CAPITOLO V

LA TEORIA DEGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI LOGICA

CENNI STORICI

La teoria degli insiemi costituisce il presupposto, sia pure presentata in modo intuitivo o *ingenuo*, per ogni argomentazione di carattere matematico. Essa, oltre a permettere di definire e di descrivere i concetti matematici rapidamente e con il loro giusto rigore, consente di realizzare con una certa efficacia quella che è sempre stata una delle caratteristiche più tipiche dei matematici: la generalizzazione degli argomenti studiati e, al tempo stesso, l'unificazione di modelli a prima vista tra di loro anche molto lontani.
La teoria degli insiemi nasce e si sviluppa soprattutto per meglio comprendere l'infinito e l'astratto in matematica ad opera di *George Cantor* (1845-1918) con le sue fondamentali *Memorie* risalenti agli inizi del 1880. Si aprono in tal modo nuove vie di pensiero umano e tutto l'edificio logico delle matematiche si rafforza maggiormente; si toccano dei veri culmini con il movimento *Bourbakista* (*Nicolas Bourbaki* è uno pseudonimo sotto cui un gruppo di matematici, a partire dal 1940, sta pubblicando una serie di volumi costituenti un trattato generale della matematica; sono apparsi circa una trentina di volumi dell'opera Bourbakista: *Elements de Mathematique*); lo scopo del movimento è la revisione, da un punto di vista assiomatico ed astratto, di tutta la matematica. Un ulteriore culmine nel terreno dei fondamenti della matematica fu la prova di *Godel* (1931) che asseriva l'impossibilità di provare la non contradditorietà di un sistema razionale con i mezzi offerti dal sistema stesso.

1. SIMBOLISMO E NOMENCLATURA

In generale dare una *definizione* (di tipo *esplicito*) significa introdurre un concetto nuovo mediante altri già noti (cioè definiti in precedenza).

ESEMPIO

Un numero naturale si dice primo se non ha divisori oltre ad uno e a se stesso.

Con la precedente frase si definisce il concetto di numero primo mediante quelli di numero naturale e di divisore, che devono essere già noti.

Ogni definizione, cioè, presuppone altre definizioni ad essa precedenti. E' evidente allora che debba esserci un concetto almeno (uno o più) che non si definisce esplicitamente e che serve quale *punto di partenza* per tutte le definizioni successive; quando un concetto non si definisce esplicitamente perchè punto di partenza si dice che è un *concetto primitivo*: i concetti primitivi o vengono affidati all'intuito o si definiscono implicitamente con un sistema di postulati. Riflettendo un istante, ad esempio, possiamo affermare di non essere in grado di scrivere frasi nelle quali il soggetto unico, incognito, sia la parola *punto*, *retta*, *piano*: sono anche loro primitivi; per essi occorre ricorrere appunto o ad una via assiomatica (lettura) oppure alla via intuitiva o ingenua.

In tutte le branche della matematica è, dunque, ormai invalso l'uso di utilizzare la terminologia e le notazioni della teoria degli insiemi, a causa essenzialmente delle notevoli semplificazioni che il loro uso comporta nell'esposizione di concetti che risulterebbero spesso più oscuri se si utilizzasse esclusivamente il normale linguaggio parlato o scritto che, oltre ad essere meno conciso, è a volte ambiguo e di difficile interpretazione. Precisiamo subito però che noi ci limiteremo ad utilizzare la *terminologia* e le *notazioni* della teoria degli insiemi, senza entrare nei dettagli della stessa che costituisce di per sè un'importante branca della matematica che và ben oltre gli scopi del nostro corso. Avvertiamo inoltre che utilizzeremo il *linguaggio* della teoria degli insiemi con parsimonia, cioè solo quando penseremo che il suo uso comporti una reale semplificazione nella comprensione di quanto stiamo esponendo, poichè spesso un suo utilizzo più sistematico può avere, specialmente in studenti che si avvicinano per la prima volta ai concetti della matematica, l'effetto opposto di quello desiderato, cioè rendere oscuri e misteriosi concetti invece semplici e facilmente afferrabili con l'uso del normale buon senso (cercheremo cioè, come dice *B. De Finetti*, di non *insie...mistificare* la matematica).

Riterremo, pertanto, il concetto di *insieme* un concetto primitivo e come tale non suscettibile di una definizione; utilizzeremo, quindi, tale parola per indicare semplicemente una collezione (o aggregato) di oggetti che, nel contesto di un dato discorso, conviene considerare come un'entità singola come si è soliti fare nel linguaggio comune quando, parlando ad esempio del gioco del calcio, si fa riferimento ad una *squadra* come ad una singola entità composta da undici giocatori.

Indicheremo gli insiemi con lettere latine maiuscole A, B, C,... e gli oggetti di un insieme con lettere latine minuscole a, b, c,... Riterremo assegnato un insieme quando per ogni suo oggetto si sa dire se esso *appartiene* o *non appartiene* all'insieme considerato. Supporremo dunque dato un criterio mediante il quale assegnati a ed A sia possibile una ed una sola delle seguenti alternative:

- $a \in A$ (a è elemento di A oppure *a appartiene ad* A)
- $a \notin A$ (a non è elemento di A oppure *a non appartiene ad* A)

In particolare un insieme si riterrà dato quando sarà noto l'elenco dei suoi elementi.

ESEMPI

1) $A = \{a, b, c\}$ è l'insieme composto dagli oggetti a, b, c.

2) $A = \{4, 6\}$ è l'insieme dei numeri pari compresi tra 3 e 7

3) $A = \{c, i, t, a, d, n\}$ è l'insieme delle lettere che costituiscono la parola *cittadina*

Osservazione: la *notazione elencativa* di cui sopra è utile a volte anche in alcuni casi di insiemi dotati di un numero infinito di elementi; così, ad esempio, scriveremo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

in cui i punti stanno a significare *e così via*, per denotare l'insieme di tutti i *numeri naturali*.

Per rendere più conciso il linguaggio matematico torna comodo indicare con un simbolo alcuni modi di dire. In particolare i simboli $\forall$ ed $\exists$ si chiamano *quantificatori*; precisamente $\forall$ è noto come quantificatore *universale* ed $\exists$ come quantificatore *esistenziale*. Esplicitamente:

1. con il simbolo $\forall$ si intende indicare una delle seguenti espressioni: *qualunque sia*, *quali che siano*, *per ogni*
2. con il simbolo $\exists$ si intende invece indicare un'espressione del tipo: *esiste almeno un, esistono almeno*
3. con il simbolo : oppure | si indica l'espressione *tale che*

ESEMPI

1) $\forall x$	*per qualunque x* oppure *per ogni x*
2) $\forall y \in A$	*per qualunque y appartenente ad A* oppure *per ogni y di A*
3) $\forall a, b \in B$	*per ogni a e b appartenenti a B*
4) $\exists x \in \Re$	*esiste almeno un x appartenente ad* $\Re$
5) $\exists x, y$	*esistono x ed y*
6) $\exists x \in \Re$: oppure $\exists x \in \Re$ |	*esiste almeno un x appartenente ad* $\Re$ *tale che*

Un insieme può anche essere descritto in altro modo indicando una proprietà, che non dia luogo ad equivoci, che accomuni gli elementi che gli appartengono. La descrizione o definizione dell'insieme viene simbolicamente racchiusa tra due parentesi graffe e si adoperano i due punti per segnare la corrispondenza tra punti e proprietà. In simboli:

$$A = \{x : P(x) \text{ è vera}\}$$

significa che A è l'insieme di tutti gli elementi x per cui vale la proprietà $P(x)$.

