STORIA DELLA TRIGONOMETRIA

di

FERNANDO DI GENNARO

La Trigonometria è la branca della Matematica che si occupa dei problemi di misurazione di figure geometriche piane riconducibili allo studio dei triangoli; la stessa si occupa anche di misure indirette, cioè di misurazioni effettuate senza operare direttamente sulle grandezze in questione.
La parola **Trigonometria**, che per lungo tempo non compare in alcun trattato né matematico né scientifico, deriva dalle parole greche

trigon = triangolo e *metron* = misura

Questo ramo della Matematica trova la sua origine in epoche assai remote e nasce soprattutto come supporto all'Astronomia. Le misure delle lunghezze e degli angoli si possono far risalire addirittura all'epoca paleolitica, perché già allora gli uomini erano consapevoli della periodicità di alcuni fenomeni, come ad esempio i passi del Sole nell'arco della giornata e il susseguirsi delle stagioni. Ed è appunto in questo periodo che nasce l'idea di misurare lunghezze ed angoli. Gli uomini dovevano pur orientarsi per poter tornare nei luoghi in cui erano riusciti a trovare mezzi di sostentamento quali frutti, radici commestibili e selvaggina. Per ritrovare tali luoghi attraverso percorsi quasi certi, hanno cominciato ad osservare le posizioni del Sole prima e della Luna poi e quindi anche quelle di tutti gli Astri, allora visibili, della volta celeste.
Quando, in seguito, gli uomini furono in grado di addomesticare gli animali più docili, si dedicarono alla pastorizia; di qui la necessità di orientarsi per guidare greggi ed armenti da un pascolo all'altro e per ritrovare le sorgenti d'acqua; ciò veniva fatto sfruttando ancora le osservazioni sui movimenti del Sole e di tutti gli altri Astri.
La presenza di studiosi che rivolgevano la loro attenzione allo studio di questi fenomeni, cioè l'esistenza di uomini che si interessavano non solo di Astronomia ma anche di Geometria, si riscontra in Indocina, in una zona di civiltà agricola avanzata. Infatti i popoli di questa regione orientavano i villaggi costruiti su palafitte prima e poi le strade delle città, i colonnati dei templi e le tombe monumentali, secondo i punti cardinali; i resti di queste città sono stati datati con

i moderni mezzi usando elementi radioattivi, e la loro origine si fa risalire a circa 20.000 anni fa.
Già in quell'epoca era stata misurata, con una certa esattezza, la durata dell'anno solare, la durata delle stagioni e la variazione delle ore di luce di una giornata al variare delle stagioni. Erano, questi, fattori importanti per la loro sopravvivenza, perché la semina e l'abbondanza dei raccolti dipendevano dal grado di conoscenza dell'alternarsi delle stagioni.
Le città di Harappa (località del Pakistan sulla destra dell'Indo, a pianta quadrangolare, i cui resti mostrano che era fornita di un reticolo stradale regolare e che possedeva un evoluto sistema idraulico e di fognature) e Mohenjo−Daro (anch'essa località del Pakistan e sulla destra dell'Indo), già nel III millennio a.C., avevano le strade e gli edifici orientati rispetto al Sole, così come in quasi tutte le città della Mesopotamia.
Dopo l'invenzione della ruota che, come risulta dallo Stendardo di Ur (antica città sumerica situata alla destra dell'Eufrate nel punto in cui oggi si trova il centro iraqeno di Tell el−Muqaiyar = collina della pace), è stata applicata tecnicamente al tornio del vasaio verso il 3000 a.C. in Armenia e nel Turkestan, il problema che più ha assillato gli studiosi è stato sicuramente quello di determinare il rapporto esistente tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo raggio.
In Mesopotamia ed in Egitto, il cerchio serviva per l'Astronomia al fine di misurare la durata dell'anno e delle ore del giorno. L'Astronomia si è sviluppata soprattutto tra gli Egizi poiché questi avevano osservato che le inondazioni del Nilo avvenivano quando la stella Sirio, della Costellazione del Cane, sorgeva ad est poco prima del sorgere del Sole. Allora i sacerdoti e gli architetti, per calcolare esattamente quando si sarebbe verificato l'avvenimento, avevano orientato il colonnato del tempio di Karnak dedicato ad Ammone, in modo che, quando sorgeva il Sole nel solstizio d'estate, le colonne retrostanti facessero ombra solo sulle colonne antistanti. Anche nella piramide di Cheope le finestre erano orientate in modo che la testa del Faraone fosse illuminata da Sirio quando questa passava perpendicolarmente alla facciata meridionale della piramide stessa e contemporaneamente la Stella Polare illuminava da nord un'altra finestra (c'è da osservare che a quel tempo la Stella Polare era la Stella π della Costellazione del Drago e non dell'Orsa Minore, e questo perché nel corso dei millenni c'è stato uno spostamento delle costellazioni).
Anche i popoli che non avevano costruzioni monumentali come quelle egizie erano ugualmente alle prese con problemi geometrici, come ad esempio quando dovevano squadrare le pietre o quando dovevano costruire dei muri che avessero una certa solidità, e per far ciò avevano costruito un triangolo rettangolo dividendo una corda in 12 parti uguali, poi piegata in modo tale che il triangolo fosse formato da lati che contenevano 3, 4 (cateti) e 5 (ipotenusa) parti.
Nelle città della civiltà dell'Indo, gli edifici monumentali erano alleggeriti da arcate, fattore che indica come questi popoli fossero in possesso di una evoluta tecnica.

In epoche posteriori al 3000 a.C., in diverse città sumeriche, babilonesi ed egizie, si rilevano progetti architettonici ed urbanistici che indicano rapporti armonici che si riscontrano anche nelle piramidi dei Maya, nelle costruzioni di varie città indiane, cretesi, nelle fortificazioni cinesi, azteche ed indocinesi. Tali rapporti sono corrispondenti a quello esistente tra il raggio e la lunghezza della circonferenza, tra i cateti di un triangolo e le loro proiezioni sull'ipotenusa, tra tali proiezioni e l'altezza relativa all'ipotenusa.

Le scuole sacerdotali di Geometria e Astronomia risalgono sicuramente a più di 4000 anni fa, e fu proprio in una di queste scuole che i babilonesi riuscirono a dimostrare, seppure meccanicamente, che il lato dell'esagono inscritto in un cerchio è uguale al raggio. L'esagono è composto da sei triangoli equilateri ottenuti dividendo delle corde in parti uguali. Al centro dell'esagono si piantava un bastone di lunghezza nota e perpendicolare al terreno. La variazione della lunghezza dell'ombra proiettata dal bastone nell'arco della giornata e la variazione della stessa lunghezza con il variare delle stagioni servivano poi a costruire una meridiana ed un calendario.

Queste osservazioni sperimentali, Plinio il Vecchio (erudito latino, nato a Como forse nell'anno 23, e morto a Stabia nel 79) le fa risalire addirittura a 30.000 anni fa, e le datazioni recenti danno ragione allo storico romano, poiché si è accertato che, in tempi in cui si cominciò a scrivere con i caratteri cuneiformi, quei popoli avevano già scoperto le terne di numeri interi per ottenere triangoli rettangoli, avevano diviso il cerchio in 360 parti, avevano misurato che un'ora, durante gli equinozi di primavera e d'autunno , corrisponde a 15° (misura che usiamo ancora oggi: è il nostro fuso orario). Da queste osservazioni è nata poi la misura sessagesimale babilonese.

Quello che non è stato possibile accertare è quanti millenni siano trascorsi tra il primo tentativo di misurare l'anno solare ed i risultati esatti (quasi) espressi dai matematici di Karnak in Egitto, o dalle tradizioni millenarie cinesi come ad esempio quella del *Vitello Rosso* offerto al Cielo dal Figlio del Cielo (t'ien-su = imperatore della Cina, in cui era concentrato sia il potere mondano che quello sacrale) per il solstizio d'estate. Però la costruzione delle piramidi di Cheope, vissuto intorno al 2600 a.C., e di Sneferu dimostra che già in quel tempo si potevano misurare gli angoli in Astronomia con errori inferiori al grado sessagesimale attuale.

Raccogliendo e rielaborando questo patrimonio di conoscenze, nel IV secolo a.C. i Greci erano già in grado di calcolare la latitudine di Marsiglia ed il raggio della Terra con errori dovuti soprattutto alla imprecisione delle misure delle distanze, mentre le considerazioni teoriche erano poco influenti sull'esito finale.

Già **Aristotele** (Stagira 384 a.C.–Calcide 322 a.C.), nel suo trattato "***De Caelo***", parla di matematici del suo tempo che si erano occupati della misura del circolo massimo della Terra, ma non vi è alcun cenno in merito al metodo da essi impiegato per questa misura limitandosi soltanto a dire che la Terra è sferica, ma *non grande*.

Uno dei primi valori che si conosca per la misura del circolo massimo è quello di 400.000 stadi, equivalente a circa 40.000 miglia (misura probabilmente dovuta ad **Eudosso di Cnido,** vissuto tra il 408 e il 355 a.C.). L'approssimazione di tale valore dipende anche dalla scelta fatta per lo "stadio" per il quale, infatti, si usava due diverse misure: lo stadio Delfico di 148,6 m oppure lo stadio Olimpico di 184,4 m.; anche se il valore che si avvicina di più al vero è quello Delfico (in questo caso la misura del circolo massimo corrisponde a 59 milioni di metri), numerosi storici ritengono che lo stadio impiegato sia quello Olimpico, ed allora in questo caso per la lunghezza del circolo massimo terrestre si avrebbe il valore di 74 milioni di metri. Queste misure sono però antecedenti di circa un secolo rispetto a quella che può essere veramente chiamata *operazione geodetica*, eseguita da **Eratostene** (nato a Cirene nel 275 circa a.C. e morto nel 194 a.C., contemporaneo di Archimede e di Aristarco), nella valle del Nilo, nel periodo in cui, per desiderio del re d'Egitto **Tolomeo III Evergete**, egli soggiornò in Alessandria in qualità di direttore della celeberrima biblioteca contenente circa 20.000 volumi. Delle opere che la tradizione gli attribuisce, a noi sono pervenuti solo alcuni frammenti.
Eratostene veniva soprannominato "*il pentatleta*", perché sembra che eccellesse in cinque discipline sportive, ma veniva detto anche "*Beta*" e con questo soprannome non si sa bene se si volesse indicare che era il numero due (β è la seconda lettera dell'alfabeto greco), perché eccelleva in tante cose ma senza primeggiare in alcuna, oppure perché era secondo soltanto alle divinità.
Per calcolare la misura del meridiano terrestre, egli si basò sulla considerazione che alle ore 12 del 20 giugno, solstizio d'estat luce sono massime, i raggi del Sole, nei pu verticali. Eratostene sapeva infatti con certezza a mezzogiorno, colpivano ortogonalmente la situata sulla riva destra del Nilo, oggi Aswân o il Sole specchiarsi nell'acqua di un pozzo. Ave ora in Alessandria (sempre in Egitto e situata braccio più occidentale del delta del Nilo) i r come a Siene, ma formavano con la verticale dedusse che bastava calcolare tale angolo pe meridiano terrestre corrispondesse alla distanza

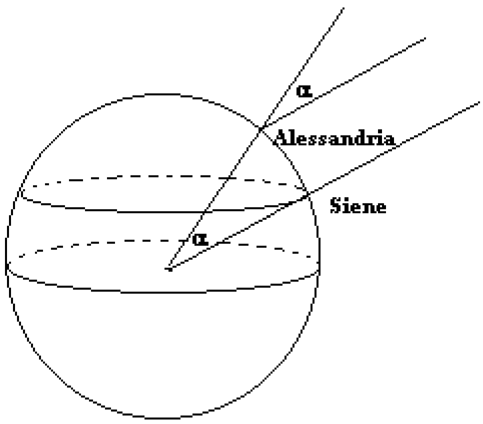

Fig. 1

Innanzitutto valutò, in base ai tempi di viaggio, che la distanza fra le due città fosse di 5000 stadi (circa 800 chilometri). Notiamo, però, che le due città non si trovano esattamente sullo stesso meridiano, e Siene non si localizza sul Tropico del Cancro, come invece aveva supposto Eratostene. Quindi calcolò l'angolo che i raggi del Sole, in Alessandria, facevano con la verticale, probabilmente mediante l'ombra mandata da un obelisco a mezzogiorno, ma sembra anche che Eratostene si fosse costruito uno strumento, lo *scafè*, per la misura di tale angolo trovando che esso era di (circa) di 7° 30'. Allora, supposta la sfericità della Terra e sapendo che le lunghezze degli archi sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro, bastava risolvere la proporzione:

$$7° \, 30' : 800 = 360° : x$$

dove 800, appunto, è la distanza tra Siene ed Alessandria. Risolvendo la proporzione si trova:

