Periodico di Matematica Vol II (1), giugno 2020, pp. 7-24

La geometria piana in sistemi di riferimento non ortogonali e non monometrici

Franco Eugeni*

*Presidente dell'A.F.S.U.; eugenif3@gmail.com

Sunto*: Molta poca attenzione è stata data allo studio dei sistemi di coordinate cartesiane che siano non ortogonali, e non monometrici (dimetrici). Lo scopo di questa nota è approfondire questi aspetti, e senza andare oltre la dimensione due del piano, scoprire come si presentino in modo naturale gli "pseudo prodotti scalari" nel caso dimetrico, che danno luogo a perpendicolarità ordinate e a strutture metriche particolari, che si simmetrizzano nel caso monometrico. È interessante anche scoprire, che l'ortogonalità della geometria piana, dà luogo, nel piano ampliato, ad una speciale polarità che opera sulla retta impropria del piano. Concludendo siamo convinti di dare un contributo di carattere epistemologico per comprendere la necessità della scelta dei sistemi di coordinate cartesiane in primo luogo monometrici e in seconda istanza ortogonali.*

Parole Chiave*: Forme quadratiche – componenti controvarianti e covarianti – Prodotti pseudo scalari – formule metriche.*

Abstract: *The aims of this paper is to pay attention to the study of Cartesian coordinate systems that are not orthogonal and not necessarily monometric. The purpose of this note is to investigate these aspects, and remaining on dimension two of the plane, to discover how both "pseudo scalar products" and particular metric structures naturally appear. It is also interesting to discover that the simple orthogonality of the plane geometry gives rise to a polarity which operates on the "line at infinity" of the plane. Finally we believe to give an* *epistemological contribution about the choice of the monometric and orthogonal Cartesian coordinate systems.*

Keywords*:* *Square shapes - contravariant and covariant components - Pseudo-scalar products - metric formulas.*

1 - La geometria piana affine

Per la geometria piana è indispensabile adattare il simbolismo più generale per sistemi di coordinate cartesiane dimetrici e non ortogonali a quello che è l'usuale simbolismo usato in geometria analitica, che fin dall'inizio richiede una unica unità di misura e l'ortogonalità degli assi, almeno, non appena si passi dalla "visione affine" a quella "metrica". Per questo trattiamo in anteprima il caso di un sistema di riferimento dimetrico e obliquo.

Sia θ l'angolo formato dai due assi e sia O l'origine degli assi. Se (x,y) sono le proiezioni, parallele agli assi, del vettore OP, poniamo:

$$x := \frac{OP_x}{u_x} \ , \quad y := \frac{OP_y}{u_y}$$

dove u_x , u_y sono le unità di misura scelte sugli assi x ed y.
Fissata una unità di misura unica, sia u, poniamo:

$$h = \frac{u_x}{u} \ , k = \frac{u_y}{u}$$

da cui risulta:

$$hx := \frac{OP_x}{u_x}\ \frac{u_x}{u} \ , \ ky := \frac{OP_y}{u_y}\ \frac{u_y}{u} .$$

Chiamiamo **punti** le coppie ordinate di numeri reali del tipo:

$$P = (x,y), P' = (x',y'), \ldots..$$

e **vettori** le classi di equivalenza definite dai segmenti orientati OP, OP′, …. , rispetto alla *relazione di equipollenza,* asserente che due segmenti orientati sono equipollenti se hanno la medesima direzione, il medesimo verso, la medesima lunghezza (nel senso assoluto dei segmenti non orientati). L'insieme di tali classi di equivalenza sarà denotato con **V**, e i singoli elementi, cioè i vettori, saranno indicati dai simboli:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\,,\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}},\ \ \mathbf{w} = \overrightarrow{\mathrm{OP''}},\ldots$$

I due punti I (1,0) e J (0,1) individuano due vettori speciali, di direzione e verso pari agli assi del riferimento, dati da:

