Periodico di Matematica (IV) Vol. II (1), giugno 2020, pp. 53-82

Un punto di vista euristico relativo alla evoluzione del sistema solare

Paolo Allievi*, Alberto Trotta+

***Già responsabile Elettro/Automazione SOGIN S.p.A.;**
+ Professore di Matematica e Fisica presso IISS "S. Caterina da Siena-Amendola" Salerno; albertotrotta@virgilio.it

Sunto*:* *Lo scopo di questo articolo è quello di analizzare le conseguenze dell'ipotesi assunta di perdita di massa, nel tempo, dei corpi celesti sui loro parametri caratteristici orbitatali e rotazionali.*

Parole Chiave*:* *gravità, variazione massa corpi celesti, energia gravitazionale universale*

Abstract: *The purpose of this article is to analyze the consequences related to the hypotesis assumed of the loss of mass time of celestial bodies on their relational characteristic parameters.*

Keywords*:* *gravity, celestial body mass variation, universal gravitational energy*

1 - Premessa

Nell'articolo "Un punto di vista euristico relativo alla formazione dei terremoti" , pubblicato nei n.5-6/2000 de "Il Perito Industriale", si è giunto ad una possibile causa del fenomeno tellurico attraverso l'analisi di un modello euristico della teoria della gravitazione.

L'ipotesi di base di tale modello euristico della gravitazione è quella di ritenere che ogni corpo dotato di massa emetta naturalmente e continuamente, con una costante di tempo τ, energia gravitazionale (distinta dalle onde gravitazionali che sono emesse solo da grandi masse fortemente accelerate) e pertanto, per la nota identità einsteiniana $E=Mc^2$, il corpo perda massa nel tempo e rimanga con una massa $M(t)$ data dalla seguente relazione:

$M = M_O\ e^{-t/\tau}$ *(0.1)*

dove è:

M_O il valore della massa per $t = 0$;

$$\tau = \frac{cR^2}{4mG} = 2 \text{ miliardi di anni} \qquad (0.2)$$

essendo:

$c = 299.792,458\ km/s$	la velocità della luce nel vuoto, misurata nel 1983;
$R = 10^{-14}\ m$	il raggio di un nucleone;
$m = 1,67\ \ 10^{-27}\ kg$	la massa di un nucleone;
$G = 6,67\ \ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$	la costante gravitazionale.

In Appendice 3 è riportato il calcolo per giungere alle relazioni (0.1) e (0.2), vedi rispettivamente le relazioni (A3.11) e (A3.7).

La prima e più importante conseguenza dell'ipotesi assunta, cioè che ogni corpo perda massa nel tempo, è che la velocità della luce diminuisce nel tempo (circa 3 m/sec ogni 10 anni) fino a tendere a zero nel lontanissimo futuro.

Infatti dalla relazione (0.2) dovendo essere τ costante per definizione sarà anche costante il rapporto $\dfrac{c\,R^2}{m}$ ma diminuendo nel tempo m per ipotesi ed aumentando nel tempo R per considerazioni analoghe a quelle illustrate in Appendice 4 allora per la costanza di tale rapporto dovrà necessariamente diminuire nel tempo la velocità della luce c.

Altre conseguenze dell'ipotesi assunta , cioè che ogni corpo perda massa nel tempo, sul sistema solare sono sviluppate nel seguito.

2 – Variazione nel tempo delle grandezze orbitali dei pianeti del sistema solare

Ci riferiamo ad un Pianeta *P*, di massa *m*, che ruota con velocità v_{riv} intorno al Sole, di massa *M*, descrivendo, in prima approssimazione, un cerchio di raggio *r*.

Per quanto supposto nella premessa, cioè che sia m che *M* diminuiscono nel tempo, avremo che le grandezze orbitali varieranno nel tempo.

Pertanto per calcolare l'andamento nel tempo del raggio orbitale *r(t)*, della velocità orbitale $v_{riv}(t)$, dell'accelerazione orbitale $a_{riv}(t)$ e del periodo di rivoluzione $T_{riv}(t)$ del Pianeta *P* al variare della massa solare $M = M_0 \cdot e^{-t/\tau}$ (variazione dovuta all'energia elettromagnetica e gravitazionale irradiata) e della massa del Pianeta $m = m_0 \cdot e^{-t/\tau}$ (variazione dovuta all'energia gravitazionale irradiata) procediamo come illustrato in Appendice 1.

I risultati raggiunti sono i seguenti [vedi in Appendice 1 le relazioni (A1.9bis), (A1.10bis), (A1.11bis) e (A1.12bis)]:

$$r = r_0 \cdot e^{3t/\tau} \tag{1.1}$$

$$v_{riv} = v_{riv,0} \cdot e^{-2t/\tau} \tag{1.2}$$

$$a_{riv} = a_{riv,0} \cdot e^{-7t/\tau} \tag{1.3}$$

$$T_{riv} = T_{riv,0} \cdot e^{5t/\tau} \tag{1.4}$$

dove r_0, $v_{riv,0}$, $a_{riv,0}$ e $T_{riv,0}$ sono i valori per *t=0* (oggi).

Si può subito notare, analizzando le (1.1) e (1.4), che i Pianeti si allontanano sempre più dal Sole, descrivendo nel tempo orbite di raggio e periodo sempre più grandi.

In Tabella 1 sono riportati i valori delle grandezze orbitali della Terra in funzione del tempo, variabile da oggi (*t=0*) a 4500 milioni di anni fà (valori negativi) e da oggi (*t=0*) a 2000 milioni di anni futuri (valori positivi), calcolati utilizzando le relazioni (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) e ponendo $r_0 = 150 \cdot 10^6\ km$, $v_{riv,0} = 30\ km/\sec$, $a_{riv,0} = 6 \cdot 10^{-3}\ m/\sec^2$ e $T_{riv,0} = 365\ giorni$.

In Tabella 1 vengono riportati anche i valori che il Raggio del Sole R_{Sole} assume nel tempo, calcolati con la relazione (vedi in Appendice 5 la relazione A5.9):

$$R_{Sole} = R_{Sole,0} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau}} \tag{1.5}$$

dove $R_{Sole,0} = 0{,}7 \cdot 10^6\ km$ è il valore per *t=0* (oggi), ed i valori dell'accelerazione di gravità sulla Terra $a_{gravità}$, calcolati con la relazione (2.4) del prossimo paragrafo 2.

Analizzando i valori riportati in Tabella 1 si può notare quanto segue.

