Il contributo

Rivista quadrimestrale- Anno XXXV,
IV n.s., gennaio/agosto 2013 - N. 1-2

La rivista propone saggi di alto livello scientifico nel campo degli studi filosofici. I saggi pubblicati, oltre ad aver passato il vaglio e l'approvazione del Comitato scientifico, sono sottoposti a un sistema di valutazione basato sulla revisione paritaria e anonima (*peer review*) che tiene conto dei seguenti criteri di valutazione: Originalità del lavoro e significatività del tema proposto nell'ambito della filosofia italiana; Rilevanza scientifica nel panorama nazionale e internazionale; Attenzione alla letteratura sull'argomento e apparato critico; Rigore metodologico; Proprietà di linguaggio e fluidità del testo; Uniformità dei criteri redazionali. Sono pubblicati solo quei saggi che ricevono una valutazione complessiva pari a 8/10. Le schede di valutazione sono conservate nell'Archivio della Sede del Centro per la filosofia italiana. I *referee* restano anonimi fino all'anno successivo a quello della pubblicazione. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei referee sono trattati e gestiti dal presidente del Centro per la filosofia italiana. Per i saggi su temi non strettamente attinenti alla filosofia italiana la rivista si avvale del referaggio di almeno uno studioso dell'area linguistica e culturale di riferimento.

Direzione e redazione
Centro per la filosofia italiana - Palazzo Annibaldeschi
Via Annibaldeschi n. 2 - 00040 Monte Compatri (Roma)
Tel. 0694288758 -3392305007 www.centroperlafilosofiaitaliana.it -
www.filosofia-italiana.org - direzione@filosofia-italiana.org

Piazzale Aldo Moro n. 5, 00185 Roma
www.nuovacultura.it - ordini@nuovacultura.it
Direttore: prof.ssa Teresa Serra
ISBN 9788868121853
DOI 10.4458/1853
ISSN Print: 0391-2418
ISSN Online: 1974-482X
Quota di associazione abbonante euro 30,00.
Modalità di pagamento: Versamento sul c/c postale n. 39227004
Intestato al *Centro per la filosofia italiana* - Palazzo Annibaldeschi

Indice

Questo fascicolo

Questo fascicolo, che esce come numero doppio, apre con un intenso saggio di Luca Nicotra, ingegnere e giornalista pubblicista, che analizza il problema dell'astrazione o formazione dei numeri naturali; si tratta di un contributo personale alla discussione di un problema di base, che ha risvolti nell'insegnamento della matematica e non solo. Segue una discussione su Hegel, che prende spunto dal volume di Chiereghin, *Rileggere la Scienza della logica di Hegel*, per sviluppare alcune personali considerazioni. Chiude la parte relativa ai saggi un intervento di Helga Corpino, che analizza, in una prospettiva essenzialmente politica, il linguaggio in Hannah Arendt. La rubrica *Discutiamo*, ancora una volta, prende spunto dalle discussioni sul volume di Pietro Ciaravolo, *A proposito della lezione della natura.* Come di consueto le recensioni sono discussioni ampie dei testi presentati.

Da poco ci ha lasciato Rocco Brienza, studioso fine, controcorrente, tra i soci fondatori del nostro Centro. In attesa di commemorarlo in maniera opportuna lo ricordiamo qui a quanti lo hanno conosciuto ed apprezzato.

L'interferenza delle associazioni e il concetto di numero

Luca Nicotra*

La definizione matematica di numero naturale ha i requisiti logici per essere accettabile scientificamente ma ignora la prospettiva di chi debba 'accettare' dentro di sé, cioè interiorizzare, il concetto di numero, operazione che nasce dall'esperienza e quindi è penalizzata dai suoi limiti e dal suo svolgersi nel tempo. In tale prospettiva psicologica di apprendimento del concetto di numero, il contare, che pur implica il possesso del concetto stesso di numero, gioca un ruolo ambiguo e non ancora chiaramente definito. Inoltre tale apprendimento non sarebbe possibile senza processi psicologici fondamentali, quali l'interferenza delle associazioni e l'analogia. Nell'articolo vengono indagati e discussi criticamente i fondamenti logici e psicologici del concetto di numero.

1. Premessa

Come tutti sanno esistono diversi tipi di numeri, ma quando si parla di 'numero', senza null'altro specificare, ci si riferisce in maniera sottintesa a quel tipo che è in testa alla grande famiglia dei numeri: i numeri naturali[1]. Un grande matematico ebreo-tedesco del secolo XIX, Leopold Kronecker, convertito alla fede cristiana, sostenne un provocatorio programma scientifico - in contrasto con i matematici del suo tempo e soprattutto con il grande Karl Weierstrass - che pretendeva di ridurre tutti i risultati

* Ingegnere, Luca Nicotra svolge un'intensa attività di divulgazione scientifica come giornalista pubblicista. Specializzato nelle problematiche di progettazione meccanica assistita dal computer, è autore di numerose pubblicazioni tecniche. I suoi interessi sono diretti in particolar modo alla storia e filosofia della scienza.

[1] In linea con molti autori (Federigo Enriques, Aldo Ghizzetti, Francesco Severi, Giuseppe Sforza Dragoni, Leonida Tonelli) e con quanto posto in evidenza all'interno di questo articolo, per numeri naturali si intendono qui 1, 2, 3....mentre per numeri interi 0, 1, 2, 3...

delle matematiche sotto la semplice forma di proprietà dei numeri naturali, programma di aritmetizzazione della matematica pura che fu successivamente sviluppato e compiuto da Giuseppe Peano[2], il quale mostrò come si possa dedurre la teoria dei numeri naturali da tre idee primitive (zero, numero[3] e successore) e da cinque assiomi[4] oltre che da quelli della logica pura. «Iddio creò i numeri interi[5], il resto è opera dell'uomo», diceva Kronecker. Numeri interi negativi, frazioni, numeri periodici, numeri irrazionali, reali, immaginari, complessi, algebrici, trascendenti, transfiniti erano per lui inesistenti, pure invenzioni dell'uomo per «cercare di far meglio di Dio». Insomma, con la sua focalizzazione sul concetto di numero naturale come origine di tutta la matematica tradizionale, Kronecker si poneva, sul piano filosofico, come un novello Pitagora dell'Ottocento.

Eppure, da un certo punto di vista, Kronecker diceva il vero. Infatti, sia nel bambino dai suoi primissimi anni sia in tribù selvagge, che in talune parti del nostro pianeta ancora vivono in uno stato quasi primitivo[6], è riscontrabile, sia pure limitatamente a *uno* e *due*[7], l'acquisizione 'naturale' del concetto di numero, concet-

[2] In realtà non tutte le branche della matematica sono derivabili dalla teoria dei numeri naturali, come osserva Bertrand Russell, *Introduzione alla filosofia della matematica*, Longanesi, Milano, 1962, p. 51, rimandando alla parte VI dei suoi *Principi della matematica*.

