

Definizione per classi della temperatura

Luca Nicotra*

* Ingegnere. Presidente dell'Associazione "Arte e Scienza", Direttore responsabile di: «Periodico di Matematica», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «ArteScienza»;
luca.nicotra1949@gmail.com.

1 - Tipi di definizione

Prima di accennare ai diversi tipi di definizione, occorrerebbe "definire" il termine "definizione", ma ciò è impossibile perché genererebbe un circolo vizioso, in quanto la proposizione "definizione della definizione" contiene già lo stesso concetto (definizione) che intende definire.

Tutto ciò rientra in una considerazione generale finora mai smentita: non tutto si può definire, così come non tutto si può dimostrare. Da qui l'accettazione necessaria di "conoscenze primitive" poste alla base (o inizio) di ogni argomentazione logica, di cui sono pertanto da considerare come "presupposti o premesse", distinguibili in enti o concetti primitivi e proposizioni o proprietà primitive. Tali presupposti possono essere di due tipi: generali e specifici. Sono presupposti "generali" quelli che possono essere utilizzati per qualunque argomentazione o scienza, mentre sono presupposti "specifici" quelli che sono utilizzabili soltanto per una

specifica scienza, per esempio gli enti primitivi punto, retta, piano e gli assiomi della geometria euclidea.

I presupposti generali sono, in un certo senso, anche presupposti dei presupposti specifici, in quanto servono per introdurli e spiegarli, derivano dall'esperienza, dalla lingua, dal linguaggio comune e precedono qualunque ragionamento logico, risultando in tal modo pre-logici.

Il concetto di definizione è un presupposto generale, pre-logico e come tale indefinibile. Tuttavia, se ne può rendere l'idea (senza alcuna pretesa definitoria) che si è formata spontaneamente nell'immaginario collettivo, ricorrendo al linguaggio comune: definire significa "spiegare cos'è una certa cosa per mezzo di altre cose già note o presupposte tali". Il termine "cosa" qui utilizzato ha una connotazione molto generica, concreta o astratta.

A questo punto è lecito chiedersi se esistono diversi tipi di definizione e quali sono.

Le classificazioni possibili dei tipi di definizione variano molto a seconda del criterio adottato e del punto di vista con il quale si affronta la questione, legato al campo di indagine (filosofia, linguistica, matematica, fisica, ecc.). A volte uno stesso tipo di definizione può essere etichettato anche con altri attributi a seconda del criterio di classificazione. È il caso delle definizioni per condizioni e per uso (o contesto), che sono anche definizioni implicite, mentre quelle nominali e per classi sono anche definizioni esplicite.

Una panoramica molto articolata, e abbastanza neutrale rispetto alle varie settorializzazioni, si trova nel lungo articolo in tre parti *La definizione nel contesto linguistico e scientifico* di

Giulio Platone (1969, 1970). Sono qui proposte alcune possibili classificazioni:

1. esplicite
2. implicite
3. nominali o logiche o proprie
4. reali o di cosa o lessicali
5. per condizione (postulati)
6. per uso o contesto
7. per astrazione
8. per classi
9. per induzione o ricorsive
10. operative (strumentali o mentali)
11. per operatori
12. per estensione
13. per relazione

Altri tipi, a volte utilizzate come “definizioni”, sono in realtà pseudo-definizioni prive di valore logico: teoretiche, persuasive, emotive, precisanti, per sinonimi, denotative.

Nell’ambito delle scienze fisiche e matematiche quelle utilizzate sono i tipi 3,5,7,8,9,10,11,12,13.

Nella matematica, secondo la critica moderna, sono preferibili le definizioni esplicite per classi, basate sul passaggio al quoziente, che sostituiscono le più vecchie definizioni implicite per astrazione. Nella fisica, invece, sono utilizzate esclusivamente le definizioni operative¹ e per

¹ Il termine “definizione operativa” fu introdotto ufficialmente nel 1927 dal premio Nobel per la fisica P. W. Bridgman nella sua opera *The logic of Modern Physics*. Ma già nel 1905 la Teoria della Relatività Ristretta aveva

relazione, queste ultime, ovviamente, soltanto per le grandezze fisiche derivate.

In questo articolo, considerata la natura particolare della temperatura, grandezza fisica sotto certi aspetti anomala rispetto ai requisiti tipici delle grandezze fisiche, si propone per essa una definizione per classi da completare con una definizione operativa, peraltro già nota. In tal guisa la temperatura acquista una sua caratterizzazione matematica che la accomuna a un'altra grandezza fisica fondamentale, la lunghezza, anch'essa definibile per classi prima ancora che operativamente.

2 - La temperatura: grandezza fisica *sui generis*

Fra le grandezze fisiche la temperatura è forse quella che più di ogni altra ci riguarda quotidianamente in vari aspetti della nostra vita: gioca un ruolo essenziale nella cottura dei cibi, dalla temperatura dell'aria dipende in gran parte il nostro stato di benessere fisico e la temperatura corporea è un indicatore primario del nostro stato di salute.

Nella vita del nostro pianeta e dell'universo è ancora la temperatura la protagonista: il riscaldamento globale della Terra è una minaccia per lo scioglimento dei ghiacciai della zona artica, che avrebbe conseguenze disastrose a livello planetario, e ancora la temperatura ha scandito le diverse fasi dell'evoluzione dell'universo dopo il Big Bang: dai 100000 miliardi di miliardi di miliardi di gradi Kelvin (10^{32} K)

definito lo spazio e il tempo per mezzo delle operazioni per misurare lunghezze e intervalli di tempo.

dell'istante iniziale di massima energia e densità del cosmo, quando ancora esisteva un'unica forza fondamentale, alla temperatura di 10000 miliardi di gradi Kelvin (10^{13} K) che consentì la completa differenziazione delle quattro forze fondamentali (gravità, interazione nucleare forte e debole, forza elettromagnetica), nonché la comparsa del protone e quindi della materia.