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ,\ \boldsymbol{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\,.$$

che si dicono costituire una base, in quanto per ogni vettore si ha:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{y}\,\boldsymbol{j}\,.$$

Il più generale legame tra **punti** e **vettori** nasce, appunto, dall'aver fissato una *base.* Se P (x,y) e P′(x′,y′), sono due punti,
il vettore **u** individuato dal segmento orientato PP′, che apparterrà ad una classe definita da un opportuno segmento OQ, equipollente a PP′, è definito mediante la:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PP'}} := (x'-x)\,\boldsymbol{i} + (y'-y)\,\boldsymbol{j}$$

e in modo formale

$$\mathbf{u} = P' - P = Q - O, \qquad \text{o anche,} \qquad P' = P + \mathbf{u}.$$

La corrispondenza che, fissato $\mathbf{u} = u_1\, \boldsymbol{i} + u_2\, \boldsymbol{j}$, ad ogni punto P (x, y) associa il punto P′ (x′, y′) di coordinate:

$$x' = x + u_1 \qquad y' = y + u_2$$

si chiama *traslazione di vettore* $\mathbf{u}$.

Passando ora al formulario relativo alla geometria analitica del piano osserviamo che, le nozioni affini, rimangono inalterate, indipendentemente dal riferimento. Così, ad esempio, data una retta (r) di equazione:

$$(r)\;\; a\,x + b\,y + c = 0$$

un vettore parallelo alla retta, come di immediata verifica, è il vettore di componenti $\mathbf{r} = (-b, a)$.

Rimangono fisse le condizioni di parallelismo di due rette, che si traducono nelle proporzionalità tra due vettori, che siano paralleli alle due rette date. Così le incidenze si studiano al solito modo, in particolare la formula della retta per due punti, le nozioni di fascio di rette proprio ed improprio e l’intero corpo, solitamente detto della *geometria affine* del piano. Per queste nozioni si può consultare un qualsiasi libro di geometria analitica universitario, ma anche di Scuola Media Superiore. Un punto che vogliamo chiarire è il seguente[1].

[1] Punto questo che è spesso ignorato, specie nei cosiddetti corsi brevi e non solo.

È ben noto che nella trattazione usuale della geometria analitica del piano, la prima proprietà che si prova, è la cosiddetta *condizione di allineamento* di tre punti: dati infatti tre punti:

$$P = (x,y),\ P' = (x',y'),\ P''\ (x'',y'')$$

con P variabile e $P' \neq P''$. La condizione suddetta può essere provata in diversi modi, dall'uso della similitudine dei triangoli, al parallelismo dei vettori definiti dai segmenti orientati PP′, P′P′′, che portano alla condizione:

$$\begin{vmatrix} x - x' & y - y' \\ x'' - x' & y'' - y' \end{vmatrix} = 0$$

che può scriversi nella forma più elegante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando, rispetto alla prima riga, si ottiene appunto una equazione del tipo:

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

con $(a,b) \neq (0, 0)$, poiché essendo $a = y''-y'$, $b = x'-x''$, risulta:

$$(a,b) = (0,0) \Leftrightarrow P'=P''.$$

Diremo *effettiva* ogni equazione di 1° grado in due variabili con coefficienti delle incognite non entrambi nulli. Dunque: *terne di punti allineati soddisfano una equazione di 1° grado in due variabili, effettiva.*

Ma se quanto detto sopra è banale ed appare in tutti i testi, è anche importante provare il viceversa[2] di quanto detto e cioè che:

ogni equazione di 1° grado in due variabili del tipo $a\,x + b\,y + c = 0$, *che sia effettiva, ha come soluzioni insiemi di punti a tre a tre allineati.*

