QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

VOLUME II

Problemi classici della geometria
Numeri primi e Analisi indeterminata
Massimi e Minimi

ARTICOLI DI

E. BARONI - B. CALÒ - G. CASTELNUOVO - O. CHISINI - A. CONTI - E. DANIELE
F. ENRIQUES - A. GIACOMINI - A. PADOA - U. SCARPIS

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

PREFAZIONE

Il presente volume fa seguito al primo pubblicato due anni or sono sotto lo stesso titolo e compie l'opera collettiva « Questioni riguardanti le Matematiche elementari ». Lo sviluppo dato ai nuovi articoli, valga a giustificare il ritardo nella esecuzione dell'annunciato disegno.

Le teorie trattate in questo volume si lasciano naturalmente riassumere, coordinandole a tre temi generali di studio:

1) I problemi geometrici classici e la questione più alta che essi sollevano, cioè la possibilità di ottenerne la soluzione con determinati istrumenti, vengono illuminati soprattutto dalle *Applicazioni dell'Algebra* (teoria delle equazioni algebriche).

La trattazione di questo argomento è svolta negli Articoli 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che, prendendo le mosse da una introduzione metodologica, danno informazione di quegli sviluppi onde è venuta una risposta precisa alle antiche domande della costruzione dei poligoni regolari, della trisezione dell'angolo, della duplicazione del cubo, e della quadratura del cerchio. Questa materia era già contenuta nella seconda parte delle « Questioni riguardanti la Geometria elementare » (Bologna, Zanichelli 1900), ma viene qui svolta più largamente e coll'aggiunta di un articolo di considerazioni sintetiche comparative, come già è stato fatto nella traduzione tedesca del nominato volume.

2) L'Analisi indeterminata e i problemi sui numeri primi, costituiscono un campo speciale di studio che dalle più antiche speculazioni di Diofanto si allarga alla moderna *Teoria dei numeri*. Appunto l'Art. 10 espone i primi resultati

di questa dottrina, a compimento delle nozioni comuni sull'Aritmetica dei numeri interi.

3) Il terzo tema, a cui si volgono gli Art.[i] 11, 12, 13, si può designare come *Analisi infinitesimale*, perchè appunto a questo ramo della scienza matematica appartengono già i problemi elementari sollevati dalla ricerca dei massimi e minimi, e perchè lo sviluppo più alto dell'Analisi infinitesimale propriamente detta si può riguardare come naturale proseguimento dell'ordine d'idee affacciatosi in tale ricerca.

I tre Articoli nominati si dividono questo campo. I due primi muovono direttamente dalle questioni elementari dell'Algebra e della Geometria e ne riferiscono le soluzioni di carattere parimente elementare, chiarendo le difficoltà critiche che vi s'incontrano. L'ultimo Articolo si solleva ad un punto di vista più elevato, riguardando il progresso delle idee nella fondazione dell'Analisi moderna. Il nuovo aspetto dei problemi, e lo spirito di generalità ond'essi vedonsi dominati, getta nuova luce sulle medesime questioni elementari già innanzi trattate, sulle soluzioni riferitene e sulla critica che le accompagna.

Non ho altro da aggiungere sul volume, il cui contenuto appare più precisamente dall'indice particolareggiato della materia. E termino ringraziando i collaboratori ed amici che insieme hanno lavorato al compimento dell'opera.

In un'epoca come la nostra di « individualismo scientifico », e soprattutto nel nostro paese, dove l'organizzazione della scienza tende a separare e a differenziare gli studiosi, moltiplicando talora artificialmente gli oggetti di studio l'opera da noi intrapresa vorrebbe pur recare un modesto esempio di solidarietà nel lavoro collettivo. Siffatti lavori non offrono ai singoli la vana soddisfazione di camminare per una strada solitaria ad una propria mèta, ma lasciano nell'animo di ciascuno il conforto di aver lavorato ad uno scopo che supera la personalità individuale, per il progresso della cultura e della Scienza.

Bologna, Marzo 1914.

FEDERIGO ENRIQUES

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

VOLUME SECONDO

ARTICOLO PRIMO

Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici (¹) di Ettore Baroni a Roma.

§ 1. **Considerazioni preliminari.** — È noto che la via naturale da tenersi per cercare la soluzione di un problema geometrico, consiste nel ridurlo ad un altro già risoluto passando dal problema proposto ad uno equivalente, oppure tale che abbia fra le sue soluzioni quelle del problema dato, da questo ad un altro, e così via fino a giungere, come si è detto sopra, ad un problema che si sappia risolvere (analisi).

A questo metodo di ricerca che, come è chiaro, non dà una via sicura da percorrere, ma ne indica semplicemente una per dirigere i nostri tentativi, è di aiuto la figura, ossia la rappresentazione più generale dei dati, e quella (quando se ne conosca la specie) degli enti che si cercano, tenuto conto il più possibile delle condizioni che li devono legare agli enti dati.

Si suppone in sostanza determinato l'ente incognito od una parte di esso, e si cerca considerando la figura e condu-

(¹) Lavori consultati dall'autore dell'articolo:

Comé, *Examen des differents méthodes employés pour résoudre les problémes de Géométrie.*

P. Serret, *Des méthodes en Géométrie.* (Paris, Mallet-Bachelier, 1865).

Duhamèl, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* (Paris, Gauthier et Villars, 1865-68-70).

Petersen Iulius, *Metodi e Teorie* per la risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche (Trad. di V. Mollame) Copenaghen, Andr. Fred. Host e figli, 1882.

R. Bettazzi, *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici.* (Paravia, 1893).

Alexandroff Ivan, *Problèmes de Géométrie élémentaire*, trad. par D. Aitoff. (Paris, Gauthier et Villars, 1899).

Enriques e Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* (Bologna, Zanichelli, V edizione, 1912).

cendo linee ausiliari, allorchè se ne intraveda l'opportunità, di trasformare le relazioni che legano i dati agli enti incogniti, cambiando se occorre questi in altri, per mezzo dei quali essi siano determinati, e che più convengano in maniera da effettuare il passaggio ora detto.

Quando ciò riesca, a dare la risoluzione completa del problema, occorrerà descrivere la costruzione che ci porterà dagli enti dati ai cercati (se il problema non è impossibile), e dimostrare poi che gli enti trovati sono tutti o in parte soluzioni del problema dato; dimostrazione che riesce superflua quando si sia sicuri di essere passati, col processo detto in principio, sempre per problemi equivalenti.

Finalmente, potendo i dati presentarsi in differenti casi, tali da dare soluzioni differenti per numero e qualità, bisognerà cercare di distinguere questi diversi casi. Ciò è ufficio della *discussione*, alla quale spetta dunque riconoscere se i dati del problema proposto possano essere del tutto generali, oppure debbano soddisfare a certe condizioni (che si dovranno determinare), perchè il problema possa avere soluzioni.

Il procedimento ora indicato mette in luce che la risoluzione di un problema consiste sostanzialmente nella riduzione di esso ad altri problemi, i quali si considerano come già risoluti. Si deve così pervenire infine ad alcuni problemi fondamentali la cui risoluzione si suppone data da un postulato.