Circa 4,5 miliardi di anni fà, i valori di r (distanza Terra-Sole) e di R_{Sole} (raggio del Sole) erano pressoché uguali a 200.000 km (vedi anche figura 4); questa identità avvalorarebbe la teoria che sostiene che la Terra si sia staccata dal Sole in quel periodo.

Circa 3,2 miliardi di anni fà, l' accelerazione orbitale a_{riv} e quella di gravità sulla Terra $a_{gravità}$ erano pressoché uguali a 398 m/sec^2 (vedi anche fig.1) ed eventuali masse staccatesi dalla Terra per cause esterne (meteoriti) potevano trovarsi in posizione di equilibrio dinamico tra l'attrazione esercitata dalla Terra e quella esercitata dal Sole.

Pertanto in questa particolare situazione potrebbe essere nata la Luna.

Tale ipotesi può essere ulteriormente suffragata dall'analisi della Tabella 3 dove sono riportati i valori delle grandezze orbitali della Luna in funzione del tempo, da oggi (*t=0*) a 4.500 milioni di anni fà (valori negativi) e da oggi (*t=0*) a 2.000 milioni di anni futuri (valori positivi), calcolati utilizzando la relazione (1.1), le relazioni $m_{Luna} = m_{Luna,0} \cdot e^{-t/\tau}$, $R_{Luna} = R_{Luna,0} \cdot e^{t/\tau}$, $R_{Terra} = R_{Terra,0} \cdot e^{\frac{2 \cdot t}{3 \cdot \tau}}$ e ponendo $m_{Luna,0} = 6 \cdot 10^{22}\ kg$, $r_0 = 380.000\ km$, $R_{Terra,0} = 6.378\ km$ e $R_{Luna,0} = 1.735\ km$.

Infatti analizzando la Tabella 3 e la figura 3, si può notare che circa 3.200 milioni di anni fà la distanza Terra-Luna era di circa 3.100 km, di poco superiore alla somma (indicata con R_{tl}) del raggio terrestre (2.195 km) e del raggio lunare (350 km).

Circa 1 miliardo di anni fà, essendo la Terra a circa 1/5 dell'attuale distanza dal Sole, il flusso elettromagnetico solare sulla superficie terrestre era di conseguenza 25 volte più grande di quello attuale ed anche la gravità terrestre era circa 3 volte quella attuale pertanto la vita era possibile solo in acqua in quanto essa offriva uno schermaggio alle radiazioni e diminuiva (per la spinta idraulica di Archimede) il peso del corpo vivente.

Inoltre per la Terra abbiamo che in 1 anno la variazione del Periodo di rivoluzione è, differenziando la (1.4) e ricordando che $T_{riv,0} = 365 giorni = 31536000 \sec$,:

$$\Delta T_{riv} = T_{riv,0} \frac{5 \cdot \Delta t}{\tau} = 31536000 \sec \cdot \frac{5 \cdot 1\, anno}{2 \cdot 10^9\, anni} = 0,08 \ \sec \qquad (1.6)$$

Infine circa 100 milioni di anni fà, essendo la Terra a circa 130 milioni di km dal Sole e ricevendo un flusso luminoso specifico di circa $1{,}3\,(=(\frac{150}{130})^2)$ volte maggiore di quello attuale, la temperatura media sulla Terra era di circa 20 °C più alta di quella di oggi.

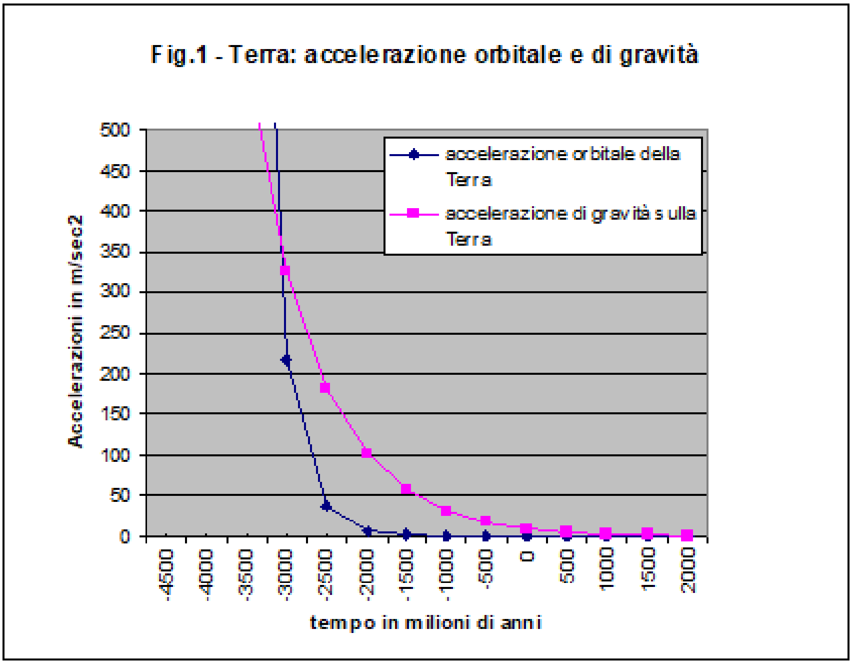
In formule:

$$T_{emp,-100} = T_{emp,oggi} \cdot \left(\left(\frac{150}{130} \right)^2 \right)^{1/4} = 293\,°K \cdot \left(\frac{150}{130} \right)^{1/2} = 293\,°K \cdot 1,07 = 313\,°K \qquad (1.7)$$

Espressione derivata dalla seguente equazione di equilibrio termodinamico della Terra tra il flusso luminoso ricevuto dal Sole e quello riemesso verso lo spazio circostante:

$$P_{Sole}\,\frac{\pi\,R_T^2}{4\pi\,r_{ST}^2}=\sigma\,T^4\,4\pi\,R_T^2 \quad\Rightarrow\quad T\propto r_{ST}^{-1/2} \tag{1.8}$$