La temperatura è la grandezza fisica che caratterizza e regola i fenomeni termodinamici, nei quali sono in gioco la produzione e il trasferimento del calore, con la sua degradazione come energia misurata dall'entropia. Il calore è l'unica grandezza fisica che consente di distinguere il passato dal futuro: tutti i fenomeni in cui compare il calore² sono processi irreversibili e come tali danno un verso al tempo, mentre tutti i fenomeni in cui non compare il calore, e quindi la temperatura, sono teoricamente reversibili:

... le leggi del mondo meccanico di Newton, le equazioni dell'elettricità e del magnetismo di Maxwell, quelle della gravità relativistica di Einstein, quelle della meccanica quantistica di Heisenberg, Schrodinger e Dirac, quelle delle particelle elementari dei fisici del XX secolo... nessuna di queste equazioni distingue il passato dal futuro. Se una sequenza di eventi è permessa da queste equazioni, lo è anche la stessa sequenza ribaltata all'indietro nel tempo. Nelle equazioni elementari del mondo, la freccia del tempo appare solo quando c'è il calore (Rovelli, 2017, p.30).

Tutti i fenomeni "reali" sono accompagnati dalla comparsa di una certa quantità di calore Q a una temperatura T , dalla

² A rigore anche altri fenomeni che condividono con il calore alcuni aspetti caratteristici (per es. i potenziali ritardati in elettrodinamica).

quale dipende il suo “grado di invecchiamento”, ovvero la sua degradazione misurata dall'entropia $E = Q/T$: a parità di calore, minore è la temperatura, maggiore è l'entropia del fenomeno ovvero maggiore è la degradazione del calore come forma di energia:

Consideriamo un litro d'acqua a 100°C e 10 litri d'acqua a 10°C . Essi rappresentano la stessa quantità di calore, cioè la stessa quantità di energia termica. Però, il valore di questa energia è diverso nei due casi: la quantità di calore di un litro d'acqua a 100°C vale più di quella equivalente di dieci litri d'acqua a 10°C. Ciò è dovuto alla tendenza del calore a comunicarsi ad altri corpi, a estendersi nello spazio e ad uniformarsi nella temperatura, perdendo così, ogni capacità di trasformazione (Nicotra, 1962, pp. 2-3).

Insomma, non v'è fenomeno “reale”, dal più semplice al più complesso, che non ci faccia imbattere in questa grandezza della fisica.

Il fatto strano è che pur essendo a tutti nota, attraverso l'esperienza, tuttavia la maggior parte di noi non saprebbe definirla, quasi come accade per un'altra grandezza fisica fondamentale: il tempo.

Come è noto, una grandezza fisica è tale se per essa si possono stabilire inequivocabilmente una unità di misura e un criterio di uguaglianza e somma (e differenza) in modo da poter definire una procedura di misura.

La temperatura, pur essendo accettata come grandezza fisica, in realtà non possiede completamente tali requisiti (Caldirola, 1956, p.55, nota1; Perucca, 1937, p. 538; Bordoni, 1970, pp.173,174). Infatti, non è possibile definire una unità di misura della temperatura bensì soltanto una unità di misura dell'intervallo di temperatura, analogamente a quanto accade

per il tempo. Inoltre non gode della proprietà additiva. Mentre, per esempio, fissata l'unità di lunghezza è possibile "costruire" qualunque altra lunghezza allineando un sufficiente numero di volte la lunghezza unitaria e i suoi sottomultipli, ciò invece non accade con la temperatura: non è possibile, con lo stesso metodo additivo, realizzare per esempio una temperatura tripla dell'unità di temperatura perché, se si mettessero a contatto tre corpi con temperatura unitaria, per il principio dell'equilibrio termico (o principio zero della termodinamica) il corpo risultante dalla loro unione avrebbe ancora temperatura unitaria. Per tali ragioni non è possibile stabilire un numero discreto di multipli e sottomultipli della temperatura che ne consentano una misura relativa come per le altre grandezze, bensì è necessario fissare "ogni suo multiplo e sottomultiplo" stabilendo arbitrariamente una scala numerica delle temperature e uno zero, ovvero un punto di riferimento reso necessario del fatto che si possono considerare soltanto intervalli di temperatura. Queste sue caratteristiche, che ne fanno una grandezza fisica atipica, sono dovute al fatto che non è possibile accedere direttamente alla temperatura per misurarla, bensì occorre considerare i suoi effetti su qualche altra grandezza fisica, come accade nei comuni termometri a mercurio, che danno una misura della temperatura attraverso la dilatazione subita dal mercurio in un tubicino di vetro.³

³ La proprietà che varia al variare della temperatura e le cui variazioni consentono di ottenere una misura della temperatura è detta *proprietà termometrica* e caratterizza i diversi tipi di termometri (*corpi termometrici*): in quelli a gas a volume costante è la pressione, in quelli a gas a pressione costante è il volume, nei bolometri è la resistenza elettrica, nelle coppie

Più che una vera grandezza fisica, dunque, la temperatura deve essere considerata un indice dello stato termico di un corpo, cioè di quel suo particolare stato che noi percepiamo con le sensazioni di caldo e freddo: «Si chiama temperatura una grandezza fisica che misura quanto un corpo è caldo o freddo», dice Enrico Fermi (1944, p. 141). Ma è chiaro che definizioni come questa sono in realtà pseudo-definizioni, utili soltanto per focalizzare il significato fisico intuitivo della temperatura, come quest'altra: «... la temperatura d'un corpo è quello stato suo particolare pel quale, essendo esso posto a contatto degli altri corpi, può cedere loro calore o riceverne» (Castelfranchi, 1943, p. 421).