[3] Per Peano quindi il numero era un concetto primitivo, indefinito. Una cosa è dire 'indefinito' e altra è dire 'indefinibile'. Con la prima accezione si intende fare una scelta arbitraria, mentre con la seconda si denota una caratteristica ineliminabile, intrinseca. Un termine può essere 'indefinito' per scelta ma definibile cambiando il termine di partenza che si sceglie come "indefinito".

[4] 1) Zero è un numero, 2) Il successore di ogni numero è un numero, 3) Non esistono due numeri con lo stesso successore, 4) Zero non è il successore d'alcun numero, 5) Ogni proprietà di cui gode lo zero, e anche il successore di ciascun numero che gode di quella proprietà, appartiene a tutti i numeri (principio dell'induzione matematica).

[5] Kronecker fa invece riferimento alla serie 1, 2, 3, ...come numeri interi.

[6] Per es. gli zulu e i pigmei nell'Africa, gli aranda e i kamilarai in Australia, gli arborigeni delle isole Murray, i botocudos in Brasile.

[7] Sia nei bambini tra i dodici e i diciotto mesi sia, come dimostrato da studi antropologici, in numerose popolazioni africane, sudamericane e australiane allo stato primitivo, il possesso del concetto di numero è limitato a *uno*, *due* e *tre* che, però, viene generalmente identificato con il concetto di *molti*. In *Number: the language of science (A critical survey written for the cultured non-mathematician) (1930)*, il matematico russo Tobias Dantzig, allievo di Henri Poin-

to più raffinato, in quanto più astratto, di quello di numerosità o pluralità con il quale spesso superficialmente viene confuso ma dal quale nettamente differisce, pur derivandone[8]. Una coppia di oggetti è un esempio di pluralità o numerosità in quanto è un esempio del numero due, ma non è un esempio di numero, mentre il numero due lo è. «It must have required many ages to discover that a brace of pheasants and a couple of days were both instances of the number two», dice Bertrand Russell.

caré, osserva che molto probabilmente le stesse popolazioni europee in epoca preistorica si trovavano nelle stesse condizioni di non riuscire a percepire il concetto di numero oltre l'uno e il due. I raggruppamenti di oggetti di numero superiore o uguale a tre venivano concettualizzati nell'unico concetto del *tre-molti*. A riprova di questa tesi Dantzig fa notare che sia in latino sia in inglese la parola che denota il concetto di *tre volte* ha anche il significato di *molti*: *ter* (latino), *thrice* (inglese). Inoltre, la parole con le quali in latino e in francese si indica il numero tre hanno la stessa radice della parola utilizzata per il concetto di *molti*: *tres* (tre) e *trans* (oltre) in latino, *trois* (tre) e *très* (molti) in francese. Tali osservazioni sono state riprese e ampliate da Georges Ifrah nella sua monumentale opera *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention* (1985) (tr. it. *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano, 1989). Il termine *esh* degli antichi sumeri significava sia tre sia molti. I termini inglesi *three* (tre) , *throng* (una folla) e *through* (al di là) hanno anch'essi la stessa radice. L'antico sassone *thria* (tre) (dal quale sono derivati l'inglese *three*, gli antichi termini germanici *dri*, *drio*, *driu* e l'attuale tedesco *drei*) ha la stessa radice del francone (l'antica lingua dei franchi) *throp* (ammasso), del francese *trop* (troppo), dell'italiano *troppo* e dell'antico termine medioevale *troppus* (gregge, schiera) del francese *troupe* (truppa) e *troupeau* (gregge), dello spagnolo *tropa* (truppa) dell'italiano *truppa*, dell'inglese *troop* (truppa) e del tedesco *truppe* (truppa). Conclude Ifrah: «Fin dalla notte dei tempi, il numero tre è stato in tal modo sinonimo di pluralità, di moltitudine, di ammasso, di 'al di là', costituendo di conseguenza una sorta di limite impossibile sia da concepire sia da precisare, il che significa come, nell'animo umano, l'invenzione dei numeri abbia segnato una prima battuta d'arresto a due». (Georges Ifrah, *Les chiffres ou l'histoire*, cit. p. 17).

[8] L'evoluzione, nella storia del genere umano, del concetto di numero da percezione prima puramente sensoriale ad acquisizione del concetto di pluralità fino alla sua concettualizzazione astratta si ritrova nello sviluppo evolutivo del bambino, confermando l'idea generalmente condivisa che nello sviluppo delle facoltà mentali del bambino sono rintracciabili le tappe dell'evoluzione dell'intelligenza umana.

2. La percezione del numero

Tuttavia, è innegabile che la prima fase di acquisizione del concetto di numero è caratterizzata da una componente quasi esclusivamente sensoriale, che il matematico russo Tobias Dantzig chiama *number sense* e che si manifesta nella sua forma più primitiva nel percepire il cambiamento di un insieme di oggetti o di viventi allorché una o più unità di essi viene aggiunta o sottratta dall'insieme. Tale facoltà, oltre che nei bambini dai tre ai dodici mesi, è stata rilevata sperimentalmente anche in insetti e uccelli[9]. Il concetto di pluralità precede quello di numero in senso astratto. I bambini, entro il primo anno di vita, cominciano a uscire dalla fase di indefinita percezione quantitativa del numero ed entrano in una fase più cosciente e razionale quando colgono il concetto di pluralità[10]: per loro esistono due matite, due giocattoli, ecc. ma non ancora il numero due, ovvero acquisiscono nella loro coscienza diversi esempi concreti del numero due. Lo stesso stato evolutivo nell'apprendimento del concetto di numero si può trovare nella storia del genere umano, come è dimostrato dal fatto che molte lingue di popoli primitivi hanno parole diverse per i singoli numeri ma non hanno una parola per il 'concetto di numero'[11].

Insomma, i bambini mentre riescono a formarsi 'spontaneamente' il concetto di numero naturale devono faticare non poco per acquisire 'successivamente', a scuola, i concetti di tutti gli altri tipi di numeri che la matematica definisce: interi positivi e negativi, frazioni, numeri periodici, numeri irrazionali, ecc. Si insegna loro a contare e quindi a ottenere la somma di due numeri interi (operazione immediatamente riconducibile al contare) ma non si insegna 'cos'è' il numero due o cinque, nel senso che non si definisce il numero due o cinque, anche perché nessun genitore, a meno che non sia un matematico (o un filosofo preparato...), saprebbe farlo. Ma anche se così fosse dubito che un bambino riuscirebbe a comprendere la definizione logica di numero.