Definizione 1.1.

Due insiemi A e B si dicono *uguali*, e si scrive $A = B$, quando sono formati dagli stessi elementi (ogni elemento dell'uno è anche elemento dell'altro e viceversa).

<u>ESEMPIO</u>

$A = \{r, o, m, a\}$ e $B = \{m, o, r, a\}$

Poichè i due insiemi considerati sono costituiti dagli stessi elementi risulta $A = B$.

Definizione 1.2.

Due insiemi A e B si dicono *diversi*, e si scrive $A \neq B$, quando non hanno elementi in comune (cioè se esiste almeno un elemento di uno dei due insiemi che non appartiene all'altro insieme).

<u>ESEMPIO</u>

$A = \{r, o, m, a\}$ e $B = \{a, i, m, o, r, t\}$

Si vede subito che A <u>non</u> è uguale a B, in quanto ciascun elemento di A appartiene anche a B ma non è vero il viceversa (le lettere i e t di B non appartengono ad A).

Definizione 1.3.

Chiameremo *insieme vuoto*, e lo denoteremo con $\emptyset$, un simbolo da associarsi ad una proprietà falsa, intuitivamente pensato come l'insieme che non contiene alcun elemento.

Definizione 1.4.

Due insiemi si dicono *disgiunti* se non hanno alcun elemento in comune.

<u>ESEMPI</u>

1) L'insieme dei numeri primi contenuti tra 24 e 28.

2) L'insieme delle consonanti della parola *aia*.

3) L'insieme delle lettere in comune tra la parola *roma* e la parola *fine*.

4) L'insieme delle persone ancora oggi viventi e che abbiano partecipato con Giulio Cesare alla guerra contro i Galli.

Osservazione: è evidente che tutti gli insiemi vuoti definiti negli esempi precedenti, ai fini di rendere ancora valida la *definizione* 1.1., devono essere considerati uguali (affinchè due insiemi vuoti risultino diversi uno dei due dovrebbe contenere almeno un elemento non contenuto nell'altro e ciò è incompatibile con la *definizione* 1.3.), per cui parleremo in generale non di *un* insieme vuoto bensì *dell'*insieme vuoto. Può risultare utile allo studente non ancora ben allenato al ragionamento astratto raffigurarsi un insieme come un contenitore (una scatola, un barattolo, una stanza, ...) nel quale siano presenti determinati oggetti; in tal caso l'analogia porta a raffigurare l'insieme vuoto come un contenitore in cui non vi sia alcun oggetto ed è allora evidente come non vi sia alcuna differenza logica tra un contenitore che non contenga, ad esempio, alcun cappello ed uno che non contenga alcuna mela. Sulla base dell'analogia precedente è anche evidente come sia necessario non confondere un elemento a con l'insieme $\{a\}$ costituito esclusivamente da tale elemento (un cesto contenente una sola mela è, infatti, concettualmente diverso dalla sola mela).

2. SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME

A partire dalle nozioni elementari finora acquisite possiamo dare la seguente

Definizione 2.1.

Dati due insiemi A e B, diremo che B è *contenuto* in A (ovvero A *contiene* B) o equivalentemente che B è un *sottoinsieme* o una *parte* di A, e scriveremo $B \subseteq A$ (ovvero $A \supseteq B$), se ogni elemento di B è <u>anche</u> elemento di A. In simboli si ha quindi:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \in B$$

dove $\Leftrightarrow$ si legge *se e solo se* (doppia implicazione: cfr. paragrafo 5).

<u>ESEMPIO</u>

Se $A = \{a, m, o, r\}$ è l'insieme delle lettere che costituiscono la parola *roma* e $B = \{a, o\}$ è l'insieme delle vocali presenti nella medesima parola, risulta banalmente che $B \subseteq A$.

Osservazione: scrivendo $B \subseteq A$ non escludiamo il caso $B = A$; infatti se $B \subseteq A$ ed $A \subseteq B$, cioè se ciascun elemento di B è anche elemento di A e viceversa, per la *definizione* 1.2. risulterà evidentemente $B = A$; viceversa, se $A = B$ allora valgono entrambe le inclusioni $B \subseteq A$ ed $A \subseteq B$.
Dunque, in generale, risulta:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \quad e \quad B \subseteq A$$

Definizione 2.2.
Dati due insiemi A e B, diremo che B *non* è un *sottoinsieme* di A, e scriveremo $B \not\subset A$, se esiste qualche elemento di B che <u>non</u> è elemento di A.

<u>ESEMPIO</u>
Se $A = \{a, m, o, r\}$ è l'insieme delle lettere che costituiscono la parola *roma* e $B = \{m, a, r, i, o\}$ è l'insieme delle lettere che formano la parola *mario*, si avrà ovviamente $A \subseteq B$ e $B \not\subset A$.
Osservazione: l'insieme vuoto ($\emptyset$) è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme; infatti dato un insieme A qualsiasi, affinchè $\emptyset$ non sia sottoinsieme di A, deve esistere almeno un elemento di $\emptyset$ non appartenente ad A: assurdo in quanto, per la *definizione* 1.3., $\emptyset$ non contiene alcun elemento. Dunque per qualunque insieme A, in generale risulta:

$$\emptyset \subseteq A \qquad \text{valendo l'uguale se e solo se } A = \emptyset$$

Definizione 2.3.
Poichè, come notato in precedenza, dato un qualunque insieme $A \neq \emptyset$, risulta sempre $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$, allora A e $\emptyset$ sono detti sottoinsiemi *impropri* di A mentre tutti gli altri sottoinsiemi di A sono detti *propri*.
Osservazione: si consiglia lo studente di riflettere bene sul diverso significato dei due simboli: $\in$, $\subseteq$. Il primo simbolo $\in$ rappresenta una relazione di *appartenenza* di un <u>elemento</u> ad un <u>insieme</u>, il secondo $\subseteq$ esprime una relazione di *inclusione* di un <u>insieme</u> in un altro <u>insieme</u>.