$$x = 38.400 \, km$$

L'errore commesso da Eratostene nella misura del meridiano terrestre è di circa 1000 chilometri (le misure attuali danno per il meridiano terrestre una lunghezza di 40.000,12 *km*), errore che, dati gli strumenti di misura avuti a disposizione, è da ritenersi senz'altro accettabile.
Stando a quando riferisce l'abate francese **Gerberto D'Aurillac** (935–1003), filosofo e naturalista, divenuto poi Papa Silvestro II, nella sua *Geometria*, Eratostene, coadiuvato dai misuratori di Re Tolomeo, intraprese la misura di un secondo arco di meridiano e precisamente l'arco *Siene–Meroe* (l'attuale Marawi, situata sul Nilo nubiano), nell'intento di verificare anche la sfericità della Terra. Dalle scarse notizie che si hanno su questa seconda operazione, si arguisce che Eratostene suddivise il tratto in tanti intervalli equivalenti ad un grado e lunghi 700 stadi, collocando nei punti di divisione particolari orologi solari, inventati da **Aristarco** da Samo (III secolo a.C.), consistenti nello gnomone verticale infisso in fondo ad uno scafo emisferico e terminante in una sferetta il cui centro doveva coincidere col centro stesso della sfera individuata dallo scafo. La lunghezza e la direzione dell'ombra individuavano il corso delle ore. Destinando poi ad ogni gnomone un operatore, Eratostene faceva osservare a tutti contemporaneamente la lunghezza dell'ombra a mezzogiorno. Da questa complessa operazione, Eratostene, ottenne conferma non solo dell'esattezza dei risultati delle precedenti misure, ma anche che la proporzionalità tra le distanze e le variazioni degli angoli formati dalle verticali nei punti più estremi esisteva pure per piccoli intervalli.
Anche **Plinio il Vecchio**, nella sua *Naturalis Historiae* parla delle misure effettuate da Eratostene nel tratto, creduto parte di meridiano, Berenice–Tolemaide. Berenice era una città presso il Capo Ras Baras, fondata da Tolomeo Filadelfo per favorire il commercio con l'India e con l'Africa; Tolemaide

era una città dell'Etiopia, sul Mar Rosso, fondata dallo stesso Tolomeo Filadelfo per la caccia all'elefante. Plinio non accenna ai risultati ottenuti dalle operazioni effettuate in questo tratto che Eratostene considerava arco di meridiano, mentre in realtà la differenza di longitudine fra le due località è di circa 4°.
Questa teoria delle proporzioni, applicata da Eratostene per la misura del meridiano terrestre, era stata generalizzata sin dal sec.VI da **Talete**. Egli, grande viaggiatore, soggiornò per molto tempo in Egitto e a Babilonia, venendo a contatto con le culture di quei Paesi. Stando a quanto raccontano **Diogene Laerzio** (III sec.), Plinio e **Plutarco** (Cheronea, Beozia circa 46–125), fu durante uno di questi viaggi in Egitto che Talete affermò, parlando con alcuni sapienti del luogo, che sarebbe stato in grado di misurare l'altezza della piramide di Cheope senza neppure scalarla.

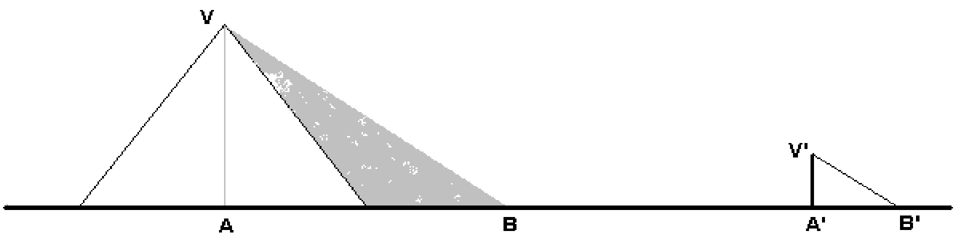

Fig. 2

Di fronte all'incredulità di questi sapienti, prese un bastoncino e lo fissò verticalmente al suolo. Misurò quindi l'ombra del bastoncino e quella della piramide. I raggi del Sole sono praticamente paralleli, e quindi gli angoli che essi formano con il suolo sono uguali. Per i triangoli *AVB* e *A'V'B'* possiamo perciò scrivere la proporzione:

$$VA : V'A' = AB : A'B'$$

Tutte le misure, ad eccezione di quella di *VA*, sono facilmente misurabili, quindi dalla proporzione si ricava *VA*.
Aristarco di **Samo** (circa 310–230 a.C., discepolo di **Lampsaco**), ebbe, insieme con **Eraclide Pontico** da Eraclea, vissuto tra il 390 e il 310 a.C. circa, il merito di avere sostenuto, tra i primi, la teoria eliocentrica. Egli si pose il problema di misurare la distanza della Terra dal Sole e dalla Luna. Il suo ragionare era il seguente: la Terra è al centro dell'orbita lunare e la Luna riceve la luce dal Sole. Quando della Luna se ne vede solo la metà, possiamo pensare che esiste un piano

che divide la sfera lunare in due parti e che passa per il nostro occhio che si trova sulla Terra.

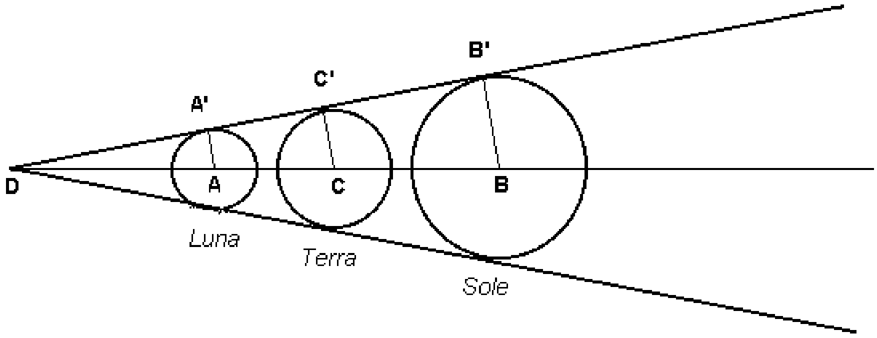

Fig. 3

Ma allora i triangoli $AA'D$, $BB'D$ e $CC'D$ (dove A, C e B sono rispettivamente i centri di Luna, Sole e Terra) sono rettangoli e simili, quindi devono aversi le proporzioni:

$$AA' : A'D = CC' : C'D$$
$$AA' : A'D = BB' : B'D$$

Aristarco suppose che, durante le eclissi, la Luna nascondesse il Sole oppure che la Terra nascondesse la Luna, e ciò conferma il fatto che le distanze tra i centri A, B e C stanno tra loro come i raggi delle tre sfere. Con gli strumenti (dell'epoca) misurò l'angolo $A\hat{C}B$ che trovò essere di 87°, e quindi l'angolo formato dalle rette che uniscono il centro della Terra C con quello del Sole B ed il centro della Luna A con quello del Sole, che trovò essere di 3°. Tutte queste misure rendono possibile esprimere le distanze Terra–Luna, Terra–Sole, Luna–Sole in termini di raggi terrestri. Le misure fatte da Aristarco non sono però precise perché commise l'errore nella misura degli angoli di 87° e 3°, ed inoltre era errata anche l'ipotesi che, nel caso di eclissi di Luna, la superficie terrestre coprisse completamente quella lunare.
Nelle misure di Aristarco, a differenza di quelle di Eratostene, figurano grossi errori perché egli non disponeva di strumenti tecnici (e teorici) per eseguire i calcoli con una certa precisione.
Ma la prima storia di una misurazione indiretta che si conosca, e che ci viene narrata da **Erone** (II secolo a.C.), risale addirittura a circa 2500 anni fa, quando a Samo fu costruito un acquedotto, i cui resti sono stati rinvenuti nel 1882, perforando il monte Kastro in una galleria di circa 1000 metri. L'architetto

Eupalino (seconda metà del VI secolo a.C.), autore del progetto, per andare dalla parte *A* del monte all'altra *B*, lo circondò con una linea spezzata i cui lati formavano angoli retti; in tal modo trasformò la linea virtuale *AB*, che passava sotto il monte, che doveva misurare e della quale doveva valutare la direzione con precisione, nell'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Dopo aver valutato la direzione *AB*, iniziò gli scavi contemporaneamente dalle due parti (le quali erano anche a livelli diversi) per eseguire i lavori con una maggiore celerità. Nei calcoli commise errori valutabili attorno all'1% (quindi quasi esatti). Così fu costruito un grandioso acquedotto che distribuiva l'acqua a Samo con un sistema di tubature.
Problemi inerenti il calcolo di aree si trovano già nel *Papiro di* **Ahmes**, noto anche con il nome di *Papiro **Rhind***. In esso lo scriba egiziano vissuto intorno– 1800 a.C.), ed espone delle regole per calcolare le aree di triangoli isosceli, trapezi isosceli ed anche di quadrilateri in generale.
Nel problema 48 del Papiro Rhind si fa cenno ad un metodo per determinare l'area del cerchio: lo scriba formava un ottagono a partire da un quadrato di lato di 9 unità trisezionando quindi i lati e tagliando i quattro triangoli isosceli che formavano gli angoli, ciascuno dei quali aveva un'area di 4½ unità. L'area dell'ottagono è uguale a 63 unità, valore che non si discosta di molto da quello dell'area di un quadrato con il lato di 8 unità.
Nel problema 50, Ahmes avanza l'ipotesi che l'area di un campo circolare con diametro di 9 unità sia uguale all'area di un quadrato con il lato di 8 unità. Confrontando questa ipotesi con l'attuale formula $A = \pi r^2$, si vede che la regola esposta da Ahmes equivaleva ad attribuire a π un valore di circa 3 1/6, approssimazione molto vicina al valore esatto.
Il problema 56, per quanto ci riguarda, è quello che presenta il maggior interesse perché contiene, oltre ad una teoria dei triangoli simili, anche alcuni rudimenti di Trigonometria. Nella costruzione delle piramidi era necessario dare alle facce una inclinazione uniforme, e sembra sia stata proprio questa necessità ad indurre gli egiziani ad introdurre una grandezza equivalente a quella che oggi chiamiamo *cotangente di un angolo*. Oggi, per misurare la pendenza di una linea retta, si usa considerare il rapporto tra *elevazione* e *profondità*. In Egitto invece usava il reciproco di tale rapporto (appunto la cotangente).
Nel *Papiro di Mosca* (acquistato in Egitto nel 1893), scritto con minore accuratezza di quello di Ahmes, nel problema 14 si richiede di trovare l'area della superficie di una figura che ha l'aspetto di un cesto con diametro di 4½. Il procedimento esposto dallo scriba è equivalente alla formula:

$$S = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot (2 \cdot 4\,½) \cdot 4\,½$$

ottenendo un risultato di 32 unità. Dato che $\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$ è l'approssimazione egiziana di $\pi/4$, il risultato 32 corrisponderebbe alla superficie di un emisfero di diametro 4½.
Anche i babilonesi, il cui interessamento era rivolto principalmente all'algebra, si sono occupati di Geometria. Recentemente (1936) è stato rinvenuto a Susa, città che si trova a circa 300 chilometri da Babilonia, un gruppo di tavolette che contengono risultati geometrici. In particolare, una di queste, in linea con la predilezione dei babilonesi per la costruzione di tabelle ed elenchi, contiene i valori dei rapporti fra le aree e i quadrati dei lati dei poligoni regolari di 3,4,5,6 e 7 lati. Come misura del rapporto tra il perimetro dell'esagono regolare e la circonferenza del cerchio ad esso circoscritto, dà il valore di 0; 57,36 (misura sessagesimale), dal che si può dedurre che lo scriba babilonese per l'approssimazione di π aveva adottato il valore 3; 7,30 o 31/8, valore buono quanto quello adottato in Egitto.
In seguito, nell'attività intellettuale delle civiltà dell'Egitto e della Mesopotamia si riscontra un continuo declino; ma mentre ciò avveniva nelle valli attraversate dal Nilo, dal Tigri e dall'Eufrate, in quasi tutte le regioni situate lungo le coste del Mediterraneo sbocciavano nuove culture. Il declino delle civiltà fiorite nelle valli dei tre fiumi citati non avvenne in maniera repentina, ma fu lento e continuo: l'egemonia culturale pian piano veniva presa dal popolo ellenico. Lo sviluppo della Matematica raggiunse il suo punto culminante con l'avvento di **Talete di Mileto** (624–548 a.C. circa) e **Pitagora di Samo** (580–500 a.C. circa), le cui figure storiche però sono alquanto confuse poiché non è stato conservato alcun lavoro matematico attribuibile all'uno o all'altro e non si sa neppure se Talete o Pitagora ne abbiano mai composto uno.
Si racconta che Talete e Pitagora abbiano appreso la Geometria in Egitto ed a Babilonia sotto il governo di Nebuchadnezzar. Talete probabilmente era venuto a conoscenza delle tabelle astronomiche dei babilonesi ed **Erodoto** (Alicarnasso 485 a.C. circa–forse Atene 425 a.C. circa) riferisce che nel 585 a.C. preannunciò l'eclisse solare di quell'anno. Ciò che si sa di Talete è molto poco; le date della sua nascita e della sua morte vengono calcolate proprio basandosi sul fatto che questa eclisse ebbe luogo, probabilmente, quando egli era nel fiore degli anni, cioè intorno ai quaranta ed in base alla tradizione secondo la quale sarebbe morto

a 78 anni. Gli antichi giudicavano Talete un uomo di intelligenza fuori del comune, anzi era considerato il primo dei Sette Saggi. Era ritenuto *discepolo degli egiziani e dei Caldei*, e la proposizione, oggi nota come *Teorema di Talete*, potrebbe essere stata appresa durante uno dei suoi viaggi a Babilonia.

Il Teorema di Talete permetteva di misurare l'altezza degli edifici misurando l'ombra dell'edificio stesso e l'angolo che i raggi del Sole formavano con il suolo; il rapporto tra lati e angoli di uno stesso triangolo permetteva di misurare l'altezza di un monte, la larghezza di un fiume o la distanza di una nave dalla riva.