I postulati concernenti le costruzioni (fondamentali) atte a risolvere i problemi che si considerano come fondamentali, si riattaccano immediatamente all'uso degli istrumenti adoperati per tali costruzioni.

Nella Geometria elementare del piano si assumono come costruzioni fondamentali quelle date dalla *riga* e dal *compasso* e precisamente le seguenti:

1) determinazione della retta che passa per due punti dati;

2) determinazione del punto comune a due rette date (non parallele);

3) determinazione del cerchio di centro dato che passi per un punto dato;

4) determinazione dei punti comuni ad un cerchio dato e ad una retta secante;

5) determinazione dei punti comuni a due cerchi dati, secantisi.

Un problema si considera come *risolubile elementarmente*, allorchè la sua risoluzione si può ricondurre alle costruzioni fondamentali sopra citate.

Occorre qui distinguere chiaramente i due concetti di *possibilità*, e di *risolubilità* di un problema. Un problema è possibile allorchè ammette soluzioni; ma può darsi che tali soluzioni non sieno ottenibili per mezzo delle anzidette costruzioni fondamentali (cioè colla riga ed il compasso), allora il problema è elementarmente irrisolubile.

Insistiamo sul fatto che il concetto della risolubilità di un problema è relativo; in senso assoluto qualunque problema possibile dovrebbe riguardarsi come risolubile, purchè si adoprassero per la sua risoluzione costruzioni fondamentali convenienti, date da istrumenti appropriati e più complessi della riga e del compasso.

Per i problemi della geometria dello spazio occorrerebbe postulare altre costruzioni fondamentali, che, nel campo elementare, sono quelle relative alla determinazione di piani e sfere ed alle loro mutue intersezioni.

Nel seguito però limiteremo la nostra esposizione ai problemi della Geometria del piano.

§ 2. **Ricerca di luoghi geometrici.** — I problemi, che possono formare oggetto di una trattazione geometrica, debbono anzitutto distinguersi in due classi:

1) appartengono alla 1ª classe e diconsi *indeterminati*, quei problemi, in cui le condizioni poste non determinano un ente, od un numero finito di figure che vi soddisfino, ma lasciano ancora la possibilità di assegnare ad arbitrio qualche elemento della figura da costruire, o permettono di assoggettarla a qualche condizione ulteriore;

2) costituiscono invece la 2ª classe dei *problemi determinati*, quei problemi in cui le condizioni date individuano, in generale, una figura o un numero finito di figure.

Il tipo più frequente dei problemi indeterminati della geometria piana, a cui tutti gli altri si lasciano generalmente ridurre, consiste nella costruzione di una *linea* i cui punti soddisfino ad una condizione data; questa linea si dice il *luogo geometrico* dei punti soddisfacenti alla condizione suddetta, quando sia caratterizzata da questa, per modo che ogni punto assoggettato ad essa si trovi sopra la linea.

La determinazione di luoghi geometrici, coi mezzi elementari, è molto limitata, perchè le sole linee costruibili con tali mezzi sono rette e circoli, o segmenti ed archi di questi.

Pertanto la ricerca di un luogo, ove costituisca un problema risolubile elementarmente, può essere agevolmente compiuta, in base ad un piccolo numero di tentativi, appenachè si sieno costruiti alcuni punti particolari di esso.

Se p. es. si sono determinati due punti appartenenti al luogo in questione, si può provare anzitutto se questo sia costituito dalla retta che li congiunge o da qualche segmento di questa; oppure da un cerchio o da un arco di cerchio che abbia qualche relazione speciale coi due punti ecc.

L'importante è di *scoprire* la linea che si tratta di determinare; dopo ciò diventa più facile di compiere l'analisi del problema, dimostrando che questa linea risponde alla condizione assegnata.

Ecco alcuni esempii di luoghi geometrici notevoli:

1) Il luogo geometrico dei punti del piano per i quali i quadrati delle distanze da due punti dati A, B abbiano una differenza costante q^2, è una retta perpendicolare alla congiungente dei punti dati.

Supponiamo sia P un punto del luogo richiesto, si avrà allora:

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = q^2.$$

Se C è il piede della perpendicolare abbassata, da P sopra AB, avremo:

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = q^2.$$

Tenendo conto di questa relazione si vede che la perpendicolare PC di cui facilmente si determinerebbe il piede è il luogo richiesto.

Conseguentemente:

2) Il luogo dei punti di ugual potenza rispetto a due circonferenze date, e che sono insieme interni od esterni rispetto ad entrambe (o comuni ad esse) è una retta perpendicolare alla retta dei centri.

3) Il luogo dei centri delle circonferenze che tagliano ortogonalmente due circonferenze date, è la parte dell'asse radicale esterna alle due circonferenze se queste si segano,

A x M B se $\overline{AB} = a$ $\overline{AM} = x$ è $x = \frac{a^2+q^2}{2a}$

ed è l'intero asse radicale se le circonferenze sono esterne l'una all'altra.

4) Il luogo geometrico dei punti P di un piano tali che, dati due punti A, B la somma di m volte il quadrato di PA e di n volte il quadrato di PB, sia equivalente ad un quadrato q^2, è una circonferenza che ha il centro in un punto C del segmento AB per cui è $nAC = mCB$.

Supponiamo sia P un punto del luogo; avremo allora:

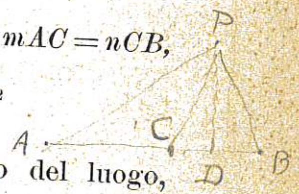
$$q^2 = m(AP)^2 + n(PB)^2,$$

e se C è un punto del segmento AB avremo facilmente:

$$q^2 = (m+n)(PC)^2 + m(AC)^2 + n(BC)^2 + 2r[CD(nBC - mAC)].$$

Se C è un punto del segmento AB per il quale $mAC = nCB$, avremo:

$$q^2 = (m+n)(PC)^2 + m(AC)^2 + n(BC)^2$$



e quindi $(PC)^2$ costante qualunque sia il punto del luogo, onde PC è costante; quindi ecc.

Come caso particolare si ha:

5) Il luogo geometrico dei punti di un piano, le cui distanze da due punti dati A, B hanno un rapporto uguale a quello dei segmenti p e q, è una circonferenza.

Per ogni punto P del luogo si avrà:

$$PA : PB = p : q. \tag{1}$$

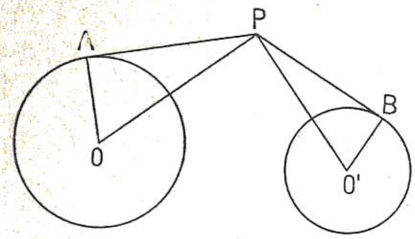
Siccome si sa che esistono due punti C, D l'uno interno e l'altro esterno al segmento AB tali che:

$$AC : CB = p : q$$
$$AD : DB = p : q$$

così viene subito fatto di pensare, che il luogo cercato possa essere la circonferenza avente CD per diametro. Così è infatti giacchè si dimostra facilmente che ogni punto P che soddisfa alla (1) è su questa circonferenza, e reciprocamente che ogni punto della circonferenza soddisfa alla (1).