Tabella1							
Valori delle grandezze orbitali della **Terra** in funzione del tempo *t*							
τ =	2000	10^6 anni					
t	*m*	*r*	*RSole*	*vriv*	*ariv*	*agravità*	*Triv*
10^6 anni	10^{24} kg	10^6 km	10^6 km	km/sec	m/sec^2	m/sec^2	giorni
-4500	56,9	**0,2**	**0,2**	2700,5	41523	1875	0,00
-4000	44,3	0,4	0,3	1637,9	7216	1046	0,02
-3500	34,5	0,8	0,3	993,5	1254	584	0,06
-3172	29,3	1,3	0,3	715,7	**398**	**398**	0,13
-3000	26,9	1,7	0,3	602,6	218	326	0,20
-2500	20,9	3,5	0,4	365,5	38	182	0,70
-2000	16,3	7,5	0,4	221,7	7	101	**2,5**
-1500	12,7	15,8	0,5	134,5	1,1	57	9
-1000	9,9	33,5	0,5	81,5	0,2	32	30
-500	7,7	70,9	0,6	49,5	0,03	18	105
-200	6,6	111,1	0,7	36,6	0,01	12	221
-100	6,3	129,1	0,7	33	0,01	11	284
0	**6**	**150**	**0,7**	**30**	**0,01**	**9,8**	**365**
100	5,7	174,3	0,7	27,1	0,00	9	469
200	5,4	202,5	0,7	24,6	0,00	8	602
500	4,7	317,6	0,8	18,2	0,00	5	1274
1000	3,6	672,3	0,9	11,0	0,00	3	4447
2000	2,2	3012,8	1,2	4,1	0,00	1	54171



3 – Variazione nel tempo delle grandezze rotazionali dei pianeti del sistema solare

Ci riferiamo a un pianeta P, di massa m e raggio R, che ruota con velocità periferica v_{rot} intorno al proprio asse passante per il baricentro.

Per quanto supposto nella premessa, cioè che m diminuisce nel tempo, e per quanto dimostrato in Appendice A4, cioè che R aumenta nel tempo, avremo che le grandezze rotazionali del Pianeta P varieranno nel tempo.

Pertanto per calcolare l'andamento nel tempo della velocità angolare $\omega_{rot}(t) = 2\pi / T_{rot}(t)$, della velocità rotazionale $v_{rot}(t)$, dell'accelerazione rotazionale $a_{rot}(t)$ e del periodo di rotazione $T_{rot}(t)$ del Pianeta P al variare della sua massa $m = m_0 \cdot e^{-t/\tau}$ e del suo Raggio $R = R_0 \cdot e^{\frac{2\cdot t}{3\cdot\tau}}$ (vedi Appendice A4), procediamo come illustrato in Appendice 2.

I risultati raggiunti sono i seguenti (vedi in Appendice 2 le relazioni (A.2.5), (A2.6), (A2.7) e (A2.8)):

$$T_{rot} = T_{rot,0} \cdot e^{\frac{t}{3\cdot\tau}} \tag{2.1}$$

$$v_{rot} = v_{rot,0} \cdot e^{\frac{t}{3\cdot\tau}} \tag{2.2}$$

$$a_{rot} = a_{rot,0} = costante \tag{2.3}$$

$$a_{gravità} = G\,\frac{m}{R^2} = G\,\frac{m_0 \cdot e^{-t/\tau}}{R_0^2 \cdot e^{\frac{4\cdot t}{3\cdot\tau}}} = a_{gravità,0} \cdot e^{-\frac{7\cdot t}{3\cdot\tau}} \tag{2.4}$$

dove $T_{rot,0}$, $v_{rot,0}$, $a_{rot,0}$, $a_{gravità,0}$, m_0, R_0 sono i valori per *t=0* (oggi) e $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N\ m^2}{kg^2}$ è la costante gravitazionale.

Si può subito notare, analizzando la (2.1), che il periodo di rotazione dei Pianeti aumenta nel tempo e quindi i Pianeti rallentano.

In Tabella 2 sono riportati i valori delle grandezze rotazionali della Terra in funzione del tempo da oggi (*t=0*) a 4.500 milioni di anni fà (valori negativi) e da oggi (*t=0*) a 2.000 milioni di anni futuri (valori positivi), calcolati utilizzando le relazioni (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) e ponendo:

$T_{rot,0} = 1\ giorno$, $v_{rot,0} = 0{,}46\ km/\sec$,

$a_{rot,0} = 0{,}03\ m/\sec^2$ e $a_{gravità,0} = 9{,}8\ m/\sec^2$.

Come si può notare confrontando le Tabelle 1 e 2 e vedendo anche la figura 2, circa 2,5 miliardi di anni fà, i periodi di rivoluzione e di rotazione terrestre erano pressoché uguali a 0,7 giorni e ciò comportava che la Terra, esponendo sempre la stessa faccia al Sole ad una piccola distanza di 3,5 milioni di km, avesse temperature altissime sull'emisfero illuminato e bassissime sull'emisfero buio.
Inoltre per la Terra abbiamo che in 1 anno la variazione del Periodo di rotazione è, differenziando la (2.1) e ricordando che $T_{rot,0} = 1\ giorno = 86400 \sec$,:

$$\Delta T_{rot} = T_{rot,0} \frac{\Delta t}{3\tau} = 86400 \sec \cdot \frac{1\ anno}{3 \cdot 2 \cdot 10^9\ anni} = 1,5 \cdot 10^{-5} \ \ \sec \qquad (2.5)$$

ovvero 1,5 millisecondi al secolo!

Tabella 2								
Valori delle grandezze rotazionali (su se stessa) della **Terra** in funzione del Tempo *t*								
$\tau =$	2000	10^6 anni						
t 10^6 anni	*m* 10^{24} kg	*R* km	*ωrot* 10^{-5} rad/sec	*vrot* km/sec	*arot* m/sec^2	*agravità* m/sec^2	*Trot* giorni	*Trot* ore
-4500	56,9	1423	15,37	0,22	0,03	1875	0,5	11
-4000	44,3	1681	14,14	0,24	0,03	1046	0,5	12
-3700	38,2	1858	13,45	0,25	0,03	737	0,5	13
-3500	34,5	1986	13,01	0,26	0,03	584	0,6	13
-3000	26,9	2346	11,97	0,28	0,03	326	0,6	15
-2000	16,3	3275	10,13	0,33	0,03	101	**0,7**	17
-1000	9,9	4570	8,58	0,39	0,03	32	0,8	20
-500	7,7	5399	7,89	0,43	0,03	18	0,9	22

-200	6,6	5967	7,51	0,45	0,03	12	1,0	23
-100	6,3	6169	7,38	0,46	0,03	11	1,0	24
0	**6**	**6378**	**7,26**	**0,46**	**0,03**	**9,8**	**1,0**	**24**
100	5,7	6594	7,14	0,47	0,03	9	1,0	24
200	5,4	6818	7,02	0,48	0,03	8	1,0	25
500	4,7	7535	6,68	0,50	0,03	5	1,1	26
1000	3,6	8901	6,15	0,55	0,03	3	1,2	28
2000	2,2	12423	5,20	0,65	0,03	1	1,4	33

