k$ può scriversi:

$$(\overline{HO} + \overline{OJ})(\overline{HO} + \overline{OI'}) = k$$

ovvero, osservando che $\overline{OI'} = -\overline{OJ}$:

$$\overline{HO}^2 = \overline{OJ}^2 + k.$$

Conosciuti adunque i due punti limiti e conosciuta una coppia P, P' di punti corrispondenti della proiettività, la relazione

$$\overline{HO}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{PJ} \cdot \overline{P'I'}$$

ci permette di costruire (quando sono reali) i due punti uniti. E precisamente: quando i due segmenti $\overline{PJ}$, $\overline{P'I'}$ hanno il medesimo senso, esistono due punti uniti reali simmetrici rispetto ad O, e la loro distanza da O è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un cateto eguale ad OJ e l'altro cateto eguale al medio proporzionale fra $\overline{PJ}$ e $\overline{P'I'}$; quando invece i segmenti $\overline{PJ}$, $\overline{P'I'}$ hanno senso opposto (e quindi il loro prodotto è negativo) i due punti uniti sono reali (distinti o coincidenti) solamente quando OJ non sia inferiore al medio proporzionale fra $\overline{PJ}$ e $\overline{P'I'}$, ed in tal caso la loro distanza da O è il cateto di un triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa eguale ad OJ e l'altro cateto eguale al detto medio proporzionale.

Perciò, adoperando riga e compasso senza limitazioni, si possono costruire speditamente i punti uniti nel modo seguente. Dati i punti limiti J, I' e la coppia P, P', innalziamo da I' un segmento eguale e perpendicolare a $P'I'$ e da J un segmento eguale e perpendicolare a PJ, in modo però che questi due segmenti giacciano dalla stessa banda o da bande opposte rispetto alla retta sostegno delle due punteggiate, secondochè i segmenti $\overline{PJ}$, $\overline{P'I'}$ sono rispettivamente di senso contrario o dello stesso senso. La retta che unisce gli estremi Q, Q' (fig. 27) può incontrare la circonferenza di diametro JI' (la incontra sempre se Q e Q' giacciono da bande opposte); le perpendicolari alla QQ' innalzate da punti d'incontro R, R',

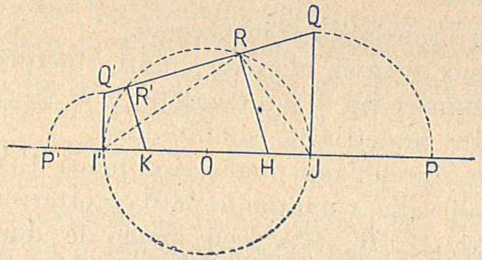

Fig. 27.

determinano sulla u i punti uniti H, K. Infatti dalla similitudine dei triangoli $Q'I'R$, HJR e dei triangoli JRQ, $I'RH$ segue subito che

$$HI' \cdot HJ = P'I' \cdot PJ.$$

§ 10. **Risoluzione di alcuni problemi classici col metodo dei tentativi.** — Mostriamo subito, sopra esempii concreti, come la costruzione dei punti uniti della proiettività fornisca un metodo importante per risolvere una classe di problemi elementari.

Questo metodo prende il nome di *metodo dei tentativi o di falsa posizione* (*regula falsi*).

Incominciamo dai *problemi di sezione* di Apollonio; uno di questi problemi (*sectio determinata*) è stato già trattato nel § 9; un altro è il seguente.

Sectio rationis:

Date su di un piano due rette r, s, *su ciascuna delle quali sia fissato un senso ed un'origine dei segmenti, dato inoltre un punto* S *del medesimo piano, condurre per* S *una retta, in modo che i due segmenti da essa determinati sulle* r, s *(a partire dalle rispettive origini) siano fra loro nel rapporto* λ *di due segmenti assegnati.*

Sieno O, O' le origini rispettivamente fissate su r, s.

Prendasi su r un punto qualunque A, e su S si costruisca il punto A', per cui si ha in grandezza e senso $\overline{OA} : \overline{OA} = \lambda$.

Se per caso la retta AA' passi per S, si avrà una risoluzione del problema. Ma generalmente il tentativo non riuscirà; ed analoghi tentativi, fatti prendendo su r i punti B, C,.... e costruendo su s i punti B', C' per cui

$$OB : OB' = OC : OC' = \lambda,$$

hanno uguale probabilità d'insuccesso.

Osserviamo tuttavia che con questi ripetuti tentativi si viene a determinare fra le punteggiate A, B, C...., A', B', C'...., una particolare proiettività (similitudine).

Ciò posto, riprendiamo i medesimi punti A, B, C.... della r, e proiettiamoli sulla s dal punto dato S: otterremo rispettivamente i punti A'', B'', C''....; ed anche le due punteggiate A, B, C....; A'', B'', C''...., saranno fra loro proiettive.

Otteniamo quindi sulla retta s le due punteggiate proiettive sovrapposte A', B', C'....; A'', B'', C'',..... I loro punti uniti, se sono reali, congiunti con S, dànno le soluzioni del problema proposto.

Il terzo problema di sezione è denominato

Sectio spatii:

Date in un piano due rette r, s, *su ciascuna delle quali sia fissato un senso ed un' origine dei segmenti, dato inoltre un punto* S *del medesimo piano, condurre per* S *una retta, in modo che i due segmenti da essa determinati sulle* r, s *(a partire dalle rispettive origini) abbiano un prodotto dato, equivalente ad quadrato* q².

Sieno ancora O, O' le origini fissate su r, s.

