I numeri reali con il metodo dei tagli di Dedekind

di Franco Eugeni
pubblicato il 1° settenbre 2018.

MASSIMI, MINIMI, ESTREMI SUPERIORE ED INFERIORE.

Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e sia H una sua parte, cioè $H \subset \mathbb{Q}$.
Se esiste un numero razionale **a più grande di ogni elemento di H**,
a dicesi **confine superiore** e **H** si dice **limitato superiormente**.
Analogamente se esiste **a' $\in \mathbb{Q}$ tale che a' < h $\forall$ h $\in$ H**, allora
a' si dice **confine inferiore** e **H** si dice **limitato inferiormente**.

Si osservi che **se H è limitato superiormente**, **esso avrà più di un confine superiore**.
Infatti se a è un confine superiore, lo sarà anche ogni $b > a$ con $b \in \mathbb{Q}$.
Analogamente **se H è limitato inferiormente**, **esso avrà più di un confine inferiore**.

Consideriamo ancora $H \subset \mathbb{Q}$.
Diremo che il **numero razionale m'' è un massimo per H** se risulta

$$m'' \in H, \; m'' > h \quad \forall h \in H.$$

Analogamente si dirà che **m' è un minimo per H** se risulta

$$m' \in H, \; m'' < h \quad \forall h \in H.$$

Nell'insieme $\mathbb{N}$ degli interi e nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei relativi sussistono i seguenti teoremi, di cui non si darà dimostrazione.

Teorema 1
Ogni parte $H \subset \mathbb{N}$ *ha minimo*.

Teorema 2
Ogni parte $H \subset \mathbb{N}$ *limitata superiormente ha massimo.*

Teorema 3
Ogni parte $H \subset \mathbb{Z}$ *limitata superiormente ha massimo; ogni parte* $H \subset \mathbb{Z}$ *limitata inferiormente ha minimo.*

Si vede facilmente che il teorema 3 contiene sostanzialmente i primi due.

Ci chiediamo ora se tali teoremi sono ancora validi in $\mathbb{Q}$.
La risposta è negativa, come si vede subito con un esempio.

Se consideriamo l'insieme $H \subset \mathbb{Q}$ così costituito

$$H = \{x : x \in \mathbb{Q}^+, \ x < 1\}$$

si vede che H è limitato superiormente, poiché, ad esempio, 1 è un confine superiore, ma è privo di massimo.
Proviamo quest'ultima affermazione, facendo vedere che

$$\forall\ a \in H \ \text{ e } \ a > 1, \exists\ b \in \mathbb{Q} : a < b < 1.$$

Prendiamo $b = \frac{a+1}{2}$ e risulta $a < \frac{a+1}{2} < 1$.
Risulta, essendo $a < 1$

$$2a = a + a < a + 1$$

dividendo per 2 si ha

$$a < \frac{a+1}{2}.$$

Inoltre per essere $a < 1$, si ha

$$a + 1 < 2$$

quindi

$$\frac{a+1}{2} < 1.$$

Si possono trovare esempi analoghi per dimostrare che esistono parti di $\mathbb{Q}$ limitate inferiormente e prive di minimo.
Se consideriamo, infatti, un insieme $K \subset \mathbb{Q}$ così definito

$$H = \{x : x \in \mathbb{Q}^+, \ x > 0\}$$

esso è una parte di $\mathbb{Q}$ limitata inferiormente, ma è priva di minimo.
Si osservi che nell'esempio su indicato il numero 1 appare come un confine superiore molto vicino ad H, e questo fatto suggerisce la seguente

Definizione
Sia H una parte di $\mathbb{Q}$. Un numero $e'' \in \mathbb{Q}$ si dice l'estremo superiore di H se

a) $e'' > h \quad \forall\ h \in H$
b) comunque fissato un razionale $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{h} \in H$ tale che $\bar{h} > e'' - \varepsilon$.

Analogamente un numero $e' \in \mathbb{Q}$ si dice l'estremo inferiore di H se

a) $e' < h \quad \forall\ h \in H$
b) comunque fissato un razionale $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, esiste un $\bar{h} \in H$ tale che $\bar{h} < e' + \varepsilon$.

E’ chiaro che i concetti di estremo superiore ed inferiore sono dei buoni sostituti dei concetti di massimo e di minimo, e, qualora tali elementi siano nell’insieme stesso, essi coincidono con i massimi e i minimi.

