Periodico di Matematica (IV) Vol. II (2) dicembre 2020, pp. 7-40

Il mondo delle 4 dimensioni, negli spazi affini, ampliati ed euclidei

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di discipline matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle scienze Umane; eugenif3@gmail.com

Sunto: *Si sviluppa come capitolo indipendente il mondo delle 4 dimensioni richiamando in tal caso le nozioni di spazi affini, spazi ampliati ed euclidei reali di dimensione 4. Si presentano le condizioni di parallelismo ed ortogonalità, corredando il tutto con esercizi significativi.*

Parole Chiave*: Struttura affine, Elementi impropri, Prodotto scalare, Distanza, Ortogonalità.*

Abstract: *The world of 4 dimensions develops as an independent chapter, recalling in this case the notions of affine spaces, enlarged spaces and real Euclidean spaces of dimension 4. The conditions of parallelism and orthogonality are presented, accompanying everything with significant exercises.*

Keywords: *Affine structure, improper elements, scalar product, distance, orthogonality.*

1 - La geometria affine di R^4

Il sostegno dello spazio numerico 4-dimensionale reale, denotato con R^4, è costituito dalle quaterne ordinate di numeri reali del tipo:

$$X = (x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad Y = (y^1, y^2, y^3, y^4)$$

dove le quantità in parentesi si chiamano "*coordinate del punto*" e per le quali poniamo, $\forall$ $X,Y \in R^n$, $\forall$ $\lambda \in R$:

$$X + Y = (x^1, + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$
$$\lambda X = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n)$$

così che, sia definita la struttura vettoriale dello spazio R^4.

Fissata una base $\{e_i\}$, $i = 1,2,3,4$, il legame tra *punti* e *vettori* nasce definendo il generico vettore, con estremi X ed Y, nella forma:

$$\mathbf{u} = (x^i - y^i)\, e_i = u^i e_i \qquad (i = 1,23,4)$$

dove l'indice in alto e l'indice in basso sottintendono la sommatoria per $i = 1,2,3,4$; le quantità (u^i) prendono il nome di componenti controvarianti del vettore **u**.

In modo formale si scrive:

$$\mathbf{u} = Y - X.$$

Da notare che fissato u = ui ei , resta fissata la corrispondenza di R4 in se :

$$Y = X + \mathbf{u}$$

che prende il nome di "*traslazione di vettore* u".

Lo spazio vettoriale numerico, si chiama *spazio affine* se sono soddisfatte le due condizioni a) e b) seguenti.

a) È data una struttura di sottospazi, in R^n.

Un sottospazio S_d di dimensione $d < 4$ è l'insieme dei punti di R^4 le cui coordinate sono soluzioni di un sistema lineare di 4-d equazioni indipendenti nelle n incognite (x^1, x^2, x^3, x^4) del tipo :

$$AX^t = K^t$$

dove $A=|_{ij}\ |$ è una matrice (4-d) × 4, di caratteristica massima e X^t , K^t sono i vettori-colonna trasposti delle righe delle coordinate dei punti:

$$X = (x^1, x^2, x^3, x^4)\ ,\ \ K = (k^1, k^2, k^3, k^4)$$

Se d=3 si ha un sottospazio S_3, costituito da una sola equazione, che si chiama *iperpiano* di R^4.

Se d=2, si ha una matrice 2×4 che dà luogo ad un sistema di 2 equazioni indipendenti che definiscono un S_2, ovvero un *piano*.

Se d =1 si ha una matrice 3×4 che dà luogo ad un sistema di 3 equazioni indipendenti che definiscono un S_1, ovvero una *retta*.

b) Sullo spazio opera il gruppo delle affinità.

ia $A = |\ a_{ij}\ |$, i,j=1,2,3,4, con det $a_{ij}\ |\neq 0$. Si chiama affinità una corrispondenza del tipo:

$$Y^t = AX^t + K^t \text{ , ovvero } \quad Y = XA^t + K$$

dove la matrice A e il vettore riga K sono assegnati. È facile provare che tali affinità formano un gruppo, rispetto alla composizione di corrispondenze[1], detto il gruppo affine.

Chiameremo infine *geometria affine* l'insieme delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al gruppo affine.

2 - Le equazioni dei sottospazi e le condizioni di parallelismo

La struttura affine di R^4, è stata definita assegnando i seguenti sottospazi, chiamati rispettivamente iperpiani o S_3, piani e rette.

1 - Un *iperpiano*, ovvero un S_3, ovvero un sottospazio 3-dimensionale, è il luogo di punti di R^4 soddisfacente ad una equazione del tipo:

$$(H) \qquad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 .$$

Ne segue che, assegnato un secondo iperpiano:

$$(H) \qquad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 .$$

la ovvia condizione di parallelismo è data da:

[1] Siano Y,X,Z, K, H, coordinate di punti A,B matrici 4x4, sia inoltre I la matrice identica. Consideriamo due assegate affinità Y =XAt + H e X =ZBt+ K, la composizione delle due è data dalla affinità seguente: Y= Z(AB)t +(KAt+ H). Inoltre l'affinità X = ZI, dove I è la matrice identica è l'elemento neutro del gruppo, mentre l'inversa della prima è X = Y(A-1)t -H (A-1)t.

$(H) // (K) \Leftrightarrow a_i = \rho b_i$, i =1,2,3,4, dove

2 - Un *piano* (α) , ovvero un S_2, ovvero un sottospazio 2-dimensionale, ovvero l'intersezione di due iperpiani (H) e (K), non paralleli, è il luogo di punti di R^4 soddisfacente ad un sistema di equazioni indipendenti, del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \end{cases}$$

oppure, in modo del tutto equivalente, dalle equazioni parametriche (con u,v parametri):

$$x^i = m^i u + n^i v + q^i \quad , \qquad i = 1,2,3,4.$$

La condizione di // o appartenenza tra un piano (α) e un ulteriore iperpiano (H) di equazione:

$$(H) \quad c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3$$

si traduce nelle due condizioni:

(a) $(H) // (\alpha) \Leftrightarrow c_i m^i = c_i n^i = 0 \quad (i = 1,2,3,4),$

dove è sottointesa la somma rispetto ad i.

Consideriamo ora due piani (α) e (β) di rispettive equazioni:

$$\begin{matrix} (\alpha) \\ \\ (\beta) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \end{cases} \\ \begin{cases} c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3 \\ d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 = k_4 \end{cases} \end{matrix}$$

formanti nel complesso un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, la cui matrice dei coefficienti delle incognite 4X4 denotiamo ancora con A. La evidente condizione di // o coincidenza è data da:

$$\text{(c)} \qquad (\alpha) \mathbin{//} (\beta) \Leftrightarrow \det A = 0$$

Si noti che le intersezioni di due piani, sono ricondotte ad un sistema 4X4. Ne segue che due piani non paralleli, hanno un solo punto in comune se det $A \neq 0$, si incontrano in una retta se solo tre delle quattro equazioni sono indipendenti, coincidono altrimenti.