6) Il luogo dei punti da cui si vedono due cerchi dati sotto un medesimo angolo è una circonferenza.

Siano i cerchi di centro O, O': P un punto del luogo. Gli angoli APO ed $O'PB$ saranno uguali ed i due triangoli $AOP, O'PB$ simili, onde:



$$PO : PO' = OA : O'B.$$

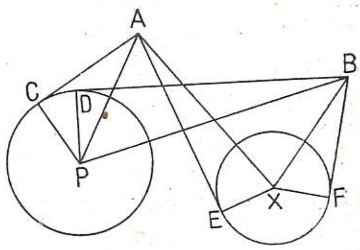
Inversamente se P è un punto per cui:

$$PO : PO' = OA : O'B$$

i due triangoli rettangoli OAP, $O'PB$ sono simili e quindi gli angoli APO e $O'PB$ sono uguali. Il luogo cercato è quindi il luogo dei punti del piano le cui distanze dai due centri O, O' stanno fra loro come i raggi OA, $O'B$ dei due cerchi dati.

7) Il luogo dei centri dei cerchi che sono visti da due punti dati A, B sotto due angoli dati α, β è una circonferenza.

Si può trovare un punto del luogo costruendo due triangoli rettangoli con un cateto in comune, maggiore della metà del segmento AB, e cogli angoli acuti adiacenti a questo cateto, uguali rispettivamente ai complementi di $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$. Il vertice P del triangolo costruito su AB e con AP e BP rispettivamente uguali alle ipotenuse dei due triangoli costruiti sarà il punto richiesto.



Per ogni altro punto X del luogo, a causa della similitudine dei triangoli rettangoli PCA, XEA $\left(\widehat{CAP} = \widehat{XAE} = \frac{1}{2}\alpha\right)$ avremo:

$$PA : XA = PC : XE.$$

Analogamente dai triangoli simili PDB, XFB, si ha:

$$PB : XB = PD : XF$$

e perciò:

$$PA : PB = XA : XB.$$

Viceversa se X è un punto per cui:

$$PA : PB = XA : XB,$$

X è un punto del luogo.

Infatti su XA come ipotenusa si costruisca un triangolo rettangolo AEX in cui sia

$$\widehat{XAE} = \frac{1}{2}\alpha,$$

e da B si conduca la tangente BF al cerchio di centro X e raggio XE. I triangoli simili CAP, XAE danno:

$$PA : XA = PC : XE,$$

e quindi per l'ipotesi fatta:

$$PB : XB = PD : XF,$$

ed i due triangoli rettangoli PDB, XAF sono simili ed è $\widehat{FBX} = \frac{1}{2}\beta$.

Il luogo cercato è quindi (cfr. es. 5) una circonferenza che facilmente si costruisce.

§ 3. **Risoluzione dei problemi determinati col metodo dei luoghi geometrici.** — Non esistono, nel campo elementare propriamente detto, metodi generali per la risoluzione dei problemi geometrici determinati; giacchè lo sviluppo da un punto di vista sistematico caratterizza appunto gl'indirizzi superiori della geometria analitica o proiettiva.

Tuttavia, i metodi che si adoperano con successo nella trattazione di varie classi di problemi, si lasciano riattaccare, in definitiva, a due concetti:

Il concetto (analitico) di scindere le condizioni che determinano la figura soluzione, ottenendo questa per intersezione di luoghi geometrici;

Il concetto della *trasformazione*.

Volendo parlare prima di tutto del metodo dei luoghi, osserviamo che esso si applica immediatamente in quei casi, in cui la figura richiesta può essere determinata per mezzo di un certo numero di punti, i quali sieno assoggettati a due condizioni indipendenti; lasciando cadere una di queste condizioni si ha una linea luogo dei punti che soddisfano all'altra, e così i punti da costruire si presentano come le intersezioni di due linee. Il problema resta quindi senz'altro risoluto elementarmente, se le linee costituenti i luoghi accennati sono composte di rette, di circoli, di segmenti e di archi di circolo.

Se ciò non accade, può darsi tuttavia che si riesca a ricadere in questo caso, col mutare convenientemente la scelta dei punti che determinano la figura, cui si riferisce il problema proposto.

Ecco alcuni semplici problemi che si risolvono subito, com'è detto innanzi, col metodo dei luoghi:

ESEMPIO I. *Costruire un triangolo* BAC, *conoscendo un lato* a, *la mediana* m *relativa a questo lato, e sapendo inoltre che* AB : AC = p : q ; *dove indichiamo con* p *e* q *segmenti dati.*

Preso $BC = a$ è chiaro che a determinare il triangolo basta il vertice A di esso, che deve soddisfare a due condizioni:

1° di avere da C e B distanze tali che:

$$AB : AC = p : q;$$

2° di distare dal punto medio O di CB di un segmento uguale ad m.

Trascuriamo la seconda condizione: il luogo geometrico dei punti che soddisfanno alla prima è un circolo che ha per diametro i punti che dividono internamente ed esternamente il segmento AB nel rapporto $p : q$ (§ 2 es. 5).

Trascuriamo invece la prima condizione: il luogo dei punti che soddisfanno alla seconda è un circolo col centro in O e raggio m.

Il punto cercato si trova all'intersezione di questi due cerchi e si vedrebbe facilmente che il problema o non ammette soluzioni o ne ammette una, considerando come una unica le soluzioni uguali ma diverse di posizione.

ESEMPIO II. *Costruire un circolo che sia veduto da tre punti dati* A, B, C *sotto tre angoli* α, β, γ.

Si determinerà prima il centro del cerchio richiesto.

Esso deve essere il centro di un cerchio che deve essere veduto da A sotto l'angolo α, da B sotto l'angolo β, da C sotto l'angolo γ. Trascurando la prima di queste condizioni, il luogo geometrico dei punti che soddisfanno le altre due è un circolo (§ 2 es. 7). Trascurando la seconda, il luogo geometrico dei punti che soddisfanno le altre due è pure un circolo. Il punto cercato è nell'intersezione di questi due cerchi.

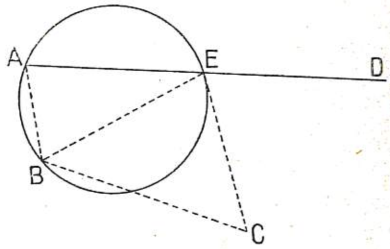
Siccome però, invece di trascurare la prima o la seconda condizione, si può anche lasciare da parte la terza, così è chiaro che il problema può ammettere sei soluzioni al massimo.

Determinato il centro P si ha il raggio del cerchio corrispondente conducendo per esempio da A una semiretta che faccia con la semiretta AP un angolo uguale alla metà di α ed abbassando da P la perpendicolare su questa semiretta.

In alcuni casi si può non avere bisogno di ambedue i luoghi geometrici ma potrà servire uno solo quando sia data una linea su cui il punto cercato deve giacere.

