ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

Volume I (Testo)
contenente la materia assegnata dal Programma dell' ottobre 1871
al 1° corso del 2° biennio.

1873

G. B. PARAVIA E COMP.

ROMA – TORINO – MILANO – FIRENZE.

PREFAZIONE.

> Amplissima et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriæ!
>
> NICODEMUS FRISCHLINUS *in Dialogo primo.*
>
> Perspectivæ methodus, quâ nec inter inventas nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur...
>
> B. PASCAL *in lit. ad Acad. Paris.* 1654.
>
> Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis Causa, sed utilitas officiumque fuit.
>
> OVIDIUS *in Fastis*, III, 9.

Questo libro non è stato scritto per coloro che hanno l'alta missione di promuovere la scienza; eglino non ci troverebbero alcuna novità, nè di dottrine, nè di metodi. Le proposizioni sono tutte di vecchia data, tanto che per non poche bisognerebbe risalire ai geometri della più remota antichità; e ciascuno potrà rintracciarle in EUCLIDE (285 a. C.), in APOLLONIO di Perga (247 a. C.), in PAPPO d'Alessandria (4° sec. d. C.), in DESARGUES di Lione (1593-1662), in PASCAL (1623-1662), in DELAHIRE (1640-1718), in NEWTON (1642-1727), in MACLAURIN (1698-1746), in J. H. LAMBERT (1728-1777),... Le teorie ed i metodi, che di queste proposizioni fanno un insieme omogeneo ed armonico, soglion essere detti moderni, perchè creati o perfezionati da geometri più vicini a noi, come CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT...: le opere de' quali però vennero in luce dentro la prima metà del nostro secolo.

Diffondere nelle scuole italiane la cognizione di queste peregrine ed utili teorie: ecco tutto lo scopo del mio lavoro.

Ma non si creda che in Italia non siansi già fatti lodevoli sforzi per tener dietro ai progressi della scienza geometrica. G. Bellavitis è stato, se non erro, il primo che li additasse alla gioventù studiosa, col suo *Saggio di geometria derivata* (1), che fu poi seguito da molti altri scritti; ed a Napoli, N. Trudi (2) risolveva i quesiti di un celebre programma « destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica ». Nel 1854, s'era già introdotto nell'università di Pavia un corso di geometria superiore, e la cattedra ne fu poi istituita, a proposta del professore Brioschi, anche presso le altre nostre maggiori università, quando l'Italia ebbe riconquistata la sua indipendenza politica (3). Chi scrive queste pagine insegnò per sei anni la stessa scienza a Bologna, e ne applicò i metodi alla geometria descrittiva (4); più tardi, trasferito all'Istituto tecnico superiore di Milano, e invitato dal direttore sig. Brioschi a darvi un corso di statica grafica, volle far prima, a modo di necessaria preparazione, un buon numero di lezioni sulla geometria di posizione, o geometria projettiva (5).

(1) Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4° (1838), p. 243-288.

(2) *Produzioni relative al programma di tre quistioni geometriche, proposto dal prof. V. Flauti nell'aprile* 1839 (Napoli, 1840-41).

Cito in via d'esempio Bellavitis e Trudi, ma non intendo escludere che altri in Italia siasi occupato di geometria projettiva sino da quel tempo. Anzi chieggo venia fin d'ora pei nomi che avrò dimenticato: creda il benevolo lettore che non lo faccio con intenzione; e d'altronde non mi propongo affatto di dare un sunto storico dei progressi della scienza, nemmeno limitatamente all'Italia.

(3) A Napoli salì su quella cattedra il Battaglini, del quale tutti conoscono l'ingegno e l'operosità. Perchè quell'illustre e doviziosa città ha lasciato partire di là il valente professore?...

(4) Seguendo un concetto già balenato ad altri: veggasi Bellavitis, *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova 1851). Ad un concetto analogo è informata l'eccellente opera del prof. Fiedler, *Die darstellende Geometrie* (Leipzig 1871), della quale si sta ora pubblicando a Firenze una traduzione italiana, per cura dei signori E. Padova e A. Sayno, ad uso delle scuole politecniche.

(5) Per appunto come a Zurigo il sig. Reye faceva un corso di *Geometrie der Lage*, per preparare gli studenti di quella scuola politecnica ad udire le ezioni del prof. Culmann, il creatore della statica grafica.