Ci si può chiedere ora se una parte $H \subset \mathbb{Q}$ limitata superiormente (inferiormente) ammetta o no stremo superiore (inferiore).
La risposta è negativa, come si vede con il seguente esempio.
Sia H la parte di $\mathbb{Q}$ così definita

$$H = \{x : x \in \mathbb{Q}^+, \ x^2 < 2\}$$

H è limitata superiormente, ma non ha massimo né estremo superiore.
Mostriamo dapprima che H non ha massimo, facendo vedere che $\forall a \in H$ si può sempre trovare un numero $a + h \in H$.
Infatti, se $a \in H$, cioè $a^2 < 2$, allora esisterà un $\rho \in \mathbb{Q}$ tale che $a^2 + \rho = 2$.
Posto $h = \frac{1}{10^n}$ si ha

$$(a + h)^2 = a^2 + 2\,a\,h + h^2 = a^2 + \frac{2a}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$$

Devo provare che esiste un n tale che

$$\left(a + \frac{1}{10^n}\right)^2 < 2$$

Ricordando che $a^2 + \rho = 2$ si ha

$$a^2 + \frac{2a}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < 2 = a^2 + \rho$$

cioè

$$\frac{2a}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < \rho$$

E questa relazione è vera per un n grande, essendo ρ fisso.
Quindi H non ha massimo.
Facciamo ora vedere che h non ha nemmeno estremo superiore.
Sia e l’eventuale estremo superiore. Esso non può appartenere ad H perché allora sarebbe il massimo che, come abbiamo visto, non può esistere.
Sarà allora $e \notin H$.
Allora questo eventuale estremo superiore dovrà per forza essere tale che

$$e^2 = 2 \quad \text{oppure} \quad e^2 > 2$$

supponiamo che sia $e = \frac{m}{n}$. Osserviamo che m ed n devono essere primi tra loro, quindi sono o entrambi dispari oppure uno è dispari e l’altro è pari.
Supponiamo $e^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$.
Da ciò si ha

$$m^2 = 2\,n^2$$

e consideriamo quest’ultima relazione.
Se m è dispari esso non è divisibile per 2, quindi neanche m^2 lo è, allora la relazione

$$m^2 = 2\, n^2$$

è impossibile.

Se m è pari, quindi n dispari, ci sarà un m' tale che $m = 2\, m'$ da cui

$$m^2 = 2^2\, m'^2$$

ma anche in tal caso la relazione di cui sopra è impossibile, in quanto un membro è divisibile per 2^2 e l'altro soltanto per 2.

Facciamo ora vedere che non può essere nemmeno $e^2 > 2$, o, ciò che è lo stesso, che esiste un h tale che

$$(e - h)^2 > 2.$$

Questo equivale a dire che deve esistere un numero razionale $b = (e - h)$ tale che $b \notin H, b < 2$.

Infatti, essendo $e^2 > 2$ ci sarà un numero razionale ρ tale che $e^2 = 2 + \rho$, quindi $e^2 - \rho = 2$. Allora

$$(e - h)^2 = e^2 + h^2 - 2\, e\, h \;> 2 = e^2 - \rho$$

da cui

$$h^2 - 2\, e\, h \;> - \rho$$

cioè

$$h^2 - 2\, e\, h \;+ \rho > 0$$

e questa relazione è possibile.

UN METODO PER INTRODURRE I NUMERI REALI

Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Come abbiamo visto, una parte $H \subset \mathbb{Q}$ limitata superiormente (inferiormente) non è detto che ammetta massimo (minimo), né che ammetta estremo superiore (inferiore).

Da ciò nasce la necessità di costruire un ampliamento di $\mathbb{Q}$, nel quale ogni insieme limitato superiormente (inferiormente) ha estremo superiore (inferiore).

Si vuole costruire un insieme $\Re$ tale che

1. $\mathbb{Q}$ si possa pensare contenuto in $\Re$;
2. le proprietà che valevano in $\mathbb{Q}$ valgono anche in $\Re$;
3. ogni insieme di $\Re$ limitato superiormente ha estremo superiore; ogni insieme di $\Re$ limitato inferiormente ha estremo inferiore.

Il metodo da noi seguito per la costruzione dell'insieme $\Re$ è il seguente.

Consideriamo delle parti $T \subset \mathbb{Q}$ che godono di particolari proprietà, poi mediante queste parti, che chiamiamo **tagli**, definiamo dei numeri che diciamo **numeri reali**. Infine facciamo vedere che l'insieme di questi numeri reali verifica le condizioni 1), 2) e 3), date sopra, e quindi è l'insieme che cerchiamo.