ESEMPIO III. *Dati tre punti* A, B, C *non situati in linea retta, ed una retta* AD *del loro piano passante per uno di essi* A, *descrivere un circolo passante per* A *e* B *che incontri* AD *in un punto* E *tale che* EC *sia tangente a questo cerchio.*

Supponendo, come sempre il problema risoluto, si vede che l'angolo BEC è uguale all'angolo BAD, e perciò E è un punto di AD da cui si vede BC sotto l'angolo BAD conosciuto. Non tenendo conto che E si debba trovare su AD, la condizione rimasta determina il luogo geometrico dei punti da cui si vede BC sotto l'angolo BAD. Il punto richiesto sarà quindi nell'intersezione di AD con questo luogo.



Nei casi precedenti l'applicazione diretta del nostro metodo conduce ad una soluzione elementare dei problemi proposti. Ma ciò non accade ugualmente in altri casi. Può darsi infatti che le due condizioni per mezzo di cui si vogliono determinare dei punti nel piano, separatamente prese, conducano a dei luoghi geometrici più elevati della retta e del circolo. I punti da costruire si presenteranno allora come intersezioni di linee siffatte, sebbene molte volte essi possano essere ottenuti, in altro modo, mediante rette e circoli.

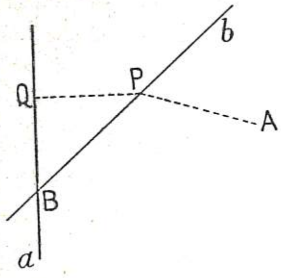
Così accade p. es. relativamente ai problemi che vengono a dipendere dalla determinazione delle intersezioni di una retta con una conica (ellisse, iperbole o parabola).

Per dare un'idea del modo come tale questione possa venire trattata, ci riferiremo al seguente enunciato che la pone in uno dei suoi aspetti generali:

Determinare i punti d'una retta le cui distanze da un punto e da un'altra retta assegnata sono in un rapporto dato.

Il luogo dei punti le cui distanze da un punto A e da una retta a sono in un rapporto dato λ, è notoriamente una parabola che ha come fuoco A e come direttrice a.

Ma non importa tracciare questa conica per trovarne le intersezioni con una retta b.



Si prenda invero su b un punto generico P e si abbassi la perpendicolare PQ su a, si conduca PA, e si indichi con B l'intersezione di a con b (supposte le due rette non parallele).

Al variare di P su b il rapporto

$$\frac{PB}{PQ} = \mu$$

resta costante; quindi i punti P di b per cui

$$\frac{PA}{PQ} = \lambda,$$

sono anche tali che:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\lambda}{\mu},$$

ed appartengono perciò al cerchio di diametro AB, che abbiamo determinato nell'esempio 5.

Oltre al problema sopra accennato ed ai casi equivalenti in cui si tratta sempre, sotto diverse forme, delle intersezioni di una conica con una retta, vi sono ancora altri casi di problemi risolubili elementarmente, dove l'applicazione diretta del metodo dei luoghi ci condurrebbe a dovere intersecare una conica con un cerchio o due coniche, in relazione particolare.

Ci limitiamo ad accennare ad un esempio semplicissimo.

Sia proposto il seguente problema:

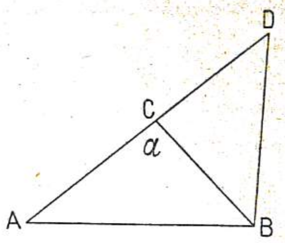
Determinare un triangolo, conoscendo la base AB, *l'angolo opposto* α e la somma $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = s$ *degli altri due lati.*

Il vertice incognito C, si presenterebbe come una delle intersezioni di due luoghi geometrici: il luogo dei punti da cui si vede AB sotto l'angolo α, che è costituito da archi di circolo, e il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da A e B ha il valore costante s. Ma quest'ultimo luogo è un'ellisse, e perciò non è costruibile elementarmente.

Si può per altro trasformare il problema nel modo seguente:

Supposto il problema risoluto si prolunghi il segmento AC

del segmento $CD = CB$: la costruzione del triangolo ACB si riporta subito a quella del triangolo ADB, del quale sono dati due lati AB e $AD = s$, e l' angolo $A\widehat{D}B = \frac{1}{2}\alpha$.



Quest' ultimo triangolo si costruisce facilmente determinando due luoghi geometrici: il luogo dei punti da cui si vede il segmento AB sotto l' angolo $\frac{1}{2}\alpha$, e il luogo dei punti distanti da A di s.

§ 4. **Metodo di similitudine.** — La trasformazione per similitudine porge in due modi un mezzo per la risoluzione dei problemi, in quanto essa permette di modificare la *grandezza*, o anche la *posizione* della figura da costruire o di qualcuno dei suoi elementi dati.

Interviene l' uso del metodo, conformemente al primo degli scopi suddetti, quando si tratta di costruire una figura che riesce determinata da un certo numero di angoli e da un segmento di grandezza assegnata o da una condizione equivalente; tralasciando quest' ultima condizione si ha allora una serie di figure simili a quella richiesta, la quale può quindi essere costruita valendosi del segmento dato per determinare il rapporto di similitudine.

Così il metodo di similitudine conduce ad uno spezzamento del problema proposto in due problemi più semplici; il secondo di questi ha per oggetto la costruzione di una figura simile a una data, in base ad una condizione quantitativa.

Un' applicazione ulteriore della similitudine si ha combinando la riduzione di cui sopra è fatto cenno, con un cambiamento di posizione della figura o di una parte della figura nel piano; in questo caso giova ricorrere alle costruzioni sistematiche della similitudine, come trasformazione piana, mediante l' omotetia congiunta (se occorre) ad una rotazione intorno ad un punto o ad una simmetria rispetto ad un asse.

Cominciamo dal citare alcuni casi in cui si applica la similitudine soltanto nel primo dei due modi dichiarati, rimandando per l' applicazione ulteriore nel secondo modo ai §§ 9, 10.

Esempio 1°. *Costruire un triangolo* ABC, *conoscendo l' angolo* α, *il rapporto dei lati* AC, AB *che lo comprendono*

(AC : AB = m : n), *e la lunghezza* w_a *della bisettrice relativa all'angolo* α.

Si costruisca un triangolo PAQ soddisfacente alla prima ed alla seconda condizione. Per determinare il triangolo simile a PAQ e che soddisfi alla terza condizione, si prenda, a partire da A sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{PAQ}$, un segmento $AOD \equiv w_a$, e da D si conduca la parallela a PQ. Il triangolo che così si determina è il triangolo richiesto.

Nella stessa maniera si può:

Costruire un triangolo di cui sono dati due angoli e

a) un altezza;

b) una bisettrice;

c) la proiezione di un lato su di un altro;

d) il perimetro.

Esempio 2°. *Costruire un triangolo equilatero i cui vertici appartengano a tre circonferenze concentriche date.*

Si costruisca un triangolo equilatero qualunque, si trovi un punto le cui distanze dai vertici di esso sieno proporzionali ai raggi dei cerchi dati: punto che si otterrà come intersezione di due circoli (§ 2 es. 5). Si unisca il punto coi vertici e si conducano dal centro dei tre cerchi concentrici dati, i raggi paralleli. Si determineranno così i tre vertici del triangolo richiesto.

Il problema riesce così risolto per la simultanea applicazione del metodo di similitudine e di quello dei luoghi geometrici.