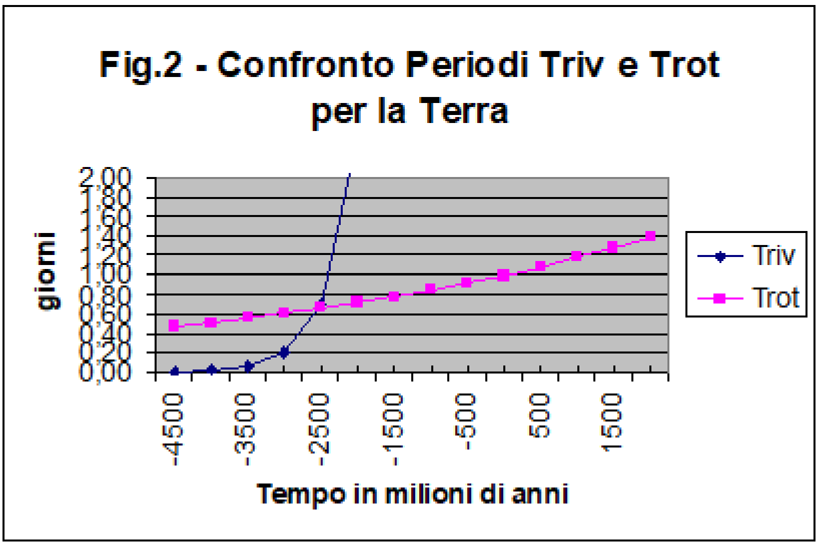


Tabella 3					
Valori delle grandezze orbitali (intorno alla Terra) della Luna in funzione del Tempo *t*					
$\tau =$	2000	10^6 anni			
t 10^6 anni	*MLuna* 10^{22} kg	*r* 10^3 km	*Rterra* km	*Rluna* km	*Rtl* 10^3 km
-4500	-	-	1423	-	1,4
-4000	-	-	1681	-	1,7
-3500	-	-	1986	-	2,0
-3200	**29,7**	**3,1**	**2195**	**350**	**2,5**
-3000	26,9	4,2	2346	387	2,7
-2000	16,3	18,9	3275	638	3,9
-1000	9,9	84,8	4570	1052	5,6
-500	7,7	179,5	5399	1351	6,8
-200	6,6	281,5	5967	1570	7,5
-100	6,3	327,1	6169	1650	7,8
0	**6**	**380**	**6378**	**1735**	**8,1**
100	5,7	441,5	6594	1824	8,4
200	5,4	512,9	6818	1917	8,7
500	4,7	804,5	7535	2228	9,8
1000	3,6	1703,0	8901	2861	11,8
2000	2,2	7632,5	12423	4716	17,1

Fig.3 - Confronto tra distanza Terra-Luna (r) e somma raggio Terra e raggio Luna (Rtl)

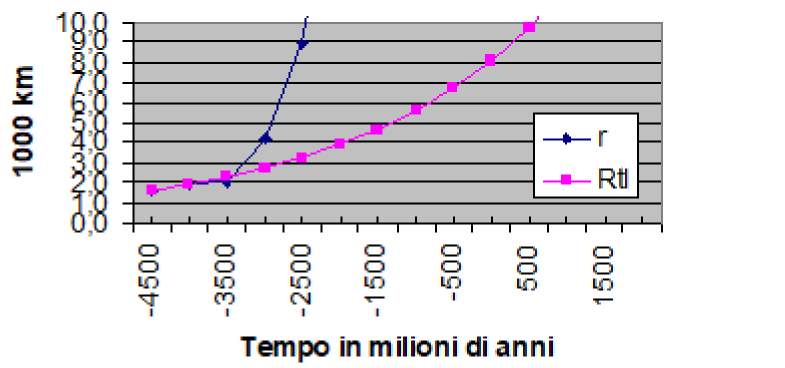
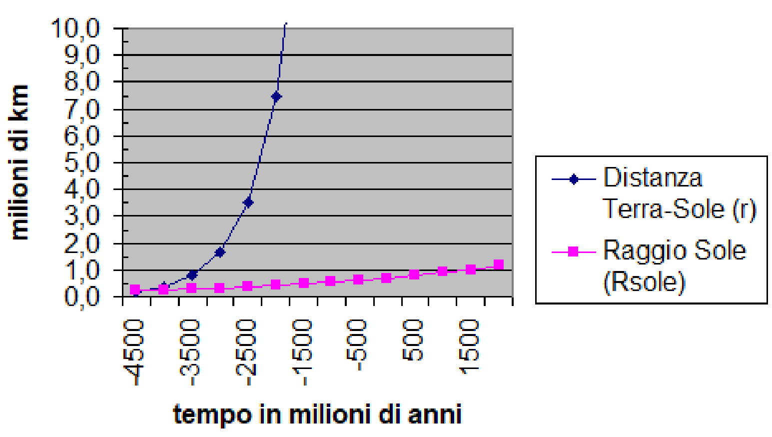


Fig.4 - Confronto tra la distanza Terra-Sole ed il raggio del Sole



Bibliografia

Allievi P., Allievi F. (2018). Cataclysms & Reconstruction, Science & Technology,- Roma, Aracne.

Allievi P. (2011). La luce rallenta, teoria corpuscolare della gravitazione - CompoMat

Allievi P.(2013). Cataclismi e Ricostruzione , Scienza e Tecnica, CompoMat

Approvato su parere favorevole di Danilo Pelusi .

Appendice A1- Calcolo dell'andamento temporale delle grandezze orbitali dei pianeti del sistema solare

Il moto di un Pianeta *P*, di massa *m*, che ruota con velocità v_{riv} intorno al Sole, di massa *M*, descrivendo, in prima approssimazione, un cerchio di raggio *r* (vedi fig.A1.1), è regolato dalle seguenti leggi della dinamica:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{riv} \tag{A1.1}$$

$$\vec{M}_S = \frac{d\vec{b}_S}{dt} \tag{A1.2}$$

dove:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{A1.3}$$

è la forza di attrazione gravitazionale che il Sole esercita sul Pianeta ed è diretta verso il centro del Sole,

$$a_{riv} = \frac{v_{riv}^2}{r} \tag{A1.4}$$

è l'accelerazione centripeta a cui è soggetto il pianeta *P*,

$$\vec{M}_S = 0 \tag{A1.5}$$

è il momento della forza gravitazionale rispetto al centro del Sole,

$$b_S = m \cdot v_{riv} \cdot r \tag{A1..6}$$

è il momento della quantità di moto mv_{riv} del Pianeta rispetto al centro del Sole.