3.- Una *retta* (r) , ovvero un S_1, ovvero un sottospazio 1-dimensionale, ovvero l'intersezione di tre iperpiani (H), (K) ed (L), a due a due non paralleli, è il luogo dei punti di R^4 soddisfacente ad un sistema di tre equazioni lineari indipendenti, del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \\ c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3 \end{cases}$$

o in modo del tutto equivalente, dalle equazioni parametriche (con t parametro):

$$\text{(r)} \qquad x^i = m^i t + q^i \quad , \quad i = 1,2,3,4.$$

Si noti che, un iperpiano ed un piano, si rappresentano, complessivamente, con un sistema di 3 equazioni in 4 incognite, avente la matrice, incompleta, A di tipo 3X4 dei coefficienti delle incognite e la matrice C di tipo 3X5, completa. Dall'esame del sistema, e delle rispettive caratteristiche k(A) e k(C) delle due matrici, si ha che: possono *incontrarsi in una retta*[2] se $k(A) = 3$, *essere paralleli* se $k(A) = 2$, $k(C)=3$, e ancora può accadere che (α) *appartiene all'iperpiano* (H) sse $k(A) = k(C) = 2$.

Dati un iperpiano (H) ed una retta (r) rappresentati da:

$$(H) \qquad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k$$

$$(r) \qquad x^i = m^i t + q^i \quad , \qquad i = 1,2,3,4.$$

la ovvia condizione di parallelismo-appartenenza, è :

$$(d) \qquad (H) // (r) \quad \Leftrightarrow \quad a_i m^i = 0 \quad (i = 1,2,3,4),$$

diversamente si incontrano in un punto.

Consideriamo ora un piano (α) ed una retta (r) rappresentati con un sistema di due equazioni, ed (r) in forma parametrica (t parametro):

$$(r) \qquad x^i = m^i t + q^i \quad , \qquad i = 1,2,3,4.$$

Il parallelismo si traduce nella coppia di relazioni:

$$(e) \qquad (\alpha) // (r) \Leftrightarrow a_i m^i = b_i m^i = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

dove e sottointesa la somma rispetto ad i.

Si noti che sostituendo le equazioni parametriche della retta nelle due equazioni del piano, si ottengono due equazioni nel parametro t, che possono essere incompatibili e allora retta e piano sono sghembe, compatibili e allora essi hanno un punto

[2] Una retta è rappresentata da tre equazioni indipendenti, ovvero dalle equazioni parametriche.

comune, impossibili (almeno una) e allora sono // o coincidenti.

L'ultimo punto riguarda il // di due rette (r) ed (s) rappresentate rispettiva-mente in forma parametrica:

(r) $x^i = m^i t + q^i$, $i = 1,2,3,4$
(s) $x^i = n^i \tau + p^i$, $i = 1,2,3,4$.

Dalle quali si ottiene l'ovvia condizione di // o coincidenza data da:

(f) (r) // (s) $\Leftrightarrow$ $m^i = \rho n^i$, $i = 1,2,3,4$.

Si noti che due rette non parallele sono in generale sghembe, in quanto per essere incidenti in un punto occorre che il sistema di 4 equazioni in t e τ sia compatibile.

Riassumento, nel testo sono indicate le sei possibili condizioni di // dei sottospazi di R^4 date dalle formule denotate con (a)- due iperpiani, (b)-iperpiano-piano, (c)-due piani ,(d)- iper-piano-retta,(e) piano-retta,(f)- due rette.

Completiamo il paragrafo sulle proprietà affini di appartenenza in R^4 notando che, ad esempio si ha:

a - in R^4 coppie di rette sghembe individuano un preciso iperpiano (S_3) che le contiene. (Conseguenza del fatto che 4 punti non complanari individuano un unico S_3).

B - In R^4 esistono coppie retta-piano sghembi.

È facile costruirne un esempio: fissiamo un S_3 e un piano α in esso contenuto. La retta che congiunge un punto di S_3 -α con un punto esterno ad S_3 è sghemba con α.

c - In R^4 esistono terne di rette, a due a due sghembe, non appartenenti al medesimo S_3.

La costruzione è analoga, fissiamo due rette sghembe in un S_3 e congiungiamo un punto di S_3 (non sulle rette) con un punto esterno ad S_3.

3 - Lo spazio affine ampliato A^4

Chiameremo sostegno di uno spazio affine ampliato $\mathbf{A^4}$ l'insieme delle quintuple ordinate, di numeri reali non tutti nulli e definiti a meno di un fattore:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$$

denominati *punti* di A^4 (che come vedremo sono di due tipi: *propri* ed *impropri*). Il legame tra A^4 ed R^4, nasce dall'identificazione dei punti di A^4 con $x^0 \neq 0$, chiamati *punti propri* di A^4 , con quelli di R^4 dati dalle relazioni: $\mathbf{x^i = x^i/x^0}$.

I punti di A^4 con $x^0 = 0$, cioè del tipo $(0, r^1, r^2, r^3, r^4)$, che chiamiamo invece *punti impropri*, li definiamo come geometricamente rappresentativi della direzione della retta di R^4 , di equazioni parametriche:

$x^i = r^i t$ (t parametro).

L'insieme di tutti i punti impropri, è caratterizzato dall'equazione $x^0 = 0$, che prende il nome di equazione dell'iperpiano improprio.

Si chiama retta propria di A4, una retta (r) di R4 , a cui si è aggiunto un punto improprio, esattamente quello che della direzione della stessa (r).

Piu in generale un sottospazio proprio S_d di A^4 è un qualsiasi sotto-spazio S_d (d = 1,2,3,4) di R^4, definito rispettivamente da un sistema lineare di h= 4-d equazioni indipendenti in 4 incognite, e quindi con h=1 (per un iperpiano), h=2 (per un piano), h=3 (per una retta) , definito dal sistema:

$$a_{ih}\, x^i = k_h \quad (i = 1,2,3.4)$$

a cui si è aggiunto l'insieme dei punti impropri definiti dal sistema:

$$a_{ih}\, \boldsymbol{x}^i = 0\,, \qquad \boldsymbol{x}^0 = 0 \qquad (i = 1,2,3.4)$$

che costituisce un sotto-spazio dell'iperpiano improprio.

In A^4 chiamiamo *iperquadrica* Q_4 il luogo dei punti di A^4 che soddisfano un'equazione di 2° grado del tipo:

$$a_{ij}\, x^i x^j = 0 \;\; (i,j = 0, 1,2,3,4) \;\; , \;\; a_{ij} = a_{ji}\,.$$

Per diverse questioni, che tratteremo più avanti, è opportuno considerare l'iperquadrica Q_4 di R^4 di equazione[3]:

$$g_{ij}\, x^i\, x^j = 1 \qquad (i,j = 0, 1,2,3,4)$$

che determina sul piano improprio[4] di $\mathbf{A^4}$, una Q_3, di equazioni:

[3] Le g_{ij} sono le componenti di una generica forma quadratica definita positiva, che, come vedremo al numero successivo , è atta a definire in R^4 un prodotto scalare.

$$x^0 = 0, \quad g_{ij}\, x^i x^j = 0 \ \ (i,j = 1,2,3,4), \ \ g_{ij} = g_{ji}\,,$$

che risulta essere una quadrica priva di punti reali che prende il nome di *quadrica assoluto*, o *assoluto* dello spazio A^4.