Teoremi riguardanti i rapporti fra i lati di triangoli simili erano noti ed usati già dagli egiziani e babilonesi, ma questi non potevano tener conto degli angoli perché nel periodo pre-ellenico mancava il concetto di misura angolare. Ed è proprio negli elleni che per la prima volta troviamo uno studio sulle relazioni esistenti fra gli angoli in un cerchio e la lunghezza delle corde che li sottendono. Ciò si riscontra in **Ippocrate di Chio**. Questi, vissuto ad Atene tra il 470 ed il 420 a.C., ma originario dell'Asia Minore, ben presto abbandona il luogo natio e si trasferisce ad Atene per esercitarvi l'attività di mercante. Sembra però che non fosse abbastanza scaltro negli affari tanto che, come racconta Aristotele, a Bisanzio fu defraudato del suo denaro. Egli però non si lamentò mai di questo incidente, anzi lo considerò come una fortuna, perché, avendo perso gli averi smise di fare il mercante e poté così dedicarsi allo studio della Geometria. **Proclo** (Costantinopoli 412–Atene 485) ci riferisce che Ippocrate era autore di un'opera di *Elementi di Geometria* (andata perduta, ma conosciuta sicuramente da Aristotele), in cui anticipava di circa due secoli i più famosi *Elementi* di **Euclide**. Sicuramente le proprietà delle corde come misure degli angoli al centro e degli angoli alla circonferenza erano note ad Ippocrate ed è anche probabile che **Eudosso** (408–355) si fosse servito di questi rapporti per calcolare le distanze relative del Sole e della Luna.

Alla morte di **Alessandro Magno**, re di Macedonia, avvenuta nel 323 a.C. il suo impero si sfasciò, ed i suoi generali si spartirono il territorio su cui il conquistatore aveva governato. Tolomeo prese l'Egitto e nel 306 a.C., ormai solidamente al potere col nome di **Tolomeo I**, con l'emanazione dei primi decreti istituì ad Alessandria una scuola (o Accademia) nota come il *Museo*. Ad insegnare in questa scuola chiamò un gruppo di eminenti studiosi, tra cui **Euclide**, che qui fondò una scuola di matematica rimasta famosa per secoli.

Sembra che lo studio delle proprietà del triangolo sia di molto anteriore ad Euclide; si attribuisce però ad Euclide l'uso della relazione esistente tra l'altezza di un triangolo e le due parti nelle quali è divisa dalla stessa altezza. E fu proprio sugli studi delle più importanti proprietà dei triangoli rettangoli che ci si accorse di altre proprietà, fra le quali vanno ricordate soprattutto due:

1) ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza ha un angolo retto;
2) gli angoli acuti non variano proporzionalmente ai lati opposti, ma in modo complesso.

Nelle opere di Euclide non si parla esplicitamente di *Trigonometria* nel senso rigoroso di tale termine, ma vi sono leggi e teoremi che richiamano leggi e formule della trigonometria intesa in senso stretto. Ad esempio, le proposizioni 12 e 13 del Libro II degli *Elementi* sono equivalenti alle leggi dei *coseni* rispettivamente per l'angolo ottuso e per l'angolo acuto, soltanto che Euclide li ha formulati in linguaggio geometrico e non trigonometrico. Anche il teorema di **Archimede** (Siracusa 287 a.C.–212 a.C.) sulla corda spezzata, tradotto in linguaggio trigonometrico, è analogo alle formule dei *seni* delle somme e differenze di angoli. Dallo stesso teorema si possono naturalmente derivare altre identità trigonometriche.

Nel suo trattato, composto sicuramente prima del 260 a.C. *Sulla grandezza e sulla distanza del Sole e della Luna*, **Aristarco** osserva che, quando la Luna ci appare come una perfetta mezzaluna, l'angolo compreso tra le visuali del Sole e della Luna è minore di un angolo retto per un trentesimo di quadrante (a quel tempo ancora non era stata introdotta sistematicamente la suddivisione del cerchio in 360°). Volendo enunciare questa affermazione con linguaggio trigonometrico, equivarrebbe a dire che *il rapporto tra la distanza della Luna e quella del Sole è uguale a sen*3°. Poiché non erano ancora disponibili tavole trigonometriche, Aristarco si rifece ad un teorema geometrico del tempo che, con il simbolismo moderno verrebbe espresso dalle disuguaglianze:

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tang\alpha}{tang\beta}$$

dove

$$0° < \beta < \alpha < 90°$$

e giungeva così alla conclusione che

$$\frac{1}{20} < sen3° < \frac{1}{18}$$

e poteva allora affermare che il Sole è più di 18 volte ma meno di 20 volte più lontano dalla Luna rispetto alla Terra. Questo valore, pur essendo molto lontano da quello calcolato attualmente, è però senz'altro migliore di quelli attribuiti ad Eudosso e a **Fidia** (padre di Archimede).

Nell'intervallo di tempo che va da Ippocrate (V sec. a.C.) ad Eratostene (III sec. a.C.) i matematici elleni si erano occupati delle relazioni tra rette e circonferenze applicandole anche alla risoluzione di problemi astronomici, però non erano arrivati ad una Trigonometria sistematica (cosa invece che era avvenuta per la Geometria).

La prima comparsa di una tavola trigonometrica sembra sia avvenuta verso la metà del II secolo a.C. per opera di **Ipparco** di Nicea (180 circa–125 circa a.C.) che perciò viene chiamato "*padre della Trigonometria*". Sappiamo che già Aristarco era a conoscenza del fatto che in una circonferenza il rapporto tra l'arco e la corda decresceva con il decrescere dell'angolo da 180° a 0°, ma nessuno, prima di Ipparco, aveva calcolato i valori corrispondenti dell'arco e della corda per una serie di angoli. (È stata però avanzata l'ipotesi che **Apollonio** di **Perge**, vissuto circa tra il 262 e il 180 a.C., avesse calcolato prima di Ipparco questi valori, anche se non con la stessa approssimazione di quest'ultimo).

Anche se in maniera non del tutto certa, sembra che ad introdurre l'uso sistematico della divisione del cerchio in 360° sia stato proprio Ipparco nella compilazione della sua tavola relativa alle corde, idea che avrebbe potuto dedurre da **Ipsicle** di Alessandria (attivo intorno al 130 a.C.) che, nel suo trattato *De ascensionibus*, presenta la divisione del giorno in 360 parti che a sua volta potrebbe aver dedotto dall'Astronomia babilonese. Poiché l'opera di Ipparco non è giunta fino a noi, non sappiamo che metodo abbia usato per costruire la sua tavola, ma è probabile che i suoi metodi siano stati simili a quelli usati da **Tolomeo** poiché **Teone** di Alessandria (vissuto verso la metà del secolo VI), nel suo commento sulle tavole delle corde di Tolomeo, menziona Ipparco come autore di un trattato di dodici libri sulle corde sottese ad un cerchio. In quest'opera Teone fa anche cenno ad un altro trattato, in sei libri, di **Menelao** di Alessandria (sec. I d.C.) che trattava delle *Corde tirate in un cerchio*. L'unico trattato di Menelao che sia giunto fino a noi è la sua *Sphaerica*, ma altre sue opere matematiche ed astronomiche sono citate da commentatori posteriori sia greci che arabi. Nel Libro I della *Sphaerica*, Menelao si occupa di triangoli sferici per i quali stabiliva una base analoga a quella di Euclide esposta nel Libro I degli *Elementi*. Esiste però, fra gli altri teoremi, quello che afferma che *due triangoli sferici sono congruenti se gli angoli corrispondenti sono uguali*, teorema che non ha l'equivalente in Euclide. Viene qui dimostrato anche il teorema che *la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di 180°*. Il Libro III contiene il famoso **Teorema di Menelao** che sostanzialmente è quello che caratterizza la Trigonometria sferica greca.

Consideriamo la circonferenza di centro O in cui è tracciata la corda AC. Con il linguaggio attuale diremmo che la corda AC è il doppio del seno della metà dell'angolo al centro $A\hat{O}C$ moltiplicato per la lunghezza del raggio del cerchio. Menelao chiamava la corda AC semplicemente *corda corrispondente all'arco AC*. Tracciamo il diametro AB. La corda CB è il doppio del coseno della metà dell'angolo $A\hat{O}C$ sempre moltiplicato per il raggio del cerchio. Perciò il teorema di Pitagora, espresso dalla relazione:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4r^2$$

(dove con *r* si è indicata la lunghezza del raggio), è equivalente all'identità trigonometrica:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

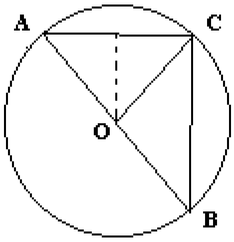

Fig. 4

Menelao, ma anche Ipparco prima di lui, conosceva altre identità che però non ha dimostrato forse perché comparivano nei 12 Libri sulle corde di Ipparco, ma le ha usate come lemmi per dimostrare il teorema sulle trasversali.

Il primo Lemma, tradotto nel linguaggio moderno, è equivalente a: *Se una corda AB di un cerchio di centro O viene intersecata dal raggio OD nel punto C, allora si ha:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{sen A\hat{O}D}{sen B\hat{O}D}$$

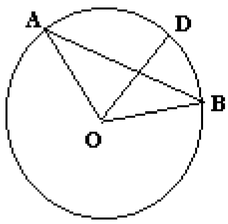

Fig. 5

che è l'equivalente del nostro *teorema dei seni*.

Per il secondo Lemma si ha: *Considerati la corda AB ed il suo prolungamento, il raggio OC ed il suo prolungamento, si indichi con D il loro punto di intersezione; si ha allora:*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{sen A\hat{O}C}{sen B\hat{O}C}$$

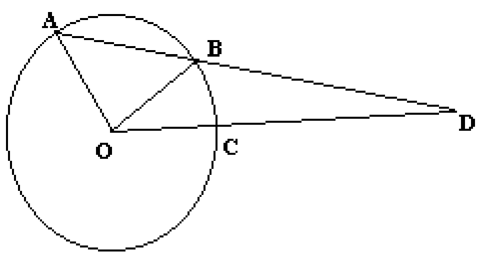

Fig. 6

Menelao probabilmente partì considerando quel teorema che nel caso piano afferma che *se i lati AB, BC, AC di un triangolo vengonointersecati rispettivamente nei punti F, E, D da una trasversale, allora si ha:*

$$\overline{AF} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CD} = \overline{BF} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AD}$$

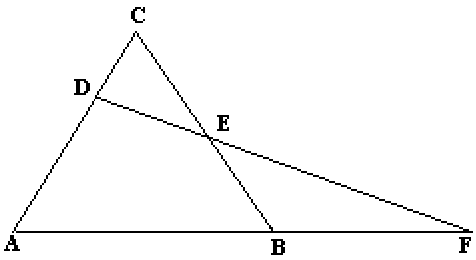

Fig. 7

cioè *una retta qualunque taglia i lati di un triangolo in modo che il prodotto di tre segmenti non adiacenti è uguale al prodotto degli altri tre.* Questo teorema fu esteso da Menelao ai triangoli sferici ponendolo nella forma:

$$senAF \cdot senBE \cdot senCD = senBF \cdot senCE \cdot senAD$$

Senza dubbio questo teorema ha svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo della Trigonometria sferica, ma l'opera trigonometrica più significativa fu certamente la *Sintassi Matematica*, in tredici Libri, di **Claudio Tolomeo** (sec.II d.C.). Di questo scienziato non sappiamo né la data di nascita né quella della sua morte, si sa soltanto, stando a quanto riferisce **Suida**, vissuto nel X secolo, che egli era ancora vivo sotto Marco Aurelio che aveva governato dal 161 al 180; svolse la sua attività di astronomo nel tempio di Serapide di Canopo, vicino ad Alessandria d'Egitto dove effettuò osservazioni astronomiche dal 127 al 151, cioè circa cinquanta anni dopo Menelao. L'importanza di tale opera è sottolineata anche dal fatto che essa veniva distinta dai trattati astronomici di altri autori, indicandola come la raccolta "*maggiore*", ed è a causa dell'uso frequente del termine "*megiste*" che derivò, in Arabia, l'uso di chiamare l'opera di Tolomeo con il termine **Almagesto** (*il più grande*).
Si presume che Tolomeo nel suo *Almagesto* abbia preso molti dei suoi metodi dal trattato *Sulle corde in un cerchio* di Ipparco, ma non è possibile sapere se le tavole trigonometriche di Tolomeo derivassero o no da quelle di Ipparco. Un ruolo preminente nei calcoli delle corde di Tolomeo è occupato da una proposizione nota con il nome di ***Teorema di Tolomeo***; se *ABCD* è un quadrilatero inscritto in un cerchio, vale allora la relazione:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

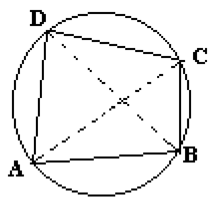

Fig. 8

il che equivale a dire che *la somma dei prodotti dei lati opposti di un quadrilatero inscritto in un cerchio è uguale al prodotto delle diagonali.*
Un caso particolare, ma molto utile, del Teorema di Tolomeo è quello in cui un lato del quadrilatero coincide con un diametro del cerchio.