<u>ESEMPI</u>
1) $A = \{a, m, o, r\} \quad \Rightarrow \quad a \in A$ *è vera*
2) $A = \{a, m, o, r\} \quad \Rightarrow \quad a \subseteq A$ *non ha significato*
3) $A = \{a, m, o, r\} \quad \Rightarrow \quad \{a\} \subseteq A$ *è vera*

4) $A = \{a, m, o, r\} \Rightarrow \{a\} \in A$ *è falsa*

5) $A = \{a, m, o, r\} \Rightarrow \emptyset \in A$ *è falsa*

6) $A = \{a, m, o, r\} \Rightarrow \emptyset \subseteq A$ *è vera*

7) $A = \{a, m, o, r\} \Rightarrow \emptyset \notin A$ *è vera*

8) $A = \{a, m, o, r\} \Rightarrow \emptyset \in \emptyset$ *è falsa*

9) $\emptyset \subseteq \emptyset$ *è vera*

10) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ *è vera*

11) $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ *è vera*

Riassumendo, si può facilmente verificare che il simbolo $\subseteq$ gode delle seguenti tre proprietà:

a) $A \subseteq A$ $\forall\, A, B$ insiemi *riflessiva*

b) $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ $\forall\, A, B$ insiemi *antisimmetrica*

c) $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ $\forall\, A, B, C$ insiemi *transitiva*

Spesso considereremo, dato un insieme A, il nuovo insieme $\wp(A)$ i cui elementi sono le parti di A proprie ed improprie.

Definizione 2.4.

L'insieme $\wp(A)$ si chiama *insieme delle parti* di A ed esso rappresenta un primo esempio di insieme di insieme. In simboli si ha quindi:

$$\forall\, H \in \wp(A) \quad \Rightarrow \quad H \subseteq A$$

dove $\Rightarrow$ si legge *allora* (implicazione semplice: cfr. paragrafo 5).

ESEMPI

1)Poichè per ogni insieme A $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset$ ed A sono elementi di $\wp(A)$.

2) Se $A = \{a, b, c\}$ allora $\wp(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

3. OPERAZIONI TRA INSIEMI

Siano A e B due insiemi qualsiasi.

Definizione 3.1.

Si chiama *unione* di A e B, e lo si indica con $A \cup B$, la collezione degli elementi appartenenti ad almeno uno dei due insiemi dati (cioè ciascun elemento di $A \cup B$ o appartiene ad A o a B o ad entrambi), prendendo gli elementi comuni ad A e B una sola volta. In simboli:

$$A \cup B = \{x : x \in A \; oppure \; x \in B\}$$

Per convenzione si pone:

$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \quad con \quad A = \varnothing$ oppure $A \neq \varnothing$

ESEMPI

1) A = insieme degli studenti iscritti alla Facoltà di Agraria per l'anno accademico in corso

$B = \{x : x \in A \; ed \; x \; \grave{e} \; maschio\}$

$C = \{x : x \in A \; ed \; x \; \grave{e} \; femmina\}$

$D = \{x : x \in A \; ed \; x \; non \; ha \; ancora \; compiuto \; 20 \; anni\}$

Risulta:

$B \cup C = A$

$B \cup D$ = insieme comprendente tutti gli studenti maschi e le femmine al di sotto dei 20 anni

2) $A = \{1, 3, 5, 12\} \quad e \quad B = \{2, 5, 12, 15\}$

Si ha:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 12, 15\}$

3) A = insieme dei punti dell'intervallo aperto a sinistra] 0, 5]

B = insieme dei punti dell'intervallo chiuso [2, 9]

Allora:

$A \cup B$ = insieme dei punti dell'intervallo aperto a sinistra] 0, 9]

Osservazione: l'operazione di unione gode delle seguenti tre proprietà:

a) $A \cup B = B \cup A \qquad \forall A, B$ insiemi *commutativa*

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \forall A, B, C$ insiemi *associativa*

$c)\ A \cup A = A$ $\forall A$ insieme *idempotenza*

Definizione 3.2.

Si chiama *intersezione* di A e B, e lo si denota con $A \cap B$, la collezione degli elementi appartenenti ad <u>entrambi</u> gli insiemi dati (cioè ciascun elemento di $A \cap B$ appartiene sia ad A che a B). In simboli:

$$A \cap B = \{x : x \in A \; ed \; x \in B\}$$

Per convenzione si pone:

$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$

$A \cap B = \varnothing$ se A e B sono disgiunti

<u>ESEMPI</u>

1) Con riferimento all'esempio 1) riportato nella *definizione* 3.1., risulta:

$B \cap C = \varnothing$

$B \cap D =$ insieme degli studenti maschi al di sotto dei 20 anni

2) $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}$

Allora si ha:

$A \cap B = \{2,\ 3\}$

3) A = insieme dei punti dell'intervallo chiuso $[\ -2, 3\ ]$

B = insieme dei punti dell'intervallo aperto $(\ 0, 6\ )$

Risulta:

$A \cap B$ = insieme dei punti dell'intervallo aperto a sinistra $(\ 0, 3\ ]$

Osservazione: l'operazione di intersezione gode delle seguenti tre proprietà:

$a)\ A \cap B = B \cap A$ $\forall A, B$ insiemi *commutativa*

$b)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\forall A, B, C$ insiemi *associativa*

$c)\ A \cap A = A$ $\forall A$ insieme *idempotenza*

Si noti inoltre che le operazioni di unione ed intersezione sono *distibutive* l'una rispetto all'altra, cioè risulta:

$d)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \forall\, A, B, C$ insiemi

$e)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \forall\, A, B, C$ insiemi

Definizione 3.3.

Si chiama *differenza* di due insiemi A e B diversi dall'insieme vuoto, e la si indica con $A-B$, la collezione di tutti gli elementi di A che <u>non</u> appartengono a B. In simboli:

$$A - B = \{x : x \in A \ ed \ x \notin B\}$$

<u>ESEMPIO</u>

Con riferimento all'esempio 1) della *definizione* 3.1. si ha:

$C-D$ = insieme delle studentesse di età non inferiore ai 20 anni

$D-C$ = insieme degli studenti maschi di età inferiore ai 20 anni

$B-(B \cap D)$ = insieme degli studenti maschi di età non inferiore ai 20 anni

$A-(B \cup D)$ = insieme delle studentesse di età non inferiore ai 20 anni

$C-(C \cap D)$ = insieme delle studentesse di età non inferiore ai 20 anni

$(A-B) \cap (A-D)$ = insieme delle studentesse di età non inferiore ai 20 anni

Osservazione: l'operazione di differenza gode delle seguenti tre proprietà:

$a)\ A - B = \varnothing \iff A \cap B = \varnothing \qquad \forall\, A, B$ insiemi

$b)\ A - B = B - A \iff A = B \qquad \forall\, A, B$ insiemi

$c)\ A - B = A \iff A \subseteq B \qquad \forall\, A, B$ insiemi

Definizione 3.4.

Dato un insieme B, sottoinsieme proprio di un fissato insieme A, si definisce *complementare* di A l'insieme $A-B$. In simboli:

$$\overline{B} = CA = \{x : x \in A \ ed \ x \notin B\}$$

Per convenzione si pone:

$C\varnothing = A$

$CA = \varnothing$

Osservazione: la suddetta operazione gode delle seguenti quattro proprietà:

a) $C(CA) = A$ $\qquad \forall A$ insieme

b) $A \cap CA = \varnothing$ $\qquad \forall A$ insieme

c) $C(A \cup B) = CA \cap CB$ $\qquad \forall A, B$ insiemi

d) $C(A \cap B) = CA \cup CB$ $\qquad \forall A, B$ insiemi

Le relazioni *c*) e *d*) sono dette *formule di De Morgan*.

Definizione 3.5.