Alcune questioni metriche di R^4 che tratteremo più avanti, quali quelle di perpendicolarità, si possono interpretare in termini di polarità rispetto all'assoluto. Così la perpendicolarità di R^4, dipende, come vedremo, dalle proprietà di *coniugio* di uno spazio di dimensione inferiore.

Ricordiamo che *assegnata* una iperquadrica Q_4 in A^4

$$f\,(X) = f\,(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = \ \ a_{ij}\, x^i x^j = 0$$

dove la somma è per i,j =0,1,…,4. Dato un punto:

$$Y = (y^0, y^1, y^2, y^3, y^4)$$

si chiama iperpiano polare di Y, rispetto a Q_4, l'iperpiano

$$f\binom{X}{Y} = f_0\, y^0 + f_1\, y^1 + \ldots + f_4\, y^4 = 0$$

con:

$$f_i = a_{0i}\, x^0 + a_{1i}\, x^1 + \ldots + a_{4i}\, x^4 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Si noti che fi è l'equazione lineare formata con la i-ma riga della matrice (5 $\times$ 5), data da : A = | aij | con i,j = 0, 1, ,4.

Si ha:

$$f\binom{X}{Y} = f\binom{Y}{X} \quad , \quad f\binom{X}{X} = f(X)$$

La prima di queste equazioni esprime la cosiddetta legge di reciprocità della polarità asserente che: "*Se un punto* **Y** *descrive*

[4] Tale iperpiano improprio è un effettivo spazio proiettivo $\mathbf{P}^3$ di dimensioni 3, in quanto in esso non vi è una retta speciale distintdalle altre che ne riveli una possibile struttura ampliata.

l'iperpiano polare del punto **Z**, *allora gli iperpiani polari di* **Y** *passano per* **Z**".

Si noti che quando la matrice A coincide con la matrice G, le $(\mathbf{f}_i)$ sono esattamente le componenti covarianti di X.

4 - La struttura metrica di Spazio euclideo

Uno spazio affine 4-dimensionale si dice che è uno spazio euclideo, se è definito un prodotto scalare, ovvero una applicazione

$$\mathbf{S} : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R},$$

denotato nella forma **S** $(u,v) := u \cdot v$, e definito $\forall\, u, v, w \in R^4$, $\forall \lambda \in R$, dalle seguenti proprietà:

1.- $\mathbf{u \cdot v = v \cdot u}$ (commutativa)

2.- $\lambda\, (\mathbf{u \cdot v}) = (\lambda\, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$ (omogeneità)

3.- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u \cdot w} + \mathbf{v \cdot w}$ (distributiva).

4.- $\mathbf{u \cdot u} \geq \mathbf{0}$, valendo "=" sse $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positività[5])

Fissata una base $\{\mathbf{e}_i\}$, i = 1,2,…,4, i generici vettori $\mathbf{u,v} \in \mathbf{R}^4$, assumono la forma:

$$\mathbf{u} = u^i\, \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{v} = v^i\, \mathbf{e}_i$$

ed è immediato verificare che, il prodotto scalare è noto, allora che siano noti i valori dei prodotti scalari dei vettori della base, avendosi:

$$\mathbf{u \cdot v} = u^i\, v^j\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

[5] Indispensabile per definire una norma e poi la distanza.

Ponendo ei ·ej := gij , si noti che gli scalari gij, formano una matrice simmetrica G per la 1., che dà luogo ad una forma quadratica, che per l'assioma 4, è una forma quadratica definita positiva, il che implica, come ben noto, che la matrice G =|gij| ha tutti i minori principali positivi.

Chiameremo *norma del vettore* **u**, il numero reale |u| ≥ 0, definito ponendo:

$$|\mathbf{u}|^2 := \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = g_{ij}\, u^i\, u^j$$

Per ogni vettore **u** accanto alle componenti (u^i), dette ***componenti controvarianti*** possono essere definite le altre componenti, definite da:

$$u_i = g_{ij}\, u^j ,$$

che prendono il nome di ***componenti covarianti***[6] del vettore **u**. Il prodotto scalare si può scrivere nella forma:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_j\, v^j = u^i\, v_i\ .$$

Introduciamo la matrice I =| δ_{ij} | , i cui elementi assumono il valore:

$$\delta_{ij} = 1 \ \text{ se } i=j\ , \quad \delta_{ij} = 0 \ \text{ se } i\neq j\ .$$

La matrice I e detta la ***matrice identica*** , e ha tutti 1 in diagonale e 0 altrove. Avendo la matrice I, tutti i minori principali positivi, essa definisce un particolare prodotto scalare che si chiama *prodotto scalare standard.* Nel caso in cui sia G = I, si ha che :

$$u_i = g_{ij}\, u^j = \delta_{ij}\, u^j = u^i$$

Ovvero coincidono le controvarianti con le covariantii e il prodotto scalare assume la for ma standard:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i .$$

---

[6] I nomi controvarianti e covarianti indicano un diverso comportamento di dette componenti allora che si effettui un cambiamento della base che implica delle relazioni tra le componenti rispetto alle diverse basi.

Chiameremo *distanza* di due punti $X = (x^1, x^2,\dots, x^n)$ e $Y = (y^1, y^2,\dots, y^n)$, la quantità:

$$d(X, Y) = |\, Y - X\,|^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} [g_{ij}(y^i - x^i)]^2\right]^{½}$$

La distanza nel caso *standard* assume la forma pitagorica:

$$d(X, Y) = |\, Y - X\,|^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} [(y^i - x^i)]^2\right]^{½}$$

Tale distanza soddisfa, $\forall$ **u , v, w** $\in$ $\mathbf{R}^4$ alle tre condizioni:

1.- $d(X, Y) \geq 0$, valendo il segno "=" se e solo se X=Y;
2.- $d(X, Y) = d(Y, X)$
3.- $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ (diseguaglianza triangolare)

Delle quali le prime due sono ovvie , mentre omettiamo la prova della terza, che ciascuno può ricercare per suo conto.

Per completare la struttura di spazio euclideo occorre considerare tra tutte le trasformazioni affini quelle che conservano la distanza dette isometrie. Non è facile ricavarle in generale, ma possiamo definirle.

Sappiamo che quando la matrice delle g_{ij} è la matrice identica delle δ_{ij} , caso in cui la base si chiama ortonormale, le affinità che conservano le distanze sono quelle del tipo:

$Y = X A + B$

per le quali la matrice A è una *matrice ortogonale*. Tali trasformazioni formano un sottogruppo del gruppo affine, che è il gruppo isometrico.