3 - Le grandezze fondamentali della fisica

Le *grandezze fondamentali* della fisica (lunghezza, massa, tempo, temperatura) ricoprono un ruolo analogo a quello degli enti primitivi nella geometria: sono infatti le grandezze dalle quali sono derivate tutte le altre grandezze fisiche, così come dal punto, dalla retta e dal piano sono derivate tutte le figure della geometria euclidea. In tal modo basta fissare (con un certo arbitrio) le unità di misura delle sole grandezze fondamentali tramite dei campioni fisici e derivare le unità di misura di tutte le altre *grandezze* (dette *derivate*) analiticamente per mezzo delle relazioni che le legano a quelle fondamentali. Come gli enti primitivi della geometria,

termoelettriche è la forza elettromotrice, nei termometri a colonna liquida è l'altezza della colonna conseguente alla dilatazione termica, nei pirometri è l'irraggiamento, ecc.

esse sono quindi indefinite ma soltanto dal punto di vista fisico, mentre possono essere definite al di fuori della fisica. Un esempio è la lunghezza, che come grandezza fisica fondamentale non implica la definizione di altre grandezze fisiche, ma matematicamente è invece definibile come classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza fra segmenti dello spazio euclideo. Insomma il concetto di lunghezza in fisica è ereditato dalla geometria e viene soltanto completato dal punto di vista fisico "materializzandolo" (perdendo quindi il carattere puramente ideale che ha in geometria) fissando un campione fisico della sua unità di misura.

Anche per la temperatura è possibile darne una definizione matematica che non coinvolga altre grandezze fisiche. Tuttavia, a differenza della lunghezza, la definizione matematica della temperatura deve necessariamente trarre spunto da considerazioni sperimentali, le quali però implicano soltanto concetti meccanici, cosicché è scongiurato il rischio di una *petitio principii* che si verificherebbe se presupponesse il concetto stesso di temperatura. Inoltre tale definizione è indipendente da tutte le possibili procedure di misurazione della temperatura, che conducono a molteplici scale termometriche, ciascuna dipendente dal corpo termometrico, dalla proprietà termometrica e dalla relazione funzionale, necessariamente arbitraria, fra questa e la temperatura. Pertanto, la definizione matematica di temperatura non può definire da sola la temperatura come grandezza fisica perché non è una definizione strumentale

come richiesto dalla fisica,⁴ ma fornisce una definizione di *temperatura generica* valida qualunque sia poi il suo completamento dal punto di vista operativo, che può condurre a due tipi di temperature: le *temperature empiriche* e la *temperatura termodinamica*. Essa ha dunque un valore concettuale, esente da tutte le limitazioni che caratterizzano le varie definizioni operative della temperatura. Nel seguito indicheremo con θ la temperatura generica definita matematicamente.

Vediamo assieme come ciò sia possibile, attraverso un viaggio ideale dalla fisica alla matematica con ritorno alla fisica.

4 - Tre concetti preliminari per una definizione della temperatura

Un *sistema termodinamico* è una qualsiasi porzione di materia di dimensioni finite e pertanto tale da potersi pensare costituita da un numero rilevante di particelle il cui comportamento statistico determina il suo stato macroscopico.

Lo *stato termodinamico* di un sistema, in un certo istante, viene identificato con l'insieme dei valori assunti in quell'istante dalle n variabili di stato, le quali sono grandezze che descrivono il comportamento globale del sistema in modo che la loro conoscenza permetta di realizzarne una replica fedele. Sono variabili di stato la pressione, il volume, il campo

⁴ «...le varie grandezze fisiche [...] sono sufficientemente definite e hanno esistenza reale in quanto si è d'accordo sul modo di misurarle» (Perucca, 1937, p.5).

elettrico, la polarizzazione dielettrica, il campo magnetico, l'intensità di magnetizzazione, la temperatura, ecc. Tuttavia, di volta in volta vengono considerate soltanto quelle grandezze di stato che caratterizzano il gruppo di fenomeni studiato (per es. quelli termo-meccanici). Inoltre esistono relazioni funzionali fra di esse (*equazioni di stato*) per cui non tutte le grandezze di stato sono indipendenti. Per esempio, nel caso dei gas perfetti, le variabili di stato sono tre: pressione P , volume V e temperatura T , ma due soltanto di esse sono indipendenti, in quanto esse sono legate dall'equazione di stato $PV = nRT$ (vedi nota 15).

Uno *stato termodinamico* è *di equilibrio* se i valori delle variabili di stato che lo definiscono non mutano fintanto che non cambiano le condizioni esterne al sistema.

5 - Stati in equilibrio termico

Premessi i concetti di *sistema termodinamico*, *stato termodinamico* e *stato termodinamico di equilibrio*, definiamo cosa si intende per *stati in equilibrio termico*. Si considerino due sistemi A e B isolati dall'esterno tramite una parete adiabatica, che non permetta scambi di energia sotto nessuna forma (e quindi anche di calore), e separati fra loro da una parete diatermica, che invece consenta gli scambi di calore.⁵ L'esperienza mostra che se gli stati fisici iniziali di A e B sono

⁵ Si dà per noto il concetto di calore, che non implica quello di temperatura, essendo il calore una forma di trasmissione dell'energia al pari del lavoro. Una parete (adiabatica o diatermica) impedisce i flussi di massa.

differenti, essi mutano in due nuovi stati di equilibrio caratterizzati da due nuove ennuple di variabili ($X_a, Y_a, \dots; X_b, Y_b, \dots$) in generale differenti fra loro ma non indipendenti.⁶ I due nuovi stati di A e B si dicono in equilibrio termico e definiscono entrambi lo stato di equilibrio termico del sistema complesso $A \cup B$ attraverso la relazione che lega fra loro le grandezze di stato dei due sistemi A, B :

$$(1) \quad F(X_a, Y_a, \dots, X_b, Y_b, \dots) = 0.$$

Da tali considerazioni di natura sperimentale segue che ogni sistema è in equilibrio termico con se stesso (proprietà riflessiva dell'equilibrio termico) e che se il sistema A è in equilibrio termico con il sistema B , anche B è in equilibrio termico con A (proprietà riflessiva dell'equilibrio termico).