Scegliamo sulla retta r dei punti arbitrari A, B, C...., e determiniamo sulla s i punti A, B, C,...., e determiniamo sulla s i punti A', B', C',.... in modo che

$$\overline{OA} \cdot \overline{O'A'} = \overline{OB} \cdot \overline{O'B'} = \overline{OC} \cdot \overline{O'C'} = ... = q^2.$$

Allora le punteggiate A, B, C....; A', B', C',.... risultano proiettive, essendo punti limiti di esse O ed O'.

Riprendendo i medesimi punti A, B, C,.... della r, e proiettandoli sulla s dal punto dato S, otterremo rispettivamente i punti $A''B''C''$,....; ed anche le punteggiate A, B, C,....; A'', B'', C'',.... saranno proiettive; epperò sulla s avremo le due punteggiate soprapposte proiettive A, B, C,.... A'', B'', C'',..... I punti uniti, supposti reali, di questa proiettività, congiunti con S, ci dànno le soluzioni del problema proposto.

Il medesimo metodo di falsa posizione si applica al noto

PROBLEMA. *Dato il trilatero* r, s, t *e il triangolo* R, S, T, *costruire un triangolo inscritto nel primo e circoscritto al secondo* [1].

Si scelgano sul lato s alcuni punti A, B, C,.... e si proiettino da T sul lato r: si otterranno rispettivamente sul lato r i punti A', B', C',..... Si proiettino questi dal punto S sul lato t, e si avranno su questo i punti A'', B'', C'',.... rispettivamente. Infine si proiettino i punti A'', B'', C'',.... dal punto R sul lato s, ottenendosi i punti A''', B''', C''',.....

Le due punteggiate A, B, C,....; A''', B''', C''', sul lato s sono proiettive, ed è evidente che se per es. il punto A coincidesse con A''', il triangolo $AA'A''$ sarebbe una soluzione del problema. I punti uniti di questa proiettività, se sono reali, ci forniranno dunque delle soluzioni del problema proposto.

Altre soluzioni possono ottenersi combinando in altro ordine i lati e i vertici dei due triangoli dati.

Analogo al precedente, ma un po' più difficile è il

Problema di GIORDANO D'OTTAIANO. *Costruire un triangolo iscritto in un cerchio e circoscritto ad un triangolo dato.*

Per risolvere questo problema secondo il metodo innanzi accennato, occorre premettere l'estensione del concetto di punteggiate *proiettive*, al caso *punteggiate sopra un cerchio.*

Accenneremo brevemente alla cosa. Due punteggiate sopra un cerchio diconsi « proiettive », se sono proiettati da un punto del cerchio, sopra una retta, in due punteggiate proiettive. Risulta dalle osservazioni fatte nel § 8 che « proiettando due punteggiate proiettive date sopra un cerchio da due punti di esso, sopra rette qualsiansi, si ottengono sempre punteggiate proiettive, e viceversa ».

La costruzione della proiettività sul cerchio è quella indicata nello stesso § 8, e permette di determinare gli (eventuali) punti uniti.

Ora si può dimostrare che « se si fanno corrispondere i punti di un cerchio che trovansi allineati con un punto

[1] Un triangolo dicesi *iscritto* in un altro, nel senso più generale della parola, se i vertici di esso sono sui lati o sui prolungamenti dei lati dell'altro; il secondo triangolo dicesi allora *circoscritto* al primo.

fisso O, non appartenente alla linea, si ottengono punteggiate proiettive ».

Questa proprietà risulta appoggiandosi ad una nota proposizione sulle polari, nel modo seguente:

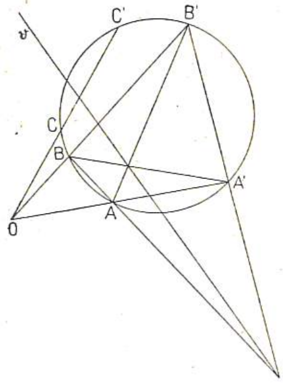

Fig. 28.

Sieno AA', BB', CC'.... coppie di punti del dato cerchio allineate con O (fig. 28).

I punti $A'B \cdot AB'$, $AB \cdot A'B'$ trovansi sopra una retta, la quale incontra le AA', BB' nei coniugati armonici di O rispetto alle coppie AA', BB' (cfr. § 5).

Ma tutti i coniugati armonici di O rispetto alle coppie AA', BB', CC'.... trovansi sopra una retta o che dicesi la *polare* di O. Segue di qui che le punteggiate ABC...., $A'B'C'$.... possono riguardarsi come proiezioni, fatte rispettivamente da A', A, sul cerchio, di una medesima punteggiata giacente su o.

Perciò ABC...., $A'B'C'$.... sono punteggiate proiettive c. d. d.

Dopo ciò veniamo alla risoluzione del problema proposto.

Sia RST il triangolo dato, i cui vertici non appartengano al cerchio (fig. 29).

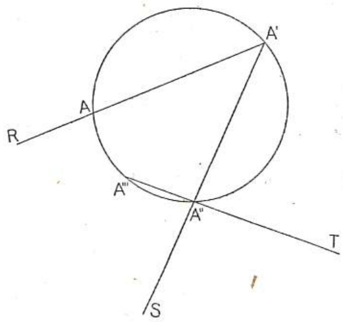

Fig. 29.

Preso sul cerchio un punto A, lo si proietti da R sul cerchio medesimo in A'; similmente si proietti A' in A'' da S, A'' in A''' da T.

Se A coincide con A''' si ha una soluzione del problema. Ma ciò non avverrà in generale. E ripetendo la costruzione a partire da diversi punti del cerchio ABC..., si otterranno le punteggiate ABC...., $A''B''C''$...., $A'''B'''C'''$...., l'una all'altra proiettiva e quindi proiettive fra loro. Pertanto dopo tre tentativi si possono costruire i punti uniti della proiettività, che risolvono il problema.