In situazione più generale per matrici nxn, diremo che una *matrice invertibile* ortogonale, se la sua trasposta coincide con la sua inversa, ovvero se:

$$G^{-1} = G^{t}$$

ovvero si dimostra che è equivalente asserire che una matrice ortogonale è una matrice che rappresenta una isometria dello spazio euclideo R^n, oppure è una matrice di cambiamento di base fra due basi ortonormali.

Si può ricavare che il numero di parametri indipendenti in una matrice ortogonale di tipo nxn è . Si può ptrovare che :

Una matrice quadrata è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale dello spazio euclideo R^ncon l'ordinario prodotto scalare standard. In effetti questa proprietà è semplicemente la rilettura della relazione Rileggendo la relazione, si ricava l'enunciato duale del precedente: una matrice quadrata reale è ortogonale se e solo se le sue righe formano una base ortonormale di R^n.

Da un punto di vista geometrico le matrici ortogonali descrivono le trasformazioni lineari di R^n che sono anche isometrie. Queste preservano il prodotto scalare e quindi gli angoli e le lunghezze. Ad esempio, le rotazioni e le riflessioni sono isometrie.

Viceversa, se è un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita sul campo reale, dotato di un prodotto scalare definito positivo, ed è un'applicazione lineare tale che $\forall$ **u , v**$\in$ **V,** risulti: **uv. O** allora è una isometria rappresentata in ogni base ortonormale di da una matrice ortogonale, allora è una isometria rappresentata in ogni base ortonormale di da una matrice ortogonale.

In uno spazio euclideo di dimensione 2 e 3, ogni matrice ortogonale esprime una rotazione intorno ad un punto o un asse, o una riflessione, o una composizione di queste due trasformazioni.

Dalla definizione segue subito che l'inversa di ogni matrice ortogonale, cioè la sua trasposta, è anch'essa ortogonale. Inoltre il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale, come segue dalla ovvia relazione:

$$G\,H)\,(G\,H)^t = G\,H\,H^t\,G^t = G\,G^t = I$$

Questo dimostra che l'insieme delle matrici ortogonali forma un gruppo, detto il gruppo ortogonale di ordine n, e viene indicato con $O(n)$.

È facile provare che il determinante di una matrice ortogonale di dato ordine n , vale 1 o -1. Questo si può dimostrare dalla relazione seguente:

$$1 = \det I = \det (G\,G^t) = \det G \det (G^t) = [\det\,]^2 .$$

Una matrice ortogonale con determinante positivo si chiama *matrice ortogonale speciale;* l'insieme di tutte le matrici ortogonali speciali formano un sottogruppo di chiamato gruppo ortogonale speciale e denotato $SO(n)$.

Chiameremo infine *geometria euclidea* l'insieme delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al gruppo isometrico.

5 - La nozione di complemento ortogonale di un sottospazio di R^n.

Tale nozione la presenteremo, in questo paragrafo, in situazione generale, cioè in uno spazio $\mathbf{R}^n$ nel quale sia definito un prodotto scalare.

In $\mathbf{R}^n$ data una matrice $\mathbf{G} = |g_{ij}|$ di tipo nxn, definita positiva, resta fissato un prodotto scalare di due vettori, espresso rispetto ad una data base.

Due vettori **u, v** si dicono ortogonali se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, in simboli:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Vogliamo generalizzare il concetto ad una "*ortogonalità tra sottospazi*" di $\mathbf{R}^n$. Sia dunque $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ (k = 1,2,…, n-1) un qualsiasi sottospazio di $\mathbf{R}^n$, definiamo l'insieme:

$$\mathbf{S}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } \mathbf{u}\cdot \mathbf{x} = 0 \,,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}\}.$$

L'insieme $\mathbf{S}^\perp$ prende il nome di ***<u>complemento ortogonale</u>*** del sottospazio $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ con (k = 1,2,…, n-1). Si prova facilmente che:

PROP. 1.- Il complemento ortogonale $\mathbf{S}^\perp$ di un sottospazio $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ è a sua volta un sottospazio.

Dim. Siano $u,v \in \mathbf{S}^\perp$, $\lambda \in R$, allora $\forall \mathbf{x} \in S$ risulta:

$\mathbf{u}\cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ da cui $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e quindi $(\mathbf{u}\cdot + \mathbf{v})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\lambda\ (\mathbf{u}\cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ da cui $(\lambda\ \mathbf{u})\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dunque $(\mathbf{u}\cdot + \mathbf{v})\cdot, (\lambda\ \mathbf{u}) \in \mathbf{S}^\perp$.

#

PROP.2.- Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ (i = 1,2,…, n), una base di $\mathbf{R}^n$ allora:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{S}^\perp \Leftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

Dim. Sia $u \in \mathbf{S}^\perp$ segue $u\cdot x = 0$, $\forall \mathbf{x} \in S$, e quindi $\forall x \in \{e_i\}$ (i = 1,…, n).

Inversamente supponiamo che in un insieme X di vettori, contenenti la base $\{e_i\}$ sia: $u \cdot e_i = 0$. Allora $\forall \mathbf{x} \in X$ si ha:

$$\mathbf{x} = a^1 \mathbf{e_1} + a^2 \mathbf{e_2} + \ldots + a^n \mathbf{e_n}$$

e quindi:

$$\mathbf{u \cdot x} = a^1 \mathbf{u \cdot e_1} + a^2 \mathbf{u \cdot e_2} + \ldots + a^n \mathbf{u \cdot e_n} = \mathbf{0}$$

ne segue che $X=\mathbf{S}^{\perp}$. #

PROP. 3.- $I = S \cap \mathbf{S}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

Dim. Sia $\mathbf{u} \in \mathbf{I}$, allora $u \cdot x = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}$, e ciò vale anche per x=u, allora

$|\mathbf{u}|^2 = 0$, da cui $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. #

PROP. 4.- $\boldsymbol{dim}\, S + \boldsymbol{dim}\ \mathbf{S}^{\perp} = n$

Dim. Dalla ben nota legge di Grassmann[7], esprimente una condizione tra le dimensioni di due sottospazi S ed S′ di un dato spazio vettoriale, e i relativi sottospazio unione ed intersezione, asserente che:

$$\dim \mathbf{S} + \dim\ \mathbf{S}' = \boldsymbol{dim}\,(\mathbf{S} \cup \mathbf{S}') + \boldsymbol{dim}\,(\mathbf{S} \cap \mathbf{S}')$$

segue:

$$dim\, \mathbf{S} + dim\ \mathbf{S}^{\perp} = \boldsymbol{dim}\,(\mathbf{S} \cup \mathbf{S}^{\perp}) + \boldsymbol{dim}\,(\mathbf{S} \cap \mathbf{S}^{\perp})$$

allora è sufficiente provare che $(\mathbf{S} \cup \mathbf{S}^{\perp}) = \mathbf{R}^n$. Basta osservare che

$\forall \mathbf{x} \in R^n/\{\mathbf{0}\}$ esiste $y \in R^n/\{\mathbf{0}\}$ tale che $x \cdot y = 0$. #

Ed evidentemente:

PROP. 5.- Se $\mathbf{S=S_k}$ allora dim $\mathbf{S}^{\perp}$**= n-k.**

Dim. Conseguenza delle proposizioni precedenti. #

---

[7] Si veda ad esempio per la dimostrazione: F.Eugeni-M.Gionfriddo, (1994). *Appunti del Corso di Algebra lineare*, CUSL ,Pescara p.289, reperibile in www.afsu.it /matematica/geometria.