[9] In Tobias Dantzig, *Number: the language of Science,* cit., pp. 1 e 2 sono riportati vari esempi che mostrano limitata a insetti e uccelli e al numero quattro la percezione del numero di un gruppo.

[10] Ovviamente la percezione si riferisce alla pluralità o numerosità di un insieme, in quanto concetto concreto esperibile e non al concetto astratto di numero. Fatta questa precisazione, nel seguito continueremo a utilizzare l'espressione 'percezione del numero' in tale accezione, che è l'unica plausibile.

[11] Cfr. Tobias Dantzig, *Number*, cit., p. 6.

È poi noto che 'il contare' è cosa ben diversa dal concetto di numero, perché è porre in corrispondenza biunivoca[12] gli elementi di un insieme con i numeri della serie naturale ed è, quindi, un'operazione mentale che presuppone il concetto di numero naturale e l'avere già ben presenti davanti a noi, nella nostra immaginazione, 'schierati' nel loro ordine crescente i numeri naturali. Infatti, quando contiamo gli elementi di un insieme associamo mentalmente ogni suo elemento (indicandolo) a un numero della serie naturale (dicendone il nome) iniziando da 1 e procedendo con i successivi fino ad esaurire tutti gli elementi dell'insieme. Dal punto di vista logico le differenze sono nette e diverse: il numero è un concetto mentre contare è un'operazione, oltretutto tutt'altro che semplice, presupponendo e utilizzando i concetti di numero, di corrispondenza biunivoca (in particolare di similitudine fra classi, come vedremo più avanti), di ordinamento e di successore. Infine, il concetto di ordine, presente nel contare, è invece assente nella definizione logica di numero, che sarà illustrata più avanti.

3. Dal multiconcreto all'astratto

Allora, come fanno i bambini a formarsi il concetto di numero[13]? Kronecker, che fu molto segnato da giovane dall'insegnamento della teologia cristiana da parte del suo professore al Gymnasium (un certo Werner), direbbe che è Dio a insegnare direttamente ai bambini cos'è il due o il cinque o il dodici e così via, ipotesi molto suggestiva anche per un non-credente, perché richiama un altro 'mistero' analogo ancora irrisolto, in cui Leopold vedrebbe ancora una volta la paterna mano di Dio: come fanno i bambini a imparare la lingua madre? Ma per i numeri forse è più facile dare una risposta. Se un bambino fosse privato di tutti i sensi, quasi sicuramente non riuscirebbe a formarsi il concetto di numero naturale (nel seguito semplicemente 'numero'), per il motivo che non potrebbe percepire in maniera 'distinta' gli oggetti materiali dai quali poter trarre il concetto di numero[14]. Il bambi-

[12] Una relazione fra due insiemi A, B tale che associ a ogni elemento di A un solo elemento di B, e viceversa, si dice corrispondenza biunivoca, vale a dire 'univoca in entrambi i sensi': da A in B e da B in A.

[13] Ovviamente, si tratta di un apprendimento inconscio o semi-inconscio e non di una chiara comprensione razionale della definizione di numero, già ostica per un adulto 'acculturato'.

[14] Di parere diverso è Federigo Enriques: «Fino a che punto è necessario operare sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati? [...] Un uomo, dotato di sufficiente forza di astrazione, il quale sia cieco-sordo-muto e paralizzato,

no si forma il concetto del numero due ponendogli davanti agli occhi o facendogli toccare varie coppie di oggetti 'distinti e di diversa natura'. E qui veramente sembra manifestarsi la mano di Dio: in tutte le molteplici diversità della natura di tali oggetti e nel 'diverso ordine' in cui di volta in volta gli capita di percepirli con uno qualunque dei sensi, riconosce 'spontaneamente' un carattere comune a tutte le coppie di oggetti che esprime, prima, con il nome che sente pronunciare ogni volta che le circostanze presentano alla sua attenzione una 'coppia' di oggetti (*due* in italiano, *two* in inglese, *dos* in spagnolo, *deux* in francese, ecc.) e, poi, anche con un simbolo scritto (il numerale 2). Dunque il bambino compie un'operazione raffinatissima di astrazione di una proprietà generale da una moltitudine di casi concreti 'diversi', ma 'uguali' nel possedere tutti la stessa proprietà di cui non ha una netta comprensione ma che intuisce, acquisendo il concetto del numero 'due' senza più legarlo a questa o quella coppia di oggetti, pur avendolo generato dalla loro osservazione empirica. Ma in cosa consiste questa 'astrazione dell'uguale dal diverso', che lo porta dai singoli esempi del due al concetto del numero due? Il bambino non ne è cosciente e d'altra parte non ne sono stati coscienti nemmeno i matematici fino a quando, nel 1884, il matematico tedesco Gottlob Frege nei suoi *Die Grundlagen der Arithmetik*[15] (*I fondamenti dell'Aritmetica*) diede una precisa formulazione matematica di quel processo di astrazione che avviene in maniera naturale nel bambino, portandolo al concetto di numero, per ciò stesso detto 'naturale'[16]. La definizione di numero (cardinale) ivi contenuta rimase praticamente ignorata per diciassette anni, fino a quando la riscoprì Bertrand Russell nel 1901[17]. Cosa hanno infine in comune tutte le coppie o i

potrebbe pensare degli oggetti (anche senza immaginarli in modo preciso), e operare con associazioni e astrazioni puramente ideali sopra classi di oggetti pensati». (Federigo Enriques, *I numeri reali*, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1912, p. 376). Ma esistono esperienze di tal tipo che lo provino?

[15] Una definizione più completa e precisa fu data da Frege nella sua opera *Grundgesetze der Arithmetik* (*Le leggi fondamentali dell'Aritmetica*) del 1893.

[16] In questo senso, mi sembra più appropriato il termine 'numeri naturali' alla serie 1, 2, 3,... piuttosto che alla serie 0, 1, 2, 3... in quanto l'idea dello zero come numero non è affatto 'naturale' (ovvero spontanea), come lo dimostra il fatto che soltanto nel secolo VI l'umanità è pervenuta ad acquisire lo zero come numero (furono gli indiani i primi).

