

# NUMERI NATURALI TRA STORIA E METODOLOGIE

**di Franco EUGENI**

Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU)

pubblicato in [www.afsu.it](http://www.afsu.it) il 1 Dicembre 2019

In questo sito presenteremo la struttura dei numeri naturali (se si vuole il semi-anello dei naturali) secondo due linee di presentazione:

1.- Seguendo le necessarie premesse di Teoria degli insiemi, una prima via è quella dell'introduzione della cardinalità (e successivamente l'ordinalità) secondo due vie, che a nostro avviso vanno a confluire:

il metodo per astrazione (altresì detto sintetico) introdotto da George Cantor che si basa sul confronto di insiemi per biezione e quello di Bertrand Russell che di fatto opera in egual modo e a quelle classi da un nome.

La formalizzazione in questo caso è ereditata dalla teoria degli insiemi.

2. il metodo assiomatico di Giuseppe Peano, che a partire da tre concetti primitivi: zero, numero, successivo, e cinque assiomi, deduce tutta la formalizzazione.

Non vi è dubbio che la prima via ci sembra più adatta, specie nella scuola media inferiore, ove è opportuno prediligere l'intuito alla formalizzazione. È importantemente tuttavia precisare la differenza tra numero cardinale e numero ordinale.

A volte tanto per fare un esempio può essere utile costruire la tavola pitagorica ricorrendo ad un prodotto cartesiano mascherato da gioco.

Per spiegare quanto fa  $3 \times 4$  ad esempio si possono fare tre righe orizzontali e quattro verticali ad incrocio e contare i puntini: sono 12 è il risultato da mettere nella tabella. Così posso fare  $3 \times 5$ ,  $3 \times 6$  e così via!

Ma occorre utilizzare anche un po' di storia e maffare da libri o da Internet vedere cosa facevano gli antichi.

Si ritiene che gli Egizi e gli Assiro-babilonesi avessero conoscenze aritmetiche abbastanza estese, non appare probabile che essi possedessero, in modo chiaro, il concetto astratto di numero naturale, tuttavia notizie su questo punto sono assai incerte. Ma è interessante vedere come rappresentavano i numeri.

La Matematica come disciplina organizzata, indipendente e formalizzata non esisteva prima dell'entrata in scena dei Greci nel periodo classico, compreso tra il 600 ed il 300 a.C. Il concetto si precisa attraverso Platone ed Euclide riferendosi anche a Talete e Pitagora.

### VIII sec. a.C.

I Caldeo dimostrarono un particolare interesse per l'Astronomia e, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercarono di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studi su cui operavano era la sfera, per cui, oltre alle questioni metriche relative a lunghezze, aree e volumi utili nella pratica, i più antichi frammenti di geometria che ci sono giunti riguardano la *geometria sferica*.

### VI-III sec. A. C.

Le scuole filosofiche di cui la più celebre è l'*Accademia di Platone* (427-347 a.C.) ad *Atene*, di cui fu allievo *Aristotele* (384-322 a.C.).

L'*Accademia*, fondata intorno al 347 a.C., ha avuto una grandissima importanza per il pensiero greco in quanto i suoi allievi furono i più grandi filosofi, matematici ed ASTRONOMI della propria epoca.

Platone non era un matematico, ma il suo entusiasmo per l'argomento e la sua convinzione dell'importanza della Matematica per la Filosofia e per la COMPRESIONE DELL'UNIVERSO incoraggiava i matematici a proseguirne lo studio.

Egli affermò con forza la necessità di una organizzazione deduttiva della conoscenza:

*Il compito della Scienza è quello di scoprire la struttura della natura e di articolarla in un sistema deduttivo.*

Nella *Scuola Platonica* furono migliorate le *definizioni* e dimostrati anche nuovi teoremi di *geometria piana*. Inoltre, i platonici diedero un notevole impulso alla *geometria solida*, ritenuta la base per lo studio dell'Astronomia.

Così si esprimeva Platone in proposito:

*Prima di poter prendere in considerazione l'Astronomia, che studia il moto dei solidi, è necessaria una scienza di tali solidi. Ma questa scienza è stata finora trascurata e gli studiosi di figure solide non hanno ricevuto un adeguato aiuto dallo Stato* ('*La Repubblica*: sezione 528 del libro VII; M.Kline, pag. 58).

La scoperta più significativa della Scuola platonica furono le sezioni coniche. *Eratostene* attribuiva i risultati ottenuti all'astronomo Menecmo, allievo di Eudosso e membro dell'*Accademia platonica*, vissuto nel IV a.C.

### III sec. a.C.

- *Autolico di Pitane* : "*Sulle sfere mobili*" ed "*Il sorgere ed il tramontare*" tradotti nel 1885, e che sono i due testi più antichi rimasti intatti.
- *Euclide*, "*I fenomeni*": di cui c'è una traduzione pubblicata nel 1916. Sono trattate questioni di *Geometria Sferica*.