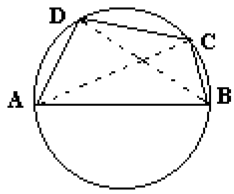

Fig. 9

In questo caso si ha:

$$2r \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Se

$$D\hat{A}B = 2\alpha \qquad\qquad C\hat{A}B = 2\beta$$

allora si ha :

$$D\hat{A}C = 2\alpha - 2\beta$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\overline{DC} &= 2r sen(\alpha - \beta) \\
\overline{AD} &= 2r sen(90° - \alpha) \\
\overline{DB} &= 2r sen\alpha \\
\overline{CB} &= 2r sen\beta \\
\overline{AC} &= 2r sen(90° - \beta)
\end{aligned}$$

Il Teorema di Tolomeo porta perciò ad affermare che:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sen\beta$$

e così pure porta a calcolare $sen(\alpha + \beta)$ e $cos(\alpha \pm \beta)$. Ancora oggi queste formule sono note come "*formule di Tolomeo*". Un'altra formula, utile per i suoi calcoli, che compare nell'*Almagesto* è quella che oggi noi chiamiamo "*formula di bisezione*", quella cioè che ci permette di calcolare, nota la corda di un qualsiasi arco, la corda metà dello stesso arco, formula che nel simbolismo attuale scriviamo:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$$

Con queste formule fondamentali Tolomeo possedeva un valido strumento per costruire la tavola delle corde. Per associare valori numerici alle corde era però necessario avere sia uno schema per suddividere la circonferenza del cerchio, sia una regola per dividere il diametro.
Abbiamo già osservato come la divisione della circonferenza in 360° fosse (probabilmente) già in uso in Grecia fin dai tempi di Ipparco, ma non sappiamo come si sia giunti a tale convenzione. Qualche studioso ha avanzato l'ipotesi che questa misura derivasse dall'Astronomia, perché lo zodiaco era diviso in 12 *segni* o 36 *decani*; così un ciclo di stagioni (di circa 360 giorni) poteva essere messo in corrispondenza con il sistema dei *segni* e dei *decani* dello zodiaco dividendo ciascun *segno* in 30 parti e ciascun *decano* in 10 parti. Per Tolomeo era quindi naturale suddividere i suoi gradi in sessanta "*partes minutae primae*", ciascuna di queste in sessanta "*partes minutae secundae*" e così via. Fu appunto questo sistema sessagesimale che portò allora Tolomeo a suddividere il diametro del suo cerchio trigonometrico in 120 parti; ciascuna di queste la suddivise quindi in 60 minuti e ciascun minuto di lunghezza in 60 secondi.
Stabilito il sistema di misurazione, Tolomeo era ora in grado di calcolare le corde degli angoli all'interno del suo sistema.
Ad esempio, poiché il raggio del cerchio di riferimento conteneva 60 parti, la corda di un arco di 60° conteneva anch'essa 60 parti lineari. Allora la corda di 120° ne conteneva $60\sqrt{3}$, cioè circa 103 parti, 55 minuti e 33 secondi (nella notazione ionica di Tolomeo $\rho\,\gamma^p\,\nu\varepsilon'\lambda\gamma''$); usando la formula di bisezione Tolomeo avrebbe potuto quindi calcolare la corda di 30°, poi quella di 15° e così continuando. Egli invece preferì calcolare le corde degli angoli di 36° ($\lambda\zeta^p\delta'\,\nu\varepsilon''$) e di 72° ($\sigma^p\lambda\beta'\gamma''$). Per il calcolo di altre corde ricorse al teorema che si trova nel Libro XIII degli *Elementi* di Euclide (Prop. 9) nel quale si dimostra che il lato del pentagono regolare, dell'esagono regolare e del decagono regolare inscritti nello stesso cerchio, costituiscono i lati di un triangolo rettangolo, per cui Tolomeo arriva a calcolare la lunghezza della corda dell'angolo di 36°, che vale $30\left(\sqrt{5}-1\right)$ e quindi, servendosi del Teorema di Pitagora, calcola la corda di 72° che vale $30\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Dalle corde di 72° e di 60° derivava la corda di 12° mediante la formula della differenza di due archi e mediante successive applicazioni della sua formula dell'angolo metà, calcolava le corde degli archi di 6°, 3°, (1½)° e (3/4)°. Mediante interpolazione lineare fra questi valori giungeva infine al valore della corda di 1° e (1/2)°. Poiché il valore della corda relativa all'angolo di (1/2)° è la lunghezza del lato del poligono di 720 lati inscritto nel cerchio di raggio 60 unità, il valore approssimato di π ottenuto con il metodo di Tolomeo è $\frac{377}{120} \sim 3{,}14\,16$ (valore quindi più preciso di $\frac{22}{7}$ ottenuto da Archimede che aveva considerato un poligono di 96 lati).
Si è quasi certi che nel secolo successivo a quello in cui è vissuto Tolomeo vi siano stati dei contatti fra studiosi occidentali e cinesi per quanto concerne le conoscenze matematiche. In Cina, a quel tempo si andava alla ricerca di valori accurati per π, ed è qui che vennero trovati i valori 3,1547; $\sqrt{10}$; $\frac{92}{29}$; $\frac{142}{25}$.
Nel III secolo appare, sempre in Cina, la figura di **Liu Hui** che fu un importante commentatore dei *Nove Capitoli* (il *Chui-chang suanshu*, ossia *Nove Capitoli sull'arte matematica* è forse la più influente opera che la matematica cinese abbia espresso e comprende 246 problemi riguardanti agrimensura, agricoltura, ingegneria, ecc.). Liu Hui per il π trovò prima la cifra 3,14 usando un poligono regolare di 96 lati e quindi il valore 3,14159 considerando un poligono regolare di 3072 lati.

In un'opera di **Tsu Ch'ung–chih** (430–501) si trovano diversi valori per π a partire dal ben noto valore $\frac{22}{7}$ archimedeo; però l'autore lo giudicava "*inesatto*" ed in sua sostituzione proponeva il valore "*accurato*" di $\frac{355}{113}$. Questa è sicuramente un'approssimazione molto buona (di uguali non se ne sono avute fino al XV secolo), ma è interessante notare che tale valore è stato ottenuto sottraendo dal numeratore e dal denominatore del valore tolemaico $\frac{377}{120}$ rispettivamente il numeratore e il denominatore di quello archimedeo $\frac{22}{7}$, e ciò confermerebbe quindi che la matematica cinese risentiva in qualche modo degli influssi occidentali.
Nell'anno 476, periodo in cui viene collocata la caduta dell'Impero Romano d'Occidente, a Pãtaliputra nacque **Aryabhata**, autore di uno dei più antichi testi della Matematica indiana. I risultati geometrici ottenuti nel corso dei secoli, connessi con la costruzione di templi ed altari, furono raccolti in un trattato noto con il nome di *Sulvasutra*, che significa "*regole della corda*". Di quest'opera esistono tre diverse versioni, tutte in versi, e la più famosa è quella di **Apastamba**, in cui si trovano regole per la costruzione di angoli retti per mezzo di tre corde. Al periodo del *Sulvasutra* seguì quello del *Siddhãnta* (o *sintesi di Astronomia*) della quale opera si conoscono i titoli di almeno cinque versioni. Quella che forse ci è pervenuta integralmente è la *Surya Siddhãnta* o *Sistema del Sole*, in cui le dottrine astronomiche sono indubbiamente di origine greca.
Quest'opera, che risale al 380 circa, venne riassunta dal matematico indiano **Varahamira** verso l'anno 505 e viene usata anche dallo scienziato persiano **al-Biruni** (**Abu r–Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni**, nato a Khuwãrizm nell'Uzbekistan nel 973 e morto a Ghazni nell'Afghanista nel 1048), il quale concorda con il precedente ritenendo che in quella teoria ci fosse l'influsso greco, contrariamente ad altri studiosi indiani che sostenevano fermamente l'originalità dei loro autori.
Ma a parte queste considerazioni storico-critiche, non si può non rilevare che le conoscenze trigonometriche in mano agli indiani abbiano assunto una forma completamente nuova. Infatti, mentre la Trigonometria tolemaica si basava sul rapporto tra le corde di un cerchio e gli angoli al centro da esse sottesi, nel *Siddhãnta* tale rapporto viene trasformato nello studio della corrispondenza tra la metà della corda di un cerchio e la metà dell'angolo al centro sotteso dall'intera corda: è dunque questo il concetto nuovo, quello che porta alla funzione trigonometrica *seno di un angolo* (anche se lo storico della scienza **Paul Tannery** ha avanzato l'ipotesi che tale trasformazione sia avvenuta già ad Alessandria in epoca post-tolemaica). Anche i nomi attuali delle funzioni trigonometriche derivano dalla Matematica indiana. Infatti l'introduzione della funzione *seno* si deve proprio ad Aryabhata che nel 499 scrisse l'opera *Aryabhatiya*, un piccolo volume in versi formato da 123 stanze in cui si espongono regole di calcolo di uso geometrico ed astronomico. Qui si trovano appunto i valori dei rapporti che egli chiama *seno* e *senoverso* (oggi *coseno*, parola derivata dal latino *cosinus*, seno del complemento).
Per l'etimologia della parola **seno** ci sono diverse versioni. Secondo alcuni essa deriverebbe dall'abbreviazione di *s.ins. = senis inscriptae = semicorda*, perché il seno di un arco non è altro che la corda che sottende l'arco doppio; secondo altri invece è la traduzione latina della parola *gaib = piega* (corda piegata in due), la quale a sua volta sembra derivare dal termine indiano *gib*, parola con cui il seno era indicato sulle tavole astronomiche del IX secolo.
Nella prima parte dell'*Aryabhatiya* vengono trattate le progressioni, la risoluzione di triangoli, poligoni e cerchio, il calcolo del valore di $\pi = 3{,}1416$, valore che sostanzialmente è quello usato da Tolomeo. Nella seconda parte invece il matematico indiano tratta della misura del tempo e

di trigonometria sferica, ma l'argomento più importante è senza dubbio quello che riguarda la numerazione posizionale decimale.
Le più antiche tavole dei seni che siano giunte fino a noi, scritte usando la numerazione posizionale decimale, sono quelle contenute nell'*Aryabhatiya* (ma ci sono dei riferimenti anche nel *Siddhãntas*). Nell'*Aryabhatiya* i seni degli angoli, fino a 90°, vengono dati per 24 intervalli ognuno dei quali misura (3¾)° ciascuno. Il raggio del cerchio veniva assunto di 3438 unità e la circonferenza di 36 · 60 = 21.600 unità (il che comporta per il valore di π un numero che fino alla quarta cifra dopo la virgola coincide con quello di Tolomeo) e per il seno di (3 ¾)° assumeva per valore il numero 60 · 3¾ = 225, cioè il seno di un angolo molto piccolo è quasi uguale alla misura del radiante. Per calcolare gli altri valori della tavola dei seni si serviva di una formula ricorsiva che può essere espressa dall'identità:

$$s_{n+1} = s_n + s_1 - \frac{S_n}{s_1}$$

dove con s_n viene indicato l' n-esimo termine della serie da n = 1 a n = 24, mentre con S_n la somma dei primi n valori dei seni; in questa tavola si trovano anche i valori di quello che in seguito è stato chiamato *senoverso* dell'angolo. Con questa formula si trova facilmente che *sen*(7 ½)° = 449, *sen*(11¼)° = 671, *sen*15° = 890 e *sen*90° = 3438; questa tavola contiene anche i valori di quello che nella nostra Trigonometria chiamiamo *senoverso* dell'angolo "1 − $cos\varphi$" e che gli indiani indicavano con 3438 (1 − $cos\varphi$). Detti valori vanno da *vers*(3¾)° = 7 a *vers*90° = 3438. Dividendo tutti questi valori per 3438, ci si accorge che i risultati si avvicinano notevolmente ai valori delle moderne tavole trigonometriche.
Circa un secolo dopo Aryabhata, è attivo in India un altro matematico, **Brahmagupta** (secolo VII), autore dell'opera *Brahma-sphuta-Siddhanta* circa 628 d.C., nella quale si occupa anche di Trigonometria. Per π Brahmagupta cita due valori: uno lo chiama "*valore pratico*" e lo assume uguale a 3, e l'altro, detto "*valore netto*", lo assume uguale a $\sqrt{10}$ (questo valore compare molto di frequente negli scritti indiani ed è noto perciò anche con il nome di "*valore indiano*"). Per il cerchio trigonometrico adotta un raggio di 3270 unità invece di quello di 3438 di Aryabhata, mentre per il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo trova un risultato che, nella forma attuale, possiamo esprimere mediante le identità:

$$2R = \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

con ovvio significato dei simboli (si tratta però di una riformulazione del risultato già noto a Tolomeo nel linguaggio delle corde).
Il VII secolo è stato un po' buio per lo sviluppo della Matematica, in quanto gli studiosi del tempo erano interessati più all'aggiornamento (attingendo dalle opere degli studiosi vissuti anteriormente) che alla ricerca originale. Questo secolo è stato quello dell'espansione araba ed i conquistatori assorbirono il sapere e le conoscenze delle civiltà su cui avevano esteso il predominio. Per quanto riguarda la Trigonometria, in Arabia ve ne furono di due tipi: uno basato sulla Geometria greca delle corde (presa dall'*Almagesto*) e l'altro basato sulle tavole indiane dei seni presenti nel *Sindhint*, ma la preferenza gli arabi la accordarono al sistema indiano basato sulla funzione seno. Ed è proprio dovuta agli arabi l'espansione di questo tipo di Trigonometria in Europa. Veicolo principale di questa trasmissione è stato l'astronomo **al−Battani** (Harran circa 858−Samarra 929) conosciuto in Europa con il nome di **Albatenio**, (ma sembra che ciò sia avvenuto un po' prima ad opera di **Thabit ibn Qurra**). Nell'opera, dal