Inoltre, considerati due sistemi A e B isolati dall'esterno e fra loro tramite pareti adiabatiche, si aggiunga ad essi un terzo sistema C separato dai primi due tramite una parete diatermica (figura 1). Atteso un opportuno intervallo di tempo, i sistemi A e B risulteranno in equilibrio termico con C . Sostituendo allora la parete adiabatica che isola A da B con una diatermica, si constata che pure A e B sono in equilibrio termico, in quanto gli stati di A e di B rimangono invariati. È

⁶ Pertanto, poiché nella misura della temperatura di un corpo il contatto termico fa evolvere verso una nuova configurazione di equilibrio gli stati termici sia del corpo in misura sia del termometro, è necessario che la presenza del termometro alteri il meno possibile lo stato termico iniziale del corpo. Ciò normalmente richiede che il termometro abbia massa molto piccola rispetto a quella del corpo in misura.

questo il *principio zero della termodinamica*⁷ o *principio dell'equilibrio termico*, il quale consente di asserire che la relazione di equilibrio termico E_t gode anche della proprietà transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza.⁸

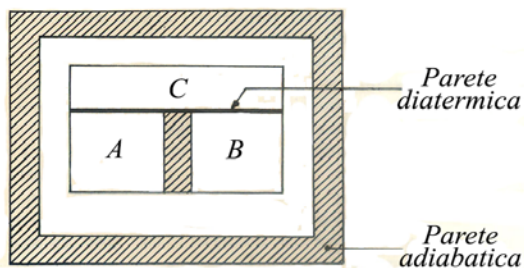


Fig. 1- A illustrazione del principio dell'equilibrio termico.

In pratica, per riconoscere se due o più stati sono in equilibrio termico, non si effettua l'esperimento precedentemente illustrato, che risulterebbe scomodo e di difficile attuazione, ma si ricorre a un termoscopio. Questo è uno strumento che non dà la misura della temperatura ma semplicemente consente di confrontare due stati termici

⁷ L'opportunità di porre alla base della Termodinamica tale principio fu evidenziata fin dal 1871 dal grande fisico e matematico scozzese James Clark Maxwell e negli anni 1931, 1935 anche dagli astrofisici indiani M.N. Saha e B.N. Srivartava. Tuttavia, fu soltanto Ralph H. Fowler negli anni Trenta del Novecento a formularlo esplicitamente e a dargli il nome di *Principio zero della Termodinamica* in quanto logicamente precede i tre principi della Termodinamica, già formulati.

⁸ Una relazione di equivalenza gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

stabilendo se sono in equilibrio o no, in base alle variazioni subite dalla proprietà termometrica considerata. Se per esempio la proprietà termometrica è l'altezza di una colonna di liquido, per affermare che gli stati termici di due sistemi sono in equilibrio basta porre a contatto termico successivamente il termoscopio con i due sistemi e verificare che l'altezza della colonna liquida risulti uguale nei due casi.

6 - Definizione matematica della temperatura

Essendo la relazione di equilibrio termico Et una relazione di equivalenza, applicandola all'insieme S di tutti i possibili stati di equilibrio termico (di uno stesso sistema o di sistemi diversi),⁹ risulta definita una partizione¹⁰ Θ di S in classi di equivalenza θ_i ($i \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}$).¹¹ ciascuna delle quali è

⁹ L' "o" in tal caso ha il significato alternativo (e non esclusivo) proprio della somma logica (per es. l'unione fra sistemi).

¹⁰ Dato un insieme A , una partizione di A è una famiglia $F = \{A_i \mid A_i \subset A, i \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}\}$ di sottoinsiemi A_i di A tale che: 1) ogni elemento di A appartiene almeno a un sottoinsieme di A : $\forall i A_i \neq \emptyset$; 2) due sottoinsiemi diversi qualunque di A sono disgiunti: $A_i \cap A_h = \emptyset$ ($i \neq h, (i, h) \in I$); 3) l'unione di tutti i sottoinsiemi A_i di A è l'insieme A : $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

¹¹ Applicando a un insieme A una relazione di equivalenza R si ottiene una particolare partizione Q di A caratterizzata dall'appartenenza di ogni elemento di A a uno e uno soltanto dei suoi sottoinsiemi. L'insieme Q di tali classi, pensate come elementi, è detto *insieme quoziente di A rispetto ad R* e si denota con A/R . Nel passaggio di A all'insieme quoziente si passa dagli elementi $a \in A$, ai nuovi elementi $[a] = \{x \mid xRa\}$, che sono le partizioni definite da R . Quindi $Q = \{[a], a \in A\}$. L'operazione che consente di passare da A ad A/R è detta *passaggio al quoziente*.