N.B. Tali nozioni conducono ad asserire che:

nel caso n =2, il complemento ortogonale di una retta è una retta;

nel caso n=3, il complemento ortogonale di una retta è un piano e viceversa;

nel caso n =4, il complemento ortogonale di un iperpiano (S_3) è una retta e viceversa, il complemento ortogonale di un piano è un piano;

nel caso n =5, il complemento ortogonale di un iperpiano (S_4) è una retta e viceversa, il complemento ortogonale di un S_3 è un piano e viceversa.

6- La perpendicolarità tra i sottospazi di R^4

In R^4, data una matrice $G = | g_{ij} |$ di tipo 4x4, definita positiva, resta fissato un prodotto scalare di due vettori espresso rispetto ad una data base. Così se **u** (u_i), **v**(v_i) sono i due vettori, di assegnate componenti rispetto ad una base $\{e_i\}$ $(i = 1,\dots, 4)$, risulta intanto:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Nel seguito troveremo i legami tra le componenti.

1.- Iniziamo con lo studiare la perpendicolarità di due rette (n), (m). Non è restrittivo supporre, nell'assegnarne le forme parametriche, che passino per l'origine.

$$(n) \quad x^i = n^i\, t \quad , \qquad (m) \quad x^i = m^i\, \tau \quad , \qquad i = 1.2,3,4.$$

Consideriamo i vettori **L**(n^i) ed **M** (m^i), rispettivamente paralleli alle rette date, segue allora banalmente la condizione di perpendicolarità:

(a) (n) $\perp$ (m) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{L{\cdot}M} = g_{ij}\, n^i\, m^i = n_i\, m^i = n^i\, m_i = 0$

Nelle quali è sottointesa la somma rispetto ad i ed j. Naturalmente nella rappresen-tazione standard nella quale G è la matrice identica[8] $I = ||\delta ij||$, la condizione diviene:

$$m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 + m_4n_4 = 0.$$

Nota. I punti L(ni) ed M (mi) sono coniugati rispetto all'assoluto $\Leftrightarrow$ sono $\perp$. Il caso della matrice G generale. Per comprendere la difficoltà che nasce quando la matrice G, non è la matrice identica I, osserviamo che un vettore ortogonale al generico vettore $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ //, oppure appartenente all'iperpiano:

$$\text{(H)} \qquad a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = b$$

si può desumere considerando il vettore costituito dai coefficienti dell'equazione dell'iperpiano, ovvero il vettore **H** = (a^1, a^2, a^3, a^4) per il quale si può scrivere:

$$\mathbf{H{\cdot}X} = g_{ij}\, a^i x^j = a_j\, x^j = \mathbf{0}$$

dove la quaterna delle $a_j = g_{ij}\, a^i$ ($j = 1,2,3,4$) è la quaterna delle componenti covarianti del vettore **H** , che a loro volta formano un vettore $\mathbf{H^*} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, che chiamiamo il covariante di **H,** ed è tale vettore che risulta ortogonale [9] all'iperpiano (H).

Le formule di geometria metrica di $\mathbf{R^4}$, sono molto complesse nel caso in cui la matrice G che definisce il prodotto scalare non è la matrice identica, come del resto accadeva anche in $\mathbf{R^3}$**,** per questa ragione supporremo di essere nel caso

---

[8] Si ha $\delta ij := 1$ per $i=j$ e $\delta ij :=$ per $i \neq j$.

[9] Quando la matrice G è la matrice identica le componenti covarianti e controvarianti coincidono ed è H = H* e si ritrova il risultato noto per G =I, e il vettore ortogonale è dato dai coefficienti dell'equazione dell'iperpiano.

standard[10]. Nel caso standard è banale e verificare che i vettori:

$$\mathbf{e_1} = (1,0,0,0),\ \mathbf{e_2} = (0,1,0,0),\ \mathbf{e_3} = (0,0,1,0),\ \mathbf{e_4} = (0,0,0,1)$$

Sono una base, sono due a due "ortogonali" e ciascuno di essi ha modulo 1. Si dirà che essi costituiscono una *base ortonormale standard* dello spazio $\mathbf{R}^4$.

Due iperpiani le cui equazioni[11] differiscono per il termine noto, sono paralleli.Siano:

$$(H) \qquad a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = b\ ,$$
$$(H_0) \qquad a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 0$$

Posto : $\mathbf{H} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ e $\mathbf{X} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed avendosi dalla (H_0) :

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{X} \quad \forall\ \mathbf{X} \in (H)$$

risulta che il vettore **H** (ortogonale ad ogni vettore **X** di (H)), avente per componenti i coefficienti dell'equazione dell'iperpiano, è ortogonale all'iperpiano (H).

Se rinunciamo alla rappresentazione generale e supponiamo $g_{ij} = \delta ij$, d'ora in avanti *useremo solo indici in basso*. Proviamo :

Teorema L'iperpiano $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ e il punto $H = (0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, ortogonale all'iperpiano, determinano sull'iperpiano improprio $x^0 = 0$ (con coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3,x_4) un piano e un punto di medesima

[10] Negli esercizi tratteremo qualche caso nel quale la matrice G è più generale, senza tuttavia ricavare formule metriche più generali.

[11] Nel caso standard le componenti covarianti e controvarianti coincidono, dunque useremo notazioni con indici in basso.

rappresentazione. Essi sono polo e piano polare rispetto alla quadrica assoluto $(x_1)^2 + \ldots + (x_4)^2 = 0$.

Dim. Infatti il piano polare di $H = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ è $a^1x_1 + a^2x_2 + + a^3x_3 + a^4x_4 = 0$. #

Ciò premesso entriamo nei dettagli delle formule di ortogonalità.#

Ritorniamo all'ortogonalità dei sottospazi di R^4.

1.- Da quanto detto, se L, M sono vettori ortogonali agli iperpiani (H) e (K) di equazioni :

(H) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1$, (K) $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = k_1$

gli iperpiani sono ortogonali se e solo se:

(a) $$(H) \perp (K) \Leftrightarrow \mathbf{H \cdot K} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} a_i b_i = 0.$$

NOTA. Nel caso della matrice G generale si può provare che due iperpiani, sono ortogonali se i rispettivi covarianti **H*** e **K*** dei vettori formati dai coefficienti delle equazioni sono ortogonali, ovvero se $\mathbf{H^* \cdot X^* = 0}$.