§ 5. **Omotetia.** — Passiamo a vedere come si applichi la similitudine, in casi in cui conviene mutare, non soltanto la grandezza, ma anche la posizione delle figure date.

La trasformazione del piano per similitudine può essere ottenuta generalmente mediante un'omotetia, combinata ad una rotazione intorno ad un punto, o ad un ribaltamento intorno ad un asse.

Pertanto il metodo di cui vogliamo trattare si riduce all'uso dell'omotetia, congiunto a quello dei metodi già descritti nei §§ 3, 4.

Data, nel piano, una figura qualunque ed un punto O, come centro, si può sempre costruire una figura omotetica alla prima, e tale che il rapporto di due segmenti che da O vanno ai punti omologhi, sia uguale a quello dei segmenti m, n affetto dal segno + o — (omotetia diretta od inversa), cioè tale che unendo il centro O con un punto A della prima figura il raggio OA incontri la seconda in un punto A' per cui

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

dove A, A' saranno dalla medesima parte di O se vale il segno superiore, da parti opposte se vale quello inferiore.

Quando si eseguisce tale operazione sopra una figura, si dice che si moltiplica la figura data per $\pm \frac{m}{n}$ rispetto al punto scelto come centro d'omotetia, ed è chiaro che moltiplicando, per esempio, una retta, si ottiene un'altra retta parallela alla data, moltiplicando un circolo un nuovo circolo. Con ciò che precede sarà facile risolvere il problema:

Essendo a, a' *due linee ed* O *un punto del loro piano posto fuori di esse, condurre per* O *una retta tale che, detti* A, A' *i punti di incontro di questa retta rispettivamente con* a, a' *si abbia*

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

dove m, n *sono segmenti dati.*

La retta cercata è quella che unisce O col punto d'incontro di a con la linea che si ottiene moltiplicando a' per $\pm \frac{m}{n}$ rispetto ad O.

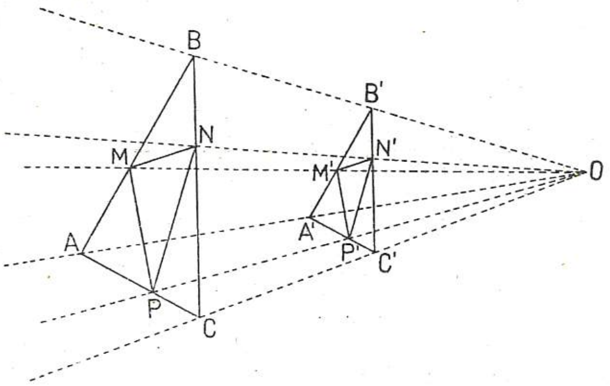
Esempio. *Costruire un triangolo, dati due lati* a, b *e la mediana* m_c *relativa al terzo lato.*

Descritti col centro in un punto qualunque C due cerchi concentrici di raggi a, b, e preso $CD \equiv m_c$, si moltiplichi per -1 uno dei cerchi, per esempio quello di raggio b, rispetto a D. Si avrà un cerchio di raggio b e di centro C_1 simmetrico di C rispetto a D. Se B è un punto d'incontro di questo cerchio con quello di raggio a, ed A quello di BD col cerchio di raggio b, sarà ACB il triangolo richiesto.

Ecco un altro esempio in cui si fa uso del metodo d'omotetia passando per il problema contrario. Si domanda di:

Iscrivere in un triangolo dato ABC *un altro triangolo i cui lati sieno ordinatamente paralleli a tre rette assegnate non parallele fra loro.*

Si costruisca un triangolo qualunque $M'N'P'$ coi lati paralleli alle tre rette assegnate, e si circoscriva a questo un



triangolo $A'B'C'$ coi lati paralleli a quelli del triangolo dato. Per una nota proprietà le tre rette AA', BB', CC' concorreranno in un punto O. Unendo O con M', N', P' i punti di incontro M, N, P rispettivamente coi lati AB, BC, AC del triangolo ABC daranno i vertici del triangolo richiesto.

§ 6. **Metodo del problema contrario.** — L'applicazione del metodo di similitudine spiegato innanzi richiede anzitutto che si sappia costruire una figura simile a quella che forma oggetto del problema proposto.

Ora ciò può essere conseguito talvolta con una semplice inversione del problema stesso, considerando dunque in luogo di esso il *problema contrario*.

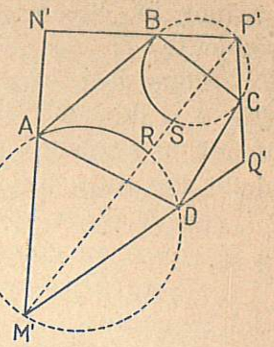
Ecco due esempii in proposito:

ESEMPIO 1°. *Circoscrivere ad un cerchio dato una losanga simile ad una losanga data* ABCD.

Si *iscriva* il cerchio nella losanga data $ABCD$; si avrà così una figura simile a quella che si vuol determinare. Costruendo quindi la figura simile a questa e col raggio del cerchio dato, omologo al raggio del cerchio ora trovato, si avrà la soluzione richiesta.

ESEMPIO 2°. *Iscrivere in un quadrilatero* MNPQ *un quadrilatero simile ad un altro quadrilatero dato* ABCD.

Il problema si riduce al suo contrario: si circoscriva ad $ABCD$ un quadrilatero $M'N'P'Q'$ simile ad $MNPQ$, quindi si trasformi la figura per similitudine, prendendo come rapporto quello dei lati MN, $M'N'$.



La circoscrizione di $M'N'P'Q'$ ad $ABCD$ può compiersi in virtù dell'analisi seguente.

Suppongasi il problema risoluto, e suppongasi ancora che i lati $M'N'$, $N'P'$, $P'Q'$, $Q'M'$ passino rispettivamente per A, B, C, D. Si noti che le condizioni per la similitudine dei due quadrilateri (convessi) $MNPQ$, $M'N'P'Q'$ si possono esprimere (condotte rispettivamente le diagonali MP, $M'P'$) colle eguaglianze angolari:

$$N\widehat{M}P = N'\widehat{M'}P' \quad N\widehat{P}M = N'\widehat{P'}M' \quad N\widehat{M}Q = N'\widehat{M'}Q' \quad N\widehat{P}Q = N'\widehat{P'}Q',$$

che portano la similitudine dei triangoli MNP, $M'N'P'$ e MPQ, $M'P'Q'$. La conoscenza degli angoli $N'\widehat{M'}Q'$, $N'\widehat{P'}Q'$, ci permette di tracciare rispettivamente sui lati AD, BC presi come corde, due archi a cui debbono appartenere i vertici M', P'. Si dicono R, S i punti in cui la diagonale $M'P'$ incontra ulteriormente i cerchi a cui appartengono gli archi suddetti; gli archi AR, BS sono noti, conoscendosi gli angoli $N'\widehat{M'}P'$, $N'\widehat{P'}M'$. Si possono dunque costruire i punti R, S e quindi M', P' ecc.

§ 7. **Metodi di trasformazione.** — La difficoltà che offre la risoluzione di un dato problema in alcuni casi può essere rimossa mutando la posizione della figura, con un movimento del piano, o più generalmente modificando qualche proprietà di essa o di una parte di essa per mezzo di una *trasformazione* opportuna.