costituita da stati in equilibrio termico, pervenendo all'insieme quoziente $\Theta = S/E_t$: ogni classe θ_i , $i \in I$, di equivalenza di tale insieme è “una temperatura”, mentre l'insieme quoziente Θ è l'insieme di tutte le temperature e quindi definisce il “concetto generale di temperatura”. Ne segue che tutti gli stati che sono in equilibrio termico appartengono a una medesima classe θ_i di Θ e quindi hanno la medesima temperatura e viceversa se due stati hanno la stessa temperatura appartengono alla stessa classe θ_i di Θ e quindi sono in equilibrio termico. Il principio di contrazione, o passaggio al quoziente, consente dunque di formulare la seguente definizione: *una temperatura è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equilibrio termico fra gli stati termodinamici di uno stesso sistema o di sistemi diversi.*

Può generare un certo scetticismo e sembrare paradossale la sostituzione, accettata dalla matematica, di una proprietà comune a più elementi con la classe di tali elementi. Così accade nella definizione testé data di temperatura: ogni stato di una stessa classe dell'insieme quoziente Θ ha in comune con tutti gli altri stati della stessa classe la proprietà di essere in equilibrio termico con essi. Bertrand Russell ha accuratamente analizzato la questione, concludendo:

Ogni volta che la matematica deriva una proprietà comune da una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, tutti gli scopi matematici della proprietà supposta vengono pienamente raggiunti sostituendo ad essa la classe dei termini che hanno la relazione data con un dato termine (Russell, 1971, p. 197).

Taluni autori forniscono, invece, una definizione implicita per astrazione della temperatura, utilizzando ancora una volta la relazione di equilibrio termico: la temperatura θ viene definita come quella proprietà attinente a un sistema tale che i suoi valori assunti in corrispondenza di due stati A e B sono uguali se e solo se A e B sono in equilibrio termico:

$$\theta(A) = \theta(B) \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ in equilibrio termico.}$$

La temperatura così definita coincide sostanzialmente con una definizione implicita per astrazione ottenuta con lo stesso passaggio al quoziente testè definito $\Theta = S/E_t$: una temperatura è definita come predicato degli elementi di una stessa classe di equivalenza di Θ , ovvero è definita attraverso l'appartenenza alla stessa classe di equivalenza determinata da E_t . È il concetto-classe di Bertrand Russell:

In secondo luogo, quando ricordiamo che un concetto-classe non è esso stesso un insieme, ma una proprietà con la quale è possibile definire un insieme, noi vediamo che, se definiamo il numero come il concetto-classe, non la classe, un numero si definisce effettivamente come una proprietà comune di una serie di classi simili e di nient'altro (Russell, 1971, p. 196).

Le definizioni implicite però, come è noto, non precisano la natura dell'ente che definiscono e, secondo alcuni autori, quelle implicite per astrazione che fanno uso di una relazione di equivalenza R non ne assicurano nemmeno l'unicità, in quanto R caratterizza non soltanto la proprietà o funzione $\varphi(x)$ che si vuol definire ma anche ogni altra funzione di

questa $f[\varphi(x)]$.¹² Quest'ultima critica è stata posta da molti eminenti matematici e logici e soprattutto da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, sostenitori della sostituzione delle definizioni implicite per astrazione con definizioni esplicite per classi.¹³

¹² Per esempio, la relazione di equivalenza $\varphi(a,b) = \varphi(a',b') \Leftrightarrow ab'=a'b$ ($bb' \neq 0$) che dovrebbe definire il concetto di frazione per astrazione non lo definisce in quanto la medesima relazione vale per la radice n -esima di un numero frazionario $\sqrt[n]{a/b}$. Così anche la relazione di congruenza fra segmenti che dovrebbe caratterizzare la lunghezza del segmento caratterizza anche l'area del quadrato e il volume dello stesso segmento. Tuttavia, come osserva Giulio Platone, essendo noto l'insieme G al quale viene applicata la relazione di equivalenza R è chiaro che R (e quindi la proprietà o predicato che R esprime) si debba intendere valida soltanto per gli elementi dell'insieme G (Platone, 1969, p. 175).

¹³ Per esempio, a proposito della definizione per astrazione di numero cardinale, così si esprime Bertrand Russell (1971, p. 194): «Questa definizione per astrazione, e generalmente il processo impiegato in tali definizioni, soffre di un difetto formale assolutamente fatale: non dimostra che è solo un oggetto a soddisfare alla definizione. Pertanto invece di ottenere una proprietà comune di classi simili, che è il numero delle classi in questione, noi otteniamo una classe di tali proprietà, senza possibilità alcuna di sapere quanti termini questa classe contiene. Per rendere ancora più chiaro questo punto, esaminiamo che cosa significa, nel caso presente, una proprietà comune. Ciò che si intende dire è che ogni classe ha con una certa entità, il suo numero, una relazione che non ha con alcun'altra, ma che tutte le classi simili (e non altre entità) hanno con lo stesso numero. Esiste cioè una relazione molti-uno che ogni classe ha con il proprio numero e con nient'altro. Quindi, nella misura in cui si ammette la definizione per astrazione, qualsiasi serie di entità, con ognuna delle quali qualche classe ha una certa relazione molti-uno, e con una e solo una delle quali una classe data ha questa relazione, e che sono tali che tutte le classi simili ad una classe data hanno questa relazione con l'unica e medesima entità della serie, ci si presenta come la serie dei numeri, ed ogni entità di

La definizione per classi da noi data precedentemente, invece, ottenuta anch'essa con lo stesso passaggio al quoziente $\Theta = S/E_t$, definisce in maniera esplicita la temperatura, identificando una temperatura con una classe di equivalenza di Θ . Una temperatura così definita non è un concetto astratto, un concetto-classe, ma è una classe di stati termodinamici in equilibrio termico: è una classe-concetto,¹⁴ al pari di quelle che definiscono in forma moderna i concetti di vettore, direzione, lunghezza, ampiezza, estensione ecc. (Villa, 1963, p. 22).