Sostituendo le (A1.3) e (A1.4) nella (A1.1) otteniamo:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_{riv}^2}{r} \tag{A1.7}$$

o anche semplificando:

$$GM = v_{riv}^2\, r \tag{A1.7bis}$$

mentre con la condizione (A1.5), la (A1.2) esprime che la derivata rispetto al tempo di $\vec{b}_S$ è nulla per cui deve essere:

$\vec{b}_S = \cos\tan te = \vec{b}_{S0}(valore\ iniziale)$.

Pertanto quest'ultima relazione diviene, avendo presente la (A1.6):

$$b_S = mv_{riv}r = b_{S0} = m_0 v_{riv,0} r_0 = \cos t \tag{A1.8}$$

Sapendo che la velocità di rivoluzione v_{riv} è uguale al rapporto tra lo spazio $2\pi r$, percorso durante il periodo T_{riv} di rivoluzione del Pianeta intorno al Sole, e T_{riv} stesso cioè $v_{riv} = \dfrac{2\pi r}{T_{riv}}$ e sostituendo tale valore nella (A1.7bis), giungiamo alla seguente 3ª legge di Keplero ("il quadrato del periodo di rivoluzione T_{riv} attorno al Sole è proporzionale alla terza potenza di r") :

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T_{riv}^2} = \text{costante} \qquad \text{(A1.7ter)}$$

La relazione (A1.8) invece esprime la 2ª Legge di Keplero ("il raggio vettore r descrive aree dA uguali in intervalli di tempo dt uguali", cioè il rapporto tra dA e dt è costante):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\frac{(v_{riv} \cdot dt) \cdot r}{2}}{dt} = \frac{v_{riv} \cdot dt \cdot r}{2 \cdot dt} = \frac{v_{riv} \cdot r}{2} = \cos\tan te \qquad \text{(A1.8bis)}$$

Utilizzando le (A1.7 bis) e (A1.8), che esprimono in modo più esplicito le leggi della dinamica, è possibile ricavare facilmente r e v_{riv} :

$$r = \frac{b_{So}^2}{G \cdot M \cdot m^2} \qquad \text{(A1.9)}$$

$$v_{riv} = \frac{G \cdot M \cdot m}{b_{S0}} \qquad \text{(A1.10)}$$

Con tali valori possiamo esplicitare l'accelerazione centripeta data dalla (A1.4):

$$a_{riv} = \frac{v_{riv}^2}{r} = \left(\frac{G\,M\,m}{b_{S0}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{b_{S0}^2}{G\,M\,m^2}} = \frac{G^3 M^3 m^4}{b_{S0}^4} \qquad \text{(A1.11)}$$

e il Periodo T_{riv} di rivoluzione del Pianeta intorno al Sole:

$$T_{riv} = \frac{2\,\pi\,r}{v_{riv}} = 2\pi \cdot \frac{b_{S0}^2}{G\,M\,m^2} \cdot \frac{1}{\frac{G\,M\,m}{b_{S0}}} = \frac{2\,\pi\,b_{S0}^3}{G^2 M^2 m^3} \qquad \text{(A1.12)}$$

Dato che per ipotesi la massa solare M e quella del Pianeta m variano nel tempo rispettivamente con le seguenti leggi $M = M_0 \cdot e^{-t/\tau}$ e $m = m_0 \cdot e^{-t/\tau}$, ponendo tali valori nelle relazioni (A1.9), (A1.10), (A1.11) e (A1.12) abbiamo le seguenti nuove espressioni:

$$r = \frac{b_{So}^2}{G \cdot M_0 \cdot m_0^2} \cdot e^{3t/\tau} = r_0 \cdot e^{3t/\tau} \qquad \text{(A1.9 bis)}$$

$$v_{riv} = \frac{G \cdot M_0 \cdot m_0}{b_{S0}} \cdot e^{-2t/\tau} = v_{riv,0} \cdot e^{-2t/\tau} \qquad \text{(A1.10 bis)}$$

$$a_{riv} = \frac{G^3 M_0^3 m_0^4}{b_{S0}^4} \cdot e^{-7t/\tau} = a_{riv,0} \cdot e^{-7t/\tau} \qquad \text{(A1.11 bis)}$$

$$T_{riv} = \frac{2\pi b_{S0}^3}{G^2 M_0^2 m_0^3} \cdot e^{5t/\tau} = T_{riv,0} \cdot e^{5t/\tau} \qquad \text{(A1.12 bis)}$$

dove:

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, $M_0 = 2 \cdot 10^{30}\ kg$, e, con riferimento al Pianeta Terra, $m_0 = 6 \cdot 10^{24}\ kg$, $r_0 = \dfrac{b_{So}^2}{G \cdot M_0 \cdot m_0^2} = 150 \cdot 10^6\ km$,

$v_{riv,0} = \dfrac{G \cdot M_0 \cdot m_0}{b_{S0}} = 30 \dfrac{km}{\sec}$, $a_{riv,0} = \dfrac{G^3 M_0^3 m_0^4}{b_{S0}^4} = 6 \cdot 10^{-3} \dfrac{m}{\sec^2}$

e $T_{riv,0} = \dfrac{2\pi b_{S0}^3}{G^2 M_0^2 m_0^3} = 365$ *giorni* sono i valori per *t=0* (oggi).

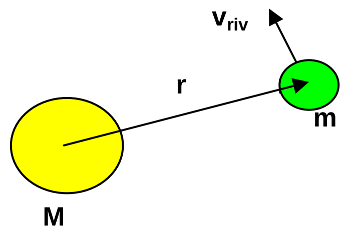


Fig.A1.1

Appendice A2- Calcolo dell'andamento temporale delle grandezze rotazionali dei pianeti del sistema solare

Il moto rotazionale di un Pianeta P, di massa m e raggio R, che ruota con Periodo T_{rot}, velocità angolare $\omega_{rot} = \dfrac{2\pi}{T_{rot}}$ e quindi con velocità periferica $v_{rot} = \omega_{rot} \cdot R$ intorno al proprio asse passante per il baricentro (vedi fig. A2.1), è regolato dalla seguente legge della dinamica:

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{b}_G}{dt} \qquad \text{(A2.1)}$$

dove:

$$\vec{M}_G = 0 \qquad \text{(A2.2)}$$

è il momento delle forze gravitazionali rispetto al baricentro del Pianeta,

$$b_G = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \omega_{rot} \cdot R^2 \qquad \text{(A2.3)}$$

è il momento angolare del Pianeta rispetto al suo asse di rotazione.