Nel periodo greco, ebbe origine un gruppo di ricerche i cui risultati costituiscono "*l'Ottica degli antichi*" (III sec. a.C.), che nasceva dal desiderio di studiare fenomeni luminosi allo scopo di distinguere ciò che è "apparenza" da ciò che è "realtà".

Partendo dal postulato che "*la luce si propaga in linea retta*", vengono stabiliti molti teoremi (per lo più da Euclide) che ancora oggi sono ritenuti tra i fondamenti della trattazione matematica della luce.

Altre proposizioni, invece, vengono ritenute inaccettabili essendo conseguenza del principio - sostenuto da Platone ma ripudiato come falso dalla Fisica contemporanea - che la visione avvenga per effetto di raggi emananti, non dall'oggetto che si contempla, ma dall'occhio dell'osservatore.

### Dalla "OTTICA DEGLI ANTICHI" alla "PROSPETTIVA"

Il fondamento teorico dell'arte pittorica è universalmente considerato la *Prospettiva*, dal termine latino *perspectiva* (ottica). Il metodo della *Prospettiva*, in geometria, rientra tra quelli usati per rappresentare figure dello spazio sopra un piano.

La rappresentazione dei dettagli tecnici della figura avviene con i metodi della *Geometria descrittiva*; è compito, della *Geometria proiettiva* la rappresentazione mediante le *trasformazioni* che essa subisce con le operazioni di *proiezione* e *sezione*.

Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento per l'arte pittorica, lo si evince da alcuni passi di *Vitruvio* (Marco Vitruvio Pollone, vissuto probabilmente nel I sec. a.C.) che si può considerare il più significativo trattatista di Architettura del mondo latino.

Di Vitruvio si sa poco, addirittura si mette in dubbio l'originalità della sua opera "*il De Architectura*" (27 a.C.) in cui egli descrive la Basilica di Fano, di cui sarebbe stato il costruttore (I cap. - V libro).

**Il *De Architectura* di Vitruvio fu preso a modello da tutti i trattatisti di Architettura del Rinascimento che vi attinsero nozioni e notizie e spesso ne adottarono schemi e criteri.**

**E' però nel sec. XII, con l'*Architettura gotica*, che si incomincia ad intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale; il problema principale che poneva l'*Architettura gotica* era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture.**

### **Il periodo romano e l'oscurantismo culturale.**

**Dal 300 d.C. al 1100, in Europa non vi fu alcun progresso nell'ambito scientifico; si hanno solo tracce di traduttori delle opere di Euclide, Aristotele e degli antichi greci.**

**Le traduzioni erano tutte in latino, lingua ufficiale della Chiesa che impose il suo potere nella Cultura (nel 380, Teodosio dichiara il Cristianesimo religione ufficiale dell'Impero, proibisce i culti pagani e nel 394 abolisce le Olimpiadi), per cui il Latino diventò la lingua internazionale dell'Europa e, quindi, la lingua della Matematica e della Scienza.**

In particolare tra il 150 a.C e il 364 d.C. (il periodo più probabile è considerato intorno al 250 d.C.) è vissuto ad Alessandria un grande matematico, Diofanto, il quale raccolse e risolse problemi che compendì in un unico trattato "*l'Arithmetica*" costituito da tredici libri, di cui solo sei sopravvissero agli eventi del medioevo perché gli altri sette furono distrutti dagli eventi successivi.

Infatti, durante i secoli che separano Euclide da Diofanto, Alessandria era considerata la capitale intellettuale del mondo civilizzato, ma per tutto questo periodo la città fu ripetutamente minacciata da eserciti stranieri. Il primo grande assalto si ebbe nel 47 a.C., quando Giulio Cesare cercò di abbattere il regno di Cleopatra incendiando la flotta di Alessandria, nei cui pressi era situata la Biblioteca che prese fuoco e centinaia di migliaia di volumi furono distrutti. Cleopatra decise di riportare la Biblioteca al suo antico splendore; fu aiutata in tale operazione da Marc'Antonio che marciò sulla città di Pergamo dove era stata fondata una grande Biblioteca e trasportò tutti i volumi di Pergamo ad Alessandria (in Egitto).

Nei quattro secoli successivi la Biblioteca, che Cleopatra custodiva nel Tempio di Serapide, continuò ad accumulare libri finché nel 389d.C.

l'imperatore cristiano Teodosio ordinò al vescovo di Alessandria Teofilo di distruggere tutti i monumenti pagani compreso il Tempio di Serapide. I dotti pagani che cercarono di salvare sei secoli di conoscenze furono massacrati dalla plebaglia cristiana. Poche copie dei volumi più importanti che sopravvissute alla devastazione furono distrutti da un attacco mussulmano nel 642 dal califfo Omar perché alcuni ritenuti contrari al Corano ed altri ritenuti superflui. I manoscritti vennero utilizzati per alimentare le caldaie dei bagni pubblici e la matematica greca andò in fumo.