E così s'è ottenuto che ogni anno una grossa schiera di giovani fosse addestrata ai metodi moderni e ne apprendesse l'uso nelle varie parti del disegno tecnico.

Ma ciò non doveva bastare. Tanta è la semplicità di questi metodi che, mentre hanno in sè una grandissima fecondità di risultati e di applicazioni, nessuna parte delle matematiche offre maggiore agevolezza ad essere appresa, e domanda minor corredo di cognizioni preliminari. A persuadersi di ciò, basti considerare che Staudt potè scrivere la sua *Geometrie der Lage* (1847) senza presupporre alcuna nozione di geometria elementare; che se questo libro eccellente non ebbe maggior diffusione, può darsene colpa all'assoluta mancanza di figure illustrative ed allo stile soverchiamente arido e stringato. Lo stesso pensiero mosse altri scrittori [1], i quali, dopo avere stabilito i concetti fondamentali di spazio, superficie, linea, punto, retta e piano, misero innanzi a dirittura quelli della collineazione e della reciprocità. E forse accadrà che di qui balzi fuori in un giorno non lontano la soluzione del problema dell'insegnamento elementare della geometria: allora, ma (s'io non erro) allora soltanto, noi avremo qualcosa che meriti d'essere sostituita al metodo euclideo, l'introduzione del quale ne' nostri licei fu così vivamente e ingiustamente oppugnata [2].

(1) Per es. E. Müller nei suoi *Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt* (Braunschweig 1869).

(2) La smania di biasimare ogni atto del governo trasse anche persone rispettabili a stampare cose stravaganti e false intorno agli ordini scolastici dell'Inghilterra. Cotesti appassionati censori non vollero riconoscere il sommo beneficio che la riforma del 1867 ha recato, cioè quello di toglier via certi pessimi libri da molti licei del regno; non posero mente a ciò, che la libertà didattica concessa ai nostri professori e il sistema degli esami levano alla riforma ogni carattere di tirannia, e rendono assurdo il paragone colle scuole inglesi; finalmente non ci seppero mai dire qual metodo, idoneo a raggiungere i fini dell'istruzione secondaria classica, sarebbe da adottarsi in luogo dell'euclideo. — Taccio di quelle critiche che furono inspirate da basso interesse o da livori di parte: si tentò, ma invano, di gettare fango sui nomi degli uomini più insigni per meriti scientifici e per virtù pubbliche e private.

Siccome però io mi son messo dentro a cotesta penosa impresa, così debbo dirne le ragioni. Quel libro che sopra ho dimostrato esser necessario perchè si possano attuare i nuovi programmi, pensai che toccasse a me di farlo; a me che di questi studi sempre feci l'occupazione mia prediletta, che sempre cercai di promuoverne la diffusione nella scuola e cogli scritti, e che vivamente desiderai la riforma che testè il governo ha provvidamente decretata.

Ecco adunque dond' è nato questo libro, ch' io dedico ai professori degli istituti tecnici, particolarmente ai giovani che hanno fede nel moto progressivo della scienza. Esso non ha punto la pretesa di passare per un lavoro originale; ad altro non aspira che ad essere considerato come un trattato elementare, scritto a bella posta per le scuole italiane e propriamente nell'intento di rispondere al nuovo programma di geometria pel primo corso del secondo biennio degli istituti tecnici. A questo terrà dietro un altro volume, che conterrà le materie assegnate al secondo corso.

Diversi nomi erano stati dati a quell'insieme di dottrine geometriche di cui qui si pongono i primi fondamenti. Non mi piacque accogliere quello di geometria superiore *(Géométrie supérieure, höhere Geometrie)*, perchè in sostanza ciò che una volta potè parere elevato, ora è divenuto elementarissimo; nè quello di geometria moderna *(neuere Geometrie, modern Geometry)*, che esprime del pari un concetto puramente relativo; e d' altronde la materia è in gran parte vecchia, sebbene i metodi si possano considerare come recenti. Anche il titolo di geometria di posizione *(Geometrie der Lage)* nel senso di STAUDT [1] non mi parve