titolo *Sul movimento delle stelle*, Albatenio presenta delle formule relative alla risoluzione del triangolo rettangolo nelle quali comparivano le funzioni *seno* e *senoverso*. Nel secolo successivo fu **Abu'l–Wafa** (Buzadjãn circa 939–Baghdad 997 o 998). Abu'l–Wafa a Baghdad svolse un ruolo importante sia come traduttore che come compilatore di trattati originali in cui riuscì a fondere il pensiero scientifico greco e alessandrino con quello persiano ed indiano; diede anche contributi originali alla Trigonometria occupandosi di tabulazioni ed applicazioni delle funzioni *tangente* e *cotangente* all'Astronomia.
La funzione *tangente* degli arabi, diversamente dalla funzione *seno* degli indiani, veniva data per un cerchio di raggio unitario, e ciò li avvicinava alla Trigonometria moderna. Abu'l–Wafa dà alla Trigonometria un assetto sistematico e dimostra teoremi come ad esempio quelli per le formule di duplicazione e di bisezione. La legge dei seni, pur essendo nota a Tolomeo ed implicita in Brahmagupta, viene però attribuita ad Abu'l–Wafa poiché e a lui che si deve la chiara formulazione della legge per i triangoli sferici. Compilò una tavola dei seni per angoli che differiscono di (1/4)° calcolandone il valore equivalente fino a 8 cifre decimali ed anche una tavola delle tangenti.
A **Ibn Yunus** (circa 974–1009), operante al Cairo come astronomo, si deve l'introduzione della formula:

$$2cos\alpha \cdot cos\beta = cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)$$

che è una delle quattro formule che nel XVI secolo servirono, prima dell'invenzione dei logaritmi, a trasformare prodotti in somme con il metodo noto come "*prostaferesi*" (vocabolo di origine greca che significa sommare e sottrarre).
Successivamente anche **Nasir Eddin** (Nasir ad–Din at–Tusi, nato a Tus nel 1202 e morto a Baghdad nel 1274) diede un contributo allo sviluppo della Trigonometria e dell'Astronomia; continuando l'opera di Abu'l–Wafa compose il primo trattato sistematico di Trigonometria Piana e Sferica, considerandola come argomento a se stante e non come strumento dell'Astronomia come era avvenuto fino ad allora. In questo trattato venivano usate tutte e sei le funzioni trigonometriche e venivano date delle regole per risolvere i triangoli piani e sferici in diversi casi. Tale opera però non ebbe molto successo in Europa perché scarsamente diffusa.
Dopo Nasir Eddin vi fu un continuo decadere della matematica araba. Per l'inizio del XV secolo va ricordata però la figura di **Al-Kashi** (morto verso il 1436), che ebbe come mecenate il principe Ulugh Beg, re del Turkestan e nipote del conquistatore mongolo Tamerlano. Ulug Beg, fra il 1417 e il 1420, fece costruire a Samarcanda un grandioso osservatorio astronomico dotato di strumenti notevoli per dimensioni e precisione (tra questi spicca un quadrante murale del raggio di 18 metri per le osservazioni di Saturno) ed vi fece convergere i più illustri scienziati arabi, tra i quali va ricordato Al Kashi, il quale diede dei contributi sia alla Matematica che all'Astronomia. Egli si dilettava molto ad eseguire calcoli lunghi e complessi e per π aveva trovato un'approssimazione più accurata dei valori ottenuti da tutti i suoi predecessori; espresse il suo valore di 2π sia in forma sessagesimale che in quella decimale (2π = 6,2831853071795865); nessun altro matematico ha raggiunto una tale accuratezza fino alla fine del XVI secolo.
Ma è nel secolo XV che la Trigonometria acquista notevole sviluppo. Infatti il XV secolo è stato il secolo dei viaggi transoceanici e di circumnavigazione della Terra. Come sappiamo i primi viaggi si sono svolti in condizioni di pericolo, perché i navigatori non disponevano né di strumenti di misura né di carte geografiche delle coste e dei Continenti in quanto i greci, gli arabi, gli italiani dell'epoca dei Comuni e gli indiani avevano disegnato carte geografiche soltanto di una piccola parte della Terra. I navigatori del tempo si facevano guidare dalle stelle per il cammino dell'andata, soprattutto per ritrovarlo al ritorno. L'esigenza di questi navigatori era quella di sapere a quale latitudine e longitudine fosse giunta la nave, e per fare ciò

dovevano sapere giorno per giorno quale fosse la direzione del sud ed orientare l'*astrolabio* (che è uno strumento che serviva per la determinazione delle coordinate degli astri e per la misura del tempo), osservare la posizione delle stelle sempre alla stessa ora ed eseguire con una certa rapidità e precisione i calcoli servendosi al più delle tabelle trigonometriche disponibili al tempo (le tabelle più affidabili erano quelle calcolate dagli indiani e rielaborate poi dagli arabi che davano i valori del seno di un angolo di 4° in 4°).
La costruzione di queste tabelle era abbastanza semplice, e se si ha dimestichezza con i calcoli, queste si possono ottenere con tante cifre quanto si vuole e quindi semplificare i calcoli e valutare la posizione della nave nel mare durante la navigazione. Gli antichi astronomi avevano tracciato delle carte sulle le posizioni occupate dalle stelle e dai pianeti nei diversi mesi dell'anno; gli egizi e i babilonesi, per ottenere un calendario preciso, si erano basati sulla posizione delle stelle nel cielo ed avevano elaborato schemi su come calcolare il passaggio di una stella sul meridiano del luogo. Successivamente calcoli e teoremi furono perfezionati dagli indiani e verificati dagli arabi con alcune correzioni empiriche dei triangoli specialmente quando i viaggi, come quelli dall'India e dall'Arabia fino al Madagascar o alla Cina, erano lunghi. Inoltre gli arabi furono i primi a calcolare le correzioni dei triangoli in modo da modificare, per i triangoli sferici, i calcoli eseguiti per i triangoli piani, poiché si erano accorti che quando percorrevano centinaia di chilometri di mare, gli errori che si commettevano considerando piana la Terra, erano macroscopici e rischiavano di far perdere la nave in mare. Quindi, poiché per individuare la posizione di una nave era necessario effettuare delle misure ed eseguire dei calcoli, ci si rese conto della necessità di avere a bordo delle navi in navigazione transoceanica un *maestro di calcolo*.
Malgrado ciò, i marinai però notarono che la precisione delle tabelle a loro disposizione non era più sufficiente quando si doveva attraversare l'oceano; inoltre, quando si navigava nei mari nordici in certi periodi dell'anno, si stava giorni e giorni senza vedere né il Sole né le stelle, e, anche commettendo piccoli errori nel dirigere la nave, si poteva sbarcare a diversi chilometri di distanza dal luogo previsto. E' proprio a causa di queste esigenze che commercianti e navigatori chiedevano metodi di calcolo che li rendessero più precisi e più veloci nell'esecuzione. La possibilità di abbreviarli esisteva già al tempo di Archimede, ma divenne esigenza economica e sociale nel 1500.
Nel 1436, anno in cui probabilmente è morto al-Kashi, nasce a Königsberg (che significa *montagna del Re*) **Johann Müller** (1436–1476), più noto con il nome di **Regiomontano** (che è la forma latinizzata del suo luogo d'origine). Senza ombra di dubbio si può affermare che il Regiomontano è stato il più influente matematico del XV secolo.
Dopo aver studiato alle Università di Lipsia e Vienna ove ebbe modo di sviluppare i suoi interessi per la Matematica e l'Astronomia, il Regiomontano accompagnò il Cardinale Bessarione, allora Arcivescovo di Nicea, a Roma. Qui ebbe modo di imparare il greco e venire a contatto con le principali correnti del pensiero filosofico e scientifico. Successivamente tornò in Germania e a Norimberga installò una stamperia ed un osservatorio. Nella sua stamperia sperava di poter stampare le traduzioni delle opere di Archimede, di Apollonio, di Erone, Tolomeo e di altri scienziati loro contemporanei, ma la tragica morte (sembra che fosse stato avvelenato) che lo colpì all'età di quarant'anni, pose fine alle sue ambizioni. Nel campo dell'Astronomia il suo contributo principale consistette nel completamento di una versione latina, iniziata dal suo maestro **Georg Peuerbach** (1423–1469), dell'*Almagesto* di Tolomeo. Oltre a lavori di traduzione redasse anche una serie di manuali originali.
La sua opera, *Epitome dell'Almagesto di Tolomeo* va ricordata per l'importanza che viene data alla sezione matematica. Di maggiore importanza per la Matematica fu però il suo *De triangulis omnimodis*, in cui vengono esposti metodi per risolvere problemi relativi a triangoli e che segnò la rinascita della Trigonometria.

In quel tempo ogni nuova opera di Astronomia era accompagnata da tavole di funzioni trigonometriche e ciò avvenne anche per l'opera iniziata dal Peuerbach. Infatti in essa erano incluse le tavole dei seni, elemento che ci consente di dedurre che la Trigonometria era ancora considerata soltanto uno strumento dell'Astronomia. In India vi era scarso interesse per la funzione *seno* (a parte il ruolo nei sistemi astronomici o nel *Siddhantas*) ed anche fra gli arabi, dove la Trigonometria era seconda soltanto all'Algebra e non aveva avuto una esistenza indipendente, se si esclude il *Trattato sul quadrilatero* **di Nasir Eddin**. Per parecchi secoli i contributi latini allo sviluppo della Trigonometria furono blandi. La *Practica geometriae* di **Fibonacci** (**Leonardo** da **Pisa**, nato a Pisa circa nel 1170 e morto dopo il 1240) e le opere di **Bradwardine** (forse nato nel 1290 e morto nel 1349) contengono alcuni concetti fondamentali di Trigonometria ripescati dalle fonti arabe. E' proprio con il Regiomontano nel suo *De Triangulis* che l'Europa raggiunge una posizione preminente in questo campo. Quasi sicuramente il Regiomontano conosceva l'opera di Nasir Eddin e quindi è anche probabile che questa lo abbia ispirato per organizzare la Trigonometria come disciplina indipendente dall'Astronomia.

Nel Libro I del *De Triangulis*, scritto verso il 1464, vi si trovano alcuni concetti fondamentali su grandezze e rapporti, derivati comunque da Euclide; vi sono inoltre più di 50 proposizioni sulla risoluzione di problemi relativi a triangoli.

Nel Libro II vi è una chiara formulazione e dimostrazione della legge dei seni e vi sono problemi sulla determinazione dei lati, degli angoli e delle aree dei triangoli.

Nel Libro III vi sono teoremi simili a quelli che compaiono in antichi testi greci sulla *sferica* prima dell'uso della Trigonometria.

Il Libro IV tratta della Trigonometria sferica e comprende anche la legge dei seni per i triangoli sferici.

In tutti questi libri il Regiomontano ha sempre evitato l'uso della funzione *tangente*, funzione che però incluse nel suo trattato trigonometrico *Tabulae directionum*, ma non la chiama con il termine *tangente*, bensì usa la parola "*numerus*" davanti a ciascuno dei valori, calcolati per ogni grado ed elencati in una tabella chiamata "*Tabula fecunda*" (tabella produttiva).

Nella compilazione di tali tabelle, per evitare l'uso delle frazioni, in genere si adottava un valore molto grande per il raggio del cerchio o *sinus totus*. Il Regiomontano in alcune tavole assunse un raggio di 600.000 unità mentre per altre adottò addirittura il valore di 10.000.000 o di 600.000.000; per la tavola delle tangenti invece scelse il valore 10.000. Il valore trovato per 89° fu 5.729.796 e quello per 90° lo disse infinito. Le *Tabulae directionum* furono pubblicate nel 1490 e la sua opera più importante, cioè il *De triangulis*, fu stampata nel 1533, quindi dopo la sua morte. È probabile però che queste opere già da prima circolassero manoscritte fra i matematici di Norimberga e senz'altro hanno esercitato un notevole influsso sullo sviluppo della Matematica del XVI° secolo.

In questo secolo il maggior interesse per la Matematica andava all'Algebra, ma la Trigonometria non rimase molto indietro anche se i risultati raggiunti non furono così eclatanti come quelli dell'Algebra.