[17] È curioso notare che altre importanti definizioni (oggi ben note ai matematici) relative alla logica delle relazioni furono espresse e pubblicate da Frege

terzetti o i quartetti o gli n-etti di diversi oggetti che il bambino esperisce, se non la stessa pluralità o molteplicità o numerosità di oggetti? E cosa significa 'stessa pluralità'? Senza ricorrere al conteggio (che introdurrebbe un circolo vizioso logicamente inaccettabile per le ragioni già dette), ci convinciamo facilmente (perché corrisponde alle nostre aspettative) che due diversi insiemi A, B hanno la stessa pluralità di oggetti se fra i due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca (o biiezione): chiamiamo tali insiemi *simili* o *equipotenti* o *equivalenti* (o *equinumerosi* come diceva Frege). In tal modo abbiamo dato una definizione logicamente corretta - e in accordo con la nostra intuizione - di insiemi di uguale pluralità. Allora il processo mentale di astrazione della caratteristica comune a tutte le possibili coppie non è altro che il riconoscerle, in quanto simili, appartenenti a una stessa classe: la classe di 'tutte e soltanto' le coppie, che diventa nella definizione di Frege il numero due. Analogamente il numero tre è la classe di tutti e soltanto i terzetti, il numero quattro la classe di tutti e soltanto i quartetti e così via: generalizzando, dunque, *un numero naturale (cardinale) è l'insieme di tutti e soltanto gli insiemi simili fra loro*, ovvero *il numero di un insieme è l'insieme di tutti e soltanto gli insiemi simili ad esso*[18]. I matemati-

nella sua opera *Begriffsschrift* del 1879, ma ignorate per ben vent'anni fin quando, ancora una volta, le riscoprì Bertrand Russell.

[18] Nei *Die Grundlagen der Arithmetik,* paragrafo 72 (p. 85), Frege così definisce il numero naturale (cardinale): «L'espressione "il concetto F è equinumeroso al concetto G" abbia lo stesso significato dell'espressione "esiste una relazione φ che fa corrispondere uno-a-uno gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G"». Sull'identificazione del numero con una classe si vedano le obiezioni di Giuseppe Peano e le risposte di Bertrand Russell: «Così il Peano (Formulario 1901, par. 32) osserva che "non possiamo identificare il numero di (una classe) *a* con la classe di classi in questione (cioè la classe delle classi simili ad *a*), questi oggetti avendo proprietà diverse". [...] È probabile che gli sia parso evidente in modo immediato che un numero non è una classe di classi. È tuttavia possibile dire qualcosa per mitigare l'impressione paradossale che desta questo approccio. In primo luogo le parole come coppia o terna denotano chiaramente una classe di classi. Pertanto ciò che dobbiamo dire è che 'due uomini' significa 'prodotto logico di una classe di uomini e di una coppia''e 'ci sono due uomini' significa 'c'è una classe di uomini che è anche una coppia'. In secondo luogo, quando ricordiamo che un concetto-classe non è esso stesso un insieme, ma una proprietà con la quale è possibile definire un insieme, noi vediamo che, se definiamo il numero come il concetto-classe, non la classe, un numero si definisce effettivamente come una proprietà comune di una serie di classi simili e di nient'altro». (cfr. Bertrand Russell, *I principi della matematica*, Newton Compton, Roma, 1971, pp. 195-6).

ci si esprimono dicendo che una particolare coppia è un 'rappresentante' (o nel linguaggio comune un 'esempio') del numero due avendo la proprietà di individuare univocamente il numero due, ovvero la classe di tutte le coppie, in quanto questa è costituita da tutte e soltanto le possibili coppie di oggetti o viventi.

La similitudine fra classi è un concetto-classe, ovvero una proprietà caratteristica che permette di definire in maniera intensiva una classe, in quanto proprietà di cui godono tutti e soltanto i suoi elementi, e gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Una relazione che goda di tali proprietà è detta di equivalenza. La sostituzione, accettata dalla matematica, di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse può generare un certo scetticismo e sembrare paradossale. Bertrand Russell ha accuratamente analizzato la questione, concludendo:

> Ogni volta che la matematica deriva una proprietà comune da una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, tutti gli scopi matematici della proprietà supposta vengono pienamente raggiunti sostituendo ad essa la classe dei termini che hanno la relazione data con un dato termine; e questo è precisamente il caso presentato dai numeri cardinali[19].

In definitiva, l'identificazione dell'insieme di tutti gli insiemi simili fra loro con il concetto astratto di numero cardinale conferma l'idea di Bruno de Finetti della riduzione dell'astratto al multiconcreto.[20] L'astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere superbamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente legato pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multiconcreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato. «È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo as-

[19] Bertrand Russell, *I principi della matematica*, cit., p. 197.

[20] Bruno de Finetti, *Interventi al Convegno della C.I.I.M, Viareggio 24-26 ottobre 1974,* in «Notiziario del Bollettino della Unione Matematica», dicembre 1974.

sumono usandole per formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa). Così 2+3 = 5 è un modo sintetico e di per sé vuoto di esprimere il fatto che, in condizioni da precisare operativamente come sopra, ciò vale per cani, metri, viaggi»[21].

4. Contaminazioni

Se la definizione logica di Frege di numero cardinale ignora il contare, è tuttavia innegabile che quest'ultimo è psicologicamente intimamente connesso con il concetto di numero, sia nel suo processo di apprendimento sia nel riconoscimento di un particolare numero, come giustamente osserva Dantzig:

> In every practical case where civilized man is called upon to discern number, he is consciously or inconsciously aiding his direct number sense with such artifices as symmetric pattern reading, mental grouping or counting. Counting especially has become such an integral part of our mental equipment that psychological tests on our number perception are fraught with great difficulties».

Dunque lo stesso Dantzig ammette che la percezione sensoriale del numero (*number sense*) possa essere contaminata dal conteggio, ma tale contaminazione è sconcertante perché rimane pur sempre il contare logicamente conseguente al concetto di numero: come è possibile avere una percezione del numero con l'aiuto del conteggio, se questo presuppone l'avere già l'idea di numero? In un certo senso ci si trova nello stesso stato imbarazzante di decidere se esiste prima la gallina o l'uovo.

Dantzig e Ifrah sostengono che l'uomo, senza contare, può percepire i numeri con un unico sguardo fino al quattro, essendo in grado di distinguere fino a quattro elementi di un insieme, e riportano interessanti argomentazioni a favore di tale tesi[22]. Io credo

[21] Bruno de Finetti – *Sull'insegnamento della matematica,* in "Homo Faber", anno XVII, n. 164, 1966 p. 10361.