[1] Equivalente a quello di *descriptiv Geometry* di CAYLEY (*Sixth memoir upon quantics* nelle Transazioni filosofiche della Società reale di Londra, 1859, p. 90). *Géométrie de position* nel senso di CARNOT corrisponde ad un concetto affatto diverso da quello ch'io dovevo esprimere in testa al mio libro. Non fo menzione d'altri nomi, come *Géométrie segmentaire* e *organische Geometrie*, i quali si riferiscono a nozioni troppo particolari, almeno secondo il mio modo di

meglio conveniente, per ciò che esso esclude la considerazione delle proprietà metriche delle figure. Ho invece preferito quello di geometria projettiva (1), col quale vocabolo si enuncia la vera natura de' metodi, che essenzialmente si fondano sulla projezione centrale o prospettiva; tanto più che il sommo PONCELET, il quale de' metodi moderni può dirsi il principal creatore, intitolò il suo libro immortale *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).

La nomenclatura usata nel testo è la medesima che accettai da molti anni così nelle mie lezioni pubbliche, come in qualche scritto dato alle stampe. Essa non è propria esclusivamente di una sola e determinata scuola; pigliando un vocabolo da STEINER ed un altro da PONCELET o da CHASLES, cercai di preferire quelli che mi parvero meglio corrispondenti ai concetti e più facili a trasportarsi nella nostra lingua: del resto ho rigorosamente rispettato tutte quelle denominazioni che già sono entrate nell'uso generale degli scrittori (2).

Nello svolgimento della materia non mi sono attenuto esclusivamente a questo o a quell'autore; ma da tutti ho

vedere. Al contrario la denominazione di *geometria derivata* del BELLAVITIS abbraccia un campo assai più vasto di quello che io ho preso a considerare.

(1) Cfr. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Nachrichten di Gottinga, 30 agosto 1871).

(2) Per es. seguo STEINER nell'uso delle voci projettivo e prospettivo; prendo l'omologia da PONCELET; la punteggiata e la stella da BELLAVITIS, però quest'ultima in un significato diverso, cioè come equivalente al *Strahlenbündel*, non già al *Strahlenbüschel* dei tedeschi; preferisco il rapporto anarmonico di CHASLES al doppio-rapporto di MÖBIUS e STEINER; ecc. Adopero l'espressione forma geometrica per designare una serie d'elementi della stessa natura (punti, rette o piani), come l'*Elementargebilde* di STAUDT; forme geometriche fondamentali sono le *Grundgebilde* di STEINER, che si distinguono in tre specie o gradi (*Stufen*). CHASLES chiama doppi gli elementi che coincidono coi loro corrispondenti, così nell'involuzione, come nelle forme projettive sovrapposte (*divisions homographiques sur une même droite*) in generale; invece io amo meglio seguire l'esempio di coloro che mettono qui una distinzione: e ritenuta la voce doppi pel primo caso, dico uniti nel secondo. Ho usato la denominazione di figure correlative nel senso di CHASLES, non già in quello di CARNOT.

tolto quanto mi parve acconcio al mio scopo, ch'era di fare un libro assolutamente elementare e tecnico, accessibile anche a coloro i quali altra conoscenza non posseggono che delle primissime cose della geometria ordinaria. Avrei potuto, imitando STAUDT, fare a dirittura astrazione da qualsiasi corredo di nozioni preparatorie; ma in tal caso il mio lavoro si sarebbe allungato di troppo, e non avrei più potuto adattarlo agli scolari degli istituti tecnici, i quali debbono aver già nel primo biennio studiato i soliti elementi di matematica. Però non tutta la geometria tradizionale è necessaria a intendere il mio libro; basteranno le poche proposizioni fondamentali sul cerchio e sui triangoli simili.

Il libro, ho detto, doveva avere un carattere tecnico, doveva cioè condurre prontamente gli scolari ad applicare le cognizioni teoriche al disegno. Perciò diedi maggior rilievo alle proprietà grafiche che non alle metriche; mi attenni ai procedimenti della *Geometrie der Lage* di STAUDT, più spesso che a quelli della *Géométrie supérieure* di CHASLES [1]; senza per altro volere del tutto escluse le relazioni metriche, il che avrebbe nociuto ad altri fini pratici dell'insegnamento [2]. Introdussi adunque l'importante nozione del rapporto anarmonico e, per mezzo di essa e delle poche proposizioni di geometria ordinaria sopra menzionate, mi fu ben facile stabilire le più utili proprietà metriche, che o appartengono alle projettive o con esse vanno intimamente collegate.