La costruzione delle tavole trigonometriche era un lavoro noioso, ma erano particolarmente utili agli astronomi ed ai matematici: in questo campo i maggiori progressi vennero fatti in Polonia e in Germania. Basti pensare a **Nicolò Copernico** (Thorn 1473–Frauenberg 1543) che rivoluzionò il mondo facendo ruotare la Terra attorno al Sole. Naturalmente a quel tempo l'astronomo doveva essere anche trigonometrista, per cui anche Copernico contribuì allo sviluppo della Matematica oltre che a quello dell'Astronomia. Nel periodo del Regiomontano, le città della Polonia erano sede di cultura e di sapere; in special modo lo era Cracovia, che godeva di grande prestigio sia nel campo della Matematica che in quello dell'Astronomia. E proprio all'Università di Cracovia si era iscritto Copernico nel 1491. Dopo aver compiuto studi di Diritto, Medicina e Astronomia a Roma, Padova e Ferrara, Copernico insegnò a Roma e nel

1510 tornò in Polonia dopo essere stato nominato Canonico a Frauenberg. Egli era stato incaricato di fare la riforma monetaria e di tenere a freno l'*Ordine Teutonico* (un'associazione monastico-militare costituitasi in ordine nel 1197 con sede ad Acri). Nonostante questi suoi molteplici impegni riuscì a portare a termine il suo famoso trattato *De Rivolutionibus orbium coelestium*, opera che venne pubblicata nel 1543, anno della sua morte.
Questo trattato contiene ampie parti di Trigonometria che erano già state pubblicate l'anno precedente in un altro suo trattato, *De lateribus et angulis triangulorum*. Il suo contenuto trigonometrico è simile a quello del Regiomontano pubblicato a Norimberga 10 anni prima, ma sembra che le concezioni trigonometriche di Copernico risalissero a prima del 1533, quindi quando ancora non conosceva l'opera del Regiomontano. Però è altrettanto probabile che la forma definitiva della Trigonometria di Copernico derivasse in parte da quella del Regiomontano. Infatti, nel 1539 Copernico prese come allievo certo **Georg Joachim Rhaeticus** (Feldkirch 1514 - Košice 1576), pseudonimo del matematico e astronomo svizzero **Georg Joachim** von **Lauchen**, italianizzato in **Giorgio Gioacchino Retico** che aveva studiato ed insegnato a Wittenberg ed aveva avuto contatti con i matematici di Norimberga; è perciò probabile che la Trigonometria esposta da Copernico si ricollegasse, attraverso il Rhaeticus, a quella del Regiomontano.
Nel *De rivolutionibus* figuravano diversi teoremi di trigonometria, ma venne omessa una proposizione che originariamente era stata inclusa dall'Autore in una versione manoscritta, ma che venne eliminata nella versione stampata. La proposizione omessa era una generalizzazione del teorema di Nasir Eddin sul moto rettilineo risultante dalla composizione di due moti circolari. Con la pubblicazione del *De rivolutionibus* Copernico contribuì a diffondere l'influsso del Regiomontano. In seguito il Rhaeticus coordinò le concezioni del Regiomontano con quelle di Copernico, aggiungendovi però anche idee proprie, componendo un trattato, che forse è il più elaborato fra tutti quelli composti fino a quel tempo, dal titolo *Opus Palatinum de Triangulis*. In quest'opera, in due volumi, la Trigonometria raggiungeva un livello senza precedenti; Rhaeticus non si basava più sulla tradizionale considerazione delle funzioni rispetto all'arco, ma concentrava l'attenzione sui lati di un triangolo rettangolo. Venivano inoltre usate tutte le funzioni trigonometriche per le quali egli stesso calcolò tavole molto elaborate nelle quali, per il calcolo del seno e del coseno, usava un'ipotenusa (raggio) di 10.000.000 di parti e per le altre quattro funzioni una base di 10.000.000 di parti per intervalli di 10”; successivamente cominciò a calcolare i valori di tangenti e secanti con base 10^{15} parti, ma morì prima di aver compiuto l'opera. Il trattato venne completato e pubblicato, con aggiunte, dal suo allievo **Valentin Otho** (1550 circa–1605), nel 1596.
Con i lavori di **Federico Commandino** (Urbino 1509?–1575, medico di professione ma che dedicò la sua vita alla traduzione dal greco di molte opere dell'antichità prevalentemente di Matematica) e di **Francesco Maurolico**, detto anche **Francesco da Messina** (Messina 1494–1575, monaco benedettino di origine greca che insegnò a Messina e tradusse in latino varie opere di Geometria del periodo ellenico), l'Europa era entrata in possesso della maggior parte delle principali opere matematiche dell'antichità classica. In questo periodo si assiste al passaggio dal Rinascimento al mondo moderno, e, per quanto riguarda la Matematica, l'innovazione si realizzò attraverso un gran numero di personaggi. Fra i più importanti vanno ricordati i due italiani **Galileo Galilei** (Pisa 1564–Arcetri 1642) e **Bonaventura Cavalieri** (Milano 1598–Bologna 1647); gli inglesi **Henry Briggs** (Warley Wood 1561–Oxford 1631), **Thomas Harriot** (Oxford 1560–1621) e **William Oughtred** (Eton 1575–Albury 1660); i fiamminghi **Simone Stevino**, detto anche **Simone di Bruges** (Bruges 1548–L'Aia 1620) e **Albert Girard** (Saint-Mihiel, Mosa, 1595–L'Aia 1633); lo scozzese **John Napier** (Merchiston Castle 1550–1617); lo svizzero **Jobst Bürgi** (Lichtensteig 1552–Kassel 1632) ed il tedesco **Johann Kepler** (nato a Württemberg 1571–Ratisbona 1632). Ma la figura centrale ed eminente

in questo periodo di cambiamenti, fu il matematico francese **François Viète** (Fontenay-le-Comte 1540–Parigi 1603), noto anche con il nome latinizzato di **Franciscus Vieta**.
Viète aveva studiato diritto ed aveva anche esercitato la professione di avvocato fino a che non diventò consigliere nel Parlamento della Bretagna; in seguito entrò a far parte del consiglio del Re, prima di Enrico III e poi di Enrico IV. Mentre era al servizio di Enrico IV (Enrico di Navarra), Viète dimostrò abilità nel decifrare i messaggi del nemico, tanto che gli spagnoli lo accusarono di essere in combutta con il diavolo. Egli dedicava alla Matematica soltanto quel poco di tempo libero che gli lasciavano gli innumerevoli impegni politici, ma nonostante ciò diede importanti contributi allo sviluppo dell'Aritmetica, dell'Algebra, della Geometria e soprattutto della Trigonometria. E' infatti a lui che spetta il merito di aver dato una esposizione sistematica ai procedimenti di risoluzione dei triangoli. Anche Viète, naturalmente, prese le mosse dalle opere dei suoi predecessori ed in particolare dalle opere del Regiomontano e del Retico. Infatti egli concepiva la Trigonometria come una branca a se stante della Matematica allo stesso modo del Regiomontano, ed operava senza fare riferimento alle mezze corde di un cerchio come il Retico.
Nella sua opera *Canon Mathematicus* pubblicata nel 1579, si trovano tabelle di tutte e sei le funzioni per gli angoli, di minuto in minuto. Nella compilazione di queste tabelle, per evitare l'uso delle frazioni quanto più possibile, scelse un "*sinus totus*" (o ipotenusa) di 100.000 parti per le tavole dei seni e dei coseni, e una "*basis*" o "*perpendiculum*", sempre di 100.000 parti, per le tavole delle tangenti, cotangenti, secanti e cosecanti (nomi di cui però egli non faceva uso fatta eccezione per la funzione *seno*). Nella risoluzione dei triangoli non rettangoli, nel *Canon Mathematicus* Viète scomponeva questi in triangoli rettangoli; in un'altra sua opera, la "***Variorum de rebus mathematicis***" del 1593, compare la seguente proposizione:

$$\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}} = \frac{tang\,\frac{A+B}{2}}{tang\,\frac{A-B}{2}}$$

proposizione del tutto equivalente a quella che ora noi chiamiamo *teorema delle tangenti*. Va però precisato che Viète forse è stato il primo ad applicare questa formula, in quanto la stessa era già stata pubblicata nel 1583 da un matematico poco noto, **Thomas Fink**, nell'opera *Geometria rotundi*.
In questo periodo, in Europa, comparvero identità trigonometriche di vario genere. Fra queste vi era un gruppo di formule che trasformavano una somma o differenza di due funzioni trigonometriche in un prodotto, formule che vanno sotto il nome di *formule di prostaferesi*. Da queste Viète derivò la formula:

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Con procedimento analogo a quello con cui Viète aveva dedotto questa formula, vengono ottenute le formule:

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$sen\alpha sen\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\right]$$

formule che sono note come *formule di Werner*.

A **Johannes Werner** (Norimberga 1468–1528), che aveva contribuito a conservare la Trigonometria del Regiomontano, si devono le formule che trasformano il prodotto di due funzioni trigonometriche nella somma di altre due funzioni trigonometriche. Sembra che queste formule fossero usate da questo studioso per semplificare i calcoli astronomici. In realtà la formula che trasforma il prodotto di due coseni in una somma di coseni era già nota agli arabi del tempo di ibn-Yunus (che al tempo di Hakim aveva operato al Cairo, ove aveva raccolto la documentazione relativa alle osservazioni astronomiche degli anni precedenti, sulla cui base compilò le *Tavole astronomiche Hakimite*). Queste formule offrirono una nuova regola di calcolo che venne adottata nei principali osservatori astronomici, compreso quello di **Tycho Brahe** (Kundstrut 1546 – Praga 1601, noto in Italia con il nome di **Ticone)**, in Danimarca, da dove la fama di tale metodo giunse a **Napier**. Viète generalizzò la Trigonometria fino a trasformarla in Goniometria: basti pensare alle sue formule dell'angolo multiplo. Quelle di duplicazione per il seno ed il coseno erano già note a Tolomeo, mentre quelle di triplicazione si potevano dedurre facilmente da quelle di duplicazione; applicando ricorsivamente le formule di Tolomeo si arrivava, con grande difficoltà di calcolo, alla formula per $sen(n\alpha)$ e per $cos(n\alpha)$. Viète ricorse allora alla nota proprietà dei triangoli rettangoli, dopo averla opportunamente manipolata:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2=(ad-bc)^2+(bd+ac)^2$$

ed arrivò così alle formule:

$$sen\left(n\alpha\right)=ncos^{n-1}\alpha\cdot sen\alpha-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}cos^{n-3}\alpha sen^3\alpha+\cdots$$

$$cos\left(n\alpha\right)=cos^n\alpha-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}cos^{n-2}\alpha\ sen^2\alpha+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}cos^{n-4}\alpha\ sen^4\alpha-\cdots$$

Viète riuscì anche ad applicare le sue formule per la risoluzione generale dell'equazione di 3° grado, mostrando così che la Trigonometria poteva dare un valido aiuto anche all'Algebra. Il suo ragionamento era il seguente.

Nell'equazione di 3° grado:

$$x^3+3px+q=0$$

si opera la sostituzione $x=\frac{y}{m}$, ottenendo così la nuova equazione:

$$x^3+3m^2py+m^3q=0$$

Confrontando questa con la:

$$cos^3\varphi-\frac{3}{4}cos\varphi-\frac{1}{4}cos3\varphi=0$$

osservò che se $y = cos\vartheta$ e se $3m^2 p = -\frac{3}{4}$, allora si ha:

$$-\frac{1}{4}cos3\varphi = m^3 q$$

dove p è dato, per cui m risulta noto; con questo procedimento è ora possibile determinare 3φ poiché q è anche noto; sarà allora noto anche $\cos\varphi$ e quindi la y e da essa la x. Questo tipo di soluzione, suggerita dal Viète, venne dimostrata dettagliatamente da **Girard**, che fu anche il primo a calcolare l'area dei triangoli sferici nella sua opera *Invention nouvelle en l'algèbre*, pubblicata nel 1629.

Nel 1593 un matematico fiammingo, **Adriaen van Roomen** (Lovanio 1561 Magonza 1615), che fra l'altro calcolò il valore di π con 17 decimali, aveva sfidato i matematici dell'epoca a risolvere l'equazione del 45° grado:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = k$$

tanto che l'Ambasciatore dei Paesi Bassi presso la corte di Enrico IV affermò che in Francia non v'era alcun matematico in grado di risolvere il problema proposto. Allora Viète, preso nel vivo dell'orgoglio, raccolse la sfida e riuscì a trovarne le radici positive applicando un procedimento trigonometrico e osservando semplicemente che si poteva porre $k = sen(45\vartheta)$ $x = sen(2\vartheta)$. Quindi la Trigonometria si poteva applicare anche per la risoluzione di problemi aritmetici ed algebrici. E fu proprio grazie a questa possibilità che questa branca della Matematica trovò nuovi impulsi tra la fine del XVI secolo e l'inizio del XVII. Proprio in questo periodo la disciplina prese il nome di **Trigonometria**. **Bartholomaeus Pitiscus** (Grünberg, Slesia 1561–Heidelberg 1613), precettore e cappellano di Federico II del Palatinato, nel 1595 pubblicò un manuale espositivo dal titolo *Trigonometria sive de solutione triangulorum* come supplemento ad un libro sulla teoria della sfera. Questo manuale venne poi ristampato separatamente nel 1600, nel 1606 e nel 1612. Nel 1613 pubblicò un altro manuale contenente le tavole dei seni ottenute perfezionando quelle del Rhaeticus.

Le formule dell'angolo multiplo avrebbero potuto far scoprire al Viète anche la periodicità delle funzioni goniometriche, ma ciò gli fu impedito dalla sua esitazione di fronte ai numeri negativi.

In quel periodo in molti si erano cimentati a calcolare il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio con risultati che in alcuni casi erano accettabili, mentre in altri no.

Verso il 1579 **Valentin Otho** (1550 circa–1605) e **A. Anthonisz**, indipendentemente l'uno dall'altro, calcolarono il valore di $\pi \approx \frac{355}{113}$; i termini di questa frazione si ottengono sottraendo tra loro i numeratori e i denominatori dei valori dati da Tolomeo e da Archimede, che sono rispettivamente $\frac{377}{120}$ e $\frac{22}{7}$.

Il più importante risultato per il calcolo di π è però da attribuirsi a **Ludolph** van **Ceulen** (Hildesheim 1540–Leida 1610); egli nel 1596 pubblicò per π un numero di venti cifre ottenuto considerando un poligono di quindici lati e moltiplicando il numero dei lati 37 volte; successivamente, usando un poligono con un numero maggiore di lati, raggiunse un'approssimazione di 35 cifre (questo numero fu poi fatto incidere dalla moglie sulla sua tomba).