Infatti se i punti $P = (x,y)$, $P' = (x',y')$, P'' (x'',y'') sono soluzioni della equazione data si ha:

$$a\,x + b\,y + c = 0$$
$$a\,x' + b\,y' + c = 0$$
$$a\,x'' + b\,y'' + c = 0$$

affinchè il sistema omogeneo, nelle incognite a, b, c, abbia soluzioni non nulle (per essere $(a,b) \neq (0, 0)$), occorre che sia:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

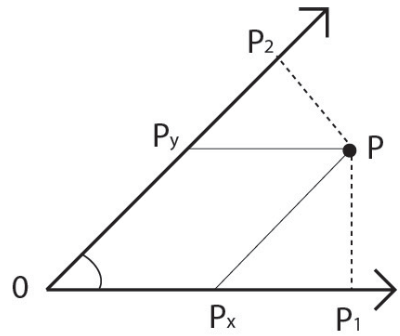
Ovvero le soluzioni del sistema, sono insiemi di punti a tre a tre allineati, ovvero punti di una retta. Concludendo:

In un riferimento cartesiano qualsiasi, ogni retta è rappresentata da una equazione lineare in due variabili effettiva, che è soddisfatta da tutti e soli i punti della retta, e viceversa ogni equazione lineare, in due variabili effettiva, rappresenta una retta come luogo dei punti le cui coordinate la soddisfino.

[2] Tale osservazione appare raramente, specie nei testi scolastici.

2- La geometria piana metrica.

Supponiamo di avere un sistema di riferimento cartesiano che sia dimetrico ed obliquo.



Sia θ l'angolo formato dai due assi. Se (x,y) sono le proiezioni parallele agli assi del vettore OP, risulta, per definizione:

$$x := \frac{OP_x}{u_x} \quad , \quad y := \frac{OP_y}{u_y}$$

dove u_x, u_y sono le unità di misura scelte sugli assi x e y. Fissata una unità di misura unica, sia u, poniamo:

$$h = \frac{u_x}{u} \ , k = \frac{u_y}{u}$$

da cui risulta:

$$h\,x := \frac{OP_x}{u} \quad , \quad k\,y := \frac{OP_y}{u} \ .$$

Possiamo allora assumere la coppia (x, y), come coppia delle *componenti controvarianti* del punto P. Inoltre se con (x_*, y_*) si indica la coppia di misure, rispetto ad u, dei segmenti OP_1, OP_2, delle proiezioni ortogonali di OP sugli assi obliqui, tale coppia è presa come coppia delle *componenti covarianti* di OP, si ha:

$$OP_1 = OP_x + P_xP_1 = OP_x + P_xP\cos\theta$$

$$OP_2 = OP_y + P_yP_2 = OP_y + P_yP\cos\theta$$

da cui, misurando i segmenti rispetto ad u, si ha:

$$x_* = hx + ky\cos\theta, \qquad y_* = hx\cos\theta + ky.$$

Consideriamo ora la matrice seguente:

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h & k\cos\theta \\ h\cos\theta & k \end{Vmatrix}$$

che ha i minori principali positivi, essendo:

$$h > 0,\ k > 0,\quad \det G = hk\,\mathrm{sen}^2\,\theta > 0, \text{ per } 0 < \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Ne segue che alla matrice G è possibile associare una forma quadratica, definita positiva, che assumiamo come quadrato del modulo del modulo del vettore OP, che è quindi dato da:

$$|OP|^2 = (hx)^2 + (ky)^2 + (h+k)\,xy\cos\theta\ .$$

Da notare che quando il sistema è monometrico, ovvero se è h = k = 1, la matrice è simmetrica e si ha:

$$|OP|^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

formula questa, che esprime il ben noto Teorema di Carnot (o del coseno) della trigonometria piana, essendo $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ l'angolo dei due lati OP_x , P_xP.