Se, in particolare, $B \subseteq A$ allora l'insieme *A*–*B* prende il nome di *complementare di B rispetto ad A* e si ottiene evidentemente togliendo da *A* tutti gli elementi appartenenti a *B*; tale insieme si indica con $C_A B$. In simboli:

$$C_A B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Nel caso in cui, nel contesto del discorso, l'insieme *A* sia fissato una volta per tutte e si supponga che tutti gli insiemi che si prendono in considerazione in quel particolare contesto siano sottoinsiemi di *A*, detto allora insieme *universo*, l'insieme $C_A B$ si indica più semplicemente con $\overline{B}$, detto *complemento* di *B*.

Se, invece, $B \not\subset A$ allora *A*–*B* si ottiene togliendo da *A* tutti gli elementi di *B* appartenenti anche ad *A*.

<u>ESEMPIO</u>

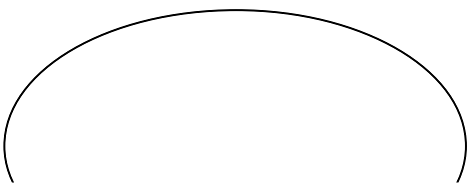
$A = \{a, b, c, d, e\}$ $\quad e \quad$ $B = \{c, d\}$

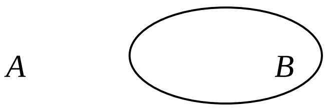
Segue che:

$C_A B = \{a, b, e\}$

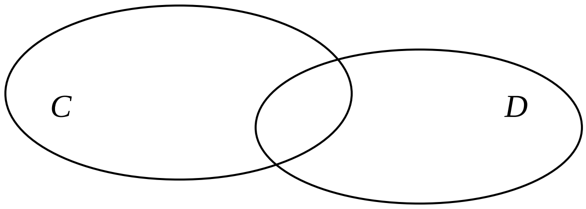
Un modo semplice e suggestivo per rappresentare graficamente gli insiemi e le relazioni che intercorrono tra essi è quello di usare i cosiddetti diagrammi di *Eulero-Venn*, ognuno dei quali è costituito da una regione del piano, delimitato da una o più linee chiuse, utilizzata per rappresentare appunto un dato insieme indicando i suoi elementi con punti interni a tale figura, gli elementi che non vi appartengono con punti esterni mentre gli elementi del contorno non si considerano.

Così ad esempio il fatto che l'insieme *B* è sottoinsieme proprio di un dato insieme *A*, cioè $B \subset A$, si raffigura con un diagramma del tipo





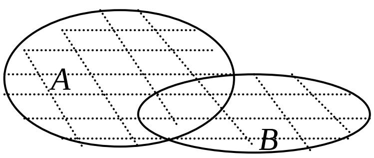
Due insiemi C e D si raffigurano invece con il diagramma



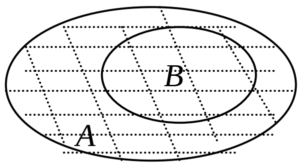
se hanno elementi in comune, oppure con il diagramma

se essi non hanno elementi in comune.

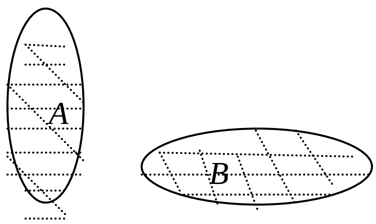
Di seguito riportiamo alcuni esempi di diagrammi che illustrano le reciproche situazioni in cui si trovano alcune coppie o terne di insiemi (l'insieme indicato sotto ogni diagramma corrisponde alla parte tratteggiata).



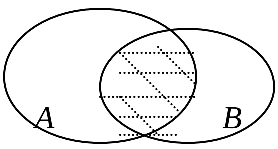
$A \cup B$



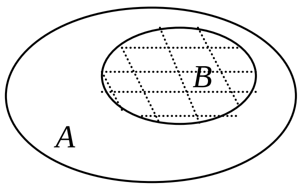
$A \cup B$



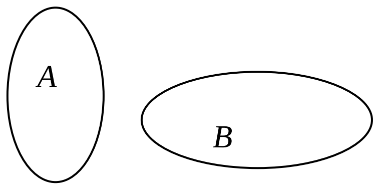
$A \cup B$



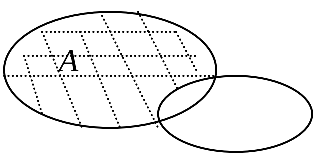
$A \cap B$

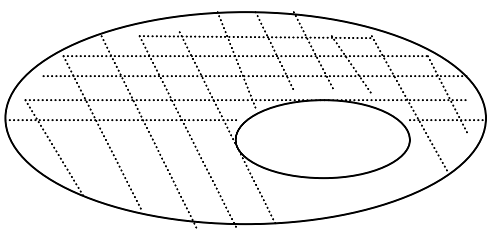


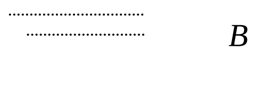
$A \cap B$



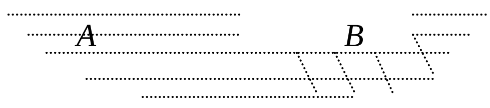
$A \cap B$



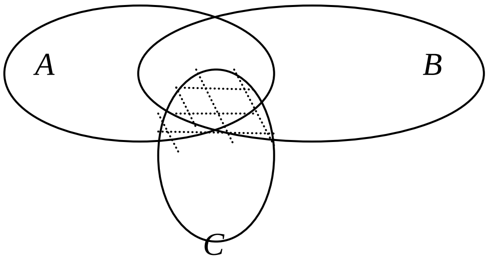




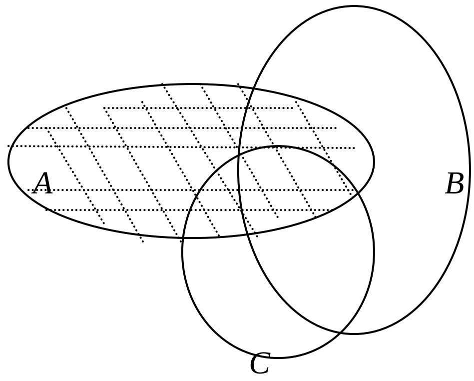
$A - B$



$A - B \; = \; C_A B$



$(A \cup B) \cap C$



$A \cup (B \cap C)$

Osservazione: i diagrammi di *Venn* si applicano talvolta anche ad insiemi finiti, elencando entro il contorno gli elementi di un dato insieme *A*. Alcuni insiemi numerici di cui faremo uso sono indicati con simboli ormai consacrati dall'uso, qui di seguito riportati:

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri *naturali*

$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri *interi*

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri *razionali*

$\Re$ = insieme dei numeri *reali*

$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri *complessi*

Gli stessi simboli indiciati con lo zero o con un asterisco in alto a destra (ad esempio $\mathbb{N}_0 \; = \; \mathbb{N}^*$) rappresentano ancora i suddetti insiemi privati dello zero.

4. RELAZIONI

Definizione 4.1.