Con la condizione (A2.2), la (A2.1) esprime che la derivata rispetto al tempo di $\vec{b}_G$ è nulla per cui deve essere $\vec{b}_G = \text{costante} = \vec{b}_{G,0}(\textit{valore iniziale})$.

Pertanto quest'ultima relazione diviene, avendo presente la (A2.3):

$$b_G = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \omega_{rot} \cdot R^2 = \text{costante} = b_{G,0} = \frac{2}{5} \cdot m_0 \cdot \omega_{rot,0} \cdot R_0^2 \qquad \text{(A2.4)}$$

Utilizzando la (A2.4) e ricordando che $m = m_0 \cdot e^{-t/\tau}$ (per ipotesi) ed $R = R_0 \cdot e^{\frac{2 \cdot t}{3 \cdot \tau}}$ (per quanto dimostrato in Appendice 4 formula (A4.13')), è possibile ricavare ω_{rot} e quindi T_{rot} , v_{rot} e a_{rot} :

$$\omega_{rot} = \frac{5}{2} \cdot \frac{b_{G,0}}{m\, R^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{b_{G,0}}{m_0 \cdot e^{-t/\tau}\; R_0^2 \cdot e^{\frac{4 \cdot t}{3 \cdot \tau}}} = \omega_{rot,0} \cdot e^{-\frac{t}{3 \cdot \tau}} \qquad \text{(A2.5)}$$

$$T_{rot} = \frac{2\pi}{\omega_{rot}} = \frac{2\pi}{\omega_{rot,0}} \cdot e^{\frac{t}{3 \cdot \tau}} = T_{rot,0} \cdot e^{\frac{t}{3 \cdot \tau}} \qquad \text{(A2.6)}$$

$$v_{rot} = \frac{2\pi R}{T_{rot}} = \frac{2\pi R_0 \cdot e^{2t/3\tau}}{T_{rot,0} \cdot e^{t/3\tau}} = \frac{2\pi R_0}{T_{rot,0}} \cdot e^{\frac{t}{3\tau}} = v_{rot,0} \cdot e^{\frac{t}{3\tau}} \qquad \text{(A2.7)}$$

$$a_{rot} = \omega_{rot}^2 \cdot R = \omega_{rot,0}^2 \cdot e^{-2t/3\tau} \cdot R_0 \cdot e^{2t/3\tau} = \omega_{rot,0}^2 \cdot R_0 = a_{rot,0} = \text{cost.} \qquad \text{(A2.8)}$$

dove, con riferimento al pianeta Terra:

$m_0 = 6 \cdot 10^{24}\, kg$, $R_0 = 6.378\ km$

$\omega_{rot,0} = \frac{5}{2} \cdot \frac{b_{G,0}}{m_0\, R_0^2} = 7{,}26 \cdot 10^{-5}\ rad/\sec$, $T_{rot,0} = 2\pi/\omega_{rot,0} = 1 giorno$

$v_{rot} = 2\pi R_0 / T_{rot,0} = 0{,}46\ km/\sec$ e $a_{rot,0} = \omega_{rot,0}^2 \cdot R_0 = 0{,}03\ m/\sec^2$

sono i valori per *t=0* (oggi).

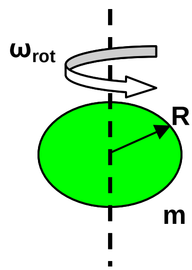


Fig.A2.1

Appendice A3- Calcolo della costante di tempo

Supponiamo di avere un corpo di massa *M* ed un nucleone di massa *m* e raggio *R* a distanza *r* (vedi fig. A3.1).

Per ipotesi il corpo *M* emette in un intervallo di tempo *dt* una quantità di massa *dM*, a cui corrisponde una quantità di energia $dM \cdot c^2$, in tutte le direzioni.

L'energia che in detto intervallo di tempo colpirà il nucleone è proporzionale al rapporto tra l'area esposta al flusso πR^2 del nucleone e la superficie $4\pi r^2$ della sfera ideale di centro nel baricentro di *M* e raggio *r*:

$$dE = dM \cdot c^2 \cdot \frac{\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{c^2 R^2}{4} \cdot \frac{dM}{r^2} \qquad \text{(A3.1)}$$

La quantità di moto *dp* associata a tale energia *dE* è:

$$dp = \frac{dE}{c} \qquad \text{(A3.2)}$$

dove *c* è la velocità della luce.

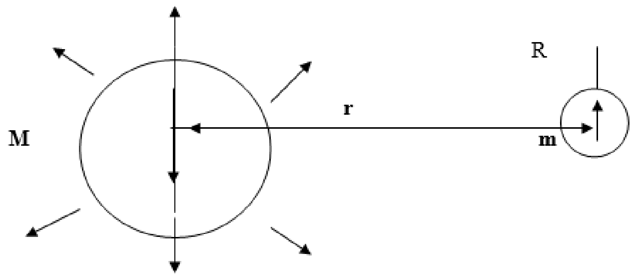


Fig. A3.1

La forza attrattiva che agisce su m, per la legge della dinamica, sarà il rapporto tra la quantità di moto *dp* e l'intervallo di tempo *dt*:

$$F_g = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{c\,R^2}{4} \cdot \frac{dM}{dt} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{A3.3}$$

D'altronde la forza attrattiva gravitazionale che agisce sul nucleone è anche, per la nota relazione di Newton:

$$F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{A3.4}$$

Dall'uguaglianza delle relazioni (A3.3) e (A3.4) abbiamo che deve essere (essendo dM negativo dato che il corpo perde massa):

$$-\frac{c \cdot R^2}{4} \cdot \frac{dM}{dt} = G \cdot M \cdot m \tag{A3.5}$$

e anche:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{4\,G\,m}{c \cdot R^2} \cdot M = -\frac{M}{\tau} \qquad \text{(A3.6)}$$

essendo:

$$\tau = \frac{c\,R^2}{4\,G\,m} \qquad \text{(A3.7)}$$

Integrando l'equazione differenziale (A3.6) abbiamo:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \qquad \text{(A3.8)}$$

ovvero:

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{t}{\tau} \qquad \text{(A3.9)}$$

ricordando la definizione di logaritmo naturale la (A3.9) assume anche la seguente forma:

$$\frac{M}{M_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(A3.10)}$$

infine giungiamo alla seguente relazione per *M(t)*:

$$M(t) = M_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(A3.11)}$$

dove M_0 è il valore della massa al tempo t = 0.