[22] «....in Oceania parecchie tribù hanno l'abitudine di declinare le forme

che oggi questo limite possa essere esteso sino a sei, forse otto e anche oltre variando con le facoltà visive, diverse da individuo a individuo e con l'abitudine, consolidata nel tempo, al riconoscimento sensoriale di tali numeri. Se, per esempio, abbiamo davanti agli occhi una classe di quattro elementi (oggetti o esseri viventi), riusciamo visivamente a distinguerli e ad associare a tale classe la parola 'quattro' o il 'numerale-cifra 4' identificandone quindi il suo numero (quattro) senza dovere contare. Ugualmente riconosciamo ad occhio se un'altra classe ha la stessa pluralità, concludendo che anche ad essa spettano stesso nome e numerale, ovvero capiamo che siamo in presenza di due esempi del numero quattro. Supponiamo che tale capacità si estenda fino a otto, concludendo che nel riconoscimento di numeri da uno a otto il contare risulta estraneo. Ma per classi di numero superiore a otto cosa succede? Se per esempio fossimo in presenza di un aggregato di ventitre elementi, non saremmo certamente in grado di capire che il numero di tale aggregato è ventitre semplicemente osservandolo nella sua interezza. Ugualmente nel confrontarlo con un sol colpo d'occhio con un altro aggregato, non saremmo in grado di decidere se i due aggregati sono simili o no, ovvero se il numero del secondo aggregato è anch'esso ventitre o diverso. La definizione per classi del numero, quindi, non ci può essere di nessun aiuto per 'identificare' il numero di una classe. L'unico modo per capire qual è il numero della classe in oggetto è contarne gli elementi, almeno se il suo numero è superiore al limite percepibile sensorialmente, di cui già detto. In definitiva, il contare gli elementi di un insieme permette sia di riconoscere le classi simili a una data sia il suo numero. Nella pratica, infatti, per verificare se due insiemi sono simi-

grammaticali al singolare, al duale, al triale, al quattriale e al plurale. Tra quelle genti, la capacità di individuazione dei nomi comuni è limitata a quattro. Infatti, fino a quattro i nomi degli esseri e degli oggetti nelle loro lingue sono chiaramente espressi e dotati ognuno di una propria caratteristica, ma oltre sia i nomi che i numeri sono privi di declinazione e di personalità, rivestendo il carattere vago e imprecisato della pluralità materiale. [...] Altro esempio: in latino, i nomi dei quattro primi numeri (*unus*, *duo*, *tres*, *quattuor*) erano i soli a venir declinati, mentre a partire dal quinto i nomi di numero non avevano più né declinazione né genere. [...] I primi quattro mesi dell'anno romano primitivo (quello detto di Romolo) erano i soli ad avere nomi propri (Martius, Aprilis, Maius, Junius), poiché a partire dal quinto i nomi dei mesi erano solo numeri d'ordine: *Quintilis, Sextilis, September, October, November, December*» (G. Ifrah, *op. cit.* pp. 19, 20). L'anno primitivo romano comprendeva soltanto dieci mesi ed era costituito da 304 giorni.

li non utilizzeremmo certamente dei fili che materialmente collegassero uno-a-uno gli elementi dei due insiemi materializzando, così, la definizione di biiezione, ma conteremmo prima gli elementi di un insieme e poi quelli dell'altro: se il conteggio dà come risultato lo stesso numero naturale (per es. 23) concludiamo non soltanto che i due insiemi sono simili - e che quindi hanno lo stesso numero - ma sappiamo anche qual è tale numero (23). In tal modo non facciamo altro che applicare inconsciamente la proprietà transitiva della biiezione: se con il conteggio verifichiamo che esiste una corrispondenza biunivoca o biiettiva fra il primo insieme e l'insieme dei primi ventitre numeri naturali e lo stesso accade per il secondo insieme, per la proprietà transitiva concludiamo che la stessa relazione esiste fra i due insiemi, che dunque sono simili.

Inoltre, un'analisi più approfondita della capacità di percezione sensoriale del numero può far sorgere qualche dubbio sull'esclusione del conteggio anche in quei casi sia pur limitati nei quali quella capacità è riconosciuta (insiemi di 4,...,8 elementi). Un'ipotesi, che sembra essere plausibile, in quanto avvalorata dal comportamento dei bambini che ho potuto direttamente osservare, è che inizialmente l'unico concetto di numero posseduto sia quello dell'unità. I bambini nel loro primissimo stadio iniziale capiscono soltanto il numero uno. Per far capire, successivamente, a un bambino che un insieme ha due o tre o quattro elementi, in realtà gli si indicano in successione tali elementi pronunciando corrispondentemente i nomi uno, due, tre, quattro: l'ultimo nome pronunciato diventa nella mente del bambino il nome dell'insieme. In realtà quindi si insegna al bambino a contare a partire dal concetto di unità che possiede già (quello che si insegna al bambino non è il concetto di unità, ma soltanto il suo nome: uno). Per fargli capire che il nome 'quattro' non è legato ai particolari elementi dell'insieme, si ripete la stessa procedura con altri quattro oggetti diversi. Ripetendo la stessa esperienza più volte, il bambino comincia a imparare a contare, che per lui però ha il significato molto pratico di 'aggiungere' ogni volta una unità pronunciando un nome diverso che memorizza nella sua mente. Dopo diverse esperienze, è probabile che l'immagine di un insieme di quattro elementi, con la percezione distinta delle loro individualità, rimanga nella memoria associata al nome quattro indipendentemente dalla natura di quegli oggetti[23]. Quando, quindi, ci si presenta alla vista un insieme di quattro elementi, sia pure diversi da quelli finora esperiti, per analogia associamo il nome quattro anche al nuovo insieme. In

[23] Il bambino inconsciamente applica l'interferenza delle associazioni (vedi oltre in questo articolo).

altri termini, è vero che a colpo d'occhio 'riconosciamo' in una classe di quattro oggetti il numero quattro, ma soltanto per analogia con la prima esperienza (memorizzata nel nostro cervello) che ci ha portato a identificare il numero quattro della classe 'contando' i suoi elementi. In tal modo, i concetti primitivi (e innati) sarebbero quelli di unità e successore, mentre quello di numero sarebbe un concetto derivato.

Fra gli esempi riportati da Dantzig sulle facoltà di uccelli e insetti di percepire il numero (sia pure non oltre il quattro), quello del corvo, che sfugge per ben quattro volte agli stratagemmi ideati dal signorotto per ucciderlo, sembra avvalorare questa tesi o in ogni caso l'affermazione di Dantzig che le prove sperimentali sulla percezione del numero sono cariche di difficoltà, essendo difficile escludere del tutto il ricorso, sia pure inconscio, al conteggio.

Un signorotto decide di uccidere un corvo che ha nidificato nella torre dell'orologio del suo castello, ma appena vi entra il corvo vola via, appollaiandosi su un albero distante. Decide quindi di far entrare nella torre due uomini, uno dei quali dopo qualche minuto esce: il corvo non cade nel tranello e rimane sull'albero. Allora il signorotto pensa di raggirare il corvo facendo entrare nella torre tre uomini, due dei quali dopo qualche minuto escono: il corvo anche questa volta non si fa imbrogliare e non rientra nella torre. Il signorotto ripete con insuccesso il suo stratagemma con quattro uomini, ma quando lo ripete con cinque uomini finalmente il corvo rientra nella torre e viene ucciso. Quanto possa essere vero questo episodio narrato da Dantzig (ma ripreso anche da Ifrah, *op. cit.* p. 19) non è dato sapere. Molto scetticamente, però, viene spontaneo chiedersi: il signorotto non poteva tentare di uccidere il corvo sull'albero con un fucile, anziché aspettarlo all'interno della torre? Evidentemente quel signorotto non era un buon cacciatore.

