

37

IL PASSAGGIO DALLA FISICA CLASSICA ALLA MECCANICA QUANTISTICA: IL CONTRIBUTO DI LOUIS DE BROGLIE

Alessandro Janovitz¹ – Fabio Mercanti¹

MATHESIS BRESCIA

MATHESIS MANTOVA

Sunto

Il presente lavoro costituisce un contributo alla ricostruzione storica della nascita della meccanica ondulatoria, con particolare attenzione al ruolo centrale e preminente rivestito da de Broglie. Si è altresì cercato di evidenziare la suggestiva originalità della poco conosciuta teoria della doppia soluzione. In particolare, quanto proposto nel § 2 (oltre ad essere il reale percorso storico, negli anni 1923-27, delle ricerche sul comportamento dei quanti d'energia nel quadro della teoria della relatività ristretta) può rivelarsi valido strumento per introdurre i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria.

Abstract

This paper is a contribution to the historical analysis of the birth of wave mechanics, with a particular attention to the pre-eminent and main role held by de Broglie. We have also tried to point out the suggestive originality of the little-known theory of the double-solution. In particular, what has been proposed in § 2 (besides being the real historical track, in the years 1923-27, of the researches on the behaviour of the quanta of energy concerning the studies of the theory of relativity) can be a good instrument to introduce the fundamental concepts of wave mechanics.

¹ Dipartimento Di. Tec. del Politecnico di Milano, Via Bonardi, 3, 20133 Milano. Lavoro presentato al Convegno "L'insegnamento della matematica e sue evoluzioni", Barletta 1998, e svolto nell'ambito del nucleo di ricerca didattica ALMPRT (Ancona, L'Aquila, Milano Politecnico, Pescara, Roma Tre, Teramo).

1. Introduzione

I risultati raggiunti in questo lavoro possono essere così sintetizzati: si dimostra che Louis de Broglie fu il fondatore della meccanica ondulatoria, dalla quale trasse origine la meccanica quantistica (§ 2); si spiega la ragione per cui de Broglie non elaborò per primo un'equazione d'onda che descrivesse il moto di una o più particelle e si verifica che tale fatto non inficia la validità di quanto in precedenza sostenuto (§ 3); dopo aver brevemente illustrato le principali interpretazioni del significato della funzione d'onda ψ che compare nella equazione di Schrödinger (§ 4), si esaminano le idee fondamentali della teoria della doppia soluzione, evidenziando quali siano gli strumenti matematici utilizzati da de Broglie (§ 5); si dimostra infine che la teoria della doppia soluzione non è stata generata dal desiderio di confutare l'indeterminismo, o comunque le conseguenze estreme dell'interpretazione probabilistica di Born, bensì è il logico sviluppo del pensiero scientifico di de Broglie, basato sulle categorie della causalità (§ 6).

2. Louis de Broglie fondatore della meccanica ondulatoria

Nel 1923, Louis de Broglie, nel tentativo (del tutto nuovo all'epoca) di elaborare una teoria *quantistica relativistica*, pose le basi della meccanica ondulatoria (de BROGLIE [8], [9], [7]).

Partendo dalla *relazione di Einstein*

$$E = mc^2 \quad (1)$$

(dove E è l'energia posseduta da un qualsiasi corpo di massa m e c è la velocità della luce) e da quella derivata dalla ipotesi dei quanti

$$E = h\nu$$

(dove E è l'energia relativa alla radiazione di frequenza ν , mentre h è la *costante di Planck*), ottenne

$$h\nu = mc^2. \quad (2)$$

Per la neonata teoria dei quanti, ν era una grandezza rappresentativa di un moto periodico non ancora ben definito ed era pertanto oggetto di svariate ipotesi. Sottoponendo ν ad un cambiamento del *sistema di riferimento* per mezzo delle

trasformazioni di Lorentz² (rispetto alle quali la (1), e quindi la (2), è invariante), de Broglie ottenne la relazione

$$v' = v(1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (3)$$

dove v' è il trasformato di v , mentre $\beta = v/c$, essendo v la velocità del corpo di massa m . Riflettendo su tale questione, de Broglie concepì un'idea rivoluzionaria: il moto periodico in questione è interpretabile attraverso un'onda in termini di stazionarietà; a tale onda diede il nome di *onda di fase*.