Il passaggio al quoziente, mediante il quale si è fornita la precedente definizione esplicita per classi della temperatura, istituisce tra l'insieme S di tutti i possibili stati termodinamici di un sistema (o di sistemi diversi) e l'insieme Θ delle classi di stati in equilibrio termico una mappa univoca di S in Θ :

$$(2) \quad f: S \rightarrow \Theta \quad \text{ovvero} \quad \theta = \theta(s)$$

la quale associa ad ogni stato termodinamico $s \in S$ una e una sola classe $\theta \in \Theta$ di stati in equilibrio termico con s , ovvero una e una sola temperatura.

questa serie è il numero di una certa classe. Se allora esistono molte di queste serie di entità - ed è facile dimostrare che ne esiste un numero infinito - ogni classe avrà molti numeri, e la definizione avrà totalmente fallito il suo compito di definire il numero di una classe. Questo ragionamento è del tutto generale, e mostra come la definizione per astrazione non è mai un processo logicamente valido».

¹⁴ Di questa denominazione, duale di concetto-classe di Russell, sono debitore al prof. Franco Eugeni durante una chiacchierata telefonica.

Si ricorda che una applicazione $f : M \rightarrow R$ è *suriettiva* se ogni elemento di R è il corrispondente di almeno un elemento di M , ovvero se il codominio $f(M)$ si identifica con l'insieme R : $f(M)=R$; è *iniettiva* se ad ogni coppia di elementi diversi di M corrispondono elementi diversi di R :

$$\forall m_1, m_2 \mid m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2).$$

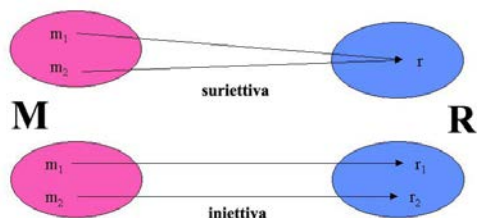


Fig.2 - Diagrammi di Venn: mappe suriettive e iniettive.

La (2) è una mappa suriettiva poiché ogni elemento di Θ è il corrispondente di almeno un elemento di S , ma non iniettiva e quindi non biunivoca, in quanto ogni elemento di Θ è il corrispondente di infiniti elementi di S , ovvero a ogni temperatura corrispondono infiniti stati termodinamici diversi in equilibrio termico. Per esempio, per la legge di Boyle, in un gas perfetto¹⁵ mantenuto a temperatura costante il volume e la pressione variano secondo la relazione $P_1V_1=P_2V_2=\dots=P_nV_n$. Dunque, a una medesima temperatura

¹⁵ Un gas si dice perfetto o ideale se le sue variabili di stato P (pressione), V (volume) e T (temperatura) soddisfano l'equazione $PV = nRT$, essendo la costante $R = C_p - C_v$ (C_p , C_v sono i calori specifici molari a pressione e a volume costante) ed n il numero di moli. I gas ideali sono approssimati in pratica dai gas reali a grandi rarefazioni.

corrispondono infiniti stati diversi in equilibrio termico: $(P_1, V_1); (P_2, V_2); \dots; (P_n, V_n) [n \rightarrow \infty]$.

7 - Completamento fisico della definizione della temperatura

Per definire la temperatura come grandezza fisica, però, occorre stabilire operativamente come misurarla, ovvero come assegnare un valore numerico di temperatura a ogni classe di infiniti stati in equilibrio termico. Non tratteremo e discuteremo qui i vari procedimenti di misura della temperatura perché ciò esulerebbe dalle finalità di questo articolo entrando in un ambito prettamente fisico. Ci limiteremo soltanto a evidenziare le linee guida del ragionamento che dalla definizione matematica di temperatura generica può condurre a una definizione fisica operativa, trascurando quindi tutti i dettagli più tecnici, a beneficio dell'attenzione verso i più profondi legami fra matematica e fisica.

Se in luogo dello stato termodinamico s si pone la ennupla delle variabili X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) che lo definiscono, la (2) si può scrivere anche:

$$(3) \quad \theta = \theta(X_i)$$

In uno spazio euclideo n -dimensionale E^n il luogo dei punti di coordinate X_i è una superficie che rappresenta geometricamente gli infiniti stati di un sistema termodinamico.

Nel caso particolare dei fluidi, in cui le variabili di stato sono pressione P , volume V e temperatura T , si ha una superficie dell'ordinario spazio euclideo E^3 . Se consideriamo un piano di equazione $T = T_1$ (con T_1 costante) esso intersecherà tale superficie in una curva detta *isoterma* poiché rappresenta geometricamente gli infiniti stati del sistema aventi tutti quella temperatura. Variando lo stato termico (e quindi la temperatura) di un corpo si ottiene per esso una serie di isoterme; le isoterme dei diversi corpi corrispondenti a una data temperatura θ_1 rappresentano quindi geometricamente gli infiniti stati in equilibrio termico aventi la temperatura θ_1 ovvero costituiscono l'immagine geometrica della temperatura θ_1 . È da notare che la costruzione di ogni isoterma non richiede la conoscenza della sua temperatura, ma soltanto la misura di variabili di stato diverse dalla temperatura (nel caso dei gas perfetti la pressione e il volume) in distinti stati termici in equilibrio, validati come tali da un termoscopio qualunque. Ovviamente, così facendo, si può dire soltanto che ogni isoterma di un corpo (o la serie delle isoterme corrispondenti di più corpi) è relativa a una certa temperatura di cui per il momento rimane indeterminato il valore numerico. Questo potrà essere noto soltanto fissando una procedura di misura della temperatura, che consiste nello stabilire una scala numerica scegliendo un particolare corpo di riferimento, che costituisce il *termometro campione primario*, e un criterio per assegnare un valore numerico diverso a ogni sua isoterma.¹⁶ La misura della temperatura di

¹⁶ Con il termometro campione primario si misurano le temperature di

un corpo, concettualmente, sarà l'indicazione di tale termometro campione ad equilibrio termico raggiunto con il corpo in misura, in quanto i loro stati termici risultando in equilibrio termico hanno per definizione la stessa temperatura.