Ancora quando il riferimento, oltre che essere monometrico, è anche ortogonale, la forma suddetta si riduce alla relazione pitagorica classica:

$$|OP|^2 = x^2 + y^2.$$

Dati ora i due punti P(x,y) e P′ (x′,y′) e i vettori:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP'}$$

si può definire uno "*pseudo prodotto scalare*", associato alla matrice G ponendo:

$$\mathbf{u \cdot v} := h\,xx' + k\cos\theta\; xy' + h\cos\theta\; x'y + k\,yy'$$

ovvero:

$$\mathbf{u \cdot v} := (x_*)\, x' + (y_*)\, y'.$$

Si osservi che quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ed h = k =1, ricadiamo nelle usuali relazioni:

$$x = x^*,\ y = y^*,\ \mathbf{u \cdot v} = xx' + yy'.$$

Tale "*pseudo prodotto scalare*" soddisfa, $\forall$ **u, v, w** $\in$**V**, $\forall\ \lambda \in$ **R,** alle seguenti classiche proprietà:

$\lambda\,(\mathbf{u \cdot v}) = (\lambda\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$	**(associativa mista)**
$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u \cdot w} + \mathbf{v \cdot w}$	**(distributiva a sinistra)**
$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w \cdot u} + \mathbf{w \cdot v}$	**(distributiva a destra)**
$\mathbf{u} > 0$, "$= 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$"	**(annullamento).**

tutte di immediata verifica, mentre soddisfa alla ulteriore proprietà:

$$\mathbf{u \cdot v} = \mathbf{v \cdot u} \qquad \textbf{(commutativa)}\cdot$$

se e solo se h = k. Quindi, se, e solo se, ***il riferimento è monometrico***, nel qual caso la matrice G è simmetrica, lo *pseudo-prodotto scalare* è un *effettivo prodotto scalare.*

Passando ora al formulario relativo alla geometria analitica del piano, osserviamo subito che, le *nozioni affini* rimangono le medesime, indipendentemente dal riferimento. Così data ad esempio data una retta di equazione:

$$(r)\ \ ax + by + c = 0$$

sia **r** = (-b, a), un vettore parallelo alla retta. Sono inalterate le condizioni di parallelismo di due rette, che si traducono nella proporzionalità delle componenti di due vettori, paralleli alle due rette date.

Così le incidenze si studiano al solito modo, in particolare è inalterata la formula della retta per due punti, così come si è indicato nella prima parte di questo paragrafo, le nozioni di fascio proprio o improprio di rette e così l'intero corpo solitamente detto della **geometria affine del piano**.

Diversa invece è la **problematica della geometria metrica**, il cui corpo delle formule è totalmente dipendente dall'essere il riferimento monometrico o no, ed in seconda istanza ortogonale o no. Siano P(x,y), P′ (x′,y′) due assegnati punti. La distanza, al quadrato, dei due punti è pari al quadrato del modulo del vettore definito dal segmento orientato PP′:

$$|PP'|^2 = d(PP')^2 = h(x'-x)^2 + (h+k)(x'-x)\,(y'-y)\cos\theta + k(y'-y)^2$$

Date due rette (r), (r′) parallele a **r** = (b, -a) ed **r′** = (b′,- a′), rispettivamente, la condizione di perpedicolarità orientata[3] di (r) ad (r′) è data da:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r'} = h\, bb' - k\, ba'\cos\theta - h\, b'a\cos\theta + k\, aa' = 0$$

che, applicata alle forme esplicite delle equazioni delle due rette : y = m x, y=m'x, con **r** =(1, m) ed **r′** =(1, m') è [4]:

$$m' = -\frac{h(1+m\cos\theta)}{k(m+\cos\theta)}$$

formule che, per h=k (=1), forniscono la perpendicolarità non ordinata. Inoltre:

per $\theta = \frac{\pi}{2}$, h=k=1, forniscono la: mm′ = -1,

ovvero la ben nota formula di perpendicolarità nei riferimenti *cartesiani ortogonali monometrici.*