Il concetto veramente nuovo è il seguente: ipotizzare l'esistenza di «un lien entre le mouvement d'un mobile et la propagation d'une onde. Déjà, nous pouvons noter que la propagation rectiligne de l'onde de phase est liée au mouvement rectiligne du mobile» (de BROGLIE [10], p. 37). Il moto di una particella può quindi essere descritto tramite la propagazione dell'onda di fase, la cui frequenza v' è retta dalla seguente relazione (de BROGLIE [10], p.35):

$$v' = \frac{mc^2}{h}(1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Tale ipotesi è la base della meccanica ondulatoria, ed è il frutto consapevole della volontà di applicare la teoria della relatività alle conoscenze sui quanti (è già, in sostanza, il nucleo di una meccanica relativistica quantistica); è quindi giustificato sostenere che de Broglie fu il fondatore della meccanica ondulatoria.

I presupposti scientifici che permisero a de Broglie di concepire l'esistenza dell'onda di fase sono numerosi (JANOVITZ-PASCOLINI [18]): si ricordano qui la relatività ristretta e le ricerche di Einstein sui quanti di luce e sui calori specifici, la dinamica analitica classica, gli scritti di Planck sui quanti d'azione e sui quanti d'energia, gli studi di Sackur e Tetrode sulla cella elementare d'estensione in fase, la termodinamica (cfr. la bibliografia di [18]).

3. L'equazione di Schrödinger

Nel 1926, Erwin Schrödinger lesse i lavori di de Broglie e ne trasse ispirazione per ricavare l'equazione dell'onda di fase (cfr. § 2) la cui propagazione è associata al moto di un corpuscolo (SCHRÖDINGER [22]).

² Si tratta delle formule che, nella teoria della relatività ristretta, sostituiscono quelle di trasformazione di Galileo, ed hanno come conseguenza il cosiddetto *rallentamento relativistico degli orologi* (la durata di un fenomeno in un corpo in movimento è maggiore della durata dello stesso fenomeno in un corpo a riposo).

Tale equazione è

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m U}{h^2} \psi = 0, \quad (4)$$

dove ∇^2 è l'operatore laplaciano, U è la funzione potenziale del campo di forze in cui si muove la particella e la funzione

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \quad (5)$$

prende il nome di funzione d'onda. La (4), detta *equazione di Schrödinger*, è valida solo in approssimazione non relativistica: fu proprio de Broglie uno tra i primi a darle forma relativistica, pressoché contemporaneamente a de Donder, Fock, Klein e Gordon (de BROGLIE [5], p. 7).

Come mai de Broglie non elaborò per primo una equazione quale la (4), pur essendo lo scienziato all'epoca più interessato alla questione e contemporaneamente dotato di profonde conoscenze in merito?

Della questione si è occupato F. KUBLI [19], che ha inequivocabilmente evidenziato alcuni limiti dell'insegnamento universitario in Francia all'epoca in cui il giovane de Broglie era studente, limiti a causa dei quali egli non conosceva bene la portata della teoria degli integrali di Fourier, della teoria delle autofunzioni e degli autovalori ([19], p. 55). Non era, inoltre, abitudine far rilevare il fatto che le equazioni dell'ottica geometrica sono casi particolari delle equazioni delle onde, il che limitava la consapevolezza della importanza della teoria di Hamilton (cfr. a tal proposito [16]). De Broglie, però, non era del tutto digiuno di nozioni utili in questo senso; Egli stesso, infatti, afferma: "*L'enseignement de la Physique Mathématique à la Sorbonne était alors un peu vieilli. Paul Langevin n'ayant jamais publié ses beaux cours au Collège de France, c'est dans les livres de Poincaré que nous pouvions trouver, exposées sous une forme parfaite, les récentes théories de la Physique. C'est uniquement dans son livre sur la théorie de Fourier que les étudiants du temps de mon adolescence pouvaient trouver un exposé complet de la théorie des intégrales de Fourier*" ([19], p. 56).