Mi sono giovato della projezione centrale per determinare il concetto degli elementi a distanza infinita; e, dietro l'esempio di STEINER e di STAUDT, ho posto la legge di dualità a dirittura sul cominciar del libro, come

[1] Cfr. REYE, *Geometrie der Lage* (Hannover 1866), p. XI della prefazione.

[2] Cfr. ZECH, *Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung* (Stuttgart 1857), prefazione.

un fatto logico che scaturisce immediato e spontaneo dalla possibilità di costruire lo spazio (a tre dimensioni) coll'elemento-punto o coll' elemento-piano. Gli enunciati e le dimostrazioni che si corrispondono in virtù di quella legge si trovano bene spesso collocati in doppia colonna; ma qualche volta ho tralasciato questa disposizione, per dare occasione agli scolari di esercitarsi a dedurre da un teorema il correlativo di quello. Non vi è nulla in geometria, giustamente osserva il prof. Reye nella prefazione al suo libro, che così accenda i principianti e li stimoli a fare da sè, come il principio di dualità; quindi importa sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile, e di abituarli ad usarne con sicurezza.

L'ordine delle materie da me seguito è uno de' molti possibili a escogitarsi da chi voglia esporle in un corso di lezioni; io confido però d'esser pervenuto a fare un libro che possa servire anche a chi ami tenere altro ordine dal mio. Darò qualche esempio. Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacchè l'esperienza m'ha insegnato, e altri (1) lo aveva già osservato, che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e ajutano lo svolgimento di quella imaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere, perchè ei possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello. Ma il maestro potrebbe credere opportuno di attenersi strettamente, almeno sul principio, alla geometria piana; e in tal caso egli potrà senza danno saltar oltre parecchi numeri (2) del libro ed esporli più tardi. —

(1) Bellavitis, *Saggio di Geometria derivata*, p. 247. — Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, etc. (Bruxelles 1839), p. 191.

(2) Ni 19, 20, 28, 29, 31, 32, 41, 42,...

Io definisco le coniche come projezioni del cerchio, e dopo aver dimostrato per questa curva due teoremi fondamentali [1], li trasporto alle coniche e quindi svolgo per esse tutta la teoria de' poligoni inscritti e circoscritti e quella de' poli e delle polari, senza più curarmi del caso speciale del cerchio. Ma si potrebbe invece da quelle due proposizioni fondamentali dedurre i teoremi di Pascal, di Brianchon e di Desargues pel cerchio, non che la teoria dei poli; e poscia, mediante la projezione od omologia, applicare tutto ciò alle coniche.

Ma su questo punto è inutile spendere altre parole. Ciascun docente, tosto che abbia fatta propria la materia, vedrà da sè come gli convenga distribuirla; ed anzi avverrà che d'anno in anno vada rimutando il modo di coordinazione, secondo i risultati della propria esperienza.

Non tutti i numeri del mio libro sono ugualmente importanti o necessari in un corso di lezioni. Il maestro sagace s'accorgerà facilmente che poche sono le proposizioni fondamentali, le sole il cui enunciato debba essere ritenuto a memoria; tutto il resto consta di corollari, casi particolari ed esercizi. Fra questi v'ha dunque una grande libertà di scelta; alcuni potranno essere trattati nella scuola, altri nei còmpiti domestici; bisognerà, e questo è ciò che sommamente importa, che ogni giorno gli scolari facciano deduzioni e soluzioni da sè; non si costringano alla sola parte passiva dello ascoltare e ripetere le cose dette dal maestro, ma si facciano concorrere attivamente allo svolgimento di cose nuove; in questo modo e non altrimenti si riuscirà ad accendere in essi l' amore allo studio ed a renderli padroni dei fecondissimi metodi della geometria projettiva. Si badi infine che ai ragionamenti teorici per la dimostrazione dei teoremi e la deduzione dei corollari vada sempre compagna l'esecuzione grafica del risolvere i

[1] Ni 108, 110.

problemi; potendosi qui ripetere ciò che MONGE raccomandava per la geometria descrittiva ([1]).

