Periodico di Matematica (IV) Vol. II (2) dicembre 2020, pp. 41-74

Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva

Interrelazioni tra Matematica e Disegno

Ferdinando Casolaro*

*Dipartimento di Architettura Università di Napoli ferdinando.casolaro@unina.it

Dedicato al prof. Bruno Rizzi
nel venticinquesimo anno dalla sua scomparsa

Sunto*: Dopo una sintesi storica dell'evoluzione della Geometria dal periodo Caldeo-Babilonese (VIII sec. A.C.) ad oggi, si presenta un Modello di ampliamento della Geometria euclidea, di cui si evidenziano i limiti per la lettura dell'Universo fisico, alla Geometria Proiettiva attraverso Presentazioni e dimostrazioni della lettura analitica.*

Parole Chiave*: Euclide, Vitruvio, Brunelleschi, Desargues*

Abstract: *After a summary history of the evolution of geometry from the Chaldean-Babylonian period (VIII century BC) to today, an extension model of Euclidean geometry is presented, which highlights the limits for the reading of the physical universe, to projective geometry through presentations and demonstrations of analytical reading.*

Keywords*: Euclide, Vitruvio, Brunelleschi, Desargues*

Il progetto di aggiornamento per una nuova didattica del Disegno e della Matematica, finalizzato all'uso delle nuove tecnologie, ha avuto fin dall'inizio, tra le sue finalità, quella precipua di recuperare un robusto ed efficace collegamento tra le due discipline nelle quali gli stessi fenomeni, le stesse operazioni sono espresse, considerate con linguaggi diversi; l'obiettivo generale era quello di avviare lo studente ad un uso non passivo del computer consentendogli di sperimentare, tra l'altro, quali procedimenti logici vi siano dietro ad elaborazioni grafiche anche semplici.

(Cesare Cundari, 1990)

1 - Introduzione

Alla fine degli anni Ottanta del secolo scorso, al Modello del M.P.I. di Sperimentazione "Brocca" per l'introduzione dell'Informatica nella Scuola e nelle Università, è stato aggiunto un Progetto sulle interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno, il cui obiettivo era l'utilizzo delle nuove tecnologie informatiche nella Rappresentazione.

Ideatore è stato il prof. Cesare Cundari, ordinario di Rappresentazione e Rilievo alla Facoltà di Architettura dell'Università "La Sapienza" di Roma, che ha sviluppato il Progetto, col coordinamento per la matematica, del prof. Bruno Rizzi, ordinario di Analisi Matematica presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma e in quel periodo Presidente Nazionale della Mathesis.

In questo articolo si pone in risalto uno degli aspetti fondamentali del Progetto che, dal punto di vista didattico per la matematica, ha permesso di introdurre nell'insegnamento l'ampliamento del modello euclideo alla geometria proiettiva. Il progetto aveva come obiettivo:

- per il disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI', oggi GEOGEBRA, ...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;
- per la matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la geometria proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università (Casolaro, Cirillo, 1996; Casolaro, 2003; Casolaro, Prosperi, 2011).

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, è stato incaricato, su indicazione di Bruno Rizzi, il sottoscritto, le cui risultanze sono in bibliografia (Cundari, 1990).

Personalmente ritengo che, dal punto di vista della didattica, in Matematica sono stati raggiunti buoni risultati, che sarebbero stati ottimi se non ci fossero stati limiti dalle istituzioni politiche che pongono difficoltà ad autorizzare attività di carattere generale. Infatti, la divulgazione dei temi affrontati è avvenuta principalmente con Seminari locali in varie scuole, invio di materiale attraverso Internet e grande spirito di collaborazione di giovani docenti che, dopo aver sperimentato il percorso in classe, comunicavano le risultanze permettendomi anche continue correzioni ai temi che affrontavano.

Argomenti, quali Geometria Proiettiva e cenni sulle Geometrie non euclidee (Casolaro, 2002) (Casolaro, Pisano 2006) sono oggetto delle Indicazioni ministeriali del 2012 per la Scuola Secondaria di secondo grado, per cui nei paragrafi successivi si presenta un percorso didattico che è stato esposto nell'ambito dei corsi di abilitazione (SSIS, TFA, PAS, …ecc.) e sperimentato prima nel tirocinio, poi nell'insegnamento in itinere, dai docenti candidati all'abilitazione. A tale percorso, riteniamo non secondario anteporre un breve excursus storico che permette agli studenti di comprendere come il tema in oggetto sia stato dibattuto già dai tempi di Euclide e ripreso con forza negli ultimi due secoli in cui si è sviluppata la Geometria Descrittiva e la Geometria Proiettiva (Casolaro, 1996).

Dico subito che senza l'idea di Cesare Cundari, probabilmente la Geometria Proiettiva non avrebbe mai trovato spazio nei percorsi di insegnamento (attuali Indicazioni nazionali per i licei e Linee guida per gli Istituti tecnici e professionali) perché non avendola studiato nei corsi universitari, i docenti di Matematica, compreso il sottoscritto, ne ignoravano le potenzialità di visualizzazione dell'Universo geometrico ed anche la funzione per le interrelazioni con altre discipline.

Alla base del Progetto c'è il concetto di omologia che approfondiremo in tutti i suoi dettagli nel paragrafo 4, ma che vogliamo introdurre con le parole di Cundari (Cundari, 1990) nella presentazione dal titolo «Il principio proiettivo nei metodi della Geometria Descrittiva» (Loria 1921):

> *Il fondamento geometrico che è alla base di tutti i metodi della Rappresentazione consiste nel processo di proiezione ed intersezione da cui si genera una qualsiasi delle immagini che possono essere geometricamente costruite di un oggetto. Questo concetto, che può essere insegnato in molti modi di-*

versi, è fondamentale. Ed è un concetto che unisce tutti i metodi di rappresentazione, anche quelli che si avvalgono di supporti strumentali: mi riferisco esplicitamente alla fotografia e alla fotogrammetria.

Il principio cui intendo riferirmi è quello dell'Omologia. Appartenente all'ambito della Geometria Proiettiva, esso trova la sua ragione di applicazione e di utilizzazione nel Disegno, per la corrispondenza biunivoca che esiste tra l'oggetto e la sua rappresentazione, e deriva dal processo di proiezione ed intersezione.