Una soluzione analoga potrebbe darsi per l'altro problema pure di GIORDANO D'OTTAIANO:

Costruire un triangolo circoscritto ad un cerchio dato ed iscritto in un triangolo dato.

§ 11. **Il cerchio fisso come sostituto del compasso.** — Fissiamo la nostra attenzione sopra la costruzione dei punti uniti di una proiettività, sulla retta, indicata nel § 9.

Questa costruzione si effettua colla sola riga, quando è dato un cerchio fondamentale completamente descritto. Si può trarre di qui la dimostrazione dell'importante teorema (di Poncelet e Steiner):

Tutte le costruzioni determinate effettuabili colla riga e col compasso, possono effettuarsi colla sola riga quando è dato nel foglio un cerchio fondamentale completamente descritto, di cui è dato il centro.

Come si è già osservato nel precedente Art. 2, la riga ed il compasso permettono di risolvere i tre seguenti problemi fondamentali, da cui dipendono tutte le costruzioni determinate effettuabili coi suddetti istrumenti:

1) Trovare il punto comune alle due rette (che possono essere individuate come congiungenti due date coppie di punti).

2) Trovare i punti comuni ad una retta e ad un cerchio (che può ritenersi individuato dal centro e da un suo punto).

3) Trovare i punti comuni a due cerchi.

Il problema 1) si risolve colla riga. Il problema 2) colla riga ed il compasso. Il problema 3) col solo compasso.

Il nostro teorema fondamentale risulterà stabilito quando si sia fatto vedere che, dato nel foglio un cerchio fondamentale O, « il problema 2) si può risolvere colla sola riga » ed « il problema 3) si riconduce mediante la riga al problema 2) ».

La prima affermazione costituisce il punto essenziale della cosa; ci proponiamo di giustificarla in due modi diversi.

Sia dato un cerchio (M) mediante il suo centro M ed un suo punto N, e vogliasi intersecarlo con una retta data r.

Cominciamo a costruire il punto N' del cerchio, simmetrico di N rispetto ad M (§ 6).

Prendiamo ora su r un punto qualsiasi P e proiettiamolo da N sul cerchio M, in P_1; proiettiamo quindi P_1 da N' su r in P'. La costruzione si compie colla riga, usufruendo del cerchio fondamentale O, e non importa neppure determinare P_1, bastando condurre per N' la perpendicolare ad NP (§ 8).

Se P coincide con P' si ha una delle intersezioni di M, r. Ma ciò non avverrà in generale. Però al variare di P su r, P' varierà anch'esso e i due punti descriveranno punteggiate proiettive; infatti 4 punti qualunque del cerchio M vengono proiettati da N, N' secondo due quaterne di raggi formanti gli stessi angoli e perciò aventi uguali birapporti. Ora le intersezioni di M, r si otterranno costruendo su r i punti uniti della proiettività in cui si corrispondono P, P'.

Vale la pena di dare anche una seconda costruzione dei punti comuni a M, r, ottenuta del pari colla riga e coll'uso del cerchio fondamentale O. Essa si fonda soltanto sulla nozione elementare dell'omotetia di due cerchi.

Si conduca, nel cerchio fondamentale (fig. 30), ON' parallelo ad MN (1); le rette MO, NN' determinano il *centro di omo-*

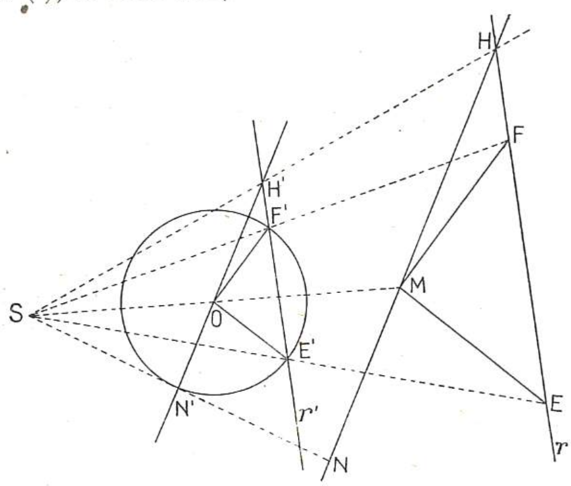

Fig. 30.

tetia S dei due cerchi. Se è H il punto d'incontro del diametro MN colla r, il punto *omologo* H' sarà il punto d'incontro della HS col diametro ON'; e la retta r' condotta per H' parallelamente alla r, sarà la omologa di r. Sulla r' sieno E', F' i punti d'incontro col cerchio fondamentale. Congiungendo il centro di omotetia S con E' ed F' si otterranno sulla r i due punti E ed F, che saranno i richiesti punti d'incontro col cerchio M. Si può osservare infatti che, per la simiglianza dei triangoli EHM, $E'H'O$ si ha:

$$EM : E'O = MH : OH' = MN : ON'$$

(1) Quando il raggio dato MN sia sulla medesima retta col centro O del cerchio fondamentale, converrà costruire per M un altro raggio eguale ad MN. Si conduca per M una retta qualunque, su di essa si abbassi la perpendicolare NA, e si prenda su questo un segmento AK eguale ad NA. Il raggio MK sarà eguale ad MN, e non sarà più allineato con O.

onde $$EM = MN;$$

e analogamente $$FM = MN.$$

Quando accada che la retta r' non incontri il cerchio fondamentale, ciò vorrà dire che la r non incontra il cerchio M.

Passiamo ora al problema 3), e mostriamo che si può farne dipendere la soluzione dalla soluzione del problema 2). Ci riusciremo agevolmente applicando la nozione di *centro radicale* di tre cerchi, nozione che converrà qui ricordare brevemente.