**Nei mille anni successivi, la matematica in Occidente è sopravvissuta per merito degli Indiani e degli Arabi che copiarono le formule dai manoscritti greci sopravvissuti e reinventarono molti teoremi che erano stati perduti.**

**Gli arabi avevano dato una struttura allo studio dell'algebra, i cui risultati si sono conosciuti in Europa dall'XI secolo in poi (periodo della rifioritura economica), per merito principalmente di Leonardo Pisani (1170-1250) detto Fibonacci.**

**Fibonacci era nato a Pisa, ma era stato educato in Africa ed aveva viaggiato in Europa ed in Asia Minore per seguire il padre.**

**Nel 1202 scrisse il *Liber Abaci*, di cui venne in possesso Dante Alighieri che era molto attento alla cultura scientifica del suo tempo.**

**L'interesse di Dante per la cultura scientifica è, oggi, oggetto di approfondimento da parte degli storici della Matematica che ritengono, dall'analisi dei brani della *Divina Commedia*, che egli sia stato un buon matematico.**

### **XIII secolo**

**L'interesse dei matematici (da questo momento e nei tre secoli successivi) è rivolto principalmente all'Architettura ed all'arte.**

**Pertanto, nella storia della matematica, l'Astronomia e l'Architettura sono stati elementi ispiratori per il suo sviluppo e per la formazione di intere generazioni.**

**Anche oggi l'Astronomia e l'Architettura sono alla base della formazione di un giovane, ma ad esse vanno aggiunte conoscenze sull'analisi delle strutture della natura (inquinamento aria e acqua, eruzioni vulcaniche e**

**fenomeni sismici, utilizzo di materiali che rappresentano strumenti di morte quali l'uranio e l'amianto).**

## **XVI secolo**

**Bisogna giungere al Rinascimento per trovare in Nicolò Tartaglia per trovare un primo accenno critico alla trattazione dei Greci (*Trattato dei numeri e misure, 1556*) conoscenze rimaste immutate attraverso il Medio Evo. Successivamente Cartesio (*Principia philosophiae- Amsterdam 1650*), Newton (*Arithmetica universalis, Cantabrigiae 1707*) e Leibniz (*Dissertatio arte combinatoria*) riprendono gli studi critici sull'argomento.**

L'interesse per la geometria proiettiva si diffuse anche in altri paesi europei, in particolare in Francia.

Ed è proprio in Francia, che alcuni decenni dopo, si delineano nuovi orizzonti per la geometria. Infatti, è considerato il padre del metodo generale per la *geometria descrittiva* (ed il precursore della *geometria proiettiva*) il matematico francese *Girard Desargues* (1591-1661) che, facendo uso del *metodo delle coordinate* nel periodo in cui si stava sviluppando la *geometria analitica* ad opera di *Renè Descartes* (1596-1650) e di *Pierre de Fermat* (1601-1675), suggeriva un nuovo metodo di costruzione che rappresentava analiticamente il concetto di *assonometria*.

Il Desargues completò la sua trattazione con un lavoro del 1639 in cui inaugurava il *Metodo delle proiezioni centrali*, che introduceva per la prima volta il concetto di *punto all'infinito*, mettendo le basi allo sviluppo della *geometria proiettiva*, cioè, *quella disciplina che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezione e sezione*.

Ed è nella *geometria proiettiva* che è messa in risalto l'importanza dei *punti all'infinito* e l'analogia tra *punti* e *rette* espressa dal *principio di dualità*.

## **XIX ed il XX secolo**

**dalla Rivoluzione industriale alla Teoria della Relatività.**

**Il XVIII e XIX secolo rappresentano il periodo in cui la matematica è stata completamente al centro della cultura.**

**A parte le questioni filosofiche relative ai concetti di *infinito* e di *infinitesimo* che hanno condotto Leibnitz e Newton allo sviluppo del calcolo infinitesimale, i risultati dei matematici hanno contribuito non poco alle grandi rivoluzioni (prima fra tutte la *rivoluzione industriale*).**

**Si può dire che tutti i matematici del XIX secolo si sono occupati dell'assetto razionale dell'aritmetica. Citiamo:**

**Frege, Dedekind, Cantor, Russell, Du Bois Reymond, Bettazzi, Burali Forti per l'aspetto sintetico, Meray, Weistrass, Cantor ,Dedekind, Kronecker, Hankel, Heine per l'indirizzo analitico e infine Grassman, Peano, Padoa, Pieri per l'indirizzo assiomatico.**

Il XX secolo è stato caratterizzato dalle due grandi rivoluzioni scientifiche: *la meccanica quantistica* e la *Teoria della Relatività* che hanno modificato la concezione di interpretare l'Universo. In particolare, *la teoria della relatività* ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

E' evidente che tale congettura, associata all'*indeterminismo* che emerge dalla meccanica quantistica, ha avuto ed ha risvolti notevoli nello sviluppo anche della Letteratura e delle altre Scienze.