Dati due elementi x ed y, si dice *coppia ordinata*, e la si indica con (x, y), l'insieme avente per elementi gli insiemi $\{x\}$ ed $\{x, y\}$, dove x è detto *primo elemento* della coppia ed y si dice *secondo elemento* della coppia. In simboli:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Per convenzione si pone:

$(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ $\qquad$ *per* $\quad x = y$

Osservazione: per $x \neq y$ si ha:

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \neq (y, x) = \{\{y\}, \{y, x\}\}$

Definizione 4.2.

Si chiama *prodotto cartesiano* o semplicemente *prodotto* di due insiemi *A* e *B*, e lo si denota con $A \times B$, la collezione di tutte le coppie ordinate (x, y) con $x \in A$ ed $y \in B$. In simboli:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \; ed \; y \in B\}$$

Per convenzione si pone:

$A \times \varnothing = \varnothing \times B = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$

ESEMPI

1) $A = \{a, b, c\}$ $\quad e \quad$ $B = \{1, 2\}$

Si ha:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

2) Le coordinate dei punti del piano forniscono un esempio tipico del prodotto cartesiano $\Re \times \Re$ dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali. In tal caso l'insieme prodotto viene ad essere visualizzato con un rettangolo.

Definizione 4.3. (*definizione generale*)

Se $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ sono insiemi, definiremo *prodotto cartesiano* $A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n$ l'insieme delle *n*-uple ordinate $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ tali che $x_1 \in A_1, \ldots, x_i \in A_i, \ldots, x_n \in A_n$. In simboli:

$$A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, \ldots, x_i \in A_i, \ldots, x_n \in A_n\}$$

Definizione 4.4.

Chiamasi *relazione* R tra due insiemi A e B una qualsiasi scelta di coppie in $A \times B$. L'insieme $G(R)$ delle coppie scelte prende il nome di *grafico* della relazione.

Se $A = B$ si dice che R è una *relazione in* A.

Inoltre se è fissato $G \subseteq A \times B$ ed $(x, y) \in G$, detta R la relazione definita da G, scriveremo

$$x\,R\,y \quad \text{in luogo di} \quad (x, y) \in G$$

Osservazione: quasi sempre, per *abuso di linguaggio*, si confonderà R con G, cioè si scriverà:

$(x, y) \in R$ in luogo di $(x, y) \in G$

$R \subseteq A \times B$ in luogo di $G \subseteq A \times B$

Dunque assegnare il grafico o assegnare la relazione sono fatti del tutto equivalenti.

Se si rappresentano gli insiemi A e B con i diagrammi di *Venn*, una relazione $R \subseteq A \times B$ può allora essere visualizzata collegando, mediante delle frecce, gli elementi x di A con gli elementi y di B in base a quanto espresso dalla relazione stessa.

ESEMPI

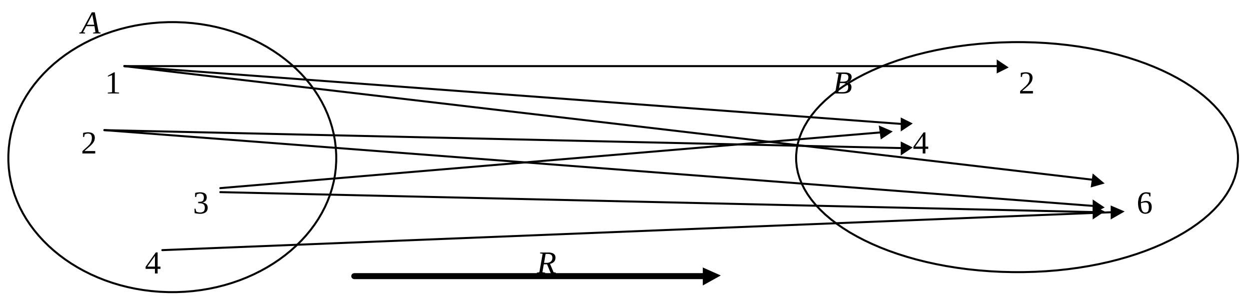
1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{2, 4, 6\}$

R è la relazione formata da tutte le coppie $(x, y) \in A \times B$ tale che $x < y$.

Risulta:

$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6)\}$

Rappresentando graficamente la relazione R si ha:



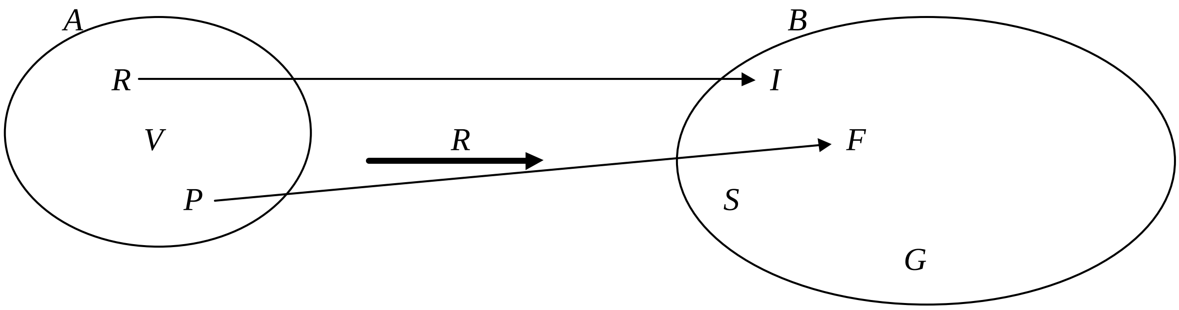
2) $A = \{R = \text{Roma}, V = \text{Vienna}, P = \text{Parigi}\}$

$B = \{I = \text{Italia}, F = \text{Francia}, S = \text{Spagna}, G = \text{Grecia}\}$

T è la relazione tale che x è capitale di y.

Allora si ha:

$T = \{(R,\ I),\ (P,\ F)\}$



Una tale rappresentazione prende il nome di *grafo* associato ad R.

Definizione 4.5.

Si chiama *dominio* di una relazione R tra due insiemi A e B l'insieme $D(R) \subseteq A$ costituito dagli elementi x di A per i quali esiste almeno un y di B con $x\ R\ y$.

Si chiama *codominio* di una relazione R tra due insiemi A e B l'insieme $C(R) \subseteq B$ costituito dagli elementi y di B per i quali esiste almeno un elemento x di A tale che $x\ R\ y$.

Definizione 4.6.

Dati due insiemi A e B ed una relazione $R \subseteq A \times B$, se ad ogni elemento di A la relazione R associa un <u>solo</u> elemento di B essa prende il nome di *corrispondenza univoca* o *applicazione* o *funzione* di A in B; la si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto ed invece di scrivere $f \subseteq A \times B$ si scrive:

$$f : A \to B \quad \textit{oppure} \quad y = f(x) \quad \textit{con}\ x \in A,\ y \in B$$

Generalmente si visualizza una funzione mediante delle *frecce* (da ogni elemento di A parte <u>una ed una sola</u> freccia verso B).