I trattati magistrali di PONCELET, di STEINER, di CHASLES e di STAUDT ([2]) sono quelli ai quali maggiormente debbo professarmi debitore, sia perchè in essi fanno i loro primi studi tutti coloro che si dànno alla geometria, sia perchè da essi ho preso, oltre alla sostanza de' metodi, le dimostrazioni di molti teoremi e le soluzioni de' problemi. Ma insieme con quelli ebbi a consultare anche le opere di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di DELAHIRE, di NEWTON, di MACLAURIN, di LAMBERT, di CARNOT, di BRIANCHON, di MÖBIUS, di BELLAVITIS, ... e le più recenti di ZECH, di GASKIN, di WITZSCHEL, di TOWNSEND, di REYE, di POUDRA, di FIEDLER,...

Per non accrescermi le difficoltà già abbastanza gravi dell'impresa a cui ho posto mano, mi sono astenuto dallo impormi l'obbligo di continue citazioni dalle quali apparissero o tutte le fonti cui attinsi, o tutti i primi e veri autori delle singole proposizioni o teorie. Mi si perdoni adunque, se talvolta la fonte citata non è la primitiva ([3]) o se tal' altra la citazione manca affatto. Le mie citazioni sono scarse; e per mezzo di esse ho avuto precipuamente

([1]) .... Il est nécessaire, pour le cours de géométrie descriptive, que la pratique et l'éxécution soient jointes à l'audition des méthodes. Ainsi, les élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques..... (*Programme de la géométrie descriptive*).

([2]) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822). — STEINER, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, etc.* (Berlin 1832). — CHASLES, *Traité de géométrie supérieure* (Paris 1852); *Traité des sections coniques* (Paris 1865). — STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847). Tralascio di menzionare altri scritti di questi grandi maestri, così come le opere del celebre PLÜCKER e di altri geometri (SEYDEWITZ, GÖPEL, WEISSENBORN, JONQUIÈRES, HESSE, PAULUS, SCHRÖTER, GEISER,...), perchè non ebbi a servirmene nella composizione di questo libro.

([3]) Per gli autori ricordati cito quasi sempre i trattati estesi e generalmente conosciuti, sebbene le loro scoperte siano state la prima volta annunziate altrove. Per es. i lavori di CHASLES sulla teoria delle coniche sono in gran parte anteriori al 1830; quelli di STAUDT cominciarono nel 1831; ecc.

la mira di far conoscere ai giovani i nomi de' grandi geometri e i titoli delle loro opere, divenute classiche. Il collegare agli enunciati di certi teoremi capitali i nomi illustri di EUCLIDE, di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di PASCAL, di NEWTON, di CARNOT, ... non sarà senza profitto per ajutare la mente a ritenere le cose e per eccitare quella curiosità scientifica che è sprone ad allargare la propria cultura (1).

Le citazioni da me fatte hanno anche un altro intento, cioè di acquietare le paure di coloro ai quali il solo nome di geometria projettiva mette i brividi addosso, come se si trattasse di novità escogitate da cervelli balzani. A costoro vorrei far toccare con mano che sono cose in gran parte venerande per antichità, tutte maturate nelle menti dei più insigni pensatori e ridotte ormai a quella forma di estrema semplicità che GERGONNE considerava come segno di perfezione per una teoria scientifica (2). Nella mia dimostrazione procederò secondo l' ordine delle materie tenute nel libro.

Il concetto degli elementi a distanza infinita è dovuto al celebre DESARGUES, il quale, or fanno più di due secoli, considerava esplicitamente le rette parallele come concorrenti in un punto a distanza infinita (3), ed i piani paralleli come passanti per una stessa retta all'infinito (4). Lo stesso concetto fu rimesso in piena luce e divulgato da PONCELET,

(1) Ho citato molte volte gli *Elementi di Matematica* del BALTZER, non già come fonte originale, ma per invogliare i giovani allo studio di quell'eccellente trattato, che sarebbe per essi la miglior guida attraverso i quattro anni dell'Istituto tecnico.

(2) ... On ne peut se flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant dans la rue (Vedi in CHASLES, *Aperçu historique*, p. 115).

(3) *Oeuvres de* DESARGUES *réunies et analysées par* M. POUDRA (Paris 1864), t. I: *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (1639), p. 104-5 e 205.

(4) *L. c.*, p. 105-6.

che pervenne alla conclusione (come conseguenza de' postulati della geometria euclidea) i punti dello spazio situati a distanza infinita doversi considerare come tutti giacenti in uno stesso piano [1].