Segue che, una retta (n) per P_0 (x_0, y_0), che sia perpendicolare da P_0 alla retta (r) di equazione: ax + by +c = 0, con **r** = (b,-a), ha equazione del tipo:

$$y - y_0 = m'(x - x_0)$$

con:

$$m' = h\,[-(a/b)\cos\theta+1] \,/\, k[-(a/b) + \cos\theta]$$

[3] Si noti che in situazione di un riferimento generale occorre parlare di perpendicolarità ordinata, cioè (r) perpendicolare ad (r'), se **r·r'**=0 ed (r') perpendicolare ad (r), se **r′ ·r**=0, essendo, come si vede subito, le due condizioni diverse. Si noti che se h=k (=1) la differenza tra le due perpendicolarità ordinate sparisce.

[4] Da notare che la formula per la perpendicolarità orientata da (r') ad (r) si ottiene scambiando h con k, nelle parti ove appare il coseno..

da cui, l'equazione di (n) data da:

$$(n)\ \ h\,(b–a \cos\theta)(x - x_0) + k\,(b\cos\theta - a)(y - y_0) = 0$$

dalla quale, il vettore **n** (α,β) parallelo ad (n) e perpendicolare ad (r) ha componenti:

$$\alpha = k\,(a - b\cos\theta)\ ,\ \beta = h\,(b - a\cos\theta).$$

Ne segue che la retta (r), si può scrivere in funzione di un parametro t:

$$x - x_0 = \alpha\, t\ ,\quad y - y_0 = \beta\, t\,.$$

Il punto N $(x_0 + \alpha\, t_0\ ,\ y_0 + \beta\, t_0)$, piede della perpendicolare da P_0 ad (r) è dato dal valore t_0 soluzione dell'equazione:

$$a\,(x_0 + \alpha\, t) + b\,(y_0 + \beta\, t) + c = 0$$

da cui:

$$t_0 = -\ (ax_0 + by_0 + c)\ /\ (a\,\alpha + b\,\beta).$$

Segue:

$$|NP_0|^2 = d(N,P_0)^2 = d(P_0, r)^2 =$$
$$= h(\alpha\, t_0)^2 + (h+k)\,\alpha\,\beta\cos\theta\,(t_0)^2 + k\,(\beta\, t_0)^2 = |\mathbf{n}|^2\,(t_0)^2\,.$$

Raramente nei testi universitari si trova la formula della distanza orientata da P_0 (x_0, y_0) alla retta (r) $ax + by + c = 0$, in riferimenti così generali. La formula, nel caso che il riferimento sia non ortogonale e dimetrico è complessa, riguarda una delle due perpedicolarità ordinate, nel nostro caso da P_0 ad (r), ed è la seguente:

$$d(P_0,r)^2 = |\mathbf{n}|^2 \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a\alpha + b\beta)^2}$$

dalla quale estraendo la radice segue:

$$d(P_0,r) = |\mathbf{n}| \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a\alpha + b\beta|}$$

Se ferma rimanendo la *non ortogonalità degli assi*, supponiamo h = k = 1, si ha una notevole semplificazione, poiché risulta:

$$d\,(P_0,r) = \frac{|sen\theta\,(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

che non presenta più l'ambiguità dell'ortogonalità orientata ed è anche tale che, per $\theta = \pi/2$, si riduce alla formula classica. In modo del tutto analogo, con calcoli, sui quali sorvoleremo, si prova che, nel caso monometrico, date due rette:

$$(r) \quad ax+by+c = 0 \qquad \text{ed} \qquad (r') \quad a'x + b'y + c' = 0$$

il coseno dell'angolo delle due rette, in un sistema non ortogonale, è dato dall'espressione:

$$\cos rr' = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\theta}{\pm\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right)\left(\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\theta}\right)}$$

Giova osservare che in alcuni testi si determinano i cambiamenti di riferimento tra un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ed uno obliquo, e si utilizzano per trasformare le formule usuali nel riferimento obliquo.