2.- Siano dati ora un iperpiano (H) ed un piano (α) rappresentati rispettivamente (H) in forma cartesiana ed (α) in forma parametrica (u,v parametri):

$$(H) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1$$

$$(\alpha) \; x_i = h_i u + k_i v + q_i \;, \qquad i = 1,2,3,4.$$

È immediato notare che i due vettori $\mathbf{h}$ (h_i) e $\mathbf{k}$ (k_i), sono due vettori indipendenti e paralleli al piano (α). Dunque perchè l'iperpiano (H) sia ortogonale al piano (α) occorre che il vettore **H**(a_1, a_2, a_3, a_4), ortogonale all'iperpiano, sia complanare con i vettori **h**,**k** , cioè che sia:

$$(H) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \mathbf{H} = \gamma\, \mathbf{h} + \mu\, \mathbf{k}$$

ovvero

(b) $(H) \perp (\alpha) \Leftrightarrow (H) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \| \mathbf{H}\ \ \mathbf{h}\ \ \mathbf{k} \| = 0$

ovvero una riga della matrice sia combinazione lineare delle altre due.

3.- Siano dati un iperpiano (H) ed una retta (r) rappresentati da:

(H) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1$

(r) $x_i = r_it + q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

Il vettore **r=(**r_i), parallelo alla retta (r), affinchè la retta(r) sia ortogonale ad (H), deve essere parallelo al vettore **H(**a_i) $\perp$ iperpiano (H) dunque:

(c) **(**H) $\perp$ (r) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{H} = \rho\, \mathbf{r}$ $\Leftrightarrow$ $a_i = \rho\, r_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

NOTA. In generale il punto improprio $(0, r_1, r_2, r_3, r_4)$ deve essere *il polo del piano* che (H) determina sul piano improprio: $a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 0$, $x_0 = 0$ rispetto alla quadrica Q_3 di equazione $g_{ij}\, x^ix^j = 0$ (i,j=1,2,3,4) essendo appunto:

$$\sum_{i=1}^{4} (g_{ij} x^j) r_i = H^* \cdot r = 0.$$

4.- Siano dati due piani (α) e (β) rappresentati rispettivamente:

$$(\alpha) \begin{cases} a_1\, x_1 + a_2\, x^2 + a_3x^3 + a_4\, x^4 = k_1 \\ b_1\, x^1 + b_2\, x^2 + b_3x^3 + b_4\, x^4 = k_2 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} c_1\, x^1 + c_2\, x^2 + c_3x^3 + c_4\, x^4 = k_3 \\ \end{cases}$$

$$d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 = k_4$$

oppure:

(α) $x_i = m_i u + n_i v + p_i$, $i = 1,2,3,4.$

(β) $x_i = h_i u + k_i v + q_i$, $i = 1,2,3,4.$

La condizione di perpendicolarità dei due piani è data dal fatto che ciascuno dei due piani è complemento ortogonale dell'altro, ovvero, risulta:

$$(\beta) = (\alpha)^{\perp} \qquad \text{ovvero} \qquad (\alpha) = (\beta)^{\perp}$$

Ragioniamo sulla prima condizione e ricordiamo che:

$$(\alpha)^{\perp} := \{\mathbf{x} \in R^4 \text{ t.c. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ , } \forall \mathbf{y} \in (\alpha) \}.$$

ovvero

$$(\alpha)^{\perp} := \{\mathbf{x} = (x_i) \text{ t.c. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ , } \forall \mathbf{y} = (\lambda m_i + \mu n_i) \text{ , } i=1,\ldots,4 \}.$$

Ora dovendo essere il vettore **x** un elemento di (β), dovrà essere

$$x_i = \gamma h_i + \delta k_i \quad i = 1,\ldots,4$$

per cui da $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, segue:

$$(\lambda m_i + \mu n_i)(\gamma h_i + \delta k_i) = 0$$

sottointesa la somma per i=1,…,4 , da cui:

$$\lambda \gamma m_i h_i + \mu \gamma n_i h_i + \lambda \delta m_i k_i + \mu \delta n_i k_i = 0$$

e quindi:

(d) $\qquad (\alpha) \perp (\beta) \quad \Leftrightarrow \quad m_i h_i = n_i h_i = m_i k_i = n_i k_i = 0$

essendo ciascun membro la somma sottesa per i=1,…,4.

La precedente formula si può sintetizzare geometricamente, asserendo che: assegnati per ciascun piano due vettori ad esso paralleli, siano (m_i) ed (n_i) per (α), ed (h_i), (k_i) per (β), occorre e basta per la perpendicolarità dei due piani, che ciascuno dei due vettore di (α), sia ortogonale ad ognuno dei due vettori di (β).

Dalle relazioni trovate appare che fissato un piano, (α), per esempio, cioè fissando gli (m_i) ed gli (n_i), si hanno quattro equazioni nelle 8 incognite omogenee (h_i) ed (k_i), quindi i piani ortogonali al piano dato dipendono da tre parametri.

5.- Siano dati ora un piano (α) ed una retta (r) rappresentati rispettivamente:

(α) $x_i = m_i u + n_i v + p_i$, (u,v parametri, i = 1,2,3,4.

(r) $x_i = r_i t + q_i$ (t, parametro, i = 1, 2, 3, 4)

La evidente condizione di ortogonalità è data da:

(e) $(\alpha)\perp(r) \quad \Leftrightarrow \quad m_i r_i = n_i r_i = 0$

formula questa che si può sintetizzare geometricamente, asserendo che: assegnati per il piano (α) due vettori ad esso paralleli, siano (m_i) ed (n_i) sia (r_i), un vettore parallelo ad (r). o Per la perpendicolarità retta - piano, occorre e basta che ciascuno dei due vettore di (α), sia ortogonale al vettore parallelo ad (r) .

6.- Siano date ora due rette, rappresentate da :

(r) $x_i = r_i t + q_i$, (s) $x_i = s_i t + p_i$ (i = 1, 2, 3, 4)

Le due rette sono ortogonali se e solo se i vettori

r = (ri) , s = (si):

(f) $(r)\perp(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r{\cdot}s = 0} \quad . \Leftrightarrow \quad r_1 s_1 + \quad + r_4 s_4 = 0$

N.B. Nel caso generale sarà **r·s =** $g_{ij}\, r^i s^j = 0$. Si noti che la condizione che i due punti impropri $(0, r_1, r_2, r_3, r_4)$ e $(0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ delle rette, siano coniugati rispetto alla qua-drica assoluto, $g_{ij}\, x^i x^j = 0$, equivalgono alla perpendicolarità.