2 – Dalla Rappresentazione alla Geometria: breve excursus storico

Le prime dimostrazioni di geometria risalgono alla scuola di Talete nel VI secolo a.C.. Precedentemente, nell'VIII-VII sec. a.C., si trova solo qualche frammento, in particolare di geometria sferica, nei caldeo-babilonesi che, attratti dal fascino della volta celeste, cercando di approfondire le proprietà dello spazio indirizzavano il loro campo di studio sulla sfera (Kline, 1991; Casolaro, Santarossa, 1997).

Gli stessi greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica; di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati pubblicati i due testi (Kline 1991) *Sulle sfere mobili* e *Il sorgere ed il tramontare*, scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di Euclide, Autolico di Pitane (sono i due testi più antichi che sono stati trovati intatti).

Nel testo *Sulle sfere mobili* Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli; il libro presuppone teoremi di geometria sferica che dovevano perciò essere noti ai greci di quell'epoca.

È significativo, come nell'opera *Sulle sfere mobili* le proposizioni siano disposte in ordine logico; infatti, ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta, con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione. È questo lo stile usato da Euclide nella sua opera gli *Elementi*, in cui riassume le principali ricerche dei matematici che lo precedettero completandole e riordinandole in modo pressoché perfetto, specialmente dal punto di vista logico, essendo ben determinata la deduzione di ogni teorema dai precedenti o dalle proposizioni primitive.

Lo stesso Euclide trattò alcune questioni di geometria sferica, come si trova nella sua opera *I fenomeni*, di cui esiste una pubblicazione del 1916 (Kline 1991). In essa viene definita, per la prima volta, la superficie sferica come superficie di rotazione di una circonferenza intorno a un diametro. È in questa opera che compare per la prima volta, anche se non esplicitamente, il concetto di trasformazione geometrica, in considerazione delle varie posizioni che assume la circonferenza ruotando intorno a un diametro.

La parte della geometria che si occupa degli argomenti che si trovano negli *Elementi* di Euclide, seguendo i metodi della geometria greca, è detta geometria elementare. Tale definizione non è rigorosa in quanto non sono chiari i limiti tra la geometria elementare e le altre geometrie nate successivamente negli ultimi secoli.

Secondo un punto di vista più moderno, possiamo dire che la geometria elementare tratta, quasi esclusivamente, proprietà di uguaglianza e similitudine tra figure; infatti, le proprietà che essa studia sono tali che, se valgono per una figura, valgono per le figure uguali ad essa e ad essa simili.

L'analisi della struttura della geometria, che ha portato a questo punto di vista, è stata compiuta dal matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) nella seconda metà del XIX secolo, dopo le dispute sulla crisi dei fondamenti e le discussioni sul postulato delle parallele, che avevano condotto, negli ultimi due secoli, allo sviluppo delle cosiddette "geometrie non euclidee", oltre all'evoluzione che aveva avuto la geometria proiettiva, che si presentava come una geometria più generale di quella euclidea.

I risultati di Klein sono la conseguenza della ricerca di geometrie diverse da quella euclidea, principalmente da parte di architetti e cultori dell'arte pittorica.

Dopo vari tentativi, già dai tempi di Euclide, di considerare l'arte come scienza, nel XV secolo Filippo Brunelleschi (1377-1446) stabilisce le regole della prospettiva che danno una identità scientifica alle opere degli architetti e dei pittori.

La prospettiva, dal termine latino *perspectiva* (ottica) è universalmente considerata il fondamento teorico della rappresentazione pittorica. Il metodo della prospettiva, in geometria, rientra tra quelli usati per rappresentare figure tridimensionali sopra un piano.

La rappresentazione dei dettagli tecnici della figura avviene con i metodi della geometria descrittiva. È compito, invece, della geometria proiettiva la rappresentazione mediante le trasformazioni che la figura subisce con le operazioni di proiezione e sezione.

I primi che tentarono di risolvere alcuni problemi di rappresentazione furono probabilmente gli artisti greci, e non è da escludere che in età classica esistesse un sistema di rappresentazione non molto dissimile da quello elaborato durante il Rinascimento. Pare, invece, esclusa qualsiasi ricerca di definizione spaziale matematica e unitaria nelle figurazioni preistoriche.

È nel periodo greco, infatti, che ebbe origine un gruppo di ricerche i cui risultati costituiscono "l'ottica degli antichi", che nasceva dal desiderio di studiare fenomeni luminosi allo scopo di distinguere ciò che è "apparenza" da ciò che è "realtà".

Partendo dal postulato che "la luce si propaga in linea retta", vengono stabiliti molti teoremi (per lo più da Euclide che faceva parte del gruppo) che ancora oggi sono ritenuti tra i fondamenti della trattazione matematica della luce; altre proposizioni, invece, vengono ritenute inaccettabili essendo conseguenza del principio - sostenuto da Platone ma ripudiato come falso dalla fisica contemporanea - che la visione avvenga per effetto di raggi emananti dall'occhio dell'osservatore e non dall'oggetto.

Già in un'opera del XII secolo, tradotta dall'arabo in latino da Gherardo da Cremona (1114 - 1187), ma pubblicata da Pietro Rama (1515 - 1572) nel 1572, si incontra per la prima volta l'idea che:

> *da ogni punto di un corpo illuminato si dipartano raggi in tutte le direzioni, sicché l'occhio dell'osservatore (la cui pupilla diventa centro di un cono prospettico) è centro di una stella di raggi diretti a tutti i punti dell'oggetto osservato*".

Immaginando, poi, che fra l'occhio e l'oggetto venga interposta una superficie trasparente (quadro) dove si individuano i punti in cui essa interseca ogni raggio luminoso, si vedrà sul quadro un insieme di punti che produrrà sull'osservatore la stessa impressione dell'oggetto considerato: questa è la "prospettiva" che è, dunque, «l'arte di rappresentare gli oggetti sopra un quadro in modo da conservarne l'aspetto esteriore» e costituisce il fondamento teorico dell'arte pittorica (Casolaro, Rotunno, 2015).

Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento dell'arte pittorica, lo si evince da alcuni passi di Marco Vitruvio Pollone (80 a.C. - 15 a.C.) che si può considerare il più significativo trattatista di architettura del mondo latino. Di Vitruvio si sa poco, addirittura si mette in dubbio l'originalità della sua opera più famosa, *De Architectura* (27 a.C.), in cui descrive la Basilica di Fano, di cui si dichiara il costruttore (I cap. - V libro). Tale opera, in 10 libri, fu presa a modello da tutti i trattatisti di architettura del Rinascimento, che vi attinsero nozioni e notizie, spesso ne adottarono schemi e criteri. Nel I libro viene delineata la figura dell'architetto e i limiti dell'architettura come scienza; nel II libro è svolta una sommaria storia dell'architettura e nei libri successivi la trattazione si fa man mano più analitica e tecnica.

È però nel sec. XII, con l'architettura gotica, che si incomincia a intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale. Il problema principale che poneva l'architettura gotica era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture.

Già nell'XI secolo i costruttori dell'*Île-de-France* avevano pensato di eliminare progressivamente dagli edifici delle chiese ogni massa inerte, che risaliva all'arte romanica, per adottare l'arco acuto che permette di attenuare le spinte laterali.

Con l'architettura gotica si è accentuato maggiormente il verticalismo e lo spazio è stato configurato in forma indefinita, in modo da offrire, attraverso la complessità delle piante a più navate con cappelle radicali, prospettive sempre più mutevoli sotto la varia azione della luce, spesso filtrante attraverso le vetrate colorate. Quindi, la cattedrale gotica, intorno alla quale fiorirono generazioni di costruttori e decoratori, risultò così un edificio estremamente logico, nel quale sono in rilievo tutte le parti aventi reale funzione statica, quasi un fascio di forze senza materie inerte. Carattere gotico ebbero le abbazie di Fossanova e di Casamari, la chiesa dei Servi a Bologna e la chiesa di San Francesco d'Assisi.

Successivamente riscontriamo il primo passo per il superamento della concezione medioevale nelle opere di Giotto (1266 - 1337), di Duccio di Buoninsegna (1255 circa – 1318 o 1319) e, qualche decennio più tardi, nelle opere di Ambrogio Lorenzetti (1290 circa – 1348), in cui è evidente la ricerca per definire lo spazio contenente i vari elementi della rappresentazione.

Ma l'adozione di un preciso metodo di prospettiva lineare geometrica risale all'inizio del secolo XV con il fiorentino Filippo Brunelleschi, che per primo fissò le norme della prospettiva e aprì un'era nuova che simboleggiava l'inizio dell'età del Rinascimento.

Le prime opere del Brunelleschi, intorno al 1400 circa, non lasciavano prevedere la rivoluzione che avrebbe poi messo in atto, in quanto si mantengono ancora nell'ambito della tradizione gotica, come si evince dai busti e dalle statue d'argento per l'altare di San Jacopo, nel Duomo di Pistoia, eseguiti intorno al 1400.

È col *Crocefisso* di Santa Maria Novella (1409, o forse dopo) che si incomincia a intravedere un'opera nuova per le perfette proporzioni e per la simmetrica distribuzione delle parti, perché in quel periodo Brunelleschi ricercava il mezzo per rendere oggettivamente rappresentabili (e quindi razionalmente conoscibili) i corpi dello spazio: questo mezzo lo trovò nella prospettiva (la prova è nelle vedute prospettiche del Battistero di San Giovanni e di Palazzo Vecchio a Firenze) di cui fissò le norme.

Leon Battista Alberti

Sulla stessa linea si è espresso Leon Battista Alberti,[1] che ha anche dedicato al Brunelleschi il suo trattato *De pictura* in cui scrisse che «nell'arte fiorentina di quegli anni si intravedeva già il superamento delle opere dell'antichità».

Il suo pensiero si basa sulla concezione della prospettiva brunelleschiana, che ha riproposto in modo più chiaro e preciso, sfruttando anche le conoscenze matematiche e filosofiche, come si evince dalla grande opera architettonica *Il Tempio Malatestiano* di Rimini.

[1] Architetto , scrittore, matematico, umanista, crittografo, filosofo, musicista e archeologo, fu una delle figure artistiche più poliedriche del Rinascimento. (Genova, 14 febbraio 1404 – Roma, 25 aprile 1472).

A differenza del Brunelleschi che seguiva personalmente le opere che aveva progettato, l'Alberti, convinto che l'architetto non avesse un compito artigianale, affidava ad altri la realizzazione dei suoi disegni e dei suoi progetti. Leon Battista Alberti diffuse tra i pittori del proprio tempo anche il procedimento (forse già noto agli antichi egiziani) che consiste nell'usare un reticolato a maglie quadrate per riprodurre in altra scala un dato disegno; è un procedimento fondato sul concetto di similitudine e in cui si può individuare un primo approccio alla geometria analitica ed alla geometria proiettiva che si svilupperà due secoli più tardi.

Piero della Francesca

L'ingegno e la cultura dell'Alberti si manifestano anche nelle opere letterarie e pedagogiche; egli si può definire il letterato dell'arte del XV secolo, quasi in contrapposizione ad un altro grande artista dello stesso periodo, Piero della Francesca,[2] che rappresenta invece il matematico dell'arte del XV secolo, tanto che Giorgio Vasari[3] nelle *Vite dei più eccellenti scultori, pittori ed architettori*, scrisse che

> *Piero non si ritrasse mai dalle matematiche nelle quali era stato tenuto maestro raro, tanto che i libri meritatamente gli*

[2] Pittore e matematico (Borgo Sansepolcro, 12 settembre 1416/1417 – 12 ottobre 1492).

[3] Pittore, architetto e storico dell'arte (Arezzo, 30 luglio 1511 – Firenze, 27 giugno 1574).

> *hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi.*

Nel decennio 1470-1480, Piero della Francesca scrisse un trattato completo di prospettiva: *De perspectiva pingendi,* dove, applicando il concetto albertiano di "prospettiva di un corpo", si servì di alcuni procedimenti che soltanto nell'odierna Geometria Descrittiva trovano il loro completo svolgimento e per primo sfruttò, per tracciare la prospettiva di un solido limitato da una superficie curva, le corrispondenti sezioni di una conveniente serie di sezioni piane; di conseguenza, prima che venisse stabilito e percepito il concetto di inviluppo di una famiglia di linee piane, vide che tutte le curve così nascenti sono tangenti ad una determinata linea, che è la proiezione del contorno della superficie considerata.