Osservazione: affinchè una relazione sia un'applicazione deve accadere che:

- nessun elemento di A abbia due o più corrispondenti in B
- nessun elemento di A sia privo di corrispondenti in B

<u>ESEMPI</u>

a) A = insieme dei cittadini italiani

B = insieme delle regioni italiane

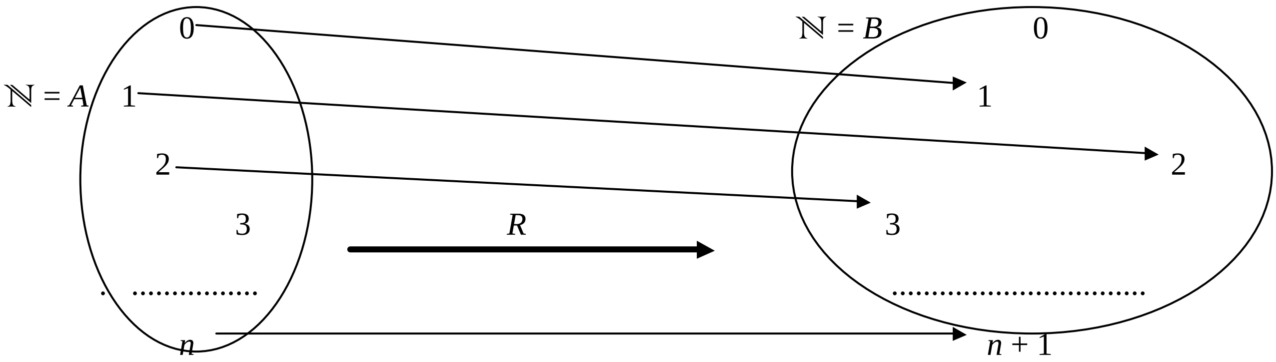
Si ottiene una semplice corrispondenza univoca associando ad ogni persona la sua regione di appartenenza.

b) $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali

$R: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la relazione che ad ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ associa $n+1 \in \mathbb{N}$

Allora *R* è un'applicazione perchè ad ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ associa uno ed un solo elemento $n+1 \in \mathbb{N}$.

Utilizzando i diagrammi di *Venn* si ha:

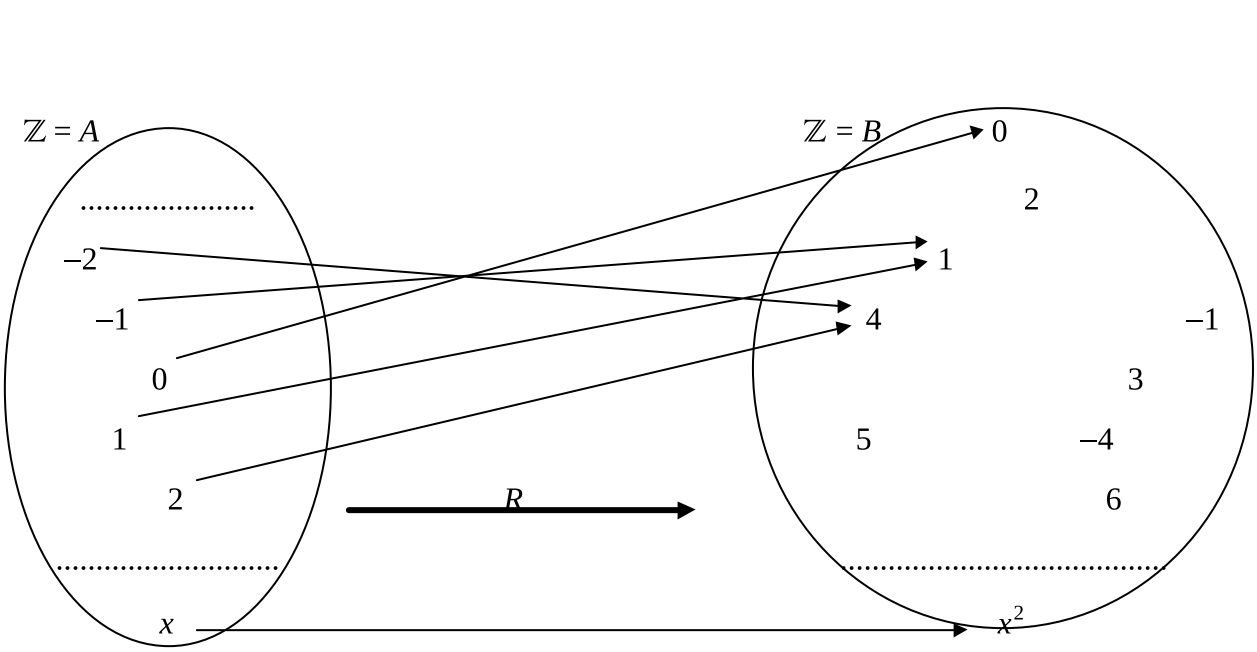


c) $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi

$R: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la relazione che ad ogni $x \in \mathbb{Z}$ associa il suo quadrato, cioè x^2

Allora *R* è un'applicazione perchè ogni elemento $x \in \mathbb{Z}$ ha un solo corrispondente in $\mathbb{Z}$ (il suo quadrato).

La rappresentazione grafica dell'applicazione *R* in esame è riportata nella pagina seguente.



Osservazione: nella *definizione* 4.6. gli elementi di A hanno un ruolo *prioritario* rispetto agli elementi di *B*; infatti data una corrispondenza univoca tra i due insiemi A e *B* è utile considerare tra gli elementi di *B* quelli che provengono, nella corrispondenza, da qualche elemento di A. Tali elementi formano un sottoinsieme di *B* che si dice *immagine*.

Definizione 4.7.

Si definisce *immagine* dell'applicazione $f : A \to B$ il sottoinsieme di tutti gli elementi di *B* che provengono da qualche elemento di A.

Osservazione: se *f* è un'applicazione non è detto che la sua inversa f^{-1} sia ancora una funzione.

<u>ESEMPIO</u>

Se si considera la funzione

$$y \ = \ sinx \qquad con \quad x \in \Re \quad ed \quad y \in [-1,\ 1]$$

allora la funzione inversa

$$x \ = \ arcsiny$$

non è in generale un'applicazione; se, però, la si considera tale (e ciò accade spesso in Analisi) occorre limitare, ad esempio, i valori x dell'intervallo $\left[-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right]$ oppure $[0,\ p]$ in modo da avere una funzione invertibile a tratti (cfr. capitolo sulle funzioni inverse riportato nel terzo fascicolo).

Definizione 4.8.

Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Si dice che *f* è *iniettiva* o *iniezione* (*in*) se per ogni coppia di elementi distinti x, x' appartenenti ad A risulta $f(x) \ \neq \ f(x')$ o equivalentemente se non esistono elementi distinti di A con la medesima immagine in *B*.

<u>ESEMPI</u>

1) L'applicazione dell'esempio b) precedente è iniettiva; infatti se $n, n' \in \mathbb{N}$ con $n \neq n'$ è facile verificare che $f(x) = n+1 \neq f(x') = n'+1$.

2) L'applicazione riportata nell'esempio c) precedente non è invece iniettiva; infatti esistono elementi distinti del dominio $\mathbb{Z}$ aventi la medesima immagine (ad esempio -2 e 2 hanno la stessa immagine 4).

3) $A = \{a, b\} \quad e \quad B = \{a\}$

L'applicazione che agli elementi di A associa a, come è di facile verifica, non è iniettiva.