La pura e semplice carenza di basi tecniche costituì un rilevante ostacolo, ma non la sola motivazione del fatto che de Broglie non fosse giunto a formulare una equazione quale la (4). Una ulteriore, e significativa, difficoltà³ è da ricercarsi nel fatto che de Broglie ha sempre cercato di elaborare equazioni in campo *relativistico*: non poteva, evidentemente, ricercare una legge che, rispettando condizioni direttamente ricavate dalla fusione della *relatività ristretta* con la *ipotesi dei quanti*, non fosse applicabile a particelle dal comportamento strettamente relati-

³ Tale difficoltà fu confermata anche dalle informazioni ottenute in colloqui personali avuti da A. Janovitz con de Broglie stesso negli anni 1977-78.

vistico, quali per esempio i quanti di luce, di importanza essenziale in meccanica ondulatoria.

Si deve infine aggiungere il fatto che de Broglie ha cercato *costantemente* di non far scomparire la nozione di particella localizzata. Il suo obiettivo era quello di costruire una teoria sintetica che accettasse la coesistenza di particelle e di onde, interpretando la realtà fisica con un modello unificante. Si vedrà più avanti (§ 5) come de Broglie abbia affrontato tale problema con la sua teoria della doppia soluzione.

In sintesi, de Broglie era sprovvisto, in una certa misura, di nozioni tecniche che gli consentissero di giungere facilmente alla costruzione di una equazione quale quella di Schrödinger (4), ma era soprattutto orientato verso la elaborazione di una teoria completa (*unificante onde e particelle e valida in campo relativistico*) la cui edificazione non poteva avvenire d'acchito e di solo suo pugno.

4. Principali interpretazioni del significato della funzione d'onda ψ

Lo studio dell'equazione (4) fu oggetto di ampio dibattito (JAMMER [17]) iniziato proprio nel 1926, e protrattosi nel tempo per decine di anni, su quale fosse la corretta interpretazione del significato della funzione d'onda ψ (cfr. (5)).

Per Schrödinger [22], la (5) descrive un campo meccanico scalare e l'ipotesi dei quanti può essere interpretata come un fenomeno di risonanza: la realtà fisica consisterebbe solamente di onde.

Per il fisico tedesco Madelung ([21], pp. 322-326), il movimento descritto dalla (5) appare come un flusso idrodinamico irrotazionale soggetto all'azione di forze conservative.

Per Born ([3], pp. 863-867), la soluzione ψ^* della (4) non rappresenta *tout court* alcuna osservabile fisica (ψ^* è un numero complesso non reale), mentre il numero reale ottenuto moltiplicando ψ^* per il suo complesso coniugato fornisce una densità di probabilità, ossia la probabilità che un'osservazione localizzi la particella (o le particelle) in esame in un determinato istante t in una zona dello spazio di volume unitario. Fu proprio quest'ultima interpretazione, detta *probabilistica*, ad avere il sopravvento sulle altre dopo lo storico Congresso Solvay del 1927.

5. Le idee fondamentali della teoria della doppia soluzione

Abbiamo già osservato (§ 3) che de Broglie concepiva opportuno elaborare una teoria quantistica relativistica *sintetica*, capace cioè di rendere ragione del dualismo onda-materia in senso unitario: è ciò che fece in quegli stessi anni

nell'ambito della sua teoria della doppia soluzione, ipotizzando che i corpuscoli siano delle specie di singolarità a carattere permanente in seno ad un'onda estesa.

Esaminiamo le idee fondamentali della teoria della doppia soluzione.

Secondo de Broglie ([14]),

- 5.1. le particelle possono essere rappresentate come una specie di singolarità in seno ad un fenomeno ondulatorio esteso;
- 5.2. l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda ψ (cfr.(5)) proposta da Born (cfr. § 4) è esatta e permane valida;
- 5.3. a ciascuna soluzione

$$\psi^* = a(x, y, z) e^{(2\pi i / h) \varphi(x, y, z, t)} \quad (6)$$

dell'equazione (4), essendo a l'ampiezza dell'onda di cui φ rappresenta la fase, deve corrispondere una soluzione a singolarità

$$u = f(x, y, z, t) e^{(2\pi i / h) \varphi(x, y, z, t)}, \quad (7)$$

con la stessa fase $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ di ψ^* , ma la cui ampiezza $f(x, y, z, t)$ dipende anche dal tempo.

Per sviluppare tale teoria si deve presupporre il seguente teorema di esistenza: «*Etant donnée une certaine équation de propagation valable dans un certain domain de l'espace et admettant dans ce domain une solution continue telle que*

$$\psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{(2\pi i / h) \varphi(x, y, z, t)} \quad (8)$$

satisfaisant à certaines conditions aux limites, il existe une autre solution

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) e^{(2\pi i / h) \varphi(x, y, z, t)} \quad (9)$$

ayant la même phase $\varphi(x, y, z, t)$, obéissant aux mêmes conditions aux limites et dont l'amplitude présente une singularité en général mobile» (de BROGLIE [14], pp. 210-211).⁴

Per de Broglie, l'onda u (cfr. (7))

- 5.4. ha un carattere oggettivo, ossia del tutto indipendente dalla presenza o dalle conoscenze dell'osservatore;
- 5.5. la sua propagazione è descrivibile per mezzo di una equazione non lineare

⁴ Sulle soluzioni della (4), date dalla (6) e dalla (7), e sul significato delle (8) e (9), che qui non vengono illustrate per semplicità di trattazione, si veda, per esempio, de BROGLIE [14], pp. 210-237.

localmente, cioè in una regione estremamente piccola, corrispondente alla presenza del corpuscolo come singolarità dell'onda;

- 5.6. al di fuori della piccolissima regione *singolare*, u (cfr. (7)) obbedisce in sostanza alla stessa equazione d'onda valida per ψ (cfr. (4)).

È evidente che la complessità degli strumenti matematici necessari per descrivere la propagazione dell'onda u (cfr. (7) e (9)) costituisce un ostacolo che sembra non ancora superato: si tratta di descrivere il comportamento delle particelle per mezzo di una minuscola regione in cui un certo campo (*champ à bosses o bunch like*, soddisfacente equazioni alle derivate parziali non lineari) presenti singolarità, non in senso strettamente matematico, bensì come valori estremamente elevati ([14], p. 286).

6. Causalità e determinismo

In più di una occasione la teoria della doppia soluzione (cfr. § 5) è apparsa come una sorta di *reazione* alle conseguenze estreme dell'interpretazione probabilistica, lasciando immaginare de Broglie legato ancora ad una visione ottocentesca della fisica in contrasto con l'indeterminismo (cfr. per esempio BELLONE [1], pp. 176-177). È opportuno, però, formulare almeno le seguenti considerazioni:

- 6.1. L'elaborazione della teoria della doppia soluzione (de BROGLIE [4], [6], [12], [13]) e quella dell'interpretazione probabilistica di BORN [3] sono coeve, risalendo entrambe agli anni 1926-27; furono per di più ottenute in modo assolutamente indipendente sulla base dei lavori di Schrödinger ([14], pp. 6-7).
- 6.2. La teoria della doppia soluzione è la logica conseguenza delle idee che avevano consentito a de Broglie di stabilire l'esistenza dell'onda di fase ([14], pp. 85-89). Già nella sua tesi di laurea Egli fa notare esplicitamente come, per Lui, l'onda di fase sia una parte costitutiva dell'elettrone e del suo comportamento, anticipando così l'ipotesi secondo la quale ciascuna particella è incorporata in un fenomeno ondulatorio. C'è una profonda e significativa continuità nell'ottica generale che aveva guidato le sue ricerche in campo scientifico fra il 1923 ed il 1927, riguardanti costantemente il problema del *dualismo onda-materia*, filo conduttore per una precisa comprensione della evoluzione del suo pensiero.
- 6.3. Per de Broglie, la *causalità* (*non necessariamente deterministica*) costituisce una delle categorie irrinunciabili per la edificazione di una teoria scientifica completa (de BROGLIE [11]).

6.4. Sempre secondo de Broglie, le relazioni di indeterminazione di HEISENBERG [15]) vanno collegate alla *effettuazione* di una misura; Egli si chiede pertanto: «*Mais de ce que les procédés de mesure ne peuvent pas nous permettre d'attribuer simultanément à un corpuscule une position et un état de mouvement, est-on nécessairement obligé de conclure que, dans la réalité, le corpuscule n'ait pas de position, ni de vitesse?*» (de BROGLIE [14], p. 61). In meccanica quantistica alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg si attribuisce per lo più il seguente significato (cfr. per esempio BOHM [2]): una grandezza fisica, prima della misura, possiede solo valori possibili, *potenziali*, non ben determinati; la misura stessa può *estrarre* un valore o un altro. Nella teoria della doppia soluzione, esistono valori ben determinati (in generale, beninteso, del tutto ignoti); la misura li perturba *in accordo con le relazioni di indeterminazione di Heisenberg*, che non hanno significato prima dell'operazione di misura. Proprio questi valori, determinati, ma sconosciuti, costituiscono le variabili nascoste della teoria della doppia soluzione, le quali, grazie alla misura, divengono le osservabili della meccanica quantistica.

7. Conclusioni

Attraverso l'analisi di alcune intuizioni scientifiche di Louis de Broglie, si sono delineati, nel presente lavoro, i fondamentali elementi che hanno segnato il passaggio dalla fisica classica alla meccanica quantistica. Si è evidenziato, in particolare, quanto sia stata per de Broglie lucida e consapevole la volontà di elaborare una teoria relativistica che tenesse conto dell'esistenza dei quanti di energia e quanto sia stata originale l'idea di concepire l'onda di fase, la cui propagazione va associata al movimento di un corpo. È stata proprio questa idea, secondo noi, ad aver segnato in modo inequivocabile la nascita della meccanica ondulatoria, e quindi lo sviluppo della meccanica quantistica; de Broglie stesso ha del resto sostenuto che i fisici comprenderanno definitivamente la natura simultaneamente corpuscolare ed ondulatoria della materia solo quando avranno completamente stabilito l'esatta natura dell'onda di fase.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEL LONE E., *I modelli e la concezione del mondo nella fisica moderna*, Feltrinelli, Milano (1973).
- [2] BOHM D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York (1951).
- [3] BORN M., *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge*, Zeitschrift für Physik, 37 (1926), 863-867.
- [4] de BROGLIE L., *La Mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, Journal de Physique, Paris, série VI, tome VIII, n° 5, 225-241.
- [5] de BROGLIE L., *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1971).
- [6] de BROGLIE L., *La structure atomique de la matière et du rayonnement et la Mécanique ondulatoire*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 184 (1927), 273-274.
- [7] de BROGLIE L., *Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 177 (1923), 630-632.
- [8] de BROGLIE L., *Ondes et quanta*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 177 (1923), 507-510.
- [9] de BROGLIE L., *Quanta de lumière, diffraction et interférences*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 177 (1923), 548-550.
- [10] de BROGLIE L., *Recherches sur la théorie des quanta*, Annales de Physique, Paris, série X, tome III (1925), 22-128.
- [11] de BROGLIE L., *Réflexions sur la causalité*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 2, n° 2, Paris (1977), 69-71.
- [12] de BROGLIE L., *Sur la possibilité de relier les phénomènes d'interférences et de diffraction à la théorie des quanta de lumière*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 183 (1926), 447-449.
- [13] de BROGLIE L., *Sur le rôle des ondes continues en Mécanique ondulatoire*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 185 (1927), 380-382.

- [14] de BROGLIE L., *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, Paris (1956)
- [15] HEISENBERG W., *Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, S. Hirzel, Leipzig (1930)
- [16] *Interviews with Louis de Broglie*, on January 7, 1963 and January 14, 1963, in *Archive for the History of Quantum Physics*
- [17] JAMMER M., *The conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1966)
- [18] JANOVIČ A. e PASCOLINI A., *Les sources de l'idée du dualisme onde-matière dans l'oeuvre de Louis de Broglie*, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, vol. 6, n° 2, Paris (1981), 165-193
- [19] KUBLI F., *Louis de Broglie und die Materiewellen*, Politecnico di Zurigo, Zürich (1970)
- [20] LEVI-CIVITA T., *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna (1931)
- [21] MADELUNG E., *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*, *Zeitschrift für Physik*, 40 (1926), 322-326
- [22] SCHRÖDINGER E., *Abhandlungen zur Wellenmechanik*, J. A. Barth, Leipzig (1926)