Sono così determinate le sei condizioni di perpendicolarità tra sottospazi di R^4 come riassunte nei punti sopra indicati: **(a)** due iperpiani **(b)** iperpiano-piano **(c)** iperpiano-retta **(d)** due piani **(e)** piano -retta **(d)** due rette.

La comprensione della struttura di uno spazio 4-dimensionale affine ed euclideo, acquista maggior significato attraverso una serie di esercizi e complementi che evidenziano sia le analogie che le differenze con le dimensioni precedenti.

7 - Esercizi significativi

Esercizio 1. Siano dati in uno spazio euclideo numerico $\mathbf{R}^4$, nel quale la metrica è assegnata dalla matrice G = I (I matrice identica) e quindi in una rappresentazione standard, i due piani (α) , (β) di equazioni:

$$(\alpha)\ x^1 = x^2 = 0\ ,\ (\beta)\ x^3 = x^4 = 0.$$

Provare che i due piani hanno un solo punto comune e che sono tra loro ortogonali.

Che i due piani hanno un solo punto comune segue dal fatto che il sistema :

$$x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$$

ha come unica soluzione il punto (0,0,0,0), essendo il determinante della matrice incompleta del sistema diverso da zero (in particolare è la matrice identica I). Per ragionare sull'ortogonalità scriviamo le equazioni parametriche dei due piani:

$$(\alpha)\ x^1 = 0,\ x^2 = 0\ ,\ x^3 = u,\ x^4 = v$$
$$(\beta)\ x^1 = h,\ x^2 = k\ ,\ x^3 = 0,\ x^4 = 0$$

Sul piano α restano individuati i due vettori // al piano stesso (individuati per v = 0, e poi per u=0) dati da u =(0,0,1,0) e v =(0,0,0, 1). Analogamente su (β) $c$onsideriamo i vettori h =(1,0,0, 0) e k =(0,1,0, 0).

Essendo: uh =uk = vh=vk = 0, come è di immediata verifica, i due piani sono ortogonali.

<u>Esercizio 2</u>. Siano dati in uno spazio euclideo numerico R^4 (x,y,z,w), nel quale la metrica è assegnata dalla matrice G = I (I matrice identica), un punto P(1,1,2,1) e la retta r di equazioni parametriche x=t, y=0, z=3t, w=2t. Scrivere l'equazione dell'iperpiano (H) per P, ortogonale ad (r) , trovare il punto comune tra retta ed iperpiano e la distanza di P da (H).

Un iperpiano per P (1,1,2,1) ha equazione:

$$a\,(x-1) + b\,(y-1)+ c(z-2)+ d(w-1) =0$$

il vettore (a,b,c,d) ortogonale all'iperpiano deve essere // al vettore **r** direzionale della retta, cioe **r** =(1,0,3,2). Dunque l'iperpiano è: (x-1) + 3(z-2)+ 2(w-1) = x+3z+2w -9=0. Tale iperpiano incontra la retta r nel punto Q, relativo al valore di t che soddisfa l'equazione: t +9t +4t -9 =0 da cui: t = 9/14 che fornisce Q (9/14, 0, 27/14, 18/14).

$d(P,H)^2 = d(P,Q)^2= (9/14 -1)^2+ (-1)^2+(27/14-2)^2+(18/14-1)^2=$ 17/14 .

Esercizio 3. Sia data nello spazio 4-dimensionale una geometria metrica standard.

Dati la retta (r) di equazioni: $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = -t$ e il piano (α) di equazioni (α) $x_1 - x_3 = x_2 + x_4 - 1 = 0$, provare che (r) ed (α) sono sghembe. Trovare quindi i due punti alla minima distanza e verificare la perpendicolarità della retta (m) di minima distanza al piano dato (α).

Consideriamo due punti variabili rispettivamente su (α) e su (r):

$$(u, 1 - v, u, v) \in (\alpha) \quad , \quad (t, 2t, 3t, -t) \in (r);$$

il quadrato della distanza risulta essere:

$$f(u,v,t) = d^2 = (u - t)^2 + (1 - v - 2t)^2 + (u - 3t)^2 + (v + t)^2$$

annullando le tre derivate parziali prime si ottengono le condizioni di minimo che, risolte, conducono ai seguenti valori:

$$t = 1/5 \ , \ u = 2/5 \ , \ v = 1/5.$$

I punti alla minima distanza pertanto sono:

$$A = (2/5, 4/5, 2/5, 1/5) \in \alpha \quad , \quad B = (1/5, 2/5, 3/5, -1/5)$$

La minima distanza $d(A,B) = \frac{1}{5}\sqrt{10}$ e la retta di minima distanza passa per due punti A e B, e ha direzione $\mathbf{m} = (1, 2, -1, 2)$.

Il vettore direzione di (r) è $\mathbf{r} = (1, 2, 3, -1)$ e i vettori indipendenti // ad (α) sono u = (1, 0, 1, 0) e v = (0, -1, 0, 1). Ciascuno di tali vettori è perpendicolare ad m, poiché risultano nulli i tre prodotti: mr = mu = mv = 0.

Dunque la retta di minima distanza è ortogonale sia ad (r) che ad (α).

<u>Esercizio 4.</u> Sia data nello spazio 4-dimensionale una metrica, definita dalla matrice simmetrica G = | g_{ij} |, definita positiva, ed assegnata come segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dati il punto P (1,1,1,0) e il piano (α) di equazioni x1 – x3 = 0 , x3 = 2– x4 , determinare il punto Q del piano situato alla minima distanza. Provare che la retta PQ è ortogonale al piano (α). Determinare inoltre l'S3, ovvero l'iperpiano contenente P ed (α).

Le equazioni parametriche del piano sono:

$$x_1= v \ , x_2= u \ , x_3= v \ , x_4=v+2$$

Il quadrato della distanza tra i punti : $X(x_i)$ = (1,1,1,0) e $Y(y_i)$= (v,u,v, 2-v)

$$d^2 (X,Y) = g_{ij} (y_i – x_i) (y_j – x_j) = (Y\text{-}X) G (Y\text{-}X)^t$$

$$[v-1, u-1, v-1, v+2][G][v-1, u-1, v-1, v+]^t = 7v^2 +$$

$$u^2 +2uv -4v+2u +10$$

Annullando le due derivate parziali, si ottengono le condizioni di minimo che, risolte, conducono ai seguenti valori:

$$u = -4/3\ ,\quad v = 1/3.$$

Il punto Q di (α) alla minima distanza da P ha coordinate Q (1/3, 7/3, 1/3, 7/3)

La minima distanza segue da $d^2 = 11$ ovvero $d = \sqrt{11}$.