Se è vera questa storiella, non mi sembra tuttavia accettabile la conclusione di Ifrah: «...l'uccello non era più in grado di distinguere più di quattro esseri umani» perché, a differenza di altri casi, riportati in letteratura, nei quali insetti o uccelli hanno la possibilità di 'vedere tutti assieme' i membri di un gruppo 'percependo' quindi le variazioni nel tempo della 'numerosità' del gruppo conseguenti a sottrazioni o aggiunte, nel caso della storiella del corvo ciò non si verifica. Il rapace, infatti, vede entrare nella torre due uomini potendo quindi avere percezione del numero due senza contare, ma quando ne vede uscire uno non ha più presente davanti a sé lo stesso gruppo 'entrante' ma un gruppo 'uscente' diverso.

Insomma, la differenza sta nel fatto che in tutti gli esempi riportati in letteratura l'uccello o l'insetto ha la certezza di monitorare i cambiamenti dello stesso gruppo, sia pure confrontando tra loro due immagini del gruppo impresse nella sua memoria in tempi diversi[24]. Nel caso del corvo, invece, la situazione è più complessa: a rigor di logica, si può parlare di 'percezione' del numero, come negli altri casi, se il corvo potesse vedere tutto assieme il gruppo di uomini all'interno della torre e così avvertire sensorialmente i suoi cambiamenti quando uno, due, tre uomini escono, venendo così sottratti dall'insieme. In realtà il corvo vede prima entrare un gruppo e poi uscirne uno diverso. Il fatto che si accorge di un cambiamento del gruppo 'entrato' può essere spiegato soltanto con l'intervento di facoltà immaginative e di conteggio, sia pure limitate. Il corvo, infatti, può soltanto immaginare che il gruppo che vede entrare sia lo stesso di quello che si troverà all'interno della torre (perché in realtà non può vedere l'interno della torre) e quindi già in questa fase compie un'operazione logica di identità fra i due gruppi (quello entrante ed entrato). Inoltre, l'accorgersi di un cambiamento della numerosità del gruppo entrante=entrato implica il riconoscere che il gruppo uscente costituisce un fattore di cambiamento (in diminuzione) del gruppo entrato e che il risultato di tale cambiamento può essere ottenuto soltanto con una operazione di sottrazione, che può essere di due tipi: fra insiemi o fra numeri.

Nel primo caso il corvo può sottrarre il gruppo uscente da quello entrato soltanto facendo ricorso ancora una volta all'immaginazione, in quanto non li vede 'simultaneamente'.

Nel secondo caso, invece, il corvo deve avere la capacità di contare[25] fino a tre e di saper eseguire una sottrazione non più fra insiemi ma fra numeri, il che implica addirittura l'avere il concetto astratto di numero e non più di pluralità: sottrarre, per esempio, i tre uomini uscenti dai quattro entrati significa 'contare', a partire dal quattro, tre unità nel verso decrescente dei numeri interi (1, 2, 3, 4...) pervenendo così al numero uno.

[24] Questa osservazione mi sembra importante, perché dimostra il possesso negli uccelli e negli insetti di capacità immaginative, che invece non sarebbero necessarie se la variazione del numero di elementi dell'insieme avvenisse 'dinamicamente' sotto gli occhi dell'animale, potendo in tal modo essere avvertita unicamente con i sensi, senza alcun intervento di altra elaborazione cerebrale.

[25] Nell'edizione originale inglese (cit. p. 3) è significativo che Dantzig così concluda: «Here the crow lost count» (A questo punto il corvo perse il conteggio) contraddicendo quanto poco prima da lui stesso detto proprio all'inizio del libro: «Counting, so far as we know, is an attribute exclusively human».

Soltanto così, con l'una o l'altra soluzione proposta, il corvo può 'sapere' che un uomo rimane all'interno della torre. Ciò è sorprendente e ci fa tornare in mente il monito di Kronecker: «Iddio creò i numeri interi, il resto è opera dell'uomo», perché certamente non si potrà dire che il corvo abbia imparato a scuola cos'è un numero, né a contare e fare le sottrazioni!

Il legame ambiguo, dal punto di vista psicologico, fra il contare e il concetto di numero si ripresenta paradossalmente quando i genitori insegnano ai bambini a contare, pur essendo un concetto logicamente più complesso, senza riuscire a insegnare loro il concetto di numero. Ma il paradosso si risolve riflettendo che ciò che è logicamente complesso può essere più facile da comprendere (e quindi insegnare) di ciò che è semplice. Russell diceva che le cose più difficili da comprendere in matematica sono quelle che stanno all'inizio e verso la fine, così come le cose difficili da vedere sono quelle molto piccole e molto grandi, per le quali è necessario ricorrere a strumenti opportuni: il microscopio e il telescopio. Il contare, pur essendo un'operazione logicamente complessa, si presta ad essere facilmente appreso in quanto consiste in una iterazione di azioni materiali (nominare i numeri naturali in sequenza, oppure aprire in successione le dita delle mani, ecc.) facilmente memorizzabili in sequenze che vengono poi riprodotte in stato di semicoscienza. Infatti, la stragrande maggioranza delle persone conta correttamente senza tuttavia sapere cosa significa contare, cioè senza averne coscienza. La matematica, per il suo formalismo, purtroppo si presta spesso ad essere correttamente impiegata senza tuttavia possedere chiaramente il significato dei simboli utilizzati e delle stesse operazioni che su di essi vengono compiute 'meccanicamente' come un robot. Una persona di media cultura può risolvere una equazione di primo grado senza sapere il perché delle azioni che compie per risolverla.

5. La psicologia in aiuto alla matematica

La matematica vive nella completa aseità: il tempo non figura in nessuna definizione matematica. Enti e proprietà matematiche sono tutti attuali, non sono soggetti a nessun divenire: una volta introdotti e scoperti sono *ab aeterno* e *ad aeternum*, incorruttibili. Il numero due, per la matematica, è la classe di tutte e soltanto le coppie e null'altro è necessario aggiungere o precisare perché esso abbia esistenza matematica. Diversa è invece la prospettiva di chi debba 'accettare' dentro di sé, cioè interiorizzare, il concetto di numero, operazione che, come abbiamo visto, nasce dall'esperienza e quindi è penalizzata dai suoi limiti e dal suo svolgersi inevitabilmente nel tempo.