Se P è un punto sul piano di un cerchio O, ed è PMM' una qualsiasi segante, il prodotto

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{PO}^2 - r^2$$

(r essendo il raggio del cerchio) è costante, e si dice la potenza del punto P rispetto al cerchio O.

Se O ed O' sono due cerchi di raggio r, r' rispettivamente (fig. 31) il punto P è un punto di eguale potenza rispetto ai due cerchi se

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$$

od anche $$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = r^2 - r'^2.$$

Si osservi poi, che se è Q il piede della perpendicolare calata da P sulla retta dei centri OO', ogni altro punto P_1 di questa perpendicolare sarà un punto di egual potenza tutte le volte che sia tale il punto P; poichè infatti

$$\overline{P_1O}^2 - \overline{P_1O'}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{QO'}^2.$$

La retta PP_1 è dunque il luogo dei punti di egual potenza rispetto ai due cerchi, e si dice *asse radicale* dei medesimi. Quando due cerchi si intersecano, la corda comune è l'asse radicale.

Dati infine tre cerchi O, O', O'', esiste nel loro piano in generale un solo punto di egual potenza rispetto a tutti tre: ed è il punto in cui si incontrano l'asse radicale di O, O' e l'asse radicale di O', O'' (e quindi anche l'asse radicale di O, O''). Questo punto dicesi *centro radicale* dei tre cerchi: quando esso venga determinato mediante gli assi radicali delle coppie O, O'; O', O'', esso stesso può servire a costruire l'asse radicale della coppia O, O''; infatti è evidente che questo asse è la perpendicolare calata dal centro radicale sulla retta dei centri O, O''.

La costruzione dell' asse radicale di due cerchi O, O′ *si può fare coll' uso della sola riga, quando uno dei due cerchi sia interamente descritto.*

Sia infatti O il cerchio interamente descritto e O' il cerchio determinato mediante il centro O' ed il raggio $O'M'$ (fig. 31). Il raggio OM parallelo ad $O'M'$ servirà a determinare

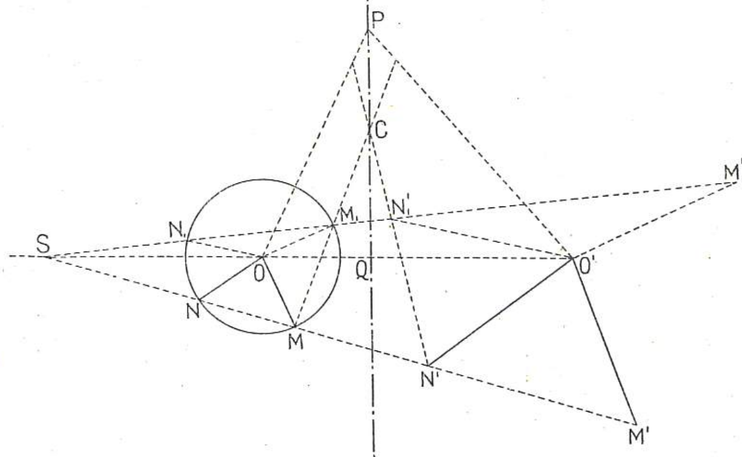

Fig. 31.

il *centro di omotetia* S dei due cerchi. Sia ancora p^2 la potenza del punto S rispetto al cerchio O, e q^2 la potenza del punto S rispetto al cerchio O'; si avrà:

$$SM \cdot SN = p^2, \quad SM' \cdot SN' = q^2$$

e quindi:

$$SM \cdot SN' \cdot SN \cdot SM' = p^2 q^2.$$

D' altra parte, per la proporzione:

$$SM : SM' = SN : SN'$$

si ha:

$$SM \cdot SN' = SN \cdot SM'$$

onde

$$SN' \cdot SM' = pq.$$

Un' altra trasversale $SM_1N_1M_1'N_1'$ darebbe analogamente:

$$SN_1 \cdot SM_1' = pq;$$

donde si vede che i quattro punti N, M', N_1, M_1' (e analogamente i quattro punti M, N', M_1, N_1') stanno sopra una circonferenza O''. Il punto comune alle rette MM_1, $N'N_1'$ è dunque il centro radicale C dei cerchi O, O', O'', epperò sta sull'asse radicale richiesto. Questo asse radicale sarà dunque la perpendicolare calata da C sulla retta OO': e potrà ottenersi ricercando il centro radicale C' di un'altra analoga terna O, O', O''' e congiungendo quindi C con C'.

Ciò posto riprendiamo il nostro problema « determinare i punti d'intersezione di due cerchi di dato centro e dato raggio ».

Sia O il cerchio fondamentale e si vogliano determinare i punti d'intersezione dei due cerchi, i cui centri sono O', O'' ed i cui raggi sono $O'M'$, $O''M''$.

Converrà ricercare, mediante la costruzione or ora esposta, l'asse radicale r'' dei cerchi O, O', e l'asse radicale r' dei cerchi O, O''. Il punto $(r'r'')$ sarà il centro radicale dei tre cerchi; e abbassando da esso la perpendicolare sulla retta $O'O''$ si otterrà l'asse radicale r dei due cerchi O', O''.

Il problema viene così ricondotto a determinare le intersezioni della retta r col cerchio O' (oppure col cerchio O'') dato il cerchio interamente descritto O: e tale è il problema precedentemente risolto.

Concludiamo pertanto, come avevamo annunciato, che « tutte le operazioni eseguibili colla riga e col compasso per la ricerca delle mutue intersezioni di rette e cerchi (salvo cioè il *tracciamento* delle circonferenze) si possono effettuare coll'uso della sola riga, purchè sul foglio del disegno sia assegnata una circonferenza completamente tracciata e di centro conosciuto ».