In questo gruppo di eminenti pittori-geometri italiani emerge, poi, Leonardo da Vinci[4] anch'egli convinto all'idea che la pittura deve avere un fondamento scientifico come si evince nel capitolo VII della sua opera «Trattato della pittura», in cui così si esprime:

> *quelli che si innamorano della pratica senza la diligenza (la scienza) sono come i nocchieri che entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino.*

---

[4]Anchiano, 15 aprile 1452 – Amboise, 2 maggio 1519. Considerato uno dei geni universali dell'umanità. Infatti, fu inventore, scienziato, filosofo, architetto, pittore, scultore, disegnatore, scenografo, anatomista, botanico, musicista, ingegnere e progettista.

Secondo il Vasari, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci erano due personalità antitetiche: da un lato un Leonardo tanto "mirabile e celeste" quanto "vario ed instabile" che passa dagli affreschi agli specchi, dalle macchine all'anatomia; dall'altra invece un Piero razionale, sistematico, che costruisce teorema dopo teorema, problema dopo problema i molti libri scritti in cui lo stile è molto vicino a quello usato da Euclide.

Leonardo da Vinci

Ed è sulla scia di Piero della Francesca che nel XVI secolo la prospettiva è passata dalle mani degli artisti a quelle degli scienziati grazie principalmente ai lavori di un eminente commentatore, Federico Commandino.[5]

Claudio Tolomeo

Questi, in un suo trattato di prospettiva lineare scritto con l'intento di stabilire i principi su cui si basa il metodo di proiezione dovuto all'astronomo greco Claudio Tolomeo (II sec. d.C.) e che oggi chiamiamo "proiezione stereografica", suppone di riferire tutte le figure considerate a due piani fra loro ortogonali, l'orizzontale e il verticale (con il linguaggio degli architetti la

[5] Urbino, 16 giugno 1509 – Urbino, 5 settembre 1575. Matematico e umanista , uno dei maggiori traduttori delle opere dei grandi matematici dell'antichità.

pianta e l'alzato) e di assumere per quadro un piano perpendicolare ad entrambi e per punto di vista un punto situato sopra il piano verticale. Egli poi immagina che il quadro venga ribaltato sopra il piano verticale mediante rotazione attorno alla sua intersezione col piano stesso, in modo da fissare anche gli elementi uniti: è questa una prima idea di composizione di due operazioni di prospettiva che, con lo sviluppo della Geometria Proiettiva, condurrà al concetto di omologia.

Nel frattempo, l'insegnamento dei grandi artisti italiani, da Brunelleschi all'Alberti, da Piero della Francesca a Leonardo da Vinci, fu assimilato anche da altri pittori non italiani di cui un posto di particolare rilievo, nella storia della matematica, spetta sicuramente al tedesco Albrecht Durer (Norimberga, 1471-1528), matematico, pittore e trattatista di architettura che, nel suo paese, ha insegnato molte cose relative alla Prospettiva, probabilmente imparate da Piero della Francesca durante un lungo soggiorno da lui fatto in Italia.

Il contributo di belgi e olandesi alla prospettiva è stato dato principalmente dalle opere di alcuni matematici, di cui i più significativi sono Simone Stevin[6] e Francesco D'Aguillon,[7] anche se già all'inizio del XV secolo il pittore olandese, Giovanni Van Dick,[8] aveva dimostrato di conoscere e di usare il punto di fuga di un sistema di rette parallele fra loro, ma gli altri pittori olandesi ne appresero l'esistenza soltanto due secoli dopo da scrittori italiani di prospettiva.

In Francia va ricordato il pittore e scultore Giovanni Cousin (1500-1590) che nel suo trattato *Il livre de Pourtraiture* applica

[6] Bruges 1548-Aja 1620.

[7] Bruxelles 1566-Anversa 1617.

[8] Maastricht 1385-Bruges 1440.

alla ricerca della rappresentazione prospettica di un solido, l'artificio del mutamento del piano verticale di proiezione.

Ed è proprio in Francia, che alcuni decenni dopo, si delineano nuovi orizzonti per la geometria.

In particolare, è considerato il padre del metodo generale per la Geometria Descrittiva e il precursore della Geometria Proiettiva il matematico francese Girard Desargues (1591-1661) che, facendo uso del metodo delle coordinate nel periodo in cui si stava sviluppando la Geometria Analitica ad opera di Renè Descartes (1596-1650) e di Pierre de Fermat (1601-1675), suggeriva un nuovo metodo di costruzione basato sul seguente concetto:

> *"Una figura qualsivoglia è determinata completamente nello spazio quando di ogni suo punto si conoscono le distanze dalle facce di un triedro trirettangolo; analogamente dicasi per una figura piana."*

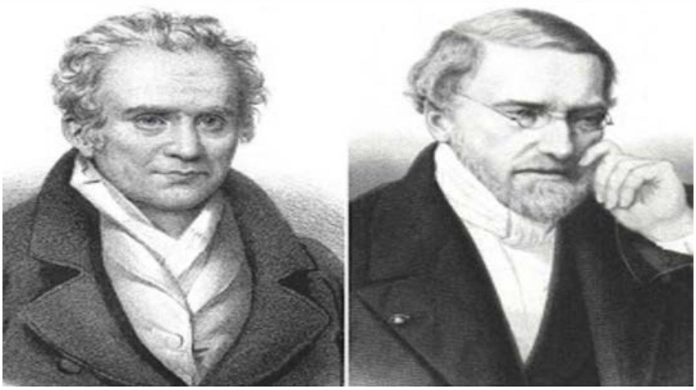
Girard Desargues

È questa la rappresentazione del metodo analitico che è alla base anche del concetto di assonometria.

Il Desargues completò la sua trattazione con un lavoro del 1639 in cui inaugurava il Metodo delle proiezioni centrali, che introduceva per la prima volta il concetto di punto all'infinito, mettendo le basi allo sviluppo della Geometria Proiettiva, cioè, quella disciplina che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezione e sezione.

Ed è nella geometria proiettiva che è messa in risalto l'importanza dei punti all'infinito e l'analogia tra punti e rette espressa dal "principio di dualità".