Desargues [2] e Newton [3] riguardarono gli assintoti dell'iperbole come tangenti, i cui punti di contatto sono a distanza infinita.

L'omologia delle figure piane, eccettuato il nome che le fu dato da Poncelet, si trova in parecchi trattati anteriori di prospettiva, per es. in Lambert [4], anzi può ben dirsi in Desargues [5], che enunciò e dimostrò il teorema sui triangoli e sui quadrilateri prospettivi od omologici. Del resto il teorema sui triangoli (N° 13) coincide sostanzialmente con un celebre porisma di Euclide (N° 88), riferito da Pappo [6]. L'omologia delle figure a tre dimensioni fu studiata per la prima volta da Poncelet [7].

La legge di dualità, come principio assoluto, fu enunciata da Gergonne [8]; e come conseguenza della teoria delle polari reciproche (principio di reciprocità polare) fu dovuta a Poncelet [9].

Le forme geometriche (punteggiate e fasci), dai vocaboli in fuori, si trovano già in Desargues, e ne' geometri posteriori; nel modo più esplicito sono state definite da Steiner [10].

Carnot [11] considerò il quadrilatero completo, Stei-

(1) *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822), N^i 96 e 580.

(2) *L. c.*, p. 210.

(3) *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), lib. I, prop. 27, scol.

(4) *Freie Perspective*, 2ª ed. (Zürich 1774).

(5) *L. c.*, p. 413 e 416.

(6) Chasles, *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, etc.* (Paris 1860), p. 102.

(7) *L. c.*, p. 369 e seg.

(8) *Annales de Mathématiques*, t. 16 (Montpellier 1826), p. 209.

(9) *Annales de Mathématiques*, t. 8 (Montpellier 1818), p. 201.

(10) *Systematische Entwickelung*, p. XIII-XVI.

(11) *De la corrélation des figures de géométrie* (Paris 1801), p. 122.

NER (1) ne estese il concetto a tutti i poligoni ed alle figure nello spazio.

La divisione armonica era nota ai geometri della più remota antichità; e se ne trovano le proprietà fondamentali per es. in APOLLONIO (2). DELAHIRE (3) diede la costruzione del quarto elemento di un gruppo armonico mediante la proprietà del quadrilatero, vale a dire, coll'uso della sola riga.

STEINER insegnò sino dal 1832 le costruzioni delle forme projettive (4).

A MÖBIUS (5) è dovuta la teoria completa dei rapporti anarmonici; ma già EUCLIDE, PAPPO (6), DESARGUES (7), BRIANCHON (8) avevano dimostrata la proposizione fondamentale del N° 53, *b*).

Della teoria dell'involuzione è autore DESARGUES (9), sebbene anche qui non pochi casi particolari fossero già noti ai geometri greci (10).

La generazione delle coniche per mezzo di due forme projettive è stata esposta da STEINER e da CHASLES, quarant'anni fa; ed è costituita da due teoremi fondamentali (Ni 113, 114) dai quali scaturisce tutta quanta la dottrina di quelle importantissime curve. La medesima generazione comprende la descrizione organica di NEWTON (11) e diversi teoremi di MACLAURIN.

PASCAL a sedici anni (1640) trovò il famoso teorema dell'esagrammo mistico (12), e BRIANCHON dedusse da esso

(1) *L. c.*, p. 72 e 235.
(2) *Conicorum* lib. I, 34, 36, 37, 38.
(3) *Sectiones conicae* (Parisiis 1685), I, 20.
(4) *L. c.*, p. 91.
(5) *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827), cap. 5.
(6) *Collectiones Mathematicae*, VII, 129.
(7) *L. c.*, p. 425.
(8) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris 1817), p. 7.
(9) *L. c.*, p. 119, 147, 171, 176.
(10) PAPPO, *Collectiones Mathematicae*, VII, 37-56, 127, 128, 130-133.
(11) *L. c.*, lib. I, lemma 21.
(12) *Lettera di* LEIBNITZ *à M. Périer* nelle *Oeuvres de* B. PASCAL (ed. BOSSUT), t. 5, p. 459.

nel 1806, mediante la teoria dei poli, la proposizione correlativa sull'esagono circoscritto (N° 117).