In casi particolari le costruzioni generali che permettono di surrogare l'uso del compasso col cerchio fisso, possono essere semplificate. Vediamo per es. come si risolvano ricorrendo direttamente al cerchio fondamentale i tre problemi seguenti:

1) *Data una retta, e su di essa un punto, determinare un secondo punto della retta, che disti da quello di una lunghezza assegnata.* Sia P (fig. 32) il punto sulla retta r, e sia AB il segmento di lunghezza data. Si congiunga per es. A con P, si traccino per P la parallela ad AB, per B la paral-

lela ad AP. Il segmento PD sarà eguale e parallelo ad AB. Nel cerchio fondamentale si costruisca il diametro MOM' parallelo a PD e il diametro NON' parallelo alla r. Sia allora S il punto comune alle PO, DM'. Le rette SN, SN' incontrano la r in due punti E ed F, che rispondono al pro-

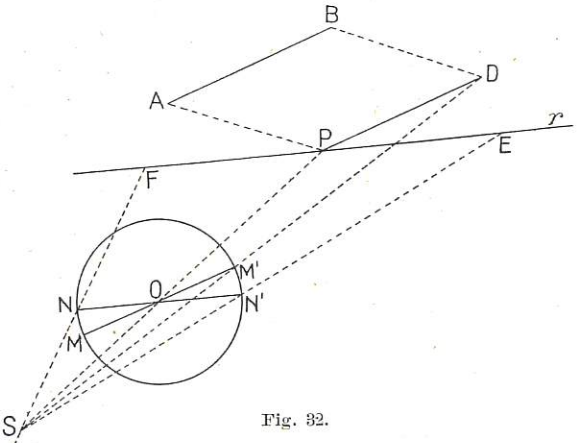

Fig. 32.

blema; ciascuno dei segmenti PE, PF sta al raggio del cerchio fondamentale, come PS ad OS, cioè come PD al raggio.

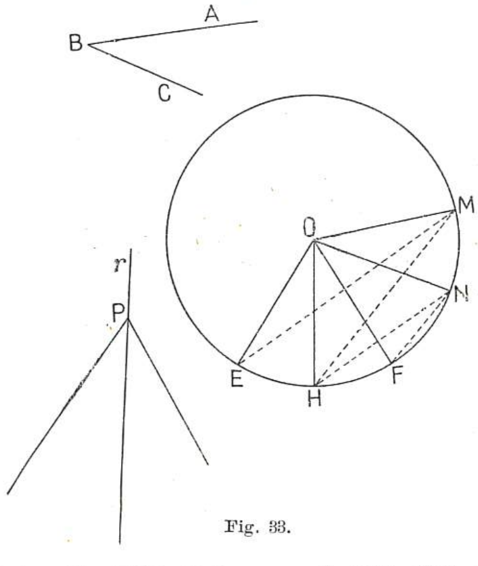

Fig. 33.

2) *Dato un punto, e per esso una retta, determinare una seconda retta per quel punto, che faccia colla prima un angolo eguale ad un angolo dato.* Sia r (fig 33) la retta data per il punto P, e sia ABC l'angolo dato. Nel cerchio fondamentale si costruiscano i due raggi OM, ON rispettivamente paralleli alle rette BA, BC, ed il raggio OH parallelo alla r. Si tracci la corda ME parallela alla NH e la NF parallela alla MH. I due raggi OE, OF fanno colla OH due angoli eguali ad MON, epperò le rette condotte per P parallelamente a questi raggi, rispondono al problema.

3) *Date due rette che si incontrano, determinare le bisettrici dei loro angoli.* Nel cerchio fondamentale si conducano i diametri paralleli alle rette date, e si congiungano due a due i loro estremi. Queste congiungenti sono parallele alle bisettrici domandate.

§ 12. **Costruzioni con la riga a due orli paralleli: primo modo di usare l'istrumento.** — Uno strumento che può da solo sostituire la riga ed il compasso, (e che permette quindi di risolvere i problemi costruttivi determinati di 1° e 2° grado, o riducibile al 2° grado) è la *riga a due orli paralleli.* Questa permette di tracciare quante si vogliano coppie di rette parallele, distanti l'una dall'altra di una lunghezza λ eguale alla larghezza della riga, e può venir adoperata, *in due modi,* oltre che come una semplice riga, ad effettuare le seguenti due costruzioni fondamentali:

a) Dati due punti A, B, si può adagiare la riga sul foglio del disegno, in modo che un orlo passi per i punti A, B; l'altro orlo ci permette di tracciare ciascuna delle due rette parallele alla retta AB, alla distanza λ da essa.

b) Dati i due punti A, B (la cui distanza non sia inferiore a λ, si può adagiare la riga sul foglio del disegno, in guisa che uno dei due orli passi per A e l'altro per B; si può allora, in due modi, tracciare due parallele passanti rispettivamente per A e per B, alla distanza λ fra loro.

La costruzione *a*) permette evidentemente di costruire sul foglio quante si vogliano *losanghe,* quindi quante si vogliano coppie di rette parallele e quante si vogliano coppie di direzioni ortogonali (le diagonali delle losanghe). La riga a due orli, con la sola costruzione *a*), fornisce quindi essa medesima i dati metrici fondamentali e può quindi risolvere tutti quei problemi grafici e metrici (di 1° grado) che si risolvono colla riga semplice quando sul foglio del disegno si abbiano i suddetti dati metrici.

Ma essa permette ancora di risolvere *tutta una classe di problemi* (*di 2° grado*), la cui soluzione non potrebbe raggiungersi colla sola riga, qualunque figura rettilinea venisse data nel foglio.