Ma il primo a dare un'espressione numerica teoricamente precisa per il valore di π fu proprio Viète. Egli considerò il seguente prodotto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ ...$$

metodo che però non era del tutto nuovo. Questo prodotto si può ottenere facilmente inscrivendo in una circonferenza un quadrato ed applicando poi la formula ricorrente:

$$a_{2n} = a_n sec \frac{\pi}{n}$$

dove a_n rappresenta l'area del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio e facendo crescere n indefinitamente. Si può calcolare il valore di tale prodotto calcolando i raggi vettori dei punti della *quadratrice* di **Ippia** (seconda metà del IV secolo a.C.), $r\ sen\varphi = 2\varphi$, per bisezioni successive dell'angolo a cominciare da:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

ed osservando che:

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = cos \frac{\pi}{2^n}$$

e che:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \frac{2}{\pi}$$

Questo risultato è significativo per il fatto che anche le notazioni trigonometriche stavano sempre più invadendo sia il campo dell'infinitamente grande che quello dell'infinitamente piccolo.
Un contributo alla Trigonometria del XVI secolo fu dato anche da **John Napier** (che ne trasse dei vantaggi per il calcolo dei suoi logaritmi). Napier, come Viète, non era un matematico di professione; era di famiglia nobile con il titolo di *Barone di Murchiston*, e la sua attività consisteva nell'amministrare i suoi possedimenti, mentre solo nel tempo libero si dedicava alla scrittura. Vari sono stati gli argomenti di cui si è occupato; per quello che riguarda la Matematica si è interessato a quegli argomenti che si riferivano al computo ed alla Trigonometria. A Napier però si deve soprattutto l'invenzione dei logaritmi, argomento al quale, come afferma lui stesso, avrebbe lavorato per 20 anni (il che farebbe risalire l'origine della sua idea al 1594); egli era partito facendo alcune considerazioni sulle serie delle potenze successive di un dato numero, aspetto che era già stato oggetto di studi e pubblicazioni (compare addirittura nelle opere di Archimede), la più importante delle quali può essere considerata l'*Arithmetica integra* di **Michael Stifel** (1487 circa–1567).
In queste serie le somme e le differenze degli indici delle potenze corrispondevano ai prodotti ed ai quozienti delle potenze stesse. Ma una serie di potenze intere di una base non potevano

essere utilizzate ai fini del calcolo perché gli intervalli tra due termini consecutivi era troppo largo e quindi l'interpolazione era molto imprecisa. Mentre Napier stava studiando un altro procedimento per eseguire tali calcoli, gli fece visita tale dott. **John Craig**, medico personale di Giacomo VI di Scozia che lo portò a conoscenza dell'uso che se ne faceva in Danimarca delle formule di prostaferesi. John Craig era venuto a sapere di tale uso in maniera fortuita: nel 1590 egli aveva fatto parte della delegazione che accompagnava Giacomo VI in Danimarca per incontrare la sua futura sposa, Anna di Danimarca. Però una tempesta aveva costretto la nave all'approdo e la delegazione sbarcò in un punto non lontano dall'osservatorio astronomico di Tycho Brahe che li ospitò e li intrattenne fino al placarsi della tempesta. Fu proprio durante queste conversazioni di intrattenimento che l'astronomo accennò alla tecnica matematica della prostaferesi che lui stesso usava in quell'osservatorio per eseguire i calcoli con più celerità e con meno fatica. Dopo questa informazione Napier moltiplicò i suoi sforzi per completare i logaritmi e finalmente nel 1614 riuscì a pubblicare l'opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi). A coniare il termine *logaritmo* fu lo stesso Napier: la parola risulta dalla composizione dei due termini greci *logos* = *rapporto* e *arithmos* = *numero*; ciò ci suggerisce che la costruzione delle tavole avvenne numericamente e non geometricamente. Scopo principale delle sue ricerche sui logaritmi era quello di semplificare i calcoli, specialmente dei prodotti, dei quozienti e delle potenze; tuttavia non va trascurato il fatto che egli mirava soprattutto alla semplificazione dei calcoli trigonometrici e ciò appare dal fatto che quello che noi (dopo accurata ed opportuna sistemazione) chiamiamo *logaritmo neperiano di un numero*, egli lo chiamava *logaritmo di un seno*.
È superfluo aggiungere che l'opera di Napier, pubblicata nel 1614, ebbe un immediato successo.
L'ammiratore più entusiasta dell'opera del Napier fu sicuramente **Henry Briggs**, professore di Geometria a Oxford, che nel 1615 fece visita a Napier in Scozia per dissertare su possibili correzioni da apportare al metodo dei logaritmi; e fu così che giunsero all'accordo che si dovevano usare le potenze del10 e che il logaritmo di 1 era 0 e quello di 10 era 1. Si trattava ora di mettere in pratica queste conclusioni; Napier però non era più in grado di realizzare una nuova tavola di logaritmi (morì infatti nel 1617), per cui l'onere ricadde esclusivamente su Briggs e l'opera fu pubblicata nel 1624 con il titolo *Arithmetica logarithmica*. E mentre Briggs elaborava le sue tavole, un suo contemporaneo, **John Speidell**, nel 1619, pubblicò l'opera *New Logarithmes*, in cui erano riportati i valori calcolati dei logaritmi naturali delle funzioni trigonometriche.
I logaritmi vennero accolti con particolare entusiasmo da Keplero, non tanto come novità matematica, ma perché fornivano finalmente agli astronomi uno strumento che permetteva loro di eseguire con facilità e celerità i calcoli.
A Henry Briggs, oltre al fatto di aver pubblicato varie tavole astronomiche e nautiche e di aver compilato le tavole dei logaritmi (usando 10 come base del sistema) dei numeri da 1 a 1000, calcolato ciascuno fino alla quattordicesima cifra decimale, va il merito di aver computato i logaritmi delle funzioni trigonometriche per ogni centesimo di grado con 10 cifre decimali (è stato Briggs ad introdurre per primo i termini di *mantissa* e di *caratteristica*); a lui va anche ascritto il merito di essere giunto alle formule trigonometriche che esprimono il seno ed il coseno della metà degli angoli di un triangolo in funzione del semiperimetro e dei lati, formule che sono appunto note con il nome di *formule di Briggs*.
Fra i matematici del tempo che hanno dato un apporto allo sviluppo della Trigonometria, ricordiamo **Bonaventura Cavalieri**, appartenente all'Ordine dei Gesuati, che si interessò di Trigonometria Sferica e che contribuì a diffondere in Italia i logaritmi; **Thomas Harriot**, che calcolò l'area del triangolo sferico ed introdusse i due simboli > (maggiore) e < (minore); **William Oughtred** che nelle sue opere di Algebra e Trigonometria introdusse una serie di nuovi simboli, molti dei quali sono caduti in disuso, anche se sono sopravvissuti quelli per la

moltiplicazione e le proporzioni (in Algebra) e le abbreviazioni per le funzioni trigonometriche; **Simon Stevin**, che, pur essendosi iscritto all'Università all'età di 35 anni, riuscì (oltre che ad ottenere prestigiosi incarichi) ad essere professore di Matematica a Leida dove si occupò, migliorandolo, di calcolo letterale e di Trigonometria Sferica.
Sempre nello stesso periodo fece notevoli applicazioni alla Trigonometria **Willebrordus Snellius**, nome umanistico del matematico e astronomo olandese **Willebrord Snell** von **Royen** (Leida 1591–1626), professore di Matematica all'Università di Leida, che introdusse il metodo di triangolazione per determinare la dimensione di un grado di longitudine e quindi la dimensione della Terra.
Un altro studioso che diede dei contributi notevoli alla Matematica è stato **Gilles Personne De Roberval** (Roberval, Ile-de-France 1602–Parigi 1675); in particolare è da menzionare il suo tentativo, fatto nel 1635, di tracciare un semi-arco di sinusoide. Egli ottenne un risultato equivalente alla:

$$\int_a^b senx\, dx = cosa - cosb$$

e ciò sta ad indicare che la Trigonometria stava abbandonando l'impostazione calcolistica per avvicinarsi al metodo funzionale.
John Wallis (Hashford 1616–Oxford 1703), iniziato alla carriera ecclesiastica nel 1640, dedicò la maggior parte della sua attività alla Matematica. Aveva studiato a Cambridge e nel 1649 fu nominato professore di Geometria a Oxford, occupando così la cattedra che era stata occupata da Briggs. Era membro ufficiale della *Royal Society* avendo anche partecipato alla sua fondazione; acquistò notorietà durante le guerre civili inglesi per aver decrittato dei messaggi segreti dei partigiani realisti caduti in mano dei parlamentari. Fra le sue opere va ricordata l'"***Arithmetica Infinitorum***" del 1655. Fra i risultati più famosi va ricordata l'espressione esatta di π come prodotto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \; ...}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \; ...}$$

espressione che può essere ottenuta dal moderno teorema:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x \quad dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n+1} x \quad dx} = 1$$

e dalle formule:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^m x \quad dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

per *m* intero dispari e:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^m x \quad dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

per m intero pari, formule che sono note appunto come *formule di Wallis*.
I matematici svizzeri **Jacques** (Basilea 1654–1705) e **Jean** (Basilea 1667–1748) **Bernoulli** riscoprirono gli sviluppi in serie delle funzioni $sen(n\varphi)$ e $cos(n\varphi)$, in termini di $sen\varphi$ e $cos\varphi$, già noti a Viète. Jean, in particolare, era a conoscenza delle relazioni esistenti tra le funzioni trigonometriche e logaritmi immaginari, e, nel 1702, mediante le equazioni differenziali, scoprì la relazione:

$$arctangz = \frac{1}{i} ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

e cercò di sviluppare la Trigonometria e la teoria dei logaritmi dal punto di vista analitico.
Uno dei più importanti matematici che si interessò di Trigonometria nel XVIII secolo fu **Abraham De Moivre** (Vitry 1667–Londra 1754). Francese di nascita, ugonotto, dopo la revoca dell'Editto di Nantes (del 13 aprile 1598, che accordava ai protestanti la libertà di culto) da parte di Luigi XIV con l'Editto di Fontainebleau del 18 ottobre 1685, si rifugiò in Inghilterra dove venne a contatto con **Newton** e **Halley**. Nel 1730 pubblicò un'opera con il titolo *Miscellanea analytica*, che oltre che contenere importanti questioni nel campo della teoria della probabilità, riportava anche risultati in quello della Trigonometria analitica. Già in un articolo pubblicato nel 1707 appare la formula:

$$\frac{1}{2}\left(sen(n\vartheta) + \sqrt{-1}cos(n\vartheta)\right)^{1/n} + \frac{1}{2}\left(sen(n\vartheta) - \sqrt{-1}cos(n\vartheta)\right)^{1/n} = sen\vartheta$$

mentre nella *Miscellanea* presentava una formula equivalente alla :

$$\left(cos\vartheta \pm isen\vartheta\right)^{1/n} = cos\frac{2k\pi \pm \vartheta}{n} \pm isen\frac{2k\pi \pm \vartheta}{n}$$

usata per scomporre in fattori di secondo grado del tipo $x^2 + 2xcos\vartheta + 1$ il polinomio:

$$x^{2n} + 2xcos(n\vartheta) + 1$$

In un altro articolo, pubblicato nel 1739, trovò le radici n-esime del *binomio impossibile* $a + \sqrt{-b}$ mediante il procedimento che ancora oggi usiamo per estrarre la radice n-esima del modulo, dividendo l'argomento per n e aggiungendo multipli di $\frac{2\pi}{n}$.
Uno dei motivi che aveva portato De Moivre a scomporre il binomio $x^{2n} + ax + 1$ in fattori di secondo grado, era quello di completare alcune ricerche dell'astronomo e matematico inglese **Roger Cotes** (Leicester 1682–Cambridge 1716) sull'integrazione di funzioni razionali mediante scomposizione in frazioni parziali. Le sue ricerche, molte delle quali rimaste incompiute a causa della morte precoce, furono raccolte dopo la sua scomparsa in un'opera dal titolo *Harmonia mensurarum*, pubblicata nel 1772. L'*Harmonia* è stata sicuramente una delle prime opere che riconoscessero la periodicità delle funzioni trigonometriche, e vi comparivano, forse per la prima volta, i cicli delle funzioni tangente e secante. L'autore presentava anche quella che nei manuali di trigonometria è nota come la *proprietà del cerchio di Cotes*, risultato che si ricollega al teorema di De Moivre che permetteva di scrivere espressioni del tipo:

$$x^{2n}+1=\left(x^2-2xcos\frac{\pi}{2n}+1\right)\left(x^2-2xcos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(x^2-2xcos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+1\right)$$