Da questo punto di vista, sorgono alcune domande: l'esperienza empirica può esaurire tutti i possibili casi di coppie e veramente è necessaria per formarmi il concetto di un qualunque altro numero naturale, per esempio 'un milione'? La risposta è ovviamente 'no' per entrambe le domande: posso avere il concetto di due senza avere esperito tutte le possibili coppie di oggetti diversi (operazione peraltro impossibile, anche perché non sappiamo se esse sono in numero finito o infinito) e posso avere il concetto di 'un milione' senza avere esperito un milione di oggetti materiali in 'maniera distinta' e ora di un genere, ora di un altro, come vorrebbe il processo di astrazione dianzi illustrato. E allora come posso arrivare al concetto di numero astratto 'due' in un caso e a quello di 'un milione' nell'altro? Per i matematici, come già detto, la questione non esiste in quanto è sufficiente la definizione 'attuale' di numero cardinale testé data, mentre invece ha senso per la psicologia, che non si accontenta di 'definizioni logiche' ma pretende di comprendere gli atti della nostra psiche che ci fanno acquisire i concetti, che 'poi' potranno formalizzarsi dal punto di vista logico, come acutamente osservava Bruno de Finetti[26].

La definizione di Frege sembrerebbe molto concreta, ma in realtà non lo è, perché non presuppone soltanto l'esperienza empirica ma anche l'immaginazione. In realtà, nella 'mia coscienza', la definizione di numero (cardinale) come insieme di classi simili non è 'attuale' ma 'potenziale': per quanto numerose possano essere le mie esperienze, non riuscirò mai a collezionare 'nei miei ricordi' e nella mia coscienza tutte le coppie di oggetti 'attualmente' esistenti e, anche se per assurdo ciò fosse possibile, rimarrebbero

[26] « ...anche se di per sé la matematica è semplicemente logica, essa non esiste per noi e per gli studenti se non in funzione dei processi in minima parte logici e ben più psicologici in cui ne consiste l'apprendimento, l'apprezzamento, l'interesse, l'assimilazione, od invece la repulsione o l'indifferenza». (Bruno de Finetti, *Sull'insegnamento della matematica,* in "Homo Faber", anno XVII, n. 164, 1966, p. 10362). E poi ancora: « Riesce particolarmente pregiudizievole la tendenza a sopravvalutare - spesso addirittura in modo esclusivo - la ragione, che, a mio avviso, è invece utilissima solo a patto di venir considerata come un complemento atto a perfezionare tutte le altre facoltà istintive, intuitive, psicologiche, ma non (guai!) a surrogarle». (Bruno De Finetti - *Introduzione* al corso CIME - Varenna, 1959). Per de Finetti filosofo cfr. Bruno de Finetti, *L'invenzione della verità*, Milano, Raffaello Cortina, 2006, con introduzione di Giordano Bruno e Giulio Giorello.

pur sempre fuori tutte quelle coppie di oggetti non ancora realizzati materialmente. Ai tempi di Frege non esisteva il transistor e quindi il numero due non poteva comprendere le 'coppie di transistor', senza peraltro che l'idea del numero due ne soffrisse minimamente.

Dunque, perché possa concepire il numero due come la classe di 'tutte' (e soltanto) le coppie, devo lasciare nella mia coscienza la porta aperta per accogliere altre possibili coppie e nessuno mi può dire quando questo processo d'accoglienza avrà termine. E cosa mi autorizza e predispone a queste future accoglienze se non l'immaginazione creatrice, con i suoi meccanismi di dissociazione psichica e di successiva costituzione di nuove sintesi?

6. L'immaginazione creatrice

Nel 1930, Antonio Aliotta, filosofo e psicologo sperimentale, constatava:

> ….l'attività fantastica […] solo da poco è stata messa nel posto di onore che le conviene; prima era generalmente trascurata per il pregiudizio intellettualistico che ha comunemente dominato la pedagogia e che faceva del mondo un meccanismo che dovremmo limitarci a riflettere passivamente. Rispecchiare le cose il più fedelmente possibile, ecco l'ideale, ecco la verità. Tutto il resto si poneva nel regno delle illusioni. […] Ma il nostro ufficio nel mondo è proprio quello, che l'intellettualismo sostiene, di riprodurlo senza metterci nulla di nostro? O non piuttosto noi siamo attivi collaboratori dello svolgersi della realtà?

L'immaginazione creatrice ci libera, secondo l'Aliotta, dal «falso presupposto che è la natura come un sistema compiuto di oggetti che ci pesi e ci costringa dall'esterno» e, invece, ci fa «cogliere nelle sue vive sorgenti quel processo onde scaturisce perennemente rinnovata la nostra rappresentazione del mondo»[27].

Ma cos'è l'immaginazione? Per il filosofo palermitano ha due qualità: riproduttiva (o memoria) e creatrice (o fantasia), passiva la prima, attiva la seconda.

[27] Antonio Aliotta, *Il problema estetico e didattica dell'arte*, Francesco Perrella, Napoli, 1930, pp. 1-2.

L'immaginazione riproduttiva è quel processo mentale che ripropone gli elementi dell'esperienza passata negli stessi aggregati e nel medesimo ordine di successione o di coesistenza.

L'immaginazione creatrice, invece, utilizzando la memoria riaggrega diversamente tutti, o in parte, quegli elementi, mutandone anche l'ordine, per modo che si presentano alla nostra mente nuovi gruppi che «non sono stati mai oggetto di percezione e non corrispondono a nulla di reale» o a nulla che finora è reale. Ciò che è nuovo è l'ordine e l'aggregazione degli elementi, non questi che non possono essere creati dal nulla (*ex nihilo nihil*).

7. La dissociazione psichica

Affinché si formino nella nostra mente i nuovi prodotti dell'immaginazione creatrice è necessario, prima di tutto, che i blocchi della memoria che contengono gli elementi esperiti nel passato si disgreghino, per consentire la costruzione di nuovi blocchi, così come per costruire un nuovo edificio, laddove ne esiste uno vecchio, occorre demolire quest'ultimo, perché non disponendo di nuovo materiale da costruzione ci si deve ingegnare ad utilizzare il vecchio, selezionandolo dalle macerie, per dar forma ad una nuova architettura. «Ogni atto di creazione è, prima di tutto, un atto di distruzione», diceva Pablo Picasso. Non necessariamente tutte le esperienze del passato, raccolte nei nostri blocchi di memoria, sono riutilizzate per costruire nuovi aggregati, perché «il dissolversi del ricordo favorisce l'invenzione fantastica»[28]. Per creare qualcosa di nuovo occorre dunque ricordare, ma non tutto; per evolversi occorre in parte dimenticare. Le diadi memoria-dimenticanza e distruzione-costruzione, che sono alla radice della creatività, sono nella coscienza di molti creativi. Lo scrittore Jorges Louis Borges affermava: «Il lavoro creativo è sospeso tra la memoria e l'oblio», e lo scrittore Andrej Longo: «Devi riuscire a vedere e a rubare ciò che hai visto. Il vero atto creativo è una specie di furto con destrezza». Quali sono i processi psicologici che consentono il disgregarsi dei ricordi delle esperienze passate? La psicologia ne ha individuati molti, ma quello di nostro interesse per l'argomento trattato è senz'altro l'*interferenza delle associazioni*, consistente nel fatto che uno stesso elemento si trova associato ad altri elementi in gruppi diversi e per tale ragione si può prenderne coscienza come entità a se stante: «Se noi avessimo sentito solo il freddo toccando la neve, e li avessimo sempre percepiti insieme, freddo e neve nella nostra coscienza si unirebbero in un'associazione indissolubi-