Le trasformazioni più semplici, che cadono nel dominio della geometria elementare, sono la *traslazione parallela*, la *simmetria* rispetto ad una retta (ribaltamento del piano intorno a questa), la *rotazione* attorno ad un punto, la *similitudine* e in particolare l'*omotetia*, la *trasformazione per raggi vettori reciproci*.

Vediamo su alcuni esempii, come queste trasformazioni porgano altrettanti metodi, spesso utili, per la risoluzione dei problemi.

§ 8. **Traslazione parallela.** — Un primo esempio semplicissimo in cui si applica una traslazione parallela è il seguente:

Sieno dati, in grandezza e posizione due segmenti AB, CD, e si domandi di costruire un triangolo avente due lati uguali ai segmenti predetti e come angolo compreso l'angolo delle due rette AB, CD (supposte non parallele).

Basta allora trasportare il segmento CD parallelamente a sè stesso, in guisa che B si sovrapponga ad A.

Un'applicazione meno evidente del metodo viene offerta dal seguente:

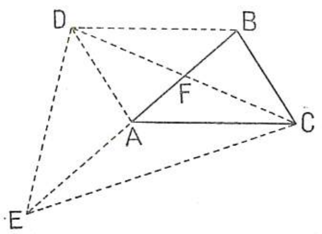
Esempio. *Costruire un trapezio, dati i due lati paralleli* AB, CD, *l'angolo* α *che fanno i lati non paralleli, ed il rapporto di questi due lati.*

Immaginando che il trapezio $ABCD$ sia quello richiesto, si trasporti il lato AD parallelamente a sè stesso in CE. Del triangolo ECB così formato, si conosce un lato, differenza delle basi AB, CD, l'angolo α ed il rapporto degli altri due lati.

Il problema è quindi ricondotto ad un altro facile a risolversi col metodo dei luoghi geometrici.

Le traslazioni dei lati di un triangolo e di un quadrangolo offrono facile risoluzione di un esteso numero di problemi.

In un triangolo qualunque ABC trasportando AC parallelamente a sè stessa in BD, prendendo AE uguale ed adiacente ad AB e considerando i triangoli EDC, AED, ADC, AEC, sarà facile riconoscere le seguenti proprietà:



I lati di EDC sono doppi delle mediane di ABC e ad esse paralleli (DC ed FC sono propriamente posti sulla medesima retta).

I lati di ABC sono due terzi delle mediane di EDC ed A è il baricentro di questo triangolo.

Due delle altezze dei triangoli AED, AEC, ADC sono uguali a due altezze del triangolo dato, e la superficie di EDC è tripla di quella di ABC.

Allorchè saranno dati tali elementi di ABC da rendere possibile, tenuto conto delle proprietà ora enunciate, la determinazione di uno dei triangoli EDC, AED, ADC, AEC, il triangolo ABC sarà sempre costruibile.

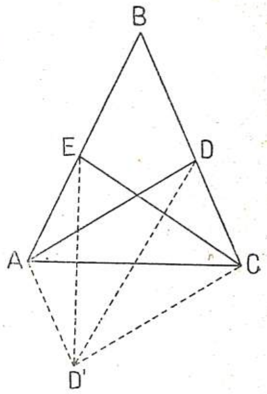
§ 9. **Ribaltamento intorno ad un asse.** — Col ribaltamento del piano intorno ad una retta si cercano i medesimi vantaggi per cui si adopra la traslazione parallela: avvicinare elementi dati, introdurre elementi noti, come somme o differenze di segmenti, di angoli, sovrapporre enti incogniti eguali a fine di eliminarne uno.

Questo metodo si può anche chiamare metodo di *simmetria*, poichè la trasformazione data dal ribaltamento è appunto una simmetria del piano rispetto ad una retta. S'intende che per riuscire ad una trasformazione effettivamente utile, debbono essere sostituiti coi loro simmetrici, soltanto una parte degli elementi che entrano in considerazione.

Prima di mostrare qualche applicazione concreta del metodo nella risoluzione di problemi, vediamo come Jacob Steiner sia ricorso appunto alla considerazione di una simmetria per dimostrare il seguente:

Teorema [1]. *Se in un triangolo* ABC *i segmenti* CE, AD *delle bisettrici di due angoli interni compresi fra i vertici* C, A *ed i lati opposti sono uguali, il triangolo è isoscele.*

Se fosse infatti per esempio $BC > AB$ sarebbe anche $\frac{1}{2} BAC > \frac{1}{2} BCA$ cioè $\widehat{DAC} > \widehat{ECA}$ e quindi $\widehat{DC} > AE$.



Inoltre sempre in tale ipotesi sarebbe $\widehat{BAD} > \widehat{BCE}$, e quindi per i due triangoli BAD, BCE avente l'angolo B in comune $\widehat{ADC} > \widehat{AEC}$.

Se D' è il simmetrico di D rispetto al punto di mezzo di AC sarà evidentemente AD' uguale e parallelo a CD e quindi:

$$D'C = AD = EC,$$

e l'angolo $\widehat{CED'}$ uguale ad $ED'C$, e poichè $\widehat{AD'C} > \widehat{AEC}$ sarà $AD'E > AED'$ e quindi $AE > D'A$ od anche $DC < AE$, il che è contrario a ciò che abbiamo sopra stabilito. Non può essere quindi $BC > AB$.

[1] Jacob Steiner. (Vedi « Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreiek — Gesammelte wercke, Bd. II, pag. 323.

Nel medesimo modo si prova che non può darsi che sia $BC < AB$ quindi deve essere $BC = AB$. c. d. d.

Passiamo ora ad accennare come si risolvono col metodo di simmetria i problemi che prendono origine dalla *teoria della riflessione*.

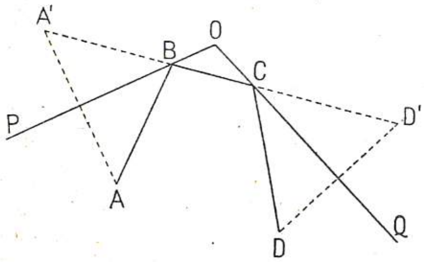
ESEMPIO 1°. *Dati, fuori di una retta* a, *due punti* B, C, *determinare su* a *un punto* X, *tale che i due angoli (d'incidenza e di riflessione) formati dai raggi* XB, XC *coi due lati della retta* a, *sieno uguali fra loro.*

Si consideri il simmetrico B' di B rispetto ad a: il punto X d'incontro di $B'C$ con a è il punto richiesto.

Osservazione. Siccome $BX + CX = B'C$, così si deduce che $BX + XC$ ossia la somma delle distanze di B e C dal punto X ora trovato, è minore di ogni somma analoga relativa ad ogni altro punto di a; perciò la stessa risoluzione conviene al problema:

Dati due punti B, C *fuori di una retta* a *e da una stessa parte di essa, determinare il punto di* a, *per cui la somma delle due distanze da* B *e* C *riesce minima.*

ESEMPIO 2°. *Dati entro un angolo* POQ *due punti* A, D, *costruire una poligonale* ABCD *avente i vertici* B, C *rispettivamente sui lati* OP, OQ *e tale che gli angoli* $\widehat{PBA}$, $\widehat{OCB}$ *sieno uguali rispettivamente agli angoli* $\widehat{OBC}$, $\widehat{QCD}$.