3.- Il piano affine ampliato A^2

Chiameremo spazio affine ampliato $\mathbf{A}^2$ l'insieme delle terne ordinate (x_0, x_1, x_2) di numeri reali non tutti nulli e definiti a meno di un fattore. Il legame tra $\mathbf{A}^2$ ed $\mathbf{R}^2$, nasce dall'identificazione dei punti di $\mathbf{A}^2$, con $x_0 \neq 0$, chiamati **punti propri** di $\mathbf{A}^2$, con i punti P(x,y) di $\mathbf{R}^2$, mediante le relazioni :

$$x = x_1/x_0 \quad , \quad y = x_2/x_0 \, .$$

I punti di $\mathbf{A}^2$, con $x_0 = 0$, cioè del tipo (0, r, s), li chiameremo **punti impropri,** ciascuno geometricamente rappresentato della direzione della retta (o di una sua qualsiasi parallela) di $\mathbf{R}^2$, di equazioni:

$$x = r\,t \quad , \quad y = st$$

L'insieme di tutti i punti impropri del piano, è caratterizzato dall'equazione:

$$x_0 = 0$$

che prende il nome di **equazione della retta impropria**.

Si chiama, altresì, **retta propria** di $\mathbf{A}^2$, una retta (r) di $\mathbf{R}^2$, alla quale si sia aggiunto un punto improprio, esattamente quello che definisce la direzione della stessa (r). La definizione si giustifica anche per il fatto che, l'equazione di una retta (r), scritta in forma omogenea, ha un significato ben più generale, in quanto, l'equazione omogenea:

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_0 = 0$$

è soddisfatta sia dagli ordinari punti propri (1, x',y') con ax'+by' +c ≡ 0, sia dal punto improprio (0, b, -a) definente la direzione/punto improprio della stessa retta. Inoltre, nella forma omogenea, si può includere anche il caso a = b = 0, (che era il caso escluso nelle rette proprie di $\mathbf{R}^2$, che fornisce, appunto, l'equazione della retta impropria.

In $\mathbf{A}^2$ chiamiamo **conica C,** il luogo dei punti di $\mathbf{A}^2$ che soddisfano un'equazione di **2°** grado del tipo:

$$a_{11}(x_1)^2+a_{22}(x_2)^2+a_{00}(x_0)^2+(a_{10}+a_{01})\,x_1x_0+$$

$$+(a_{20}+a_{02})\,x_2x_0+(a_{12}+a_{21})\,x_1x_2=0$$

Tale conica definisce sul piano improprio, il luogo di punti:

$$a_{11}(x_1)^2+a_{22}(x_2)^2+(a_{12}+a_{21})\,x_1x_2=0$$

$$x_0=0 \qquad .$$

Se i coefficienti dell'equazione della conica sono quelli di una matrice $\mathbf{G}=|g_{ij}|$, cioè di una matrice definita positiva, atta a definire uno *pseudo prodotto scalare*, allora l'equazione all'infinito associata:

$$g_{11}(x_1)^2+g_{22}(x_2)^2+(g_{12}+g_{21})\,x_1x_2=0$$

$$x_0=0$$

prende il nome di **assoluto** dello spazio $\mathbf{A}^2$**.** In tal caso, come è ovvio, l'equazione considerata non ha, alcuna soluzione reale[5]. Ricordiamo che *assegnata* una **conica** in $\mathbf{A}^2$

$$f(X) = f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

ed un punto

$$Y = (y_0, y_1, y_2)$$

si chiama **retta polare** di Y, rispetto a **C,** la retta di equazione:

$$f\binom{X}{Y} = f_0\, y_0 + f_1\, y_1 + f_2\, y_2 = 0$$

dove è

$$f_i = a_{0i}\, x_0 + a_{1i}\, x_1 + a_{2i}\, x_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ove f_i è l'equazione lineare formata con la i-ma riga della matrice A = | $\mathbf{a_{ij}}$ | con **i, j = 0, 1, 2.** Si ha:

$$f\binom{X}{Y} = f\binom{Y}{X} \quad , \; f\binom{X}{X} = f(X)$$

La prima di queste equazioni esprime la cosiddetta *legge di reciprocità della polarità,* asserente che: *"Se un punto* Y *descrive la retta polare* p(X) *del punto* X, *allora le rette polari* p(Y) *di* Y, *descrivono un fascio con centro in* X*"*.