[28] *Ibidem*, p. 9.

le»[29]. Possiamo, invece, avere l'idea di freddo svincolata dall'idea di neve perché nelle nostre esperienze e nei nostri ricordi la sensazione di freddo si trova associata ad altri oggetti diversi.

8. Le nuove sintesi nella interiorizzazione del concetto di numero

Gli elementi o immagini delle nostre esperienze passate, così disgregati, sono riaggregati dalla nostra immaginazione creatrice in nuovi gruppi, con vari meccanismi, di cui il più vigoroso è la somiglianza, che, quando è debole, chiamiamo *analogia* ed è uno dei motivi creatori più diffusi e potenti dell'immaginazione scientifica. Molte scoperte scientifiche si sono presentate come certezze psicologiche alla mente degli scienziati proprio per analogia, che spesso diventa 'simmetria', soddisfacendo esigenze di gusto estetico simili a quelle che erroneamente si ritengono esclusive dell'artista. Nell'analogia basta un carattere in comune fra oggetti, anche molto diversi, per associarli, fondendoli in un'unica immagine: nella fantasia degli aborigeni australiani un libro diventa una 'folade', perché si apre e chiude come le valve della conchiglia di quel mollusco.

È dunque l'immaginazione creatrice, con l'*interferenza delle associazioni e l'analogia*, che consente di disgregare per poi riaggregare nella nostra mente i ricordi delle particolari coppie esperite nel passato, rendendo così possibile l'immaginazione di nuove coppie non ancora esperite. Come nel caso della neve e del freddo, se alla mia mente si presentasse sempre e soltanto l'immagine di 'una' coppia di mele, l'idea del numero due coinciderebbe con 'quella coppia di mele'. Invece, si presentano alla mia mente anche coppie di altre mele e coppie di piccioni, d'alberi, di quaderni e così via, per cui riesco a *dissociare* la pluralità[30] delle particolari coppie esperite sia dalla molteplicità delle coppie (una, due, tre ...coppie) sia dalla natura degli oggetti delle coppie. In altri termini, poiché nei miei ricordi la corrispondenza biunivoca fra coppie interessa oggetti di tipo diverso, per interferenza delle associazioni, essa si 'separa' dalla loro specificità e per analogia mi predispone a considerare possibile quella stessa corrispondenza biunivoca fra nuovi tipi di oggetti non ancora realizzati o esperiti. L'interferenza delle associazioni (dissociazione psichica) e l'analogia

[29] *Ibidem*, p. 10.

[30] Ancora non si può parlare di numero, poiché l'idea di numero è il risultato proprio di tale dissociazione e della successiva sintesi psichica.

(sintesi psichica) sono dunque i due processi psichici opposti e complementari che permettono di ampliare l'esperienza empirica a casi non concretamente attuati, consentendomi di formarmi il concetto di due senza dovere esperire tutte le possibili coppie.

A questo punto è possibile tentare di dare una risposta al secondo quesito: come posso avere l'idea di 'un milione' senza dover esperire nessun aggregato di un milione di oggetti? In questo caso l'interferenza delle associazioni e l'analogia non sono sufficienti a spiegare come posso accettare l'idea del numero 'un milione' senza mai esperire nessuna classe di un milione di elementi. Occorre un altro principio in aggiunta a quei processi psichici: il principio di induzione matematica (il quinto degli assiomi di Peano). Secondo tale principio *ogni proprietà dello 0, come anche del successore di ogni numero che abbia quella proprietà, è di tutti i numeri*, ovvero, in altri termini più espressivi, come osserva Russell: «quel che si può dire di un termine e del suo prossimo vale per il primo e l'ultimo».[31] Se nell'ambito degli aggregati realmente esperibili 'mi convinco' che la definizione di numero, per esempio, vale per una coppia e anche per una terna, quindi per una quaterna e così via fin quando arrivo al caso limite da me esperibile, mi convinco non altro che della validità del principio di induzione matematica. Ancora una volta l'immaginazione creativa, con l'analogia, finisce con il farmi accettare senza alcun dubbio psicologico l'idea del numero 'un milione', perché inconsciamente ho verificato che quella convinzione si è ripetuta ad ogni passaggio da un aggregato a un altro 'successivo', contenente una unità in più rispetto al precedente.

È dunque l'immaginazione «organica, disciplinata, coerente, concreta, costruttiva» che, come diceva Bruno de Finetti, ci consente di avere una visione panoramica di «tutte le soluzioni possibili e delle circostanze per cui differiscono e da cui sono determinate»[32].

9. Conclusione

Senza l'esperienza del concreto, come abbiamo visto, non sarebbe possibile conquistare l'alta vetta del concetto di numero, base per gran parte della matematica. Ciò ci indurrebbe a conclu-

[31] Cfr. Bertrand Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, cit. p.45.

[32] Lettera di Bruno de Finetti a Gino de Finetti del 14 gennaio1940. *Inedito di proprietà di Fulvia de Finetti.* In Fulvia de Finetti-Luca Nicotra, *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Belforte, Livorno, p. 141.

dere che dall'esperienza è nato il concetto di numero. Ma è proprio così? O forse non è l'esperienza soltanto lo strumento che ci aiuta a prendere coscienza di un concetto innato e latente in noi? Si ripresenta per il numero lo stesso interrogativo che vale per tutta la matematica: è in noi oppure esiste fuori di noi? O meglio, in altri termini, il concetto di numero e tutta la matematica sono una libera creazione del nostro pensiero o, invece, hanno un'esistenza oggettiva e sono quindi, come diceva Galilei, il linguaggio della Natura?

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto (*Il Saggiatore*).

Nessuno finora ha potuto dare una risposta certa e definitiva. Ma se la matematica è in noi, un prodotto del nostro pensiero, come si spiega il ruolo maieutico dell'esperienza? Può veramente la Natura aiutare a partorire nell'uomo ciò che già non è in essa allo stato latente? In tal caso non ci resta che unirci allo stupore espresso da Albert Einstein:

La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà.