DEFINIZIONE ASSIOMATICA DEL CAMPO REALE

Consideriamo un campo (K, +, ·), ovvero una struttura algebrica tale che:

1.- (K, +) è un gruppo abeliano; denotiamo con 0, l'elemento neutro e con -a, il simmetrico di un qualunque elemento a$\in$ K, detto in tal caso l'opposto .

2.- (K \{0}, ·) è un gruppo abeliano; denotiamo con 1, l'elemento neutro (moltipli-cativo) e con

a' = a^{-1} , il simmetrico di un qualunque elemento a $\in$ K , detto in tal caso *l'inverso.*

3.- Risulta $\forall\ a, b, c\ \in$ K: a· (b+c) = a·b+a·c (proprietà distributiva.

Un campo (K, +, ·) si dice ORDINATO se esiste una parte non vuota indicata con K^+ tale che:

(1) $\forall\ a, b \in K^+$ **si ha: a+b, a·b $\in K^+$**
(2) $\forall\ a \in K\backslash\{0\}$ **si ha una ed una sola delle due possibilità: $a \in K^+$, oppure $-a \in K^+$.**

E' immediato provare che la relazione ($\leq$) definita ponendo $\forall\ a, b\ \in$ K:

$$a < b,\ a \neq b \ \text{ sse } \ b - a \in K^+$$

una relazione D'ORDINE TOTALE. In particolare $\forall a \in K\backslash\{0\}$, segue $a^2 > 0$.

NOTA .Si noti che essendo 1 > 0 risulta: n1 = 1+1+…1+1 > 0 , il che si esprime dicendo che un campo ordinato ha caratteristica zero.

E' noto che ogni campo di caratteristica zero contiene, a meno di isomorfismi, il campo dei numeri razionali, che risulta essere il più piccolo campo (rispetto alla inclusione) di caratteristica zero, nel senso che segue.

Sia (K, +, ·) un campo di caratteristica zero, allora la presenza dell'omomorfismo naturale f : K $\rightarrow \mathbb{Q}$ definito da f(np/mq) = p/q $\in \mathbb{Q}$, prova l'asserto.

Due sono le definizioni importanti per il seguito.

Definizione 1. Un campo ordinato (K, +, ·, $\geq$) si dice ARCHIMEDEO se vale il seguente assioma di Archimede: $\forall\ a \in K^+$, $\exists$ n $\in \mathbb{N}$, si ha: na $\in K^+$.

NOTA. Esistono campi ordinati non archimedei.

Definizione 2. Un campo ordinato (K, +, ·, $\geq$) si dice COMPLETO rispetto all'ordine se per ogni sottoinsieme X contenuto in K , non vuoto e limitato superiormente, esiste l'estremo superiore sup X di X.

NOTA sul concetto di completo.

L'elemento sup X ∈ K è l'estremo superiore di X contenuto in K e non vuoto se:

- **$\forall x \in X$ si ha $x \leq \sup X$**
- **$\forall \varepsilon \in X$, $\varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tale che $x > \sup X - \varepsilon$.**

Da notare che e che se Y è un sottoinsieme non vuoto di K limitato inferiormente allora Y ammetta l'estremo inferiore, tale essendo:

$$\inf Y = - \sup (-Y).$$

Sussistono i seguenti:

Teorema. Ogni campo ordinato e completo è archimedeo.

Di semplice dimostrazione.

Teorema . Siano K e K' due campi ordinati completi. Esiste un unico isomorfismo ordinati di K in K'.

DEFINIZIONE PRINCIPALE

Si chiama campo reale (a meno di isomorfismi ordinati) un qualsiasi campo ordinato completo.

NOTA. David Hilbert definisce il campo dei numeri reali come l'unico (a meno di isomorfismi) "*campo ordinato e completo* ": con questa frase, Hilbert sottolinea il fatto che i numeri reali formano il *più grande* campo ordinato e completo, nel senso che ogni altro campo ordinato e completo è contenuto, a meno di isomorfismi. in esso.