Per ottenere ciò è necessario far diventare iniettiva la funzione $\theta = \theta(X_i)$, in modo che ogni temperatura θ sia la corrispondente di un solo stato termico definito dalla *n*-nupla X_i , per modo che accanto alla mappa (2) si possa considerare la mappa inversa $f^{-1} : \Theta \rightarrow S$, stabilendo così una corrispondenza biunivoca $S \leftrightarrow \Theta$ fra gli stati termici e le temperature.

Dal punto di vista fisico ciò si realizza se sono verificate due condizioni. La prima è che nella trasformazione termodinamica che porta il termometro campione all'equilibrio termico con il corpo in misura vari soltanto una delle variabili di stato (corrispondente alla *proprietà termometrica*) mantenendo costanti le rimanenti. La seconda è che ogni isoterma individui un solo valore della proprietà termometrica. Tali considerazioni risultano evidenti nel caso in cui il corpo termometrico sia a tre variabili di stato X, Y, T (per es. un fluido), per il quale le isoterme (nel piano X, Y) devono essere curve crescenti o decrescenti: la retta $Y = Y_1$ parallela all'asse delle X interseca allora ciascuna isoterma in un solo punto, evidenziando una corrispondenza biunivoca

un certo numero di stati scelti con accordi internazionali per il loro elevato grado di stabilità e riproducibilità (punti fissi della termometria), che sono utilizzati per la taratura di altri termometri campione secondari di più comodo utilizzo, i quali a loro volta sono utilizzati per la taratura dei termometri di lavoro, di utilizzo comune.

fra la proprietà termometrica X e le isoterme e quindi le temperature (figura 3).

Nel caso dei gas perfetti, per es., le isoterme nel piano P,V (*piano di Clapeyron*) sono iperboli equilateri (figura 4). Alla

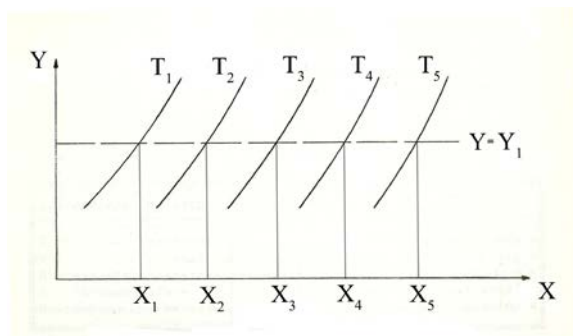


Fig. 3 – Isotherme nel piano X, Y .

pressione P_1 costante le isoterme $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ risultano in corrispondenza biunivoca con i valori $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ della proprietà termometrica volume.

La (3) diviene allora una mappa biunivoca (*funzione termometrica*) che associa a ogni valore della proprietà termometrica una e una sola temperatura e viceversa:

$$(3)' \quad \theta = \theta(X)$$

e fornisce la curva di graduazione del termometro campione, consentendo di ricavare le misure della temperatura dai valori della proprietà termometrica X . Tale relazione, ovviamente, può essere fissata soltanto arbitrariamente. Per convenzione si sceglie una funzione termometrica lineare $\theta(X) = a X$ (con a costante).

Fissato uno stato di riferimento e indicati con X_0 e con $\theta(X_0)$ i corrispondenti valori della proprietà termometrica e della temperatura, si ottiene $a = \theta(X_0) / X_0$ e quindi:

$$(4) \quad \theta(X) = \frac{\theta(X_0)}{X_0} X$$

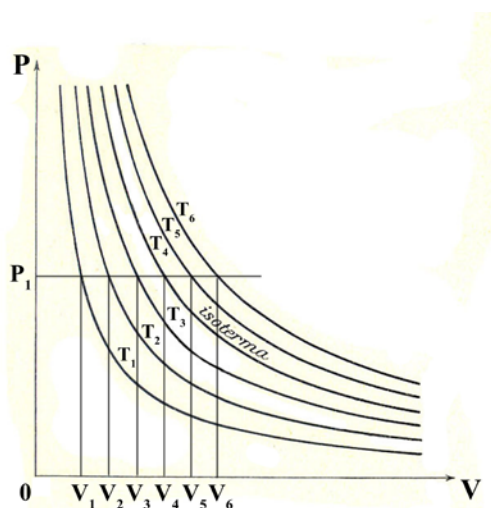


Fig. 4 – Isoterme nel piano di Clapeyron (P,V).

Dal 1954 si assume come stato di riferimento il punto triplo dell'acqua pura alla pressione di 1 atm e si assegna alla corrispondente temperatura il valore $\theta(X_0)=273,16$.¹⁷ Con tali assunzioni, la (4) diventa:

¹⁷ Assunzione confermata nel 1990 con la scala internazionale delle temperature ITS90 (International Temperature Scale -1990). Il punto triplo dell'acqua è lo stato in cui coesistono le tre fasi liquida, solida e aeriforme dell'acqua (in gradi Celsius la temperatura è 0,01 °C).

$$(4)' \quad \theta(X) = 273,16 \frac{X}{X_0}$$

essendo X_0 e X i valori assunti dalla proprietà termometrica rispettivamente in corrispondenza del punto triplo dell'acqua e una volta raggiunto l'equilibrio termico fra il termometro campione e il corpo in misura.