La costruzione *a*) permette infatti di

Determinare le bisettrici degli angoli di due rette date.

Basta tracciare colla riga a due orli le rette che distano dalle date della lunghezza λ, e condurre le diagonali della losanga così costrutta.

Di qui discende subito la risoluzione del problema:

Trasportare un segmento dato da una retta data ad un' altra.

Se invero le due rette non sono parallele, basta condurre per gli estremi del segmento le parallele ad una delle bisettrici degli angoli da essa formati.

Discende da queste costruzioni che *la riga a due orli adoperata nel primo modo permette di risolvere tutti i problemi risolubili mediante un trasportatore di segmenti* [1] (cfr. art. IV).

Questa classe di preblemi determinata da HILBERT rientra in quella dei problemi di 2° grado, ma non li comprende tutti.

A titolo d' esempio accenniamo ancora qui, brevemente, ad alcune semplici costruzioni colla riga a due orli adoperata nel primo modo [2]:

1) *Data una retta* a *e un punto qualsiasi* A *fuori di essa, condurre per* A *la parallela alla* a. Preso su a un punto B ad arbitrio, si costruiscano a partire da AB e da una stessa parte rispetto ad essa due striscie contigue e poi, ricorrendo alla considerazione delle diagonali, si completi il parallelogramma contenuto dalle due parallele esterne e dalla a e che ha per vertice A.

2) *Trasportare un segmento* AB *parallelamente a sè stesso, portando l' estremo* A *in un punto* A'. Condotta per A' la parallela b alla $a \equiv AB$ si determini il punto medio H di $A'B$, ricorrendo alla considerazione del parallelogramma contenuto dalle a, b e dalle due striscie che hanno comune il lato $A'B$: si prolunghi poi la AH, ecc.

(1) Viceversa quando si abbia un istrumento capace di trasportare i segmenti (o anche soltanto un segmento di lunghezza data λ), da una retta ad un'altra, si può costruire alla semplice riga una parallela ad una retta data ad una distanza data λ (operazione a).

Infatti l'istrumento trasportatore ci permette anzitutto di costruire quanti si vogliano rettangoli, determinando sui lati d'un angolo, da parti opposte del vertice, due coppie di segmenti tutti uguali fra loro. Ciò posto, data una retta r possiamo costruire colla riga una perpendicolare ad essa (§ 6), staccare su questa, a partire dal suo piede, il segmento λ, e condurre quindi, pel suo estremo, la parallela ad r, alla distanza λ.

(2) Cfr. C. MARENGHI e U. CONCINA, (*Bollettino di Matematica* di A. CONTI. Bologna, 1901, nn. 5, 8).

3) *Trasportare un angolo parallelamente a sè stesso portando il vertice in un punto prefissato.*

4) *Ruotare un angolo intorno al suo vertice, portando un lato a coincidere con un raggio prefissato pel vertice.*

5) *Condurre da un punto* A *la perpendicolare ad una retta* a. Si distinguano due casi a seconda che A appartiene alla a o è esterno ad essa. Se A appartiene alla a, si costruiscano sulla a due losanghe uguali aventi comune il vertice A e un lato per esso e se ne considerino le diagonali, poi si applichi il problema precedente.

§ 13. **La riga a due orli come sostituto del compasso.** — Vediamo ora che cosa si ottenga colla riga a due orli adoperata nel secondo modo ad effettuare la costruzione *b*).

Diciamo che questa costruzione permette di surrogare completamente l'uso del compasso, relativamente ai problemi determinati.

Basta perciò (§ 11) mostrare come si possono costruire le intersezioni di una retta con un cerchio fondamentale, sebbene questo non venga effettivamente tracciato.

Prendiamo come cerchio fondamentale il cerchio che ha per centro un punto qualunque O del foglio, e per raggio la larghezza λ della riga a due orli; potremo sempre con questa riga tracciare quante si vogliano tangenti a quel cerchio: e precisamente se è P un punto esterno al medesimo, appoggiando (nei due modi) un orlo della riga ad O ed un orlo a P, potremo tracciare le due tangenti al cerchio, passanti per P. Indicheremo questo cerchio con γ. Noi dunque mostreremo come si possano sempre determinare le intersezioni di una retta data col cerchio γ, quando si faccia uso della riga a due orli. E rimarrà con ciò dimostrato che *tutti i problemi determinati risolubili colla riga e col compasso si possono risolvere col solo uso della riga a due orli.*

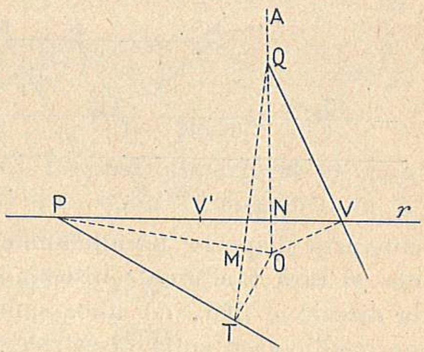

Fig. 34.

Sia O il centro di γ ed r la retta data (fig. 34). Dal punto O si abbassi la perpendicolare OA alla r; ed il problema proposto consisterà ora nel ricercare sulla OA un punto tale, che le tangenti condotte per esso al cerchio, abbiano il punto di contatto sulla r.