Le proprietà del quadrilatero formato da quattro tangenti e del quadrangolo dei punti di contatto si leggono nell'appendice latina *(De linearum geometricarum proprietatibus tractatus)* all' edizione inglese (Londini 1748) dell' algebra postuma di MACLAURIN, il quale ne aveva dedotto la costruzione di una conica per punti o per tangenti, in parecchi dei casi in cui siano dati cinque elementi (punti o tangenti). Tutti i casi possibili furono poi risoluti da BRIANCHON *(l. c.)*.

L'idea di considerare due serie projettive di punti in una stessa conica è esplicitamente dichiarata nel *Saggio* di BELLAVITIS (p. 270, nota).

A CARNOT (1) è dovuto un celebre teorema (N° 246) sui segmenti che una conica determina sui lati di un triangolo. Anche di questo teorema certi casi particolari erano già conosciuti molto tempo innanzi (2).

Eleganti costruzioni per le quali la sola riga basta a risolvere alcuni problemi di 1° e 2° grado, presupposto però che siano dati certi elementi, s'incontrano nella *Freie Perspective* di LAMBERT; ma la possibilità di risolvere tutti i problemi di 2° grado colla riga e con un cerchio fisso venne messa in piena luce da PONCELET; e poi comprovata coll'esecuzione di fatto da STEINER in un aureo suo libretto (N° 184).

Con diverse denominazioni la teoria dei poli e delle polari era già contenuta nelle opere citate di DESARGUES (3) e di DELAHIRE (4). In seguito, la perfezionarono MONGE (5), BRIANCHON (6) e PONCELET, il quale ultimo ne trasse fuori

(1) *Géométrie de position* (Paris 1803), N° 379.

(2) APOLLONIO, *Conicorum* lib. III, 16-23. — DESARGUES, *l. c.*, p. 202. — DELAHIRE, *l. c.*, V, 10, 12. — NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini 1706), p. 4.

(3) *L. c.*, p. 164, 186, 190 e seg.

(4) *L. c.*, I, 21-28; II, 23-30.

(5) *Géométrie descriptive* (Paris 1795), N° 40.

(6) *Journal de l'École polytechnique*, cahier 13 (Paris 1806).

la teoria delle figure polari reciproche, che in sostanza è la legge di dualità, da lui chiamata principio di reciprocità polare.

Finalmente le più insigni proprietà dei diametri conjugati furono esposte da APOLLONIO nei libri 2° e 7° del suo trattato delle coniche.

Del resto, chi vorrà procacciarsi più estesa e precisa conoscenza dei progressi della geometria dalle prime origini sino al 1830 (il che basta per le materie contenute in questo libro), non ha che a leggere il classico *Aperçu historique* del sig. CHASLES.

A questo volume va unito un atlante di 44 tavole, contenenti 212 figure, i cui numeri però vanno solamente da 1 a 199. Spero che le figure, per numero e qualità, saranno bastevoli a rendere il libro intelligibile anche pei più inesperti principianti. Le figure furono per la maggior parte disegnate dal sig. ingegnere CARLO SAVIOTTI, assistente alla mia scuola nel R. Istituto tecnico superiore; le rimanenti dal sig. GUIDO PERELLI, studente licenziato dall' Istituto tecnico di Milano. All'uno e all'altro io rendo qui pubblica testimonianza di gratitudine. E ringrazio anche la casa editrice, che usò ogni diligenza affinchè la stampa riuscisse nitida e corretta.

Milano, 5 novembre 1872.

L' AUTORE.

INDICE

ERRATA.

Pag. 27, *linea* 16, *invece di* operazioni *leggi* projezioni.
» 79, *la nota* (¹) *dev'essere:* Möbius, *l. c.*, N° 278.
» 87, *linea* 16, *invece di* $AB'AB'$ *leggi* $AB'A'B$.
» 100, » 37, *invece di* $\frac{(A)}{(A')'}$, *leggi* $\frac{(A')}{(A')'}$.
» 102, *la nota* (¹) *dev'essere:* Bellavitis, *Saggio di geometria derivata* (Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4°, 1838), p. 270, nota.
» 105, *linea* 30, *invece di* $AB'AB'$ *leggi* $AB'A'B$.
» 114, » 27, » uniti » doppi.
» 155, » 1, » sei » cinque.