Definizione 4.9.

Sia $f: A \to B$ un'applicazione. Si dice che f è *suriettiva* o *suriezione* (*su*) se tutti gli elementi di B sono immagini di elementi di A, cioè se $f(A) = B$.

ESEMPI

1) L'applicazione analizzata nell'esempio a) è suriettiva; infatti l'immagine è fornita da tutte le regioni, cioè è B stesso.

2) L'applicazione dell'esempio b) non è suriettiva; infatti nell'insieme di arrivo c'è l'elemento 0 che non è immagine di alcun elemento del dominio.

3) L'applicazione dell'esempio c) non è suriettiva; infatti -1, -4, 2, ... non sono immagini di elementi del dominio.

4) $A = \{a, b\} \quad e \quad B = \{a\}$

L'applicazione che agli elementi di A associa a, come è di facile verifica, è suriettiva.

Osservazione: se $f: A \to B$ è un'applicazione non suriettiva vuol dire che esistono in B elementi che non sono immagini di alcun elemento di A. Se si considera come insieme di arrivo $f(A)$ anzichè B è evidente che l'applicazione f diviene suriettiva. Pertanto un'applicazione $f: A \to B$ non suriettiva si può rendere tale considerandola come $f: A \to f(A)$. A rigore, però, le due applicazioni sono diverse essendo $B \neq f(A)$.

ESEMPIO

Sia A l'insieme di tutti gli studenti di una classe e sia invece B l'insieme di tutte le paia di scarpe esistenti in Italia. Consideriamo l'applicazione che associa ad ogni studente di quella classe il paio di scarpe che sta portando. La funzione è chiaramente iniettiva in quanto a studenti diversi corrispondono paia di scarpe diverse. L'immagine $f(A)$ è costituita dalle paia di scarpe calzate da qualche studente. Pertanto $f(A)$ è un sottoinsieme di scarpe che si identifica naturalmente con l'insieme B di tutte le scarpe.

Definizione 4.10.

Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Si dice che f è *biiettiva* o *biiezione* (*bi*) se essa è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Osservazioni:

- le applicazioni biiettive sono ralazioni molto particolari in quanto in esse ogni elemento di B è immagine (suriettività) di un solo (iniettività) elemento di A
- tutte le corrispondenze biunivoche sono suriettive perchè altrimenti ad eventuali elementi di B che non provengono da A non si potrebbe far corrispondere inversamente alcun elemento di A; non vale però il viceversa, cioè una corrispondenza può essere suriettiva ma non biiettiva.

ESEMPI

1) $A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ ...,\ 2n,\ ...\}$

$R : \mathbb{N} \to A$ è la relazione che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $2n \in A$

L'applicazione così costruita è biunivoca; infatti essa è:

- iniettiva in quanto se $n', n'' \in \mathbb{N}$ con $n' \neq n''$ è facile verificare che $2n' \neq 2n''$
- suriettiva in quanto ogni elemento di A è immagine di un elemento di $\mathbb{N}$

2) L'applicazione riportata nell'esempio a) non è biunivoca in quanto, ad esempio, a tutti i lombardi (elementi distinti dell'insieme A) corrisponde sempre la regione Lombardia (cioè un solo elemento dell'insieme B); come già visto essa è però suriettiva.

Osservazione: ogni biiezione è invertibile; inoltre l'inversione è possibile se ad elementi diversi di A corrispondono sempre elementi diversi di B.

5. CALCOLO LOGICO

Il linguaggio matematico, come ogni altro linguaggio, fa uso di “espressioni” dette *proposizioni*; considereremo, pertanto, in matematica, solo quelle proposizioni della lingua italiana delle quali si possa affermare senza ambiguità che esse sono *vere* o *false*. Queste proposizioni sono quelle che Aristotele, l’Euclide della logica, chiama *giudizi*.

ESEMPI

1) *Tre è un numero dispari*: valore di verità *vero* (v)

2) *Quattro è divisibile per tre*: valore di verità *falso* (f)

3) *Ogni triangolo ha quattro lati*: valore di verità *falso* (f)

4) *Il leone è un animale*: valore di verità *vero* (v)

Non sono del tipo suddetto le proposizioni seguenti:

Pioverà domani

Studiare non mi piace

Questa proposizione è falsa

che quindi non faranno parte del calcolo logico.

Definizione 5.1.

Date due proposizioni P e Q diremo che esse sono *uguali* o *logicamente equivalenti* se sono entrambe vere o entrambe false. In simboli:

$$P = Q$$

o più comunemente:

$$(1) \qquad P \Leftrightarrow Q$$

La (1) si legge *P è equivalente a Q* oppure *P è necessaria e sufficiente per Q.*

ESEMPI

1) P = a è un numero positivo

Q = $5+a$ è maggiore di 5

Segue immediatamente che:

P è vera per $a > 0$; P è falsa per $a \leq 0$

Q è vera per $a > 0$; Q è falsa per $a \leq 0$

Quindi qualunque sia il valore di a le proposizioni P e Q sono entrambe vere (per $a > 0$) oppure entrmbe false (per $a \leq 0$). Dunque $P \Leftrightarrow Q$ (P è equivalente o uguale a Q) oppure "a è un numero positivo" è necessario e sufficiente affinchè "$5 + a$ è maggiore di 5".

2) P = l'individuo x risiede a Roma

Q = l'individuo x risiede nella regione Lazio

E' facile verificare che $P \not\Leftrightarrow Q$, cioè P e Q non sono equivalenti; infatti P e Q sono entrambe vere se x indica un residente a Roma e sono entrambe false se x indica un residente di un qualsiasi luogo non appartenente alla regione Lazio ma si ha anche il caso P falsa e Q vera se, ad esempio, x indica un residente di Rieti.

Se ora indichiamo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri *naturali* privati dello zero, cioè:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

allora le proposizioni:

$P : \forall x \in \mathbb{N}^*, x + 1 > 0 \quad e \quad Q : \exists x \in \mathbb{N}^* : x < 10$

sono entrambe vere; infatti per ogni intero positivo x risulta sempre $x + 1 > 0$ ed esiste almeno un intero positivo x, ad esempio $x = 5$, minore di 10. Invece le proposizioni:

$R : \forall x \in \mathbb{N}^*, x - 4 > 0 \quad e \quad S : \exists x \in \mathbb{N}^* : 1 + x < 0$

sono ambedue false, come è facile verificare.

Osservazione: può capitare, a volte di dover scrivere la *negazione* di una proposizione in cui compaiono i due quantificatori $\forall$ ed $\exists$. Illustriamo allora con un semplice esempio come bisogna comportarsi in tal caso.

<u>ESEMPI</u>

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P : \forall x \in A, x > 3$

Allora P è falsa in quanto essa afferma che tutti gli elementi dell'insieme A sono maggiori di tre. La sua negazione $\widetilde{P}$ ($non\ P$) è: "non è vero che tutti gli elementi di A sono maggiori di tre" ossia "esiste almeno un elemento di A non maggiore di tre".