I punti D ed A', simmetrico di A rispetto ad OP, si trovano rispetto ad OQ nelle condizioni dell'esempio precedente, e quindi se $A'CD$ è la spezzata per cui $\widehat{A'CO} = \widehat{DCQ}$, unendo A con B (incontro di $A'C$ con OP) si avrà in $ABCD$ la poligonale richiesta, posto che C e B cadano su OQ ed OB e non sui loro prolungamenti.

Questa restrizione permette di discutere le condizioni di risolubilità del problema, ciò che per brevità omettiamo.

Osservazione. Come, pel caso precedente, si prova anche qui che *la poligonale costruita riesce minima fra tutte le possibili poligonali terminate ad* A, D, *che hanno i vertici su* OP, OQ.

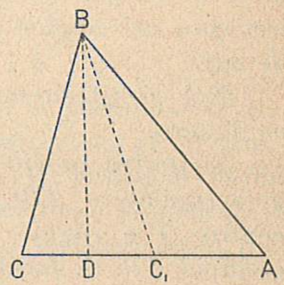
In modo ricorrente, nello stesso modo che si passa dal

1° esempio al 2°, si riesce a risolvere il problema analogo relativo al triangolo, al quadrilatero ecc., il quale risponde alla questione fisica seguente:

Dati entro un poligono due punti, determinare il raggio (luminoso, sonoro ecc.) che uscendo da uno di essi, ed essendo riflesso successivamente da tutti i lati del poligono, va a passare per l'altro punto.

Daremo ancora qualche altro esempio in cui si applica il metodo di simmetria alla risoluzione di problemi.

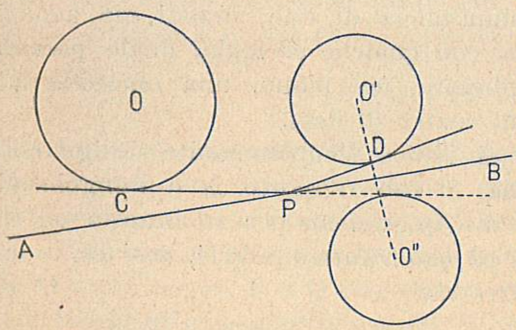
ESEMPIO 1°. *Costruire un triangolo* ABC *data la differenza* AD — DC ≡ d *delle proiezioni di* AB *e* BC *sul terzo lato, l'altezza* h_b *relativa a questo e la differenza* δ *degli angoli* $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$.



Immaginiamo, al solito, il problema risoluto; si ruoti *BC* intorno all'altezza *BD* in BC_1: si ricondurrà così la costruzione di *ABC* a quella di ABC_1 di cui è noto $AC_1 \equiv d$, l'angolo $C_1BA \equiv \delta$ e l'altezza $BD \equiv h_b$, costruzione che è facile eseguire servendosi del metodo dei luoghi geometrici.

ESEMPIO 2°. *Dati due cerchi rispettivamente di centro* OO′, *posti da una medesima parte di una retta* AB, *determinare su di essa un punto* P, *tale che condotte le tangenti* PD, PC *ai due cerchi, gli angoli* CPA, DPB *siano uguali.*

Supponendo il problema risoluto, si consideri il cerchio simmetrico a quello di centro *O*, rispetto ad *AB*: una sua tangente sarà la tangente *CP* del cerchio di centro *O*. Perciò il problema è ricondotto all'altro: Dati due cerchi di centro *O*, *O″* (il cerchio di centro *O″* essendo il simmetrico del cerchio di centro *O′*), determinare la tangente comune.



Con questo metodo si può anche risolvere facilmente il problema:

Essendo a, a′ *due linee e data una retta, determinare due punti* A, A′ *rispettivamente posti sopra* a, a′, *in modo che la retta data sia l'asse del segmento* AA′.

§ 10. **Rotazione intorno ad un punto.** — La rotazione intorno ad un punto si trova il più spesso usata come mezzo di risoluzione dei problemi, in unione ad una omotetia (§ 5).

Citiamo tuttavia un semplice gruppo di problemi nei quali la semplice rotazione conduce allo scopo.

Si tratta di:

Iscrivere in un cerchio un poligono regolare il cui contorno contenga un punto assegnato.

Questo problema può essere risolto per il poligono di 3, 4, 5, 6, 10.... lati, ed in generale ogni qualvolta si sappia iscrivere nel cerchio il poligono regolare collo stesso numero di lati.

Noi ci riferiremo per semplicità al caso del triangolo equilatero.

Si iscriva perciò nel cerchio dato di centro O un triangolo equilatero ABC, e sia P un punto dove il circolo di centro O e raggio OM sega uno dei lati di ABC per esempio AB. Si faccia ruotare il triangolo intorno ad O di un angolo eguale ad OMP nel senso A, B, C e si avrà il triangolo richiesto $A'B'C'$.

Il problema sarà possibile tutte le volte che il segmento OM sarà non minore di un terzo dell'altezza del triangolo equilatero iscritto nel cerchio.

§ 11 **Omotetia combinata a rotazione.** — Quantunque si tratti di applicazione simultanea di due metodi già avanti descritti giova mostrare, con qualche esempio, quale partito si possa trarre dal combinare, nel piano, una omotetia ad una rotazione intorno al centro di essa.

Questa operazione si indica semplicemente designando il centro O dell'omotetia, il suo rapporto m e l'angolo di rotazione v, come una *moltiplicazione* per m_v intorno ad O.

Esempio. *Costruire un quadrilatero* ABCD, *dati* BC ≡ m, CD ≡ n, *e sapendo inoltre che*

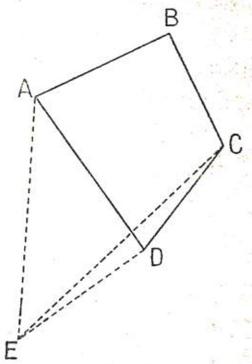
$$AB : AD = p : q, \quad AC : AD = r : s, \quad \widehat{ABC} + \widehat{ADC} \equiv \alpha,$$

dove p, q, r, s *sono segmenti ed è* $\alpha < 2$ *retti.*

Supponiamo il problema risoluto. Si moltiplichi il segmento BC per mv rispetto ad A, preso come centro, e con $m = \frac{p}{q}$ e $v \equiv BAD$. Ottenuto il segmento ED, sarà $EDC \equiv \alpha$ e si avranno quindi dati sufficienti per determinare il triangolo EDC. Di più avendosi:

$$AC : AE = p : q$$

$$AC : AD = r : s,$$



il punto A sarà determinabile (metodo dei luoghi geometrici). Mediante AC, BC e l'angolo $\widehat{ABC} \equiv \alpha - \widehat{ADC}$ sarà pure determinabile B.

La risoluzione del nostro problema è quindi riportata a quella di altri più semplici.

