

Casi particolari del teorema di Fermat

Antonio Della Rocca* Alberto Trotta**

* Ingegnere; dellaroccaantonio77@gmail.com

** Docente I.I.S.S. "S. Caterina Amendola" Salerno; albertotrotta@virgilio.it

Sunto: *si suddivide la dimostrazione della impossibilità che una terna di numeri interi soddisfi l'eguaglianza di Fermat in otto casi esaustivi. Di questi quattro si escludono immediatamente sulla base del criterio della parità e della disparità. Gli altri quattro casi si riconducono alla dimostrazione di due casi. Detti due casi vengono trattati considerando separatamente n pari ed n dispari. Sono stati esaminati detti quattro casi e si è giunti a soluzione per tre di essi, mentre per il rimanente si è tracciato il percorso per pervenire alla soluzione. Gli autori ritengono che la validità della presente memoria consista nell'aver affrontato il problema in parola con una metodologia semplice, basata su considerazioni di aritmetica e algebra elementare, e sulle proprietà dei numeri interi.*

Parole chiave: *proprietà dei numeri interi, criterio di parità e disparità, analisi della divisione per 2 delle potenze dei numeri interi, fattorizzazione dei numeri interi, Teorema di Pitagora.*

Abstract: *The demonstration of Fermat's Last Theorem is divided into eight sub-cases. Four of these sub-cases are excluded basing on properties of natural numbers. The other four sub-cases are referred to the resolution of three cases. The interest of this articles consists in the use of a simple method, based on elementary considerations.*

Keywords: *properties of integers, criterion of parity and disparity, analysis of the division by 2 of the powers of integers, factorization of integers, Pythagorean theorem*

1 - Premessa

L'ultimo Teorema di Fermat asserisce che non è possibile trovare tre interi positivi x , y , z , tali che valga la seguente uguaglianza:

$$z^n = x^n + y^n \quad (1)$$

nelle seguenti ipotesi:

$$\begin{aligned} n &\geq 3 \\ x, y, z &\in \mathbb{N} \\ x, y \text{ e } z &\neq 1 \\ z &> y > x \end{aligned}$$

Le considerazioni esposte si basano prevalentemente su alcune proprietà dei numeri interi, che si riportano in Appendice 1 per comodità di esposizione, e sul criterio di parità e di disparità.

2 - Parte prima. I casi possibili

2.1 - Casi possibili

Dal punto di vista della parità e disparità delle basi i casi possibili sono i seguenti:

- B.1 x , y e z pari
- B.2 x , y e z dispari
- B.3 x e y pari, z dispari
- B.4 x e z pari, y dispari
- B.5 y e z pari, x dispari

B.6 x e y dispari, z pari

B.7 x e z dispari, y pari

B.8 y e z dispari, x pari

Con riferimento a quanto sopra la dimostrazione è stata suddivisa nei due seguenti sottogruppi:

- Il primo che comprende i casi B.2, B.3, B.4 e B.5 in cui non sono necessarie particolari elaborazioni poiché i risultati sono evidenti.
- Il secondo che comprendente i casi B.1, B.6; B.7, B.8 la cui soluzione si riduce all'esame dei soli casi B.6. e B.8.

Primo sottogruppo

Caso B.2

1. x, y e z dispari
2. $[dispari]^n = [dispari]^n + [dispari]^n$, ossia:
3. $dispari = dispari + dispari$
4. Essendo: $dispari + dispari = pari$; ciò implica che l'eguaglianza (1) non è vera.

Caso B.3

1. x e y pari, z dispari
2. $[dispari]^n = [pari]^n + [pari]^n$
3. $dispari = pari + pari$
4. Essendo: $pari + pari = pari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Caso B.4

1. x e z pari, y dispari
2. $[pari]^n = [pari]^n + [dispari]^n$
3. $pari = pari + dispari$
4. Essendo: $pari + dispari = dispari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Caso B.5

1. y e z pari, x dispari
2. $[pari]^n = [dispari]^n + [pari]^n$
3. $pari = dispari + pari$
4. Essendo: $dispari + pari = dispari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Secondo sottogruppo

Nell'esame del seguente sottogruppo verranno utilizzate anche proprietà della fattorizzazione dei numeri interi.

Caso B.1

1. x , y e z pari
2. x pari implica anche x^n pari che può essere scritto in forma fattorizzata come:

$$x^n = (2^{i_0} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m})^n, \text{ con } q_1, \dots, q_m \text{ tutti numeri primi.}$$
3. Analogamente vale la stessa considerazione per y e z , anch'essi numeri interi pari:

$$y^n = (2^{j_0} r_1^{j_1} r_2^{j_2} \dots r_h^{j_h})^n, \text{ con } r_1, \dots, r_h, \text{ tutti numeri primi.}$$

$$z^n = (2^{k_0} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_t^{k_t})^n, \text{ con } s_1, \dots, s_t \text{ tutti numeri primi.}$$

4. L'uguaglianza (1) pertanto può essere scritta come:

$$(2^{