Cotes aveva anche presentato, nel 1714, una relazione equivalente alla:

$$ln(cos\vartheta+isen\vartheta)=i\vartheta$$

ma questo teorema viene attribuito ad Eulero che per primo lo ha espresso nella moderna forma esponenziale.
Ma il matematico più importante di quel periodo, ma forse il più importante di tutti i tempi, è stato senza dubbio **Leonhard Euler** (Basilea 1707–Pietroburgo 1783). Suo padre, pastore protestante con la passione per la matematica al cui studio si era dedicato sotto la guida di Jacques Bernoulli, gli aveva dato le prime nozioni elementari in questo campo, anche se il suo desiderio era quello che Leonhard intraprendesse la carriera ecclesiastica. I suoi studi, oltre che alla matematica, furono rivolti anche alla Teologia, alla Medicina, alla Fisica, all'Astronomia ed alle Lingue Orientali; questa vasta cultura gli ritornò utile quando nel 1727 all'Accademia di Pietroburgo, fondata da Caterina I di Russia e dove si trovavano i fratelli Bernoulli, Nicolaus e Daniel, sotto la cui guida Euler aveva studiato, era stata aperta una scuola di Medicina. Dietro i consigli dei Bernoulli, che erano membri fra i più illustri dell'Accademia, venne chiamato a far parte della sezione di Medicina e Fisiologia. Ma proprio nel giorno del suo arrivo in Russia, Caterina I morì e l'Accademia rischiò di soccombere perché i nuovi governanti non guardavano con simpatia gli scienziati stranieri.
Comunque sia, l'Accademia sopravvisse e nel 1730 ad Euler fu assegnata la cattedra di Filosofia Naturale (anziché quella di Medicina).
Poiché Nicolaus era già morto per annegamento e Daniel nel 1733 lasciò la Russia per andare a Basilea dove aveva ottenuto la cattedra di Matematica, Euler si trovò ad essere il matematico più importante dell'Accademia pur avendo soltanto 26 anni.
Nel corso della sua vita pubblicò oltre 500 lavori e per quasi cinquant'anni dopo la sua morte i suoi lavori continuarono ad apparire fra le pubblicazioni dell'Accademia di Pietroburgo. La bibliografia dei suoi scritti, compresi quelli postumi, comprende 886 titoli e la sua produzione annua raggiunse una media di 800 pagine. Nel 1741 fu invitato da Federico il Grande a far parte dell'Accademia di Berlino (e qui la permanenza non fu del tutto felice perché a lui Pietro il Grande preferiva il filosofo Voltaire); qui Euler trascorse 25 anni della sua vita e presentò diverse relazioni oltre che all'Accademia Prussiana anche a quella di Pietroburgo. Nel 1766 tornò in Russia con seri problemi all'occhio sinistro (l'occhio destro l'aveva già perso nel 1735, forse per eccessivo lavoro) e nel 1771 subì un'operazione; riuscì a vedere per qualche giorno, ma in brevissimo tempo arrivò alla cecità quasi completa, cecità che lo accompagnò negli ultimi 17 anni della sua vita. Ma, nonostante ciò, la sua produzione non si arrestò e continuò con la stessa intensità fino al 1783 quando, all'età di 76 anni morì improvvisamente mentre prendeva il te.
A Euler è dovuto l'uso della lettera π per indicare il rapporto tra la circonferenza ed il diametro di un cerchio (1737), anche se questo simbolo era già comparso in un articolo di **William Jones** (1675–1749) nel 1706, un anno prima che Euler nascesse. Anche il simbolo *i* per indicare $\sqrt{-1}$ è stato usato per la prima volta da Euler, ma ciò è avvenuto verso la fine della sua vita (1777); vi sono poi anche altri simboli da lui introdotti nella Geometria, nell'Algebra, nella Trigonometria e nell'Analisi. La sua opera *Synopsis Palmariorum Matheseos, or a New Introduction to the Mathematics* (*Sinossi dei capolavori della Matematica, ossia una nuova introduzione alla Matematica*), del 1737 (opera nella quale appare appunto il simbolo π) contiene una trattazione analitica delle funzioni trigonometriche. Ma l'opera di Euler, che

rappresenta una svolta fondamentale nella storia della Matematica, è senza ombra di dubbio l'*Introductio in Analysis infinitorum*, pubblicata in due volumi nel 1748, che può essere considerata come la chiave di volta nell'Analisi. Da allora il concetto di funzione diventò il concetto fondamentale dell'Analisi. E' da osservare però che questo concetto aveva trovato anticipazioni già nella dottrina medioevale della *latitudo formarum* ed era implicito sia nella Geometria Analitica di **Pierre de Fermat** (Beaumont-de-Lomagne 1601–Castres 1665) e di **Cartesio** (nome italianizzato di **René Descartes**, La Haye 1596–Stoccolma 1650) sia nel calcolo infinitesimale di **Isaac Newton** (Woolsthorpe, Lincolnshire 1642–Kensingto, Londra 1727) e di **Gottfried Wilhelm Leibniz** (Lipsia 1646–Haover 1716). Anche quest'opera contiene una trattazione rigorosamente analitica delle funzioni trigonometriche. Ad esempio, il seno non veniva qui concepito come un segmento, ma semplicemente come numero, cioè l'ordinata di un punto del cerchio di raggio unitario avente centro nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane; oppure era il numero definito dalla serie infinita:

$$z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ \cdots$$

per un valore di z.
Sia **Henry Oldenburg** (1615?–1677) che Leibniz non erano riusciti a calcolare la somma dei reciproci dei quadrati perfetti:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ \cdots$$

ed anche Jacques Bernoulli aveva ammesso la sua incapacità a calcolarla. Euler, invece, partendo dallo sviluppo:

$$senz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ \cdots$$

osservò che l'uguaglianza $senz = 0$ poteva essere concepita come un'equazione polinomiale infinita, e cioè:

$$0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ \cdots$$

oppure, operando la sostituzione $z^2 = w$ come:

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \ \cdots$$

Ora, dalla teoria delle equazioni algebriche si sa che se il termine noto è uguale a 1, la somma dei reciproci delle radici è uguale all'opposto del coefficiente del termine di primo grado, che in questo caso è $\frac{1}{3!}$. Inoltre si sa che le radici dell'equazione in z sono date da:

$$\pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \ldots$$

e quindi le radici nell'incognita *w* sono:

$$\pi^2, \quad (2\pi)^2, \quad (3\pi)^2 \ \ldots$$

da cui si ricava che:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ \cdots$$

ossia:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \cdots$$

e da questa relazione ricavò il corollario:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ \cdots$$

Dagli sviluppi in serie delle funzioni e^x, *senx*, *cosx* si passò facilmente alle cosiddette *formule di Eulero*:

$$senx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$cosx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$e^{\sqrt{-1}x} = cosx + \sqrt{-1}\ senx$$

formule che, pur essendo note a **Roger Cotes** (Leicester 1682−Cambridge 1716) ed a Abraham De Moivre, con Euler diventarono di uso comune.
Contemporaneo di Euler è stato **Jean-Baptiste Le Rond**, detto **d'Alembert** (Parigi 1717−1783). Figlio naturale di Madame de Tencin (scrittrice e sorella di un Cardinale) e del cavaliere Destouche (generale d'artiglieria), fu abbandonato sui gradini della chiesa di St. Jean Baptiste Le Rond, donde il suo nome. Affidato alla moglie di un vetraio, ebbe dal padre una piccola rendita con cui riuscì a compiere gli studi al Collège des Quatre Nations, fondato dal Mazarino. Divenuto famoso come matematico, respinse le offerte di riconoscimento da parte della madre preferendo essere riconosciuto come il figlio dei suoi poveri genitori adottivi. Alla stessa maniera di Euler e Bernoulli, d'Alembert si interessò di diversi argomenti (i suoi studi furono infatti rivolti alle Leggi, alla Medicina, alle Scienze Naturali oltre che, naturalmente, alla Matematica). Insieme a Voltaire e ad altri *philosophes* contribuì ad aprire la strada alla Rivoluzione Francese.
Fino al 1757, quando la controversia sul problema delle corde vibranti li allontanò, Euler e d'Alembert avevano mantenuto una fitta corrispondenza. E fu in una di queste lettere che Euler spiegò correttamente la natura dei logaritmi dei numeri negativi. Il risultato ottenuto da Euler avrebbe dovuto essere evidente per Jean Bernoulli e per gli altri matematici che erano a

conoscenza della formula $e^{i\vartheta} = cos\vartheta + isen\vartheta$ prima che Euler la enunciasse in maniera chiara e corretta. Poiché questa identità è vera per tutti gli angoli, in particolare lo è per $\vartheta = \pi$. In questo caso essa porta a $e^{i\pi} = -1$, ossia all'osservazione che

$$ln(-1) = \pi i$$

Quindi, contrariamente a quanto supposto da Jean Bernoulli e da d'Alembert, i logaritmi dei numeri negativi non erano numeri reali ma numeri immaginari puri. Dall'identità di Euler si deduce anche che i logaritmi dei numeri complessi sono anch'essi dei numeri complessi.
L'*Introductio* ebbe notevole influenza nello sviluppo della Matematica: è in questo lavoro che le funzioni trigonometriche, logaritmiche, trigonometriche inverse ed esponenziali, vengono scritte da Euler nella forma che noi ancora oggi usiamo, e le abbreviazioni che compaiono nel testo di *sin.*, *cos.*, *tang.*, *cot.*, *sec.*, e *cosec.* sono più confrontabili con le attuali formule inglesi che non con quelle usate nelle lingue neolatine.
Mediante le identità precedentemente scritte, è possibile calcolare anche la quantità *sen*(1 + *i*) e *arccos i*, espresse sotto forma di numero complesso. Si può infatti scrivere:

$$sen(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i}$$

da cui:

$$sen(1+i) = a + ib$$

con

$$a = \frac{(1+e^2)sen1}{2e} \qquad b = \frac{(e^2-1)cos1}{2e}$$

Per quanto riguarda *arccos* si può invece scrivere:

$$arccosi = x + iy \quad \Rightarrow \quad i = cos(x+iy)$$

ossia:

$$i = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{1+e^{2y}}{2e^y} cosx + i\frac{(1-e^{2y})}{2e^y} senx$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie si trova *cos x* = 0, cioè $x = \pm\frac{\pi}{2}$ e pertanto:

$$\frac{1-e^{2y}}{2e^y} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad e^y = \mp 1 \pm \sqrt{2}$$

e poiché *x* ed *y* devono essere numeri reali, si dovrà avere:

$$x = \pm \frac{\pi}{2} \qquad\qquad y = ln\left(\pm 1 + \sqrt{2}\right)$$

Allo stesso modo si possono eseguire altre operazioni, sia trascendenti che elementari, sui numeri complessi ottenendo come risultato ancora numeri complessi. Quindi, con l'ausilio della Trigonometria, Euler ha mostrato che l'insieme dei numeri complessi è chiuso rispetto alle operazioni trascendenti elementari.

Un altro studioso, **Johann Heinrich Lambert** (Mühlhausen 1728–Berlino 1777), scienziato svizzero-tedesco che si dedicò a svariati argomenti, matematici e non, e che per qualche tempo è stato collega di Euler all'Accademia di Berlino, si è occupato di Trigonometria. Il contributo apportato da Lambert è dato da ciò che egli fece per le *funzioni iperboliche*, allo stesso modo di ciò che Euler aveva fatto per le funzioni circolari; introdusse le notazioni *senh x, cosh x* e *tangh x* per indicare gli equivalenti iperbolici delle funzioni circolari della trigonometria ordinaria e si impegnò alla diffusione della Trigonometria Iperbolica, ma mai pensando che si sarebbe rivelata molto utile per la scienza moderna.

In essa, alle tre identità di Euler per *sen x, cos x* ed e^x, venivano fatte corrispondere tre analoghe relazioni per le funzioni iperboliche, espresse dalle equazioni:

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e^x = coshx + senhx$$

Concludiamo dando alcuni cenni sullo sviluppo della Trigonometria Sferica.

La Trigonometria piana è senz'altro propedeutica a quella sferica, come ritenevano Nicolò Copernico, George von Peuerbach e Regiomontano.

Poiché bisognava introdurre qualche proposizione basilare, si fece ricorso al cosiddetto *lemma di **Menelao*** per arrivare a risultati concreti. Tolomeo lo aveva già esposto nel suo *Almagesto* come premessa ai calcoli astronomici, ma Copernico ricorre a un suo lemma; premesse tutte le nozioni sui triangoli sferici, angoli, lati, archi sferici, ecc., enuncia la sua proposizione:

In un triangolo sferico la corda inscritta nell'arco doppio dell'ipotenusa sta alla corda dell'arco doppio di un cateto come il diametro della sfera sta alla corda relativa all'arco doppio dell'angolo opposto allo stesso cateto.

Già questo lemma permette a Copernico di risolvere un triangolo rettangolo dato un angolo, diverso dall'angolo retto, e l'ipotenusa (ed anche dato un cateto e l'angolo opposto). Ma l'astronomo polacco non si ferma alla risoluzione dei triangoli rettangoli piani dati i due cateti: infatti nel Libro I, capitolo XIV, proposizione V, passa alla risoluzione del triangolo rettangolo sferico quando sono noti i tre angoli; successivamente, dopo aver svolto delle questioni geometriche per dimostrare l'unicità della soluzione, tratta dell'unicità del triangolo che riesce a determinare, e quindi passa allo studio dei triangoli sferici qualunque. Nelle proposizioni XI e XII vengono svolti problemi circa la ricerca degli elementi incogniti di un triangolo sferico quando siano noti due lati e due angoli e un lato rispettivamente, ma non si parla delle varie possibilità che potrebbero presentarsi credendo che la soluzione debba essere unica, mentre se l'angolo è opposto a uno dei lati dati, i casi possibili per la soluzione del problema sono: una, due o nessuna. Nella proposizione XIII affronta il seguente problema: *determinare gli angoli di un triangolo sferico quando siano noti i suoi lati*.

I triangoli sferici vennero considerati da Copernico solo per offrire un'unica soluzione astronomica ai suoi problemi e non certo per farne oggetto di discussione. Critiche in questo senso gli vennero mosse da **Cristoforo Clavio** o **Clavius**, nome umanistico dell'astronomo e matematico tedesco **Christoph Schlüsse** (Bamberga 1537–Roma 1612), gesuita, consulente scientifico di Papa Gregorio XIII per la riforma del calendario ed amico di Keplero. Clavius fu autore di un trattato di Trigonometria piana e sferica ed a lui viene attribuito l'uso della virgola decimale poiché appare in una tavola dei seni compilata e pubblicata nel 1593, anche se generalmente si considera come ideatore di questo tipo di scrittura **Giovanni Antonio Magini** (1557 – 1617) anche lui amico di Keplero e concorrente con Galileo alla cattedra di Matematica all'Università di Bologna, che ne fece uso nel suo *De planis triangulis* del 1592.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carl B. BOYER, *Storia della Matematica*, Mondadori 1980.

[2] Bianca GHIRON, *La Matematica, i numeri e gli uomini*, Editori Riuniti, 1982.

[3] Silvio MARACCHIA, *Le dimensioni della Terra secondo il procedimento di Eratostene*, Archimede, n. 1-2, 1974.