Cominciamo allora con il definire in $\mathbb{Q}$ le parti T tali che

a. T è costituito da razionali positivi, non coincide con $\mathbb{Q}^+$ e non è vuoto, cioè $T \subset \mathbb{Q}^+$, $T \neq \mathbb{Q}^+$, $T \neq \varnothing$;

b. se $a \in T$, ogni razionale positivo $b < a$ è in T, cioè
$$(a \in T, b \in \mathbb{Q}^+, b < a) \Rightarrow b \in T;$$
c. per ogni $a \in T$ esiste in T un $b > a$.

Se T gode delle **proprietà precedenti** si dice **taglio** o **segmento razionale**.

Si vede subito che T, come parte di $\mathbb{Q}$, è limitato superiormente per la a), e non ha massimo per la c).

Le coppie (ε, T), con $\varepsilon \in \mathcal{S} = \{+, -\}$, **unitamente allo zero di $\mathbb{Q}$**, sono dette **numeri reali**, e il loro insieme è l'insieme $\Re$ dei reali.

Poniamo
(+ , T) = + T = T che chiamiamo numero reale positivo;
(- , T) = - T che chiamiamo numero reale negativo.
Il taglio T può avere o no estremo superiore.

Supponiamo che T abbia estremo superiore, e sia esso il numero razionale $\frac{m}{n}$.

Allora il taglio T si può definire nel seguente modo
$$T = \{x \ : \ 0 < x < \frac{m}{n}\}.$$

Poniamo $(\varepsilon, T) = \varepsilon \frac{m}{n}$.

Notiamo che (ε, T) è un numero reale, $\varepsilon \frac{m}{n}$ è un numero razionale, quindi (ε, T) in particolare sarà un numero razionale. Da questo segue che $\mathbb{Q} \subset \Re$. Infatti preso un razionale qualsiasi $\varepsilon \frac{p}{q}$ esisterà il taglio $T = \{x \ : \ 0 < x < \frac{p}{q}\}$ e quindi il reale $\varepsilon \frac{p}{q}$.

Supponiamo adesso che T non abbia estremo superiore.
Allora riguardiamo **T** come un ente nuovo, e **lo chiamiamo numero irrazionale**.
Ad esempio consideriamo il taglio $T = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\}$.
Questo taglio è un numero irrazionale che indichiamo col simbolo $\sqrt{2}$. Questo simbolo lo consideriamo come estremo superiore di T .

Riepilogando
se il taglio T ammette estremo superiore, **tale estremo superiore sarà un numero razionale**, e **T sarà un numero reale razionale**; **se** invece **T non ha estremo superiore**, **lo si costruisce artificialmente,** e **T sarà un numero reale irrazionale**.

Osserviamo che il taglio
$$T = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 4\}$$
non è un numero irrazionale.
Infatti esso coincide con il taglio $T = \{x \ : 0 < x < 2\}$, e questo taglio è il numero razionale 2. quindi se indichiamo con $\sqrt{4}$ il primo taglio, dovrà essere $\sqrt{4} = 2$.

Se poi a è un numero razionale, il taglio

$$T = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q}^+, x^n < a^m\}$$

si indica con $\sqrt[n]{a^m}$ oppure $a^{\frac{m}{n}}$.

Ad esempio si ha

$$T = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q}^+, x^3 < 5\} = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

RELAZIONE DI <

Supponiamo di avere due tagli T e S, ed abbiano entrambi estremo superiore. Essi rappresentano, come abbiamo visto, due numeri reali positivi.
Si dice che **il numero reale positivo T è minore del numero reale positivo S**, e si scrive **$T < S$, se T come insieme è contenuto nell'insieme S**, cioè **$T \subset S$**.

Ad esempio se

$$T = \{x \ : \ 0 < x < 1\}$$
$$S = \{y \ : \ 0 < y < 2\}$$

si vede subito che $T \subset S$.

Porremo
- $-T < S$ sempre
- $-T < -S$ se e solo se $T > S$.

Consideriamo lo zero come il più piccolo di tutti i numeri positivi e come il più grande di tutti i numeri negativi.

Se S e T non hanno estremo superiore, cioè non sono razionali, allora queste ultime posizioni non sono più lecite.