Colla rotazione intorno ad un punto si possono risolvere quei problemi che si riconducono alla costruzione di un triangolo simile ad un triangolo dato, nota la posizione di un vertice (che si prende per centro di rotazione) e quando si voglia che gli altri due vertici debbano trovarsi sopra due linee date (rette, archi di cerchio).

Esempio. *In un parallelogramma* ABCD, *iscrivere un altro parallelogramma di cui si conosca l'angolo* α *delle diagonali e si sappia che il rapporto di queste è uguale a quello dei segmenti dati* p *e* q.

Sia $EFGH$ il parallelogramma richiesto. Il punto O d'incontro delle sue diagonali sarà il punto d'incontro delle diagonali del parallelogramma dato. Sia il triangolo EOH che abbia $\widehat{EOH} \equiv \alpha$ e tale che:

$$EO : OH = p : q = m.$$

Preso un triangolo PRQ coll'angolo $PRQ \equiv \alpha$ e coi lati che lo comprendono, per esempio, uguali ai segmenti p e q, il problema dato è ricondotto all'altro:

Costruire un triangolo simile al triangolo PQR *col vertice* R *in* O *e coi vertici* P *e* Q *rispettivamente sui segmenti* AD, DC.

Ciò si ottiene moltiplicando DC per $m\alpha$: il punto d'incontro del segmento ottenuto con AD, se esiste, è il punto richiesto E, l'altro H si ottiene facilmente.

Se invece del rapporto dei lati del triangolo fosse dato il loro rettangolo R, è facile vedere che si dovrebbe prendere l'inversa di DC rispetto ad O colla potenza d'inversione R e questa inversa farla ruotare dell'angolo α.

Date nel piano due figure simili F, F', non omotetiche [1], sarà facile determinare gli elementi O, m, v della rotazione atta a portare la F a coincidere colla F'. È chiaro che l'angolo v di rotazione sarà l'angolo di due rette omologhe, il rapporto m quello di due segmenti omologhi di F, F'.

A determinare O, basta osservare che il centro di rotazione, il punto comune a due rette omologhe e una coppia di punti omologhi si devono trovare sullo stesso cerchio: perciò si avrà in modo unico il punto O, prendendo due coppie di punti omologhi su due rette che si tagliano e conducendo due di tali cerchi che hanno oltre O un punto comune nell'incontro delle due rette. Si può anche determinare il punto O in generale, notando che il rapporto delle distanze di O da due punti omologhi è il rapporto stesso di rotazione.

Dopo ciò sarà facile determinare il centro di rotazione di due punteggiate simili, in cui si sono date due coppie di punti omologhi e di due cerchi su cui è data una coppia di punti, costituendo i centri un'altra coppia di punti omologhi, e risolvere quindi quei problemi in cui, date due rette, una condizione che determini il rapporto di rotazione, una coppia di punti omologhi, si cerchi un'altra coppia di punti omologhi delle due punteggiate simili che soddisfino ad un'altra condizione, come essere posti su di una retta parallela ad una retta data o passante per un punto dato o tali che il loro segmento sia uguale ad un segmento dato, oppure gli altri problemi, in cui sono dati due cerchi e su questi due punti omologhi e se ne vogliano trovare due altri che soddisfino ad un'altra condizione.

Esempio. *Date due rette concorrenti: i punti* A, A' *in esse, determinare due punti* X, X' *rispettivamente su di esse, in modo che sia:*

$$\mathrm{AX} : \mathrm{AX'} = \mathrm{p} : \mathrm{q} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{XX'} \equiv \mathrm{a},$$

essendo p, q, a segmenti dati.

[1] Se F, F' fossero omotetiche, per portare F a coincidere con F' basterebbe una moltiplicazione.

Se immaginiamo il problema risoluto: A, X; A', X' determineranno due punteggiate simili: sia O il loro centro di rotazione. I triangoli AOX', XOX' sono simili; perciò, trovato O, il problema si riporta alla costruzione di un triangolo simile ad AOA' con a omologo di AA'.

Per determinare O, presi sulle rette due punti B, B', tali che:

$$AB : AB' = p : q,$$

si ripeterebbe la costruzione già indicata.

§ 12. **Trasformazione per raggi vettori reciproci.** — Tenendo presenti le relazioni che corrono fra una figura e la sua inversa o trasformata per raggi vettori reciproci — conservazione degli angoli — contatto — che la inversa di una retta è una retta od un cerchio, secondochè la retta passa o no per il centro d'inversione — la inversa di un cerchio è una retta od un cerchio, secondochè il cerchio passa o no per il centro stesso ecc., si potrà cercare di ricondurre mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, scelti convenientemente il centro e la potenza d'inversione, il problema dato ad un altro noto, od a cui si veda come applicare i metodi già esposti, od in generale, la di cui soluzione presenti minori difficoltà a causa della natura degli enti in cui si trasformano gli enti dati e quelli cercati.

Esempio. *Descrivere un cerchio passante per un punto dato* P *e che tagli ortogonalmente due cerchi dati di centri* O, O'.

Se si fanno le inverse dei due cerchi dati con P, centro d'inversione, e colla potenza uguale, per esempio, alla potenza di P rispetto al cerchio di centro O (per semplicizzare la costruzione, giacchè così questo cerchio si trasforma in sè stesso) l'inversa del cerchio richiesto si cambia in una retta che, dovendo tagliare ortogonalmente il cerchio di centro O e quello inverso del cerchio di centro O', sarà la retta dei centri. Da ciò la facile soluzione del problema dato.

Per definizione è noto che detto O il centro d'inversione, F' l'inversa di una figura F rispetto O, una retta qualunque uscente da O incontra F, F' in due punti A, A' tali che il rettangolo di OA, OA' è costante anche in segno (*potenza d'inversione*), intendendo che i due punti A, A' sono da parte opposta di O, se il segno attribuito è negativo, dalla medesima parte nel caso contrario.

Ricordando ciò è facile risolvere il problema generale:

Date due linee a, a′ *ed un punto* O *fuori di esse, condurre per* O *una retta tale che, detti* A, A′ *i punti di incontro di questa retta con* a, a′, *il rettangolo di* OA, OA′ *sia equivalente ad uno dato (con segno stabilito).*

Il metodo che serve a risolvere tale problema, analogo a quello di moltiplicazione, ci appare anche come una forma speciale del primo metodo indicato dei luoghi geometrici.

Esempio. *Costruire un triangolo* ABC *di cui si conosca: il rettangolo iscritto* EFGH, *avente due vertici consecutivi su* BC, *l'angolo* α *sui lati del quale cadono gli altri due ed il rettangolo* R *dei segmenti che il vertice* H *determina sul lato* AB.

L'analisi mostra che il vertice A dell'angolo α del triangolo richiesto si trova su di un segmento posto al di fuori del rettangolo dato e da cui si vede HG sotto l'angolo α; inoltre A si deve trovare sopra la linea inversa della retta EF, preso per centro H e per potenza d'inversione R, cioè su di un cerchio passante per H, il quale potrà avere quindi un altro solo punto in comune coll'arco capace dell'angolo α.

La trasformazione per raggi vettori reciproci riceve applicazioni sistematiche ai problemi della Geometria del compasso.