La geometria proiettiva fu sviluppata, poi, nel secolo successivo prima con Gaspard Monge (1746-1818) e quindi col suo allievo, Jean-Victor Poncelet (1788-1867) per trovare



Gaspard Monge e Jean Victo Poncelet

la sua rigorizzazione nel 1872 con *Il programma di Erlangen* di Felix Klein (1849-1925), il quale, nominato professore ordinario all'Università di Erlangen, pubblicò il suo «Program» in cui considerava le proprietà geometriche delle figure rispetto a "gruppi di trasformazioni". Ciò consiste nell'applicazione della "Teoria dei gruppi" (nella sistemazione data poi da Jordan), alle teorie geometriche. In tal modo, Klein presentava una teoria unificatrice che permetteva di classificare le varie geometrie che progredivano indipendentemente una dall'altra (Casolaro in Cundari 1990).

Klein osservò che nello spazio vi sono delle trasformazioni che non alterano le proprietà geometriche delle figure. L'insieme delle trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà è detto "gruppo principale di trasformazioni", in quanto:

Felix Kleine

- La composizione di due o più trasformazioni è ancora una trasformazione.
- Esiste la trasformazione che muta le figure in se.
- Esiste la trasformazione inversa.
- La composizione di trasformazioni è associativa.

Per proprietà geometriche, Klein intendeva quelle indipendenti dalla posizione della figura nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, dall'ordinamento delle sue parti (Cundari, 1990).

3 – La "Geometria Proiettiva": un percorso didattico per la Scuola Secondaria di secondo grado

Relativamente alle trasformazioni lineari, oggetto del nostro lavoro, il gruppo di trasformazioni più ampio tra forme geometriche (rette, fasci di rette, piani, fasci di piani, spazi tridimensionali, ecc.) è il gruppo delle proiettività che, nel caso di trasformazioni piane (a cui noi ci riferiremo) prende il nome di "gruppo delle omografie".

In generale, diciamo proiettività tra due forme geometriche π_1 e π_2, una corrispondenza biunivoca ω che a punti di π_1 associa punti di π_2 ed a rette di π_1 associa rette di π_2. Una proiettività tra piani è detta omografia.
Pertanto, un'omografia è una trasformazione lineare tra due piani π_1 e π_2 (distinti o sovrapposti) che trasforma un punto di π_1 in un punto di π_2 ed una retta di π_1 in una retta di π_2. Essa avviene attraverso (e solo) le operazioni di proiezione e sezione (Casolaro, Eugeni 1996).

3a – Proiezione e sezione

Si definisce proiezione di un punto P su una retta *r*, da un centro di proiezione S, il punto $P' \equiv SP \cap r$ (fig. 3.1). Se il segmento SP è perpendicolare ad *r*, la proiezione si dice ortogonale. Il punto P′ è detto anche sezione della retta SP con la retta r.

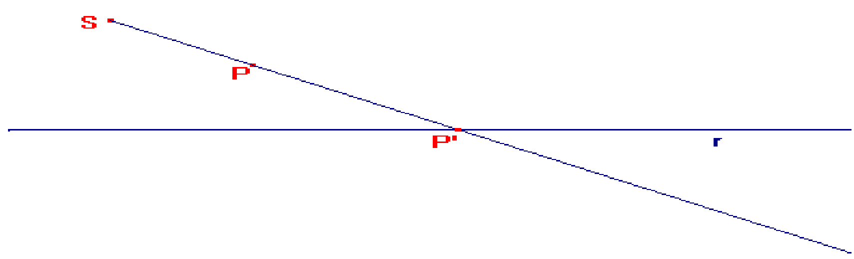


Fig. 3.1

3b – Prospettività tra rette: punto limite, punto improprio

Date due rette *r* ed *s* del piano ed un punto S esterno sia ad *r* che ad *s*, si definisce prospettività di centro *S* tra le rette

s ed r la corrispondenza che ad ogni punto P$\in s$ fa corrispondere il punto P' $\equiv$ SP $\cap$ r (cioè la proiezione del punto P di r dal centro di proiezione S) (fig. 3.2).

Se s è parallela ad r, la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di s, interseca certamente la retta r, e viceversa.

Se s incide r in un punto U, si può osservare:

1. al punto U corrisponde se stesso: U è detto punto unito.
2. esiste un punto I $\in$ s tale che la retta IS è parallela ad r, per cui al punto I non corrisponde alcun punto di r.

E' possibile completare la corrispondenza biunivoca tra s ed r, associando al punto I$\in s$ un elemento J$\propto$ di r che è detto "punto improprio" o punto all'infinito ed è individuato dalla direzione della retta r (cioè del fascio di rette parallele ad r). Infatti, se consideriamo la prospettività di centro S tra la retta s ed una qualsiasi parallela ad r, possiamo osservare che al punto I$\in s$ corrisponde ancora J$\propto$ (fig. 3.3).

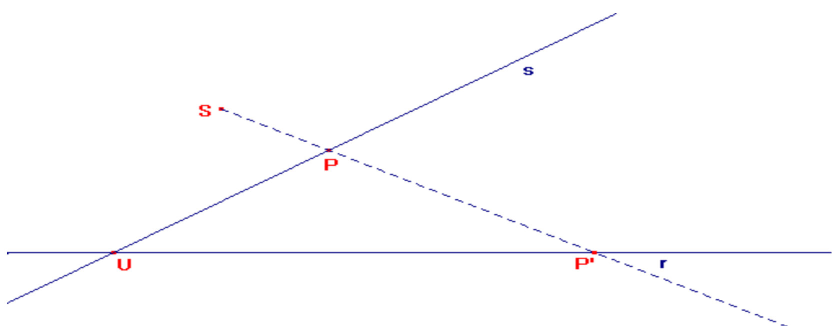


Fig. 3.2

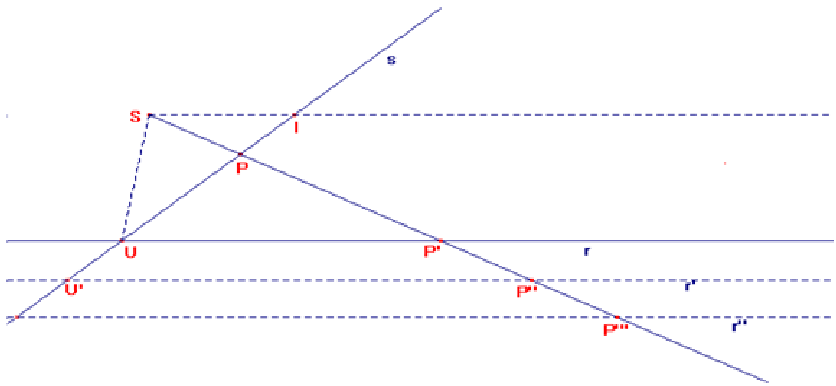


Fig. 3.3

Il punto I∈*s* è detto "punto limite" nella prospettività di centro S tra le rette *s* e *r*.