E' grave errore pensare che la negazione di P sia: "tutti gli elementi di A non sono maggiori di tre" (se così fosse, P e $\widetilde{P}$ sarebbero entrambe false!). In simboli si ha:

$$\widetilde{P} : \exists x \in A : x < 3$$

2) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$Q : \exists\, x \in A : x < 0$

Allora la sua negazione è data da:

$$\tilde{Q} : \forall\, x \in A,\ x > 0$$

cioè "non è vero che esiste almeno un elemento di A negativo", ossia "tutti gli elementi di A sono non negativi e quindi positivi".

In generale risulta:

$P : \forall\, x \in A,\ D(x)\ \text{è vera} \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} : \exists\, x \in A : D(x)\ \text{non è vera}\ (\text{è falsa})$

$\tilde{P} : \exists\, x \in A : \tilde{D}(x)\ \text{è vera}$

$Q : \exists\, x \in A : D(x)\ \text{è vera} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Q} : \forall\, x \in A,\ D(x)\ \text{non è vera}\ (\text{è falsa})$

$\tilde{Q} : \forall\, x \in A,\ \tilde{D}(x)\ \text{è vera}$

Dunque da quanto visto finora discende la seguente *regola* di carattere generale: per negare una proposizione P nella quale intervengano uno dei due quantificatori $\forall, \exists$ ed una proposizione D basta cambiare il quantificatore e sostituire D con la sua negazione $\tilde{D}$.

ESEMPI

1) P : tutti i triangoli sono isosceli (falso!) $\Rightarrow$ $\tilde{P}$: esiste almeno un triangolo isoscele

Errore: tutti i triangoli non sono isosceli

2) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$P : \exists\, x \in A : x\ \text{è multiplo di due} \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} : \forall\, x \in A,\ x\ \text{non è multiplo di due}$

Errore: $\exists\, x \in A : x\ \text{non è multiplo di due}$

3) $A = \mathbb{N}$

$P : \forall\, x \in \mathbb{N},\ x^2 \neq 5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} : \exists\, x \in \mathbb{N} : x^2 = 5$

4) $A = \Re$

$P : \forall\, x \in \Re,\ x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} : \exists\, x \in \Re : x^2 \leq 0$

Definizione 5.2.

Date due proposizioni P e Q si dice che *P implica Q*, se accade che Q è vera se lo è P. In simboli:

$$(2) \qquad P \Rightarrow Q$$

Osservazione: il simbolo $P \Rightarrow Q$ si può leggere in uno dei seguenti modi:

- P implica Q
- da P segue Q
- P è sufficiente per Q
- Q è conseguenza di P
- Q è necessaria per P

Si noti inoltre che la (2) afferma che se P è vera anche Q è vera, cioè il verificarsi di P è sufficiente a garantire il verificarsi di Q; ciò, però, non significa che se P non si verifica allora non si verifica neanche Q. Secondo la *definizione* 5.2. se P è falsa non possiamo dire nulla su Q che, quindi, potrebbe risultare vera o falsa. Da ciò segue che, se sappiamo che Q è falsa possiamo senz'altro concludere che P è falsa, ma se Q è vera non possiamo concludere nulla su P che potrebbe essere vera o falsa. Riassumendo, $P \Rightarrow Q$ significa che "P è sufficiente per Q" oppure, se si preferisce, "Q è necessaria per P", cioè:

a) se si verifica P allora si verifica anche Q

b) il fatto che P non si verifica non esclude il verificarsi di Q

c) Q si può verificare senza che sia verificata P

d) se Q non è verificata allora non lo è neanche P

In particolare è importante osservare che la *d*) afferma l'equivalenza delle seguenti implicazioni:

$$P \Rightarrow Q \qquad e \qquad \tilde{Q} \Rightarrow \tilde{P}$$

cioè dire "P implica Q" è equivalente a dire "non Q implica non P".

ESEMPI

1) $P = x$ è uno studente di Scienze Politiche dell'Università di Teramo

$Q = x$ è uno studente dell'Università di Teramo

In tal caso si può affermare che:

a) $P \Rightarrow Q$ (se è vera P allora è vera anche Q)

b) $\tilde{P} \not\Rightarrow \tilde{Q}$ (il fatto che P non sia verificata non implica che non sia verificata neanche Q; in altre parole il fatto che P non sia verificata non esclude che si verifichi Q; nel nostro esempio, quindi, il fatto che x non sia di Scienze Politiche dell'Università di Teramo non implica che x non sia iscritto a tale Università o, se si preferisce, non esclude che egli sia studente dell'Università di Teramo)

c) $Q \not\Rightarrow P$ (se Q è vera non è detto che lo sia P: x potrebbe essere uno studente di Giurisprudenza dell'Università di Teramo ed in tal caso Q sarebbe vera mentre P falsa)

d) $\tilde{Q} \Rightarrow \tilde{P}$ (se Q non è verificata allora non lo è neanche P: se x non è uno studente dell'Università di Teramo allora non può essere della Facoltà di Scienze Politiche dell'Università di Teramo).

2) P = T è un triangolo equilatero

Q = esistono una circonferenza inscritta in T ed una circoscritta a T

Evidentemente si ha:

a) $P \Rightarrow Q$ (se T è un triangolo equilatero allora esistono sia una circonferenza inscritta in esso sia una circoscritta ad esso)

b) $\tilde{P} \not\Rightarrow \tilde{Q}$ (se T non è un triangolo equilatero non è detto però che non sia possibile inscrivere una circonferenza e circoscrivere una circonferenza in T; se, ad esempio T è un quadrato, cioè P è falsa, sarà senz'altro possibile inscrivere e circoscrivere circonferenze in T, cioè Q è vera; se, invece, T è un panino con il salame, cioè P è falsa, allora anche Q è falsa

c) $Q \not\Rightarrow P$ (se esistono sia una circonferenza inscritta a T che una circoscritta ad esso non è detto che T sia un triangolo equilatero: potrebbe, ad esempio, essere un quadrato)

d) $\tilde{Q} \Rightarrow \tilde{P}$ (se non esistono nè una circonferenza inscritta nè una circonferenza circoscritta a T allora T sicuramente non è un triangolo equilatero).

In maniera naloga a quanto fatto nei precedenti paragrafi per gli insiemi è possibile definire le seguenti due operazioni tra proposizioni:

- *disgiunzione*, indicata con $\vee$ (dal latino *vel*): *o anche* oppure *o* (non esclusivo)
- *congiunzione*, indicata con $\wedge$: *e*

<u>ESEMPI</u>

1) Cercasi segretaria *o* dattilografa = cercasi segretaria $\vee$ dattilografa

2) $A \cup B = \{x : x \in A \; o \; x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3) Vado all'Università *e* studio = vado all'Università $\wedge$ studio

4) $A \cap B = \{x : x \in A \; e \; x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Osservazione: se applichiamo l'operazione di negazione valgono le seguenti relazioni:

$a)\ non\left(P \vee Q\right) \ = \ \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

$b)\ non\left(P \wedge Q\right) \ = \ \tilde{P} \vee \tilde{Q}$

che storicamente sono le vere *formule di De Morgan*, analoghe a quelle viste per l'unione, l'intersezione ed il complementare di insiemi.