Consideriamo ora un taglio di tagli, cioè un insieme $\mathcal{T}$ tale che

a) $\mathcal{T}$ è una parte di $\mathfrak{R}^+$ non vuota e non coincidente con $\mathfrak{R}^+$;

b) se $T \in \mathcal{T}$ e $T_1 < T$, allora $T_1 \in \mathcal{T}$;

c) per ogni $T \in \mathcal{T}$ esiste $T_1 > T$ con $T_1 \in \mathcal{T}$.

L'insieme $\mathcal{T}$ è dunque limitato superiormente ed inoltre ammette estremo superiore.
Infatti se si considerano tutti i razionali contenuti in ogni $T \in \mathcal{T}$, tali razionali formano un taglio T_0 che è l'estremo superiore di $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{R}$.
Con questo si può dire che

ogni parte di $\mathfrak{R}$ limitata superiormente, ammette estremo superiore in $\mathfrak{R}$.

TAGLIO INVERSO T^{-1}

Definizione

Se T è un taglio, **si definisce T^{-1}** mediante la posizione

$$T^{-1} = \{x \;:\; x \in \mathbb{Q}^+, x < \frac{1}{t'} \text{ per un } t' \in T'\}$$

con $T' = \{x \;:\; x \in \mathbb{Q}^+, x \notin T\}$.

Si ha evidentemente $T \cup T' = \mathbb{Q}^+$, $T \cap T' = \varnothing$.

Inoltre $t < t' \;\; \forall\, t \in T, t' \in T'$.

Si dimostra che T^{-1} è un taglio. Infatti

a) se $t', t'' \in T'$ e $t' < t''$ si ha $\frac{1}{t'} > \frac{1}{t''}$. Da ciò segue che $\frac{1}{t''} \in T^{-1}$, quindi $T^{-1} \neq \varnothing$. Poi se $t \in T$, si ha $t < t'$ quindi $\frac{1}{t} > \frac{1}{t'}$, perciò $\frac{1}{t} \notin T^{-1}$. segue che $T^{-1} \subset \mathbb{Q}^+$;

b) se $r \in \mathbb{Q}^+$ e $r < x \in T^{-1}$, si ha $r < x < \frac{1}{t'}$ per un $t' \in T'$, quindi essendo $r < \frac{1}{t'}$ segue che $r \in T^{-1}$;

c) per ogni $x \in T^{-1}$, esiste $t' \in T'$ tale che $x < \frac{1}{t'}$. Allora

$$x < \frac{x + \frac{1}{t'}}{2} < \frac{1}{t'}$$

Quindi $x < \frac{x + \frac{1}{t'}}{2} \in T^{-1}$.

Si conclude che T^{-1} è un taglio.

Teorema

Il taglio T^{-1} è l'inverso moltiplicativo di T, cioè

$$T\;T^{-1} = (T^{-1}\,T) = I \qquad (1)$$

con I taglio unità.

Dimostrazione

Se $t \in T$, $b \in T^{-1}$, allora esiste un $t' \in T'$ tale che $b < \frac{1}{t'}$.

Da ciò segue che $t\,b < \frac{t}{t'} < 1$, quindi $t\,b \in I$. Segue che

$$T\;T^{-1} \leq I \qquad (2)$$

Osserviamo ora che se $r > 1$, esisterà un $t \in T$ tale che $t\,r \in T'$, cioè preso un razionale maggiore di 1, esiste un elemento del taglio che moltiplicato per r lo porta fuori di T.

Premesso questo, si consideri $i \in I$, cioè un $i < 1$.

Allora $\frac{1}{i} > 1$; per quanto detto sopra, esisterà un $t \in T$ tale che $\frac{t}{i} \in T'$.

Osserviamo poi che per ogni $b \in T$ tale che $t < b$, si ha che $\frac{1}{t} > \frac{1}{b}$. Da ciò segue che $\frac{i}{b} < \frac{i}{t} = \left(\frac{t}{i}\right)^{-1}$; quindi $\frac{i}{b} \in T^{-1}$.

Da quanto detto segue che

$$i = b\left(\frac{i}{b}\right) \in T \cdot T^{-1}$$

quindi

$$I \leq T \cdot T^{-1} \qquad (3)$$

Da (2) e (3) segue (1).