3c – Prospettività tra piani: retta limite, retta impropria

Siano α e β due piani dello spazio euclideo e sia S un punto esterno sia ad α che a β. Si definisce prospettività di centro *S* tra i piani *β* ed α, la corrispondenza che ad ogni punto P∈β associa il punto P'∈α tale che P'≡ α ∩ SP (cioè la proiezione del punto P di β sul piano α dal centro di proiezione S).

- Se β è parallelo ad α, la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di β interseca certamente il piano α e viceversa.
- Se β incide α secondo una retta *u*, si può osservare:
    1. ai punti della retta *u* corrispondono i punti stessi: *u* è detta "retta di punti uniti" nella prospettività di centro S tra i piani α e β;

2. esiste una retta $t \in \beta$ i cui punti sono situati nel piano per S parallelo ad α, per cui le proiezioni da S su α sono punti impropri. Si completa la corrispondenza tra β ed α associando ai punti della retta t i punti impropri che costituiscono, quindi, una retta all'infinito t_∞, detta "retta impropria".

La retta impropria è individuata dalla giacitura del piano α (ovvero, dal fascio di piani paralleli ad α). Infatti, se consideriamo la prospettività di centro S tra il piano β ed un qualsiasi piano parallelo ad α, possiamo osservare che ai punti della retta t di β corrispondono ancora i punti impropri di t_∞. La retta t è detta "retta limite" nella prospettività di centro S tra i piani α e β.

Lo spazio euclideo, con l'aggiunta degli elementi impropri, prende il nome di spazio proiettivo; la geometria che ne studia le proprietà è la Geometria Proiettiva; il gruppo di trasformazioni è il gruppo delle omografie.

Una prospettività ω tra piani subordina sempre una prospettività tra rette.
Infatti, se α e β si corrispondono nella prospettività ω di centro S, un piano per S non parallelo ne ad α ne a β, interseca α e β secondo due rette t_1 e t_2 che si corrispondono in ω.
Pertanto, una *prospettività* ω tra due piani α e β è un'omografia, in quanto corrispondenza biunivoca, tale che se un punto $P \in \alpha$ descrive una retta su α, anche il suo corrispondente $P' = \omega(P)$ descrive una retta su β.

In generale, le omografie sono prospettività tra piani o composizione di due o più prospettività.

Un omografia ω del piano α in sé che presenta un punto U unito e una retta *u* di punti uniti è detta omologia (Casolaro, Cirillo, 1996)

In tal caso l'omografia (omologia) si ottiene come composizione di due prospettività tra piani nello spazio tridimensionale.

L'omologia è dunque una trasformazione che avviene nel piano, ma ha la sua genesi nello spazio.

Ed è questo il concetto su cui è stato costruito il Progetto; concetto estremamente significativo per l'insegnamento della geometria perché tutti i pedagogisti e didattici della matematica, nella seconda metà del XX secolo (primo tra tutti Bruno Rizzi che ne sottolineava i dettagli già nel 1990 (Cundari, 1990) hanno ritenuto essenziale un insegnamento basato sul fusionismo, cioè sull'integrazione e/o connessione tra le diverse parti della matematica, nel nostro caso l'insegnamento della geometria nel piano e nello spazio in un unico percorso.

In figura, un esempio didattico che propongono i docenti di matematica agli studenti in aula; è la rappresentazione dell'omologia nella realtà (Casolaro, Rotunno 2019).

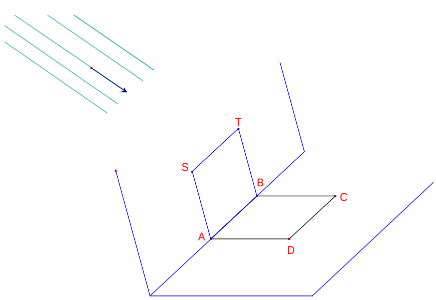


Fig. 3.4 – Proiezione della finestra

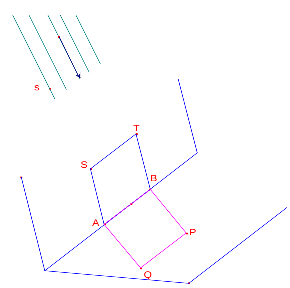


Fig. 3.5 – Proiezione della finestra

sul pavimento la mattina   sul pavimento alcune ore dopo

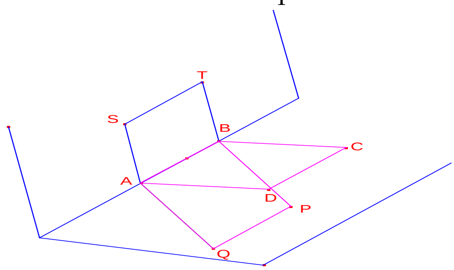


Fig. 3.6 - Sovrapposizione delle proiezioni: omologia

4 – La rappresentazione nel piano proiettivo

Si pone, dunque, il problema della rappresentazione di un punto e di una retta nel piano proiettivo Dal punto di vista didattico, riteniamo opportuno presentare la questione partendo dalla rappresentazione di unpunto $P(\overline{x}, \overline{y})$ nel piano cartesiano, per poi, mediante l'ampliamento al piano proiettivo, individuare il punto improprio con l'aggiunta di una terza coordinata (Casolaro, Rotunno 2015).

Con riferimento alla figura, consideriamo una direzione δ del piano (punto improprio P_∞); sia *r* la retta la retta per l'origine che individua P_∞ e sia $P_1\ (\overline{x}, \overline{y})$ un punto di *r*.