Appendice A4- Variazione del volume *V* di un pianeta al variare della sua massa *M*

I pianeti sono formati da atomi.

La loro stabilità è dovuta a due azioni uguali e contrastanti: la forza di compattazione gravitazionale F_g, che tende a far collassare il corpo celeste, e la forza resistente di natura coulombiana F_C, che gli atomi si scambiano tra loro e che, essendo repulsiva, si oppone al collasso.

Per la stabilità dei Pianeti deve essere dunque:

$$F_g = F_C \qquad \text{(A4.0)}$$

L'ipotesi di cui alla Premessa (punto 0) comporta che i nuclei degli atomi costitenti il corpo celeste perdano naturalmente e continuamente massa sotto forma di energia gravitazionale che si disperde radialmente al di fuori del corpo verso lo spazio circostante.

In tali condizioni la forza di compattazione gravitazionale F_g, che è proporzionale al quadrato della massa *M* del corpo celeste ed inversamente al quadrato del suo raggio *R* cioè:

$$F_g \propto G\frac{M^2}{R^2} \qquad \text{(A4.1)}$$

dove: $G = 6.67\cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$ è la costante gravitazionale, diminuirà nel tempo a causa della diminuizione di *M(t)*.

Indicata con ΔM la perdita di massa che il corpo subisce nell'intervallo di tempo Δt, il decremento della forza di compattazione è:

$$\Delta F_g \propto G\frac{M^2}{R^2}\cdot\left(2\frac{\Delta M}{M} - 2\frac{\Delta R}{R}\right) \qquad \text{(A4.2)}$$

Facendo il rapporto tra la (A4.2) e la (A4.1), otteniamo il decremento relativo della forza di compattazione:

$$\frac{\Delta F_g}{F_g} = 2 \cdot \frac{\Delta M}{M} - 2 \cdot \frac{\Delta R}{R} \qquad \text{(A4.3)}$$

Se ora consideriamo il Pianeta costituito di *N* atomi di peso atomico *A* e numero atomico *Z*, l'energia potenziale coulombiana $U_{p,c}$ è proporzionale ad *N* ed al quadrato della carica del nucleo $Z\,e$ ed inversamente proporzionale alla distanza interatomica $2r$:

$$U_{p,C} = \frac{N}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{(Z\,e)^2}{2\,r} \qquad \text{(A4.4)}$$

dove: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$ è la costante dielettrica del vuoto, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ il valore della carica dell'elettrone e r il raggio atomico.

Poiché N (= M/A) è anche uguale al rapporto tra il volume totale ed il volume atomico, cioè:

$$N = \frac{4/3\,\pi\,R^3}{4/3\,\pi\,r^3} = \frac{R^3}{r^3} \qquad \text{(A4.5)}$$

possiamo esprimere *r* in funzione di *N* e *R*, cioè:

$$r = \frac{R}{N^{1/3}} \qquad \text{(A4.6)}$$

Pertanto l'equazione (A4.4) diventa:

$$U_{p,C} = \frac{N}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2\,e^2}{2 \cdot \frac{R}{N^{1/3}}} = \frac{N^{4/3}}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2\,e^2}{R} = \frac{e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{4/3}} \cdot \frac{M^{4/3}}{R} \qquad \text{(A4.4')}$$

Come abbiamo già detto, alla forza di compattazione gravitazionale, gli atomi che formano il Pianeta oppongono una forza resistente di natura Coulombiana (elettrica) F_C che è esprimibile come il gradiente dell'energia potenziale coulombiana $U_{p,c}$, cioè:

$$F_C = -gradiente\ (U_{p,C}) = \frac{N^{4/3}}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{4/3}} \cdot \frac{M^{4/3}}{R^2} \qquad (A4.7)$$

In realtà la forza resistente di natura Coulombiana F_C, per tener conto delle forze di dipolo, è esprimibile come:

$$F_C \propto \frac{M^{4/3}}{R^n} \qquad (A4.7')$$

dove n è uguale o maggiore di 3.

In conseguenza della suddetta perdita di massa ΔM, diminuendo la forza di compattazione gravitazionale e rimanendo inizialmente inalterata la forza repulsiva coulombiana, gli atomi si allontanano tra di loro finché il decremento ΔF_C non uguagli il ΔF_g.

Il decremento di forza coulombiana ΔF_C è facilmente calcolabile come segue, differenziando la (A4.7'):

$$\Delta F_C \propto \frac{M^{4/3}}{R^n} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta M}{M} - n \cdot \frac{\Delta R}{R}\right) \qquad (A4.8)$$

Facendo il rapporto tra le equazioni (A4.8) e (A4.7'), si ha il decremento relativo della forza coulombiana:

$$\frac{\Delta F_C}{F_C} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta M}{M} - n \cdot \frac{\Delta R}{R} \qquad (A4.9)$$

Uguagliando $\frac{\Delta F_g}{F_g}$ e $\frac{\Delta F_C}{F_C}$ cioè le equazioni (A4.3) e (A4.9), abbiamo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta M}{M} = (2-n) \cdot \frac{\Delta R}{R} \qquad (A4.10)$$

e quindi:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{2}{3 \cdot (2-n)} \cdot \frac{\Delta M}{M} \qquad \text{(A4.11)}$$

Integrando l'equazione differenziale (A4.11), otteniamo:

$$\ln \frac{R}{R_0} = \frac{2}{3\,(2-n)} \cdot \ln \frac{M}{M_0} = \ln \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{2}{3(2-n)}} \qquad \text{(A4.12)}$$

dove M_0 ed R_0 sono rispettivamente il valore della massa e del raggio del corpo celeste al tempo $t = 0$,

e finalmente arriviamo alla legge di variazione del raggio R di un Pianeta al variare della sua massa M:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{2}{3(2-n)}} \qquad \text{(A4.13)}$$

Per la Terra ponendo n=3 e $M = M_0 \cdot e^{-t/\tau}$ la (A4.13) diviene: $\frac{R}{R_0} = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-\frac{2}{3}} = e^{\frac{2t}{3\tau}}$

Con n uguale o maggiore di 3, come possiamo vedere dalle equazioni (A4.13′) e (A4.11), ad una diminuizione della massa M di un corpo celeste, cioè ΔM negativo, abbiamo un aumento del raggio R, cioè ΔR positivo.

Essendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ed avendo presente la (A4.13′), allora il Volume V del Pianeta varia con la sua massa M come segue:

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-2} = \left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \qquad \text{(A4.14)}$$

essendo V_0 il volume al tempo $t = 0$.

La densità del Pianeta risulta essere, avendo presente la (A4.14):

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{M}{V}\cdot\frac{1}{\frac{M_0}{V_0}}=\frac{M}{M_0}\cdot\frac{V_0}{V}=\frac{M}{M_0}\cdot\left(\frac{M}{M_0}\right)^2=\left(\frac{M}{M_0}\right)^3 \qquad \text{(A4.15)}$$

dove $\rho_0=\frac{M_0}{V_0}$ è la densità al tempo $t = 0$.

Appendice A5- Variazione del raggio *R* del Sole nel tempo *t*

Consideriamo il Sole di volume V, raggio R e massa M, come un gas perfetto la cui equazione di stato è:

$$pV = N\,kT \qquad \text{(A5.1)}$$

dove p è la pressione, k=1,38 10-23 J/K la costante di Boltzmann, T la temperatura, $N=M/m_p$ il numero di particelle e $m_p = 1.66\cdot 10^{-27}\,kg$ la massa del protone.

La forza di compattazione gravitazionale è:

$$F \propto G\,\frac{M^2}{R^2} \qquad \text{(A5.2)}$$

dove $G = 6.67\cdot 10^{-11}\ N\,m^2 kg^{-2}$ è la costante gravitazionale.

La pressione media nel Sole è pertanto:

$$p \propto \frac{F}{4\pi R^2} \propto \frac{G}{4\pi}\frac{M^2}{R^4} \qquad \text{(A5.3)}$$

Considerando il Sole come un sistema con $\Delta Q = Q_{prodotta} - Q_{emessa} = 0$, la sua temperatura T è legata al suo volume V nel seguente modo:

$$T \propto \frac{1}{V^{\gamma+1}} \qquad \text{A5.4)}$$

dove, essendo la temperatura molto elevata e conseguentemente tanti i gradi di libertà (traslazionali, rotazionali, vibrazionali, etc.) f delle molecole costituenti il Sole, il rapporto dei calori specifici, a pressione e volume costante, vale:

$\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{5+f}{3+f} \to 1$ (ricordiamo che a temperature ambientali γ vale 1,4 per *H* e 1,66 per *He*).

Differenziando le equazioni (A5.1), (A5.3) e (A5.4), otteniamo, essendo *N*=*cost*, le seguenti 3 nuove equazioni:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} \qquad \text{(A5.1')}$$

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dM}{M} - 4\frac{dR}{R} = 2\frac{dM}{M} - \frac{4}{3}\frac{dV}{V} \qquad \text{(A5.3')}$$

$$\frac{dT}{T} = -(k+1)\frac{dV}{V} \qquad \text{(A5.4')}$$

da cui possiamo ricavare il legame tra *V* ed *M*:

$$-\frac{dV}{V} - (k+1)\frac{dV}{V} = 2\frac{dM}{M} - \frac{4}{3}\frac{dV}{V} \qquad \text{(A5.5)}$$

e quindi, con $\gamma = 1$:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{2}{k+2/3} \cdot \frac{dM}{M} = -\frac{6}{5} \cdot \frac{dM}{M} \qquad \text{(A5.6)}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{1}{3}\frac{dV}{V} = -\frac{2}{3k+2} \cdot \frac{dM}{M} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{dM}{M} = -\frac{1}{2,5} \cdot \frac{dM}{M} \qquad \text{(A5.7)}$$

Integrando l'equazione (A5.7) abbiamo:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-\frac{1}{2,5}} \qquad \text{(A5.8)}$$

Ricordando che nel modello euristico della gravitazione si è supposto che ogni corpo perda massa sotto forma di energia gravitazionale e che quindi la sua massa M segua la legge $\frac{M}{M_0} = e^{-t/\tau}$ e perdendo il Sole anche ulteriore massa sotto forma di energia elettromagnetica irradiata, allora la (A5.8) diventa con buona approssimazione:

$$\frac{R}{R_0} = e^{\frac{1}{2,5}\frac{t}{\tau}} \cong e^{\frac{1}{2}\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(A5.9)}$$

Bibliografia

Bendiscioli G. (2013). *Fenomeni radioattivi. Dai nuclei alle stelle.,* Springer Verlag Collana Unitext, EAN: 9788845054523 ISBN : 8847054524

Povh B., Rith K., Scholz, Zetsche F. (1998). *Particelle e Nuclei. Un'introduzione ai concetti della fisica.* Bollati Boringhieri Torino (Collana: Programma di Matematica Fisica Elettronica) EAN : 9788833955957 ISBN : 8833955958

Segrè E. (1966). *Nuclei e particelle.* Zanichelli, Bologna

Staguhn G. (2002). *Breve storia dell'atomo.* Editori Salai (Collana: Saggi, Trad. Chiappa L., Peroni A.) EAN : 9788884510938 ISBN : 8884510937

Bandini Buti A. (2007). *Teoria e funzionamento dei reattori nucleari. Fissione e Fusione. Editore,* Sandit Libri. EAN : 9788889150757 ISBN : 8889150750

AA.VV. (2017) Quaderni Ordine degli Ingegneri di Roma n.1. (è reperibile presso ordine ingegneri di Roma)

Gadioli E. *La scoperta delle particelle subatomiche dall'elettrone al pione* Editore: Aracne, Canterano (RM)

Boscoli R. (22 febbraio 2019) *Sole, freddo e fusione nucleare*. Andromeda

Guerra F., Robotti N. (ottobre 2015) *Enrico Fermi e il quaderno ritrovato 20 marzo 1934. La vera storia della radioattività indotta da neutroni.* SIF Edizioni Scientifiche

Gramegna F., Van Duppen P., Vitturi A. (2017). *International School of Physics "Enrico Fermi", Course 201, "Nuclear Physics with Stable and Radioatictive Ion Beams"*, SIF Edizioni Scientifiche.

Richard Stephenson (1963). *Introduzione all'ingegneria nucleare,* Feltrinelli, Milano.

Zanobetti D. (2010) *Energia nucleare. Un dossier completo*. La feltrinelli.it