LE OPERAZIONI

Consideriamo due tagli T ed S e sia $T \leq S$.
Poniamo

$$\mathbf{T + S = \{t + s,\ t \in T\ \text{ e }\ s \in S\}}$$

questo è un nuovo taglio, detto **taglio somma di T** ed **S.**
Verifichiamo che esso è effettivamente un taglio**. Infatti**

a) $T + S \neq \varnothing$ evidente; se $t' \in T'$ e $s' \in S'$ $\Rightarrow$ $t' + s' \notin T + S$ da cui segue che $T + S \subset \mathbb{Q}^+$;

b) se $r \in \mathbb{Q}^+$ e $r < t + s \in T + S$, segue che $r \in T + S$. Infatti si ha

$$r = \frac{r(t+s)}{t+s} = \frac{rt}{t+s} + \frac{rs}{t+s}$$

Ma $\frac{rt}{t+s} < \frac{rt}{r} = t \in T$, quindi $\frac{rt}{t+s} \in T$.

Analogamente $\frac{rs}{t+s} < \frac{rs}{r} = s \in S$, quindi $\frac{rs}{t+s} \in S$.

Allora $\left(\frac{rt}{t+s} + \frac{rs}{t+s}\right) \in T + S$, e ricordando che $\frac{rt}{t+s} + \frac{rs}{t+s} = r$ segue la tesi.

c) per ogni $t + s \in T + S$ esiste $p + q \in T + S$ tale che

$$t + s < p + q \in T + S$$

Infatti basta prendere un $p \in T$ tale che $p > t$, e un $q \in S$ tale che $q > s$ (p e q esistono sempre perché T ed S sono dei tagli), e si ha la tesi.

Essendo verificate le condizioni di taglio, si conclude che **T + S è un taglio**.

Supponendo poi che **$T \leq S$** si può definire il **taglio differenza S – T** nel seguente modo

$$\mathbf{S - T = \{s - t,\ s \in S,\ \ t \in T,\ \ s > t\}}$$

Definiamo invece **il taglio prodotto T · S** nel modo seguente

$$\mathbf{T \cdot S = \{t \cdot s,\ t \in T\ \ e\ \ s \in S\}}$$

Dimostriamo che **esso è un taglio**

a. $T \cdot S \neq \varnothing$ evidente;
   se $t' \in T'$ e $s' \in S'$ si ha $t' \cdot s' \notin T \cdot S$, quindi segue che $T \cdot S \subset \mathbb{Q}^+$;
b. se $r \in \mathbb{Q}^+$ e $r < t \cdot s \in T \cdot S$, allora $r \in T \cdot S$. Infatti dall'ipotesi $r < t \cdot s$ segue che $\frac{r}{s} < t$. Quindi $\frac{r}{s} \in T$, allora $r = \left(\frac{r}{s}\right) \cdot s \in T \cdot S$.
c. per ogni $t \cdot s \in T \cdot S$ esiste $p \cdot q \in T \cdot S$ tale che
$$t \cdot s < p \cdot q \in T \cdot S.$$
   Infatti esiste un $p \in T$ tale che $p > t$, ed esiste un $q \in S$ tale che $q > s$, per i quali la tesi è soddisfatta.

Definiamo adesso la somma in tutti i reali, supposto $T < S$, mediante la seguente tabella

+	+ T	0	- T
+ S	+ (S + T)	+ S	+ (S – T)
0	+ T	0	- T
- S	- (- S – T)	- S	- (S + T)

Per il prodotto invece si porrà

$$(\varepsilon_1, T) \cdot (\varepsilon_2, S) = ((\varepsilon_1, \varepsilon_2), (T, S))$$
$$0 \cdot \varepsilon T = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$

cioè sarà valida la seguente tabella

·	+ T	0	- T
+ S	+ (T · S)	0	- (T · S)
0	0	0	0
- S	- (T · S)	0	+ (T · S)

Si può dimostrare poi che in $\Re$ valgono tutte le proprietà che valevano in $\mathbb{Q}$.
Ad esempio per ogni $A, B, C \in \mathcal{T}$, si ha

$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
$A + B = B + A$
$A \cdot B = B \cdot A$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

Le dimostrazioni sono immediate.

RADICALI

Sia $\mathfrak{R}$ l'insieme dei numeri reali, ed α un numero reale, cioè $\alpha = +T$, o, $-S$ con T ed S tagli.
Consideriamo in $\mathfrak{R}$ un'espressione del tipo

$$(1) \qquad x^n = \alpha \qquad \text{con } \alpha \in \mathfrak{R},\ n \in N \text{ e } n \geq 1.$$

Una tale espressione è detta **equazione binomia**.