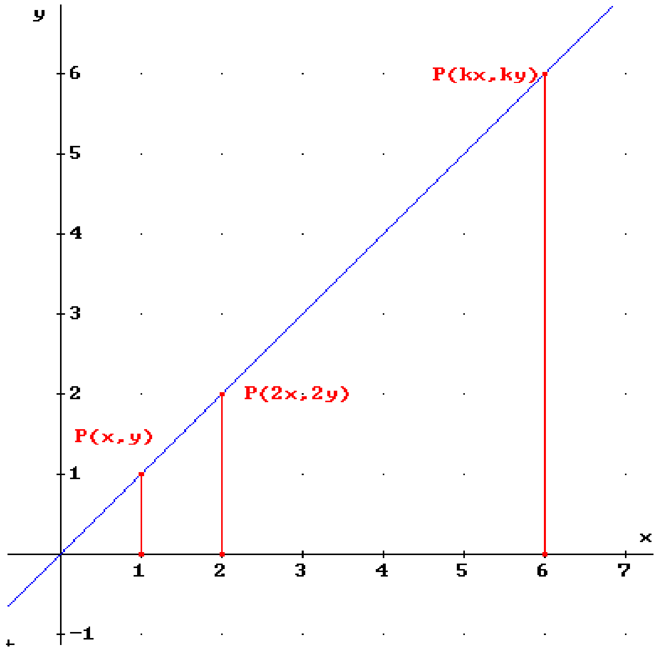


Fig. 4.1

Consideriamo la successione di punti:

$$P_1\left(\bar{x},\bar{y}\right)\equiv\left(\frac{\bar{x}}{1},\frac{\bar{y}}{1}\right);\qquad P_2\ \left(2\bar{x},2\bar{y}\right)\ \equiv\left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{2}},\frac{\bar{y}}{\frac{1}{2}}\right);\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{10}\left(10\bar{x},10\bar{y}\right)\equiv\left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{10}},\frac{\bar{y}}{\frac{1}{10}}\right)\ldots P_{1000}\left(1000\bar{x},1000\bar{y}\right)\equiv\left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{1000}},\frac{\bar{y}}{\frac{1}{1000}}\right)$$

che, considerando il denominatore una terza coordinata, possiamo anche scrivere:

$P_1(\bar{x}, \bar{y}, 1)$; $P_2 \ (\bar{x}, \ \bar{y}, \frac{1}{2})$; …… $P_{10}(\bar{x}, \ \bar{y}, \frac{1}{10},)$; …………
$P_{1000} \ (\bar{x}, \ \bar{y}, \frac{1}{1000})$;

I punti di tale successione appartengono tutti alla retta r ed al crescere dell'indice k, cresce la distanza $\overline{OP_k}$, ovvero, al tendere a zero del denominatore comune alle due coordinate (o terza coordinata), il punto P_k si allontana indefinitamente.
Posto:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3} \qquad (5.1)$$

possiamo definire le coordinate dei punti impropri come terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) in cui risulta $x_3 = 0$.
Pertanto, l'espressione

$$x_3 = 0 \qquad (5.2)$$

individua il luogo geometrico dei punti impropri del piano, cioè la retta impropria.

5 – Rappresentazione analitica

Poiché un'omografia muta rette in rette, deve essere rappresentata, nel piano proiettivo, da equazioni di primo grado (Franchetta 1969):

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad (5.1)$$

dove la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (5.2)$$

ha rango tre (det A $\neq 0$), affinché la corrispondenza sia biunivoca.

All'interno dei gruppi di trasformazioni si conservano alcune proprietà. Relativamente alle trasformazioni di rette (invarianti espressi da equazioni di primo grado) ed alle trasformazioni di coniche (invarianti espressi da equazioni di secondo grado), un'Omografia muta una retta in un'altra retta ed una circonferenza in una conica reale non degenere; inoltre si conserva il birapporto tra quaterne di punti su rette corrispondenti.

Se l'omografia muta rette parallele in rette parallele, è detta Affinità; le affinità formano gruppo (sottogruppo delle omografie) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle affinità caratterizza la geometria affine (primo ampliamento della geometria euclidea). Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, poiché in una trasformazione affine si conserva il parallelismo, un punto improprio si muta in un altro punto improprio, per cui la retta impropria è unita; relativamente alle trasformazioni espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza si muta in una conica chiusa (ellisse); inoltre si conserva il rapporto semplice tra terne di punti su rette corrispondenti, ed è costante il rapporto tra le misure delle aree di figure corrispondenti.

La proprietà delle affinità di avere unita la retta impropria, si traduce analiticamente nella eliminazione della terza equazione della (5.1) in quanto risulta: $x'_3 = x_3$.

Pertanto un'affinità è espressa analiticamente da due equazioni lineari in quanto il piano proiettivo coincide con il piano affine (Casolaro, Rotunno, 2019)

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \qquad (5.3)$$

Un'affinità in cui si conservano le ampiezze degli angoli è detta Similitudine; le similitudini formano gruppo (sottogruppo delle affinità) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle similitudini caratterizza la geometria euclidea. Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, in una similitudine, rette perpendicolari si mutano in rette perpendicolari; relativamente alle proprietà espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza è mutata in un'altra circonferenza.

Inoltre, si conserva il rapporto tra le misure di coppie di segmenti corrispondenti.

Relativamente a quest'ultima proprietà, è interessante notare che nel passaggio:

omografia → affinità → similitudine

in cui si conserva rispettivamente il

birapporto → rapporto semplice → rapporto distanze si passa da una proprietà relativa

- a quattro punti corrispondenti (birapporto),
- tre punti corrispondenti (rapporto semplice),
- due punti corrispondenti (rapporto distanze).

Se la similitudine conserva le distanze, è detta Isometria.

Lo studio delle proprietà delle similitudini e delle isometrie è l'argomento dei testi di geometria euclidea.

6 – Conclusioni e prospettive future

È evidente che per lo studio dell'Universo che ci circonda, il modello euclideo è insufficiente.

Negli ultimi 150 anni lo sviluppo della Teoria della Relatività ha imposto modelli di Geometria strutturati sullo spazio curvo; analogamente l'evoluzione dell'Ottica, dai classici concetti di riflessione e rifrazione alle trasformazioni sulle grandi distanze, in particolare alle modifiche delle ombre nel piano per effetto dei raggi solari, impongono la conoscenza degli elementi fondamentali di Geometria Proiettiva nell'insegnamento (Casolaro, Prosperi 2011).