Date, in $\mathbf{R}^2$ due rette (proprie) di equazioni:

---

[5] Se si pensa a considerare punti anche le terne (x_0, x_1, x_2) di numeri complessi, ovvero di operare la cosiddetta "*complessificazione*" del piano ampliato, allora l'equazione in questione rappresenta una coppia di punti a coordinate complesse, uno dei quali, a meno di un fattore, ha per coordinate, le complesse coniugate dell'altro.

$$(r)\ \ ax + by + c = 0 \quad , \quad (r')\ \ a'x + b'y + c' = 0$$

e i vettori **r** = (-b, a), **r′** = (-b′, a′), che definiscono anche i due punti impropri delle due rette, precisamente R_∞ (0, -b, a), ed R'_∞ (0, -b′, a′), ricordiamo che la condizione di perpendicolarità di (r) ad (r′), provata in precedenza, è:

$$r{\cdot}r' = h\, bb' - k\, ba' \cos\theta - h\, b'a \cos\theta + k\, aa' = 0.$$

Supponiamo ora di fissare la forma quadratica di base nella forma seguente:

$$f(X) = (hx_1)^2 + (kx_2)^2 + (h+k)\, x_1\, x_2 \cos\theta$$

La polare di R'_∞ (0, -b′, a′) è data da:

$$b' \frac{\partial f}{\partial x_1} - a' \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Tale polare contiene il punto R_∞ (0, -b, a), se e solo se si ha:

$$b' [2hb-(h+k)a \cos\theta] - a'[(h+k)b \cos\theta - 2a] = 0$$

La relazione soprascritta, coincide con la condizione di perpendicolarità, di (r) ed (r′), se e solo se risulta h = k =1. Abbiamo in ultima analisi provato che:

Teorema. *In un qualsiasi riferimento cartesiano di tipo generale sono condizioni equivalenti:*

a. due rette sono perpendicolari se e solo, i rispettivi punti impropri sono coniugati nella polarità rispetto all'assoluto.
b. Il riferimento è monometrico (ortogonale o no).

4- Conclusioni

La conclusione che si trae da questa breve nota è la giustificazione più ampia, dell'affermazione, che si trova in un qualsiasi testo di geometria analitica, in relazione alla scelta del riferimento.
Abbiamo ampiamente mostrato che se il riferimento non è cartesiano ortogonale monometrico, le formule metriche, e solo le metriche, si complicano notevolmente, così da scoraggiarne fortemente l'uso.
Inoltre appare molto più complesso il porsi in situazioni di riferimenti dimetrici, per i quali tutto è veramente più difficile, dalla forma quadratica di base che dà luogo ad una matrice non simmetrica, e ad un prodotto pseudo- scalare che non è commutativo. Quindi a priori dovremmo perfino parlare di una perpendicolarità ordinata, come si è ampiamente specificato nella nota 5.
Dunque supposto il riferimento monometrico tutto si semplifica, anche l'ortogonalità, rispetto al dimetrico. Tuttavia se l'angolo dei due assi è retto, l'utilizzo delle formule metriche di geometria analitica è decisamente più facile.

Bibliografia

Comesatti A. (1962). Lezioni di Geometria, Padova, CEDAM.

Eugeni F., Gionfriddo M. (1994). *Appunti del Corso di Algebra e Geometria,* Pescara, Edizioni CUSL. Cfr. www.afsu.it/ Matematica /Geometria.

Villa M. (1965). *Lezioni di Geometria*, Padova, CEDAM.