Vogliamo **cercare** le **soluzioni di questa equazione**.
Il caso $\alpha = 1$ è banale, supponiamo pertanto $\alpha > 1$.
Ci proponiamo di determinare **quanti e quali sono gli zeri** dell'equazione.
Distinguiamo diversi casi.

Primo caso
Sia **n pari** ed **α reale positivo**.
Si ha il seguente

Teorema
Se n è pari ed α è un reale positivo, allora l'equazione binomia (1) ammette due soluzioni e due soltanto. Queste soluzioni sono tra loro opposte e coincidono nello zero se e solo se $\alpha = 0$.

Da questo teorema segue la seguente
Definizione
Se n è pari ed α è un reale positivo, chiameremo radice n-ma aritmetica di α la soluzione positiva dell'equazione (1). Quindi il simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ è un numero reale positivo ed è la radice positiva dell'equazione (1).

L'insieme degli zeri della (1) è

$$(\mathfrak{R}) \quad \sqrt[n]{\alpha} = \{ \sqrt[n]{\alpha}, -\sqrt[n]{\alpha} \}$$

Dicesi radice n-ma in senso algebrico di α, l'insieme $(\mathfrak{R}) \ \sqrt[n]{\alpha}$ degli zeri della (1).

ESEMPIO

Se consideriamo $(\Re)\quad \sqrt{4} = \pm 2$ e $\sqrt{4} = +\,2$, la prima espressione è intesa in senso algebrico, la seconda in senso aritmetico.

Secondo caso

Sia **n pari** ed **α reale negativo**.

In questo caso non si hanno soluzioni reali, perché per n pari si ha che x^n è sempre positivo, o tutt'al più zero, ma mai negativo.

Terzo caso

Sia **n dispari** ed **α reale qualsiasi**

Teorema

Se n è dispari, qualunque sia α, l'equazione (1) ammette una e una sola soluzione che risulta essere positiva, nulla, negativa, a seconda che tale sia α.

Questa soluzione si dice la radice n-ma di α in senso algebrico e si indica con $(\Re)\quad \sqrt[n]{\alpha}$.

Se poi α è positivo, allora l'unica soluzione della (1) si dice anche radice in senso aritmetico e si indica con $\sqrt[n]{\alpha}$.

ESEMPI

Consideriamo l'equazione $x^3 = -2$ e la sua radice algebrica $(\Re)\ \sqrt[3]{-2}$. Consideriamo poi l'equazione $x^3 = 2$ e la sua radice $(\Re)\ \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$.

Risulta $(\Re)\ \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$.

Quindi generalizzando se l'esponente è dispari si ha

$$(\Re)\ \sqrt[2n+1]{\alpha} = \begin{cases} \sqrt[2n+1]{\alpha} & \text{se } \alpha > 0 \\ -\sqrt[2n+1]{\alpha} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

LA POTENZA

Siano T ed U due tagli. Consideriamo l'insieme

$$T^U = \{q \ :\ q \in \mathbb{Q}^+,\ q < t^n,\quad \text{per } t \in T,\ \ n \in U\}$$

T^U è detto **potenza di un numero reale positivo secondo un esponente reale positivo**.

Verifichiamo che T^U è un taglio. Infatti

a. $T^U \neq \varnothing$ evidente.
   Se $t' \in T'$, $n' \in U'$ allora $t'^{u'} \notin T^U$, quindi $T^U \subset \mathbb{Q}^+$;
b. Sia $r \in \mathbb{Q}^+$ e $r < t^n \in T^U$
   Allora $r \in T^U$
c. Per ogni $t^n \in T^U$ consideriamo $t < p \in T$, $n < q \in U$, allora $t^n < p^q \in T^U$.

con ciò rimane dimostrato che T^U è un taglio.

Poniamo poi

$T^{-U} = \frac{1}{T^U}$

$T^0 = 1$

$0^U = 0$

Non si definiscono $(-T)^U$ e 0^0.

Si dimostra poi facilmente che

$T^1 = T$

$1^U = 1$.

Si noti infine che se T è un taglio e indichiamo con T' l'indieme di tutti i razionali che non sono in T e che sono maggiori di tutti gli elementi di _T, allora la coppia

(T,T')

rientra nelle coppie delle classi contigue con relative sezioni associate , considerate nel precedente paragrafo.