Si scelga sulla r un punto P qualunque (sufficientemente lontano da O); da esso si conduca una tangente al cerchio γ; e si determini su questa il punto di contatto T. La perpendicolare calata da T sulla PO incontra la retta OA in un punto Q, che è il punto cercato. Indichiamo infatti con M il punto in cui si intersecano le PO, TQ, e con N il punto in cui si intersecano le rette r, AO. I quattro punti P, Q, M, N stanno sopra una medesima circonferenza, onde:

$$OM \cdot OP = ON \cdot OQ;$$

e ciò significa che la media proporzionale fra OM ed OP (cioè il raggio OT) è eguale alla media proporziale fra ON ed OQ. Se adunque si costruisce il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa OQ e che ha il vertice V dell'angolo retto sulla r, il suo cateto OV sarà eguale ad OT, e l'altro cateto QV, sarà tangente al cerchio γ nel punto V. Viceversa se da Q si conduce una tangente al cerchio, il suo punto di contatto è il suo punto d'incontro colla r.

Non sarà inutile però osservare, che il cerchio fondamentale γ, che ci ha servito per giungere al resultato sopra enunciato, si rende inutile quando si faccia uso della riga a due orli.

Riferiamo infatti (¹) una soluzione del problema: *determinare le intersezioni di una retta data con un cerchio di centro assegnato e di raggio assegnato,* nella quale non si fa uso del cerchio γ che ci ha servito nel § 11.

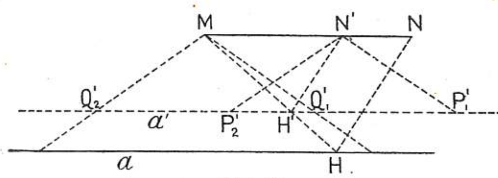

Fig. 35.

Sia M il centro del cerchio dato (fig. 35) ed a la retta data. Se il raggio dato non è già parallelo alla a, converrà disporlo parallelamente a questa retta, in MN (ciò che si farà facilmente bisecando l'angolo del raggio dato con la direzione MN, ed abbassando dall'estremo del raggio la perpendicolare sulla bisettrice). La distanza d della retta a dal

(¹) ADLER, l. c.

centro M, non sarà in generale eguale alla larghezza λ della riga a due orli: si descriva dunque la retta a' parallela ad a e distante di λ dal centro M, e si cerchino le intersezioni della a' col cerchio (di centro M) il cui raggio x soddisfi alla proporzione:

$$x : MN = \lambda : d.$$

Questo raggio x si trova facilmente mediante una trasversale qualunque MH e mediante i triangoli simili $MH'N'$, MHN. Si disponga dunque (nei due modi) la riga a due orli con un orlo per M e l'altro per N'; si costrurranno così le due losanghe $MN'P_1'Q_1'$, $MN'P_2'Q_2'$, e i punti $Q_1'Q_2'$ saranno i punti d'incontro della a' col cerchio di raggio MN'.

I raggi MQ_1', MQ_2' daranno sulla a i punti Q_1, Q_2 che evidentemente appartengono alla retta a e al cerchio di raggio MN.

Anche l'altro problema fondamentale: *Determinare le intersezioni di due cerchi dati* si può ridurre al precedente facendo uso della riga a due orli, senza valersi del cerchio γ. Siano infatti OM, $O'M'$ i due raggi dati (fig. 36), che disporremo perpendicolarmente alla OO', in OA, $O'A'$: basterà per ciò bisecare l'angolo MOA e abbassare da M la perpendicolare alla bisettrice, ecc.

Si tracceranno quindi le rette AB, $A'B'$ parallelamente alla OO', talchè si avrà

$$O'B_1 = OM, \quad OB' = O'M'.$$

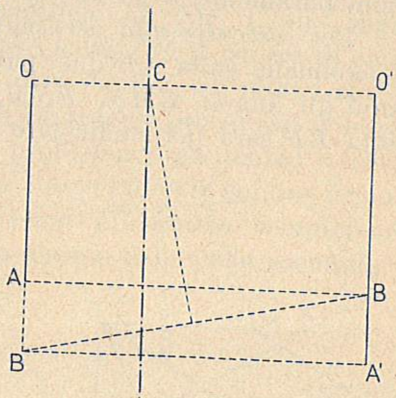

Fig. 36.

Innalzando dal punto di mezzo dal segmento BB' la perpendicolare a questo segmento, si otterrà sulla OO' il punto C, il quale apparterrà all'asse radicale dei due cerchi: infatti esso dista egualmente da B e da B', e però si ha la eguaglianza:

$$\overline{OC}^2 + \overline{OB'}^2 = \overline{O'C}^2 + \overline{O'B}^2$$

cioè

$$\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{O'C}^2 - \overline{O'M}^2.$$

Innalzando dunque da C la perpendicolare alla OO' si ha l'asse radicale dei due cerchi.

§ 14. **Costruzioni colla squadra e colla falsa squadra.** — Vediamo finalmente *come si possono risolvere tutti i problemi risolubili elementarmente, facendo uso della squadra o della falsa squadra.*

La *falsa squadra* non è altro che un angolo di ampiezza data σ, che può essere di 90°, nel qual caso si ha la ordinaria *squadra*. La falsa squadra (o la squadra) può essere adoperata anzitutto come una semplice riga. Ma essa medesima ci fornisce sul foglio i *dati metrici fondamentali,* e quindi *ci permette di risolvere tutti i problemi* (di 1° grado) *che si risolvono colla riga in base a quei dati* (§ 6). Vedremo inoltre come con la falsa squadra (o con la squadra) si possono *determinare le intersezioni di una retta data con un cerchio dato ma non descritto,* e ciò porterà a concludere altresì che *la squadra o la falsa squadra permettono di risolvere tutti i problemi risolubili colla riga e col compasso.*

Per *costruire una parallela ad una retta data* AB, converrà descrivere una retta CD che faccia colla AB un angolo σ, e una seconda retta EF che faccia colla CD un angolo pure eguale a σ, alterno col precedente. E si può dunque costruire immediatamente il *parallelogramma fondamentale.*