Il termometro campione primario, per convenzione internazionale, è costituito da un termometro a gas nel quale il volume del gas è mantenuto costante e la proprietà termometrica è la pressione P . Pertanto la (4)' si scrive:

$$(5) \quad \theta(P) = 273,16 \frac{P}{P_0}$$

essendo P_0 e P la pressione del gas in corrispondenza del punto triplo dell'acqua e quella del gas nel termometro in equilibrio termico con il corpo in misura. La (5) applicata a gas reali differenti fornisce altrettante scale termometriche empiriche, non consentendo in tal modo di definire un'unica scala termometrica cui fare riferimento a livello internazionale.

L'esperienza, però, dimostra che anche utilizzando gas reali diversi ma sempre più rarefatti, e quindi con valori di P_0 sempre più piccoli (tendenti a zero), le temperature misurate con i rispettivi termometri tendono tutte allo stesso valore limite. In figura 5, dove sono riportate, in funzione di P_0 , le temperature di condensazione dello zolfo ottenute con termometri a pressione utilizzando quattro gas diversi (ossigeno, aria, azoto, idrogeno), si vede chiaramente che mentre per valori di P_0 lontani dallo zero le misure possono divergere anche di qualche grado Kelvin, al tendere a zero di

P_0 tutti i termometri tendono a indicare la stessa temperatura di 717,75 K. Poiché più rarefatto è un gas reale più esso approssima il modello del gas perfetto, possiamo allora concludere che la:

$$(5)' \quad \theta(P) = \lim_{P_0 \rightarrow 0} 273,16 \frac{P}{P_0}$$

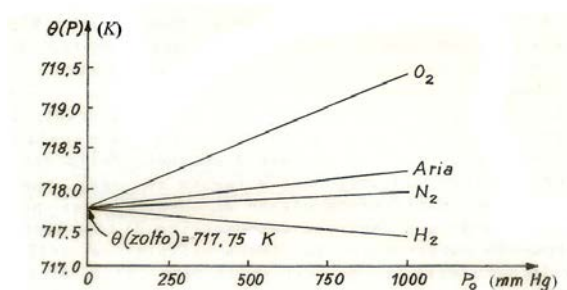


Fig. 5 - Temperature di condensazione dello zolfo in funzione della pressione P_0 nel punto triplo dell'acqua, ottenute con termometri a pressione utilizzando quattro gas diversi: ossigeno, aria, azoto, idrogeno.

può definire formalmente un'unica scala termometrica di riferimento detta *scala termometrica normale*, tramite un termometro campione che impieghi un gas perfetto, mantenuto a volume costante, e di cui si lasci variare la pressione. Per convenzione si impiega l'idrogeno sufficientemente rarefatto da poterlo considerare un gas ideale. Tale scala termometrica, tuttavia, rimane legata alle proprietà dei gas perfetti, cioè di un particolare tipo di corpi termometrici. Onde sottrarsi a tali limitazioni, lord Kelvin definì una *scala termodinamica delle temperature*, basata sul secondo principio della termodinamica e pertanto

indipendente dal particolare corpo termometrico utilizzato.¹⁸ Tale scala, per le assunzioni fatte, coincide numericamente con la scala assoluta delle temperature. I particolari delle considerazioni che conducono a tale definizione esulano dall'obiettivo di questo articolo e pertanto vengono omessi.

In conclusione, risulta che la definizione per classi della temperatura, a parte il necessario completamento delle operazioni strumentali che consentono di definire la scala termometrica, è in un certo senso essa stessa una definizione operativa, anche se le operazioni sono di natura mentale e non strumentale. Infatti, il passaggio al quoziente che la caratterizza è un'operazione (non strumentale) nel senso moderno del termine, in quanto associa ad ogni elemento di S uno e un solo elemento dell'insieme partizione S/R (operazione unaria non interna su S) secondo una legge ben determinata di natura sperimentale: la relazione di equilibrio termico.

¹⁸ Lord William Thomson (1824 -1907) fu un fisico e ingegnere britannico nominato barone, con il titolo di lord Kelvin, per i suoi alti meriti scientifici.

Bibliografia

Villa Mario (cur.) (1963). *Per un insegnamento moderno della matematica*. Bologna, Patron.

Bordoni Ugo (1970). *Fondamenti di Fisica Tecnica*, vol. 1, Bologna, Zanichelli.

Caldirola Piero (1956). *Elementi di Fisica*, vol.II, Milano, Ghisetti&Corvi.

Castelfranchi Gaetano (1943). *Fisica sperimentale e applicata*, vol. I, Milano, Hoepli.

Fermi Enrico (1944). *Fisica*, vol. I, Bologna, Zanichelli.

Nicotra Salvatore (1962). Il significato dei principi della termodinamica, in «*La Scienza e i Giovani*», Anno XI, n. 1 Febbraio 1962.

Perucca Eligio (1937). *Fisica generale e sperimentale*, vol. I, Torino, UTET.

Platone Giulio (1969). La definizione nel contesto linguistico e scientifico (I parte), in «*Archimede*» Anno XXI n. 3, pp. 113-128; (II parte), in «*Archimede*» Anno XXI n. 4-5, pp. 172-183.

Platone Giulio (1970). La definizione nel contesto linguistico e scientifico (III parte), in «*Archimede*» Anno XXII n. 3-4, pp. 121-138.

Russell Bertrand (1971). *I principi della matematica*, Roma, Newton Compton.