Ciò emerge, come già accennato nell'introduzione di questo lavoro, anche dalle Indicazioni nazionali per i licei e dalle Linee guida per gli Istituti tecnici e professionali (che sostituiscono i vecchi programmi) in cui sono inseriti questi temi. Infatti, non a caso sono state introdotte delle ore di Fisica anche nei bienni del liceo e si è provveduto alla modifica della seconda prova agli esami di Stato, che non conterrà solo argomenti di Matematica, ma sarà arricchita da argomenti di Fisica e di Scienze naturali.

Purtroppo la resistenza a dare il peso che meritano queste tematiche nella didattica viene proprio dagli addetti ai lavori (Dirigenti Scolastici, Ispettori e docenti di maggiore esperienza) che sono poco disponibili a confrontarsi con argomenti che non hanno fatto parte del bagaglio di conoscenze nel proprio percorso di studio universitario (Casolaro 2014).

Per il futuro, comunque, c'è da essere ottimisti perché non credo che possa continuare la resistenza nella divulgazione di temi che sono essenziali alla Formazione dei giovani per una corretta osservazione del mondo fisico, anche perché con Cesare Cundari c'è l'auspicio di riorganizzare e continuare a proporre questo Progetto.
In particolare, il concetto di Omologia è considerato essenziale già da alcune maestre della Scuola Primaria che, avendolo assimilato nei corsi di Formazione per Distretti scolastici e Progetti PON organizzati dal Ministero già da alcuni anni, fanno disegnare nelle quarte e nelle quinte classi la finestra e l'ombra che produce sul pavimento in momenti diversi della giornata, come nelle figure (3.4), (3.5), (3.6) del paragrafo 3 di questo lavoro.

Il significato di questi cosiddetti "disegnini" va oltre gli obiettivi della rappresentazione perché permette all'insegnante di mostrare concretamente il movimento della Terra intorno al Sole (interrelazione con le Scienze) e le modifiche delle figure attraverso la prospettiva (interrelazione con l'Arte).

Ringraziamenti

Questo lavoro è dedicato al prof. Bruno Rizzi che, alle elevate conoscenze scientifiche, associava una carica umana che il sottoscritto ha sentito fin dal primo incontro.

Oggi, venticinque anni dopo la scomparsa, mi preme ricordare l'insegnamento che ho ricevuto e che ho cercato di trasmettere ai giovani docenti, con i quali ho avuto l'onore e l'onere di seguire nei vari corsi di Formazione, con lo stesso entusiasmo e impegno con cui sono stato seguito da Bruno. Sento inoltre il dovere di sottolineare la gratitudine nei confronti del prof. Cesare Cundari, per avermi dato la possibilità di imparare e divulgare temi così importanti per la crescita culturale delle nuove generazioni, con l'auspicio che se ne rendano conto anche gli addetti ai lavori della comunità scolastica.

Bibliografia

Casolaro F., Eugeni F. (1996). *Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie*. Atti del Convegno "Aspetti multidisciplinari della didattica della matematica" - Teramo, 1-3 dicembre 1995. *Ratio Matematica* n. 1, 1996 – pp. 23-33.

Casolaro F., Cirillo L. (1996). *Le trasformazioni omologiche*. Atti Convegno Nazionale Mathesis "I fondamenti della matematica per la sua didattica". - Verona, 28-30 novembre 1996 – pp. 309-318.

Casolaro F. , Santarossa R. (1997). *Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche.* Congresso Nazionale

Mathesis 1997: “Attività algoritmica e pensiero dialettico nell’insegnamento della Matematica”. Caserta, 28-31 ottobre 1997 – pp. 213-219.

Casolaro F. (2002). *Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*. Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo" – 17-19 ottobre Bergamo 2002 – pp.185-198.

Casolaro F. (2003). *Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica* - Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio" Vasto, 10-12 aprile 2003; pp. 129-148.

Casolaro F., Pisano R. (2006). *Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*. Atti del XXVI Congresso Nazionale di “Storia della Fisica e dell'Astronomia” (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura “Valle Giulia” dell’Università di Roma “La Sapienza”, pp. 221-231.

Casolaro F., Prosperi R. (2011). *La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*. Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011, Editore 2C Contact.

Casolaro F., Pisano R. (2011). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One) - In *History Research* - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pp. 47-60.

Casolaro F. (2014). L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?. In *Science & Philosophy* Divulgation Fascicolo 1 (2014) - Fondazione "Panta Rei" Numero speciale di Ratio Mathematica - ISSN: 2282-7757.

Casolaro F., Rotunno A. (2015). *Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations*. Brno, Czech Republic: University of Defence.

Casolaro F., Rotunno A. (2019). L'ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo. In *Matematica, Architettura, Fisica, Natura*. Roma: Aracne 2019, pp. 106-122.

Cundari C. (1991). *Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie.* Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma:; 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991.

Franchetta A. (1969). *Algebra lineare e Geometria analitica,* Napoli: Ed. Liguori.

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri.* Milano: Ulrico Hoepli.

Kline M. (1991). *Storia del pensiero matematico.* Torino: Einaudi Editore.

****

Il nastro di Mobius

Una antica raffigurazione del nastro è un mosaico, che rappresenta il Dio Aion contornato dallo Zodiaco, proveniente dalla città di Sentinum nei pressi dell'odierna Sassoferrato.

Il nastro di Möbius `e una superficie tridimensionale scoperta nel 1858 da August Ferdinand Möbius (1790–1869).

Come si puo osservare, scorrendo il nastro di Möbius con un dito possiamo ritornare all'esatto punto di partenza senza attraversare i bordi, a differenza di quanto accade nel cilindro o per una porzione di piano. Il fatto si esprime asserendo che questa superficie ha una sola faccia e che è una superficie non orientabile. Le equazioni parametriche del nastro di Mobius sono:

$x(u,v) = [1 + (v/2) \cos(u/2)] \cos u$

$y(u,v) = [1 + (v/2) \cos(u/2)] \operatorname{sen} u$

$z(u,v) = (v/2) \operatorname{sen}(u/2)$

con $0 \le u < 2\pi$, $-1 \le v \le . 1$

Che succede tagliando un nastro di Mobius lungo la linea mediana? E tagliandolo una seconda volta?

****