Per *costruire una perpendicolare ad una retta data* AB, si assumano sulla AB due punti arbitrari M, N e si descrivano gli angoli EMN, ENM, FMN, FNM eguali a σ. La retta EF sarà perpendicolare alla AB. E si possono quindi costruire quante si vogliano *coppie di rette perpendicolari.*

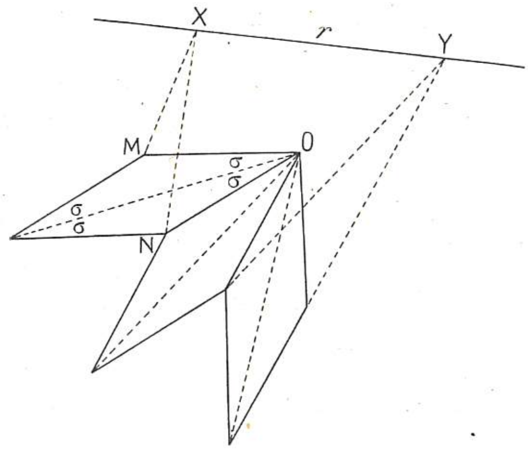

Fig. 37.

Se $\sigma = 90°$, questa ultima costruzione si rende inutile (ed illusoria).

Quanto alla *determinazione delle intersezioni di una retta data con un cerchio di centro assegnato e di raggio assegnato,* essa si otterrà immediatamente nel modo che esponiamo. Se OM è il raggio dato (fig. 37), ed O il centro, si costruisca mediante l'angolo σ una losanga avente per lato OM. L'angolo al centro NOM è uguale a 2σ; e l'arco di cerchio capace dell'angolo σ e costruito sulla corda MN dalla stessa banda del punto O, è appunto un arco del cerchio dato. La parte rimanente del cerchio è pure un arco capace dell'angolo σ, e per costruirlo si può servirsi di una seconda losanga eguale e contigua alla precedente, od anche, più comodamente, di una terza. Si vogliano ora determinare i punti d'intersezione di una retta r colla circonferenza: basterà fare scorrere il vertice della falsa squadra sulla r, in modo che un orlo passi per es. per N, finchè l'altro orlo passi per M; ecc. Se, $\sigma = 90°$, la losanga non si può costruire; in questo caso converrà determinare, colle note costruzioni lineari, il punto M' diametralmente opposte ad M, e fare scorrere il vertice della squadra su r in modo che un orlo passi per M, finchè l'altro passi per M'.

Il Problema: *Dati i centri ed i raggi di due cerchi determinare le loro intersezioni*, si ridurrà al precedente nel modo indicato al § 11, od anche colla costruzione seguente:

Siano OM, $O'M'$ i due raggi dati. Se già non sono paralleli, si costruisca per O' (mediante una losanga di lato $O'M'$) un raggio eguale ad $O'M'$ e parallelo ad OM. I due raggi paralleli bastano per determinare sulla OO' il centro di omotetia S, dal quale condurremo, oltre la SM, un'altra trasversale SN. I punti d'intersezione di queste due trasversali si determineranno colla costruzione del problema precedente; e serviranno a costrurre colla sola riga l'asse radicale dei due cerchi.

L'uso della falsa squadra può in pratica semplificare alcune costruzioni. E noi ci limiteremo a qualche esempio.

Bisecare un angolo dato ABC. Assumiamo sul lato BC un punto qualunque M (fig. 38), e cerchiamo sul lato BA un punto N tale che BN sia eguale a BM: basterà costruire coll'angolo σ una losanga $BMPQ$ e fare scorrere il vertice della squadra lungo BA in modo che un orlo passi per Q, finchè l'altro venga a passare per M.

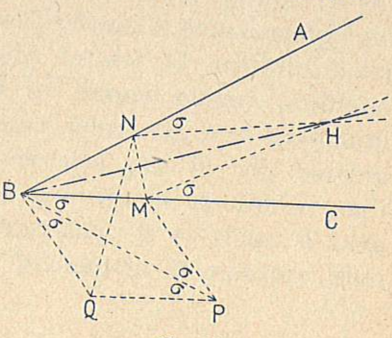

Fig. 38.

Trovato così il punto N, si descrivano gli angoli ANH, CMH eguali a σ. La retta BH sarà la bisettrice richiesta.

Raddoppiare un angolo dato. Sia ABC quest' angolo (fig. 39). Si scelga un punto M sul lato BA (o sul suo prolungamento, secondo che l' angolo dato è minore o maggiore di σ), e si descriva l' angolo $AMD = \sigma$; si faccia scorrere la falsa squadra lungo BA finchè l'altro bordo passi per D, e si costruisca così l'angolo $DEM = \sigma$. I punti M ed E ci permettono di completare la losanga $MDED'$, e l' angolo DBD sarà doppio dell' angolo dato.

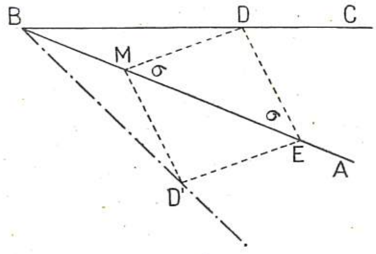

Fig. 39.

Ripetendo la costruzione più volte, si potrà costruire l' angolo n-plo dell' angolo dato.

Osservazione. Quando per la squadra o per la falsa squadra si volessero distinguere (come per la riga a due orli) due modi di usare l' istrumento, il primo e più immediato modo capace di fornire il *trasporto d' un angolo di data ampiezza* fornirebbe soltanto la risoluzione dei problemi metrici di 1° grado (cfr. § 6); invero l' operazione più complessa consistente nel fare scorrere l' istrumento, compare necessariamente anche nel problema citato della bisezione dell' angolo.