Il vettore direzione della retta (m) di minima distanza è data, meno di un fattore, dal vettore parallelo alla retta QP = (2/3,7/3, 2/3,-7/3), parallelo a **r** = (2,7,2,-7). Due vettori **u,v** paralleli al piano sono, dalle equazioni parametriche di (α), i coefficienti di u, e quelli di v, **u** = (0,1,0,0) e **v** = (1,0,1,1), Risulta :

$$\mathbf{u}\ \mathbf{r} = (0,1,0,0)\ G\ (2,7,2,-7)^t = 0\ ,\quad \mathbf{v}\ \mathbf{r} = (1,0,1,1)\ G\ (2,7,2,-7)^t = 0$$

Per la determinazione dell'iperpiano richiesto si osservi che uno dei due iperpiani definenti (α), precisamente $x_1 - x_3 = 0$, passa per la retta data e contiene P, ed è quindi l'iperpiano richiesto. Volendo applicare un metodo generale , tra tutti gli iperpiani del fascio di iperpiani per (α), di equazione $x_1 - x_3 = h\,(x_3 + x_4 - 2)$, quello per P si ottiene appunto per h = 0.

<u>Esercizio 5.</u> Trovare i piani per il punto P(2, 1, -3, 2) perpendicolari ad una retta (r) di equazioni : $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = -t$ e, tra questi, quello unico contenuto in un iperpiano H (3-dimensionale) contenente P ed (r).

Iniziamo a trovare l'iperpiano H. Gli iperpiani contenenti r e P sono quelli per il piano α passante per P ed r.

Le tre equazioni di (r), ottenute eliminando il parametro t, sono:

$$x_2 - 2x_1 = 0 \ , \ x_3 - 3x_1 = 0 \ , \ x_4 + x_1 = 0.$$

Quindi il piano (α) per P ed (r), si può trovare considerando in R^4 l'iperfascio di piani per (r). dato da:

$$x_2 - 2x_1 = \lambda\ (x_4 + x_1)$$

$$x_2 - 2x_1 = \mu\ (x_3 - 3x_1)$$

e imponendo il passaggio per P(2, 1, -3, 2).

Le condizioni imposte forniscono $\lambda = -\frac{3}{4}$ e $\mu = \frac{1}{3}$, dalle quali si hanno le due equazioni del piano (α) cercato:

$$5x_1 - 4x_2 - 3x_4 = 0 \quad , \quad 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Un iperpiano H contenente (α) fa parte di un fascio di iperpiani avente per "base" il piano α, cioè:

$$\text{(H)}\ \ \lambda\ (5x_1 - 4x_2 - 3x_4) + \mu\ (3x_1 - 3x_2 + x_3) = 0;$$

in particolare si scelga quello ottenuto per λ = 0 e μ = 1, cioè

$$3x_1 - 3\ x_2 + x_3 = 0.$$

Per la prima parte dell'esercizio notiamo che un generico piano per P(2, 1, -3, 2) è rappresentato dalle due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x_1 - 2 &= a\ (x_3 + 3) + b\ (x_4 - 2) \\ x_2 - 1 &= c\ (x_3 + 3) + d\ (x_4 - 2) \qquad (1) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 - 2 = au + bv \\ x_2 - 1 = cu + dv \\ x_3 + 3 = u \\ x_4 - 2 = v \end{cases} \qquad (2)$$

di vettori direzionali:

$$\vec{u} = (a, c, 1, 0) \qquad \vec{v} = (b, d, 0, 1)$$

mentre la retta r data ha direzione $\vec{R}$ (1, 2, 3, 1).

Le condizioni di perpendicolarità si ottengono dalle seguenti:

$$\vec{u} \cdot \vec{R} = a + 2c + 3 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{R} = b + 2d + 1 = 0$$

che forniscono valori di a e di b in funzione di c e di d, i quali sostituiti nelle (2) danno gli ∞^2 piani per P perpendicolari ad r.

Tra questi infiniti piani si vuole quello contenuto in H, certamente esistente perchè in H, 3-dimensionale, esiste un solo piano per P perpendicolare ad un piano α.

Allo scopo imponiamo che le equazioni (2) dei piani per P siano piani contenuti in H. Sostituendo, si ha che deve essere verificata l'identità:

$$(3a - 3c + 1)\, u + (3b - 3d)\, v \equiv 0,$$

cioè le due ulteriori condizioni

$$3a - 3c + 1 = 0 \qquad b = d$$

le quali, unitamente alle condizioni di perpendicolarità, forniscono i valori:

$$a = -\frac{11}{9} \;\; , \;\; b = -\frac{1}{3} \;\; , \;\; c = -\frac{8}{9} \;\; , \;\; d = -\frac{1}{3};$$

essi, posti in (1) danno le equazioni del piano richiesto.

<u>Esercizio 6</u>. Trovare il piano di $\Re^4$, passante per i tre punti A(1, 2, 3, 4) B(-1, -2, -3, -4) C(1, 3, 2, 3), dopo aver verificato che essi non sono allineati.

La retta r ≡ AB ha equazioni:

$$(r) \qquad \frac{x_1+1}{2}=\frac{x_2+2}{4}=\frac{x_3+3}{6}=\frac{x_4+4}{8};$$

come è immediato verificare il punto C non appartiene ad r; inoltre si ha

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 3x_1 = x_3 \\ 4x_1 = x_4 \end{cases} \qquad (r)$$

quindi un generico piano α per r ha equazione:

$$2x_1 - x_2 = \lambda\,(3x_1 - x_3)$$

$$2x_1 - x_2 = \mu\,(4x_1 - x_4);$$

imponendo il passaggio per C si determinano λ e μ; onde si ha

$$\lambda = \mu = -1$$

da cui sostituendo si ottiene

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$6x_1 - x_2 - x_4 = 0$$

Che sono le equazioni del piano richiesto.

<u>Esercizio 7</u>. Date le rette r, s, p di equazioni rispettive:

$$r) \quad x_1 = t\ ,\ x_2 = 2t\ ,\ x_3 = -t\ ,\ x_4 = 3t$$

s) $x_1 = 2t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $x_4 = t + 1$

p) $x_1 = t$, $x_2 = -3t - 2$, $x_3 = -5t$, $x_4 = -1$

chiaramente, a due a due sghembe, trovare l'iperpiano contente r ed s e trovare il punto Q in cui la retta p, incontra tale iperpiano.

Il generico iperpiano H di R^4 ha equazione:

$$a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4 + e = 0$$

L'iperpiano H contiene le due rette r ed s se e solo se, per ogni t:

$(a + 2b - c + 3d)\, t + e = 0$

$(2a - b + c + d) + d + e = 0$ da cui:

$e =, d + e = 0$, quindi $e = d = 0$ e per le altre:

$a + 2b - c = 0$, $2a - b + c$, e quindi $a=-1$, $b=3$, $c=5$, così che:

$$(H)\quad -x_1 + 3\, x_2 + 5\, x_3 = 0$$

L'intersezione con la retta p) fornisce il valore $t =- 6/35$ da sostituire nelle equazioni di p) per avere Q. Dato che il vettore **p** (1,-3,-5,0) parallelo alla retta p) e il vettore **n**(-1,3,5,0) ortogonale ad H, sono paralleli, segue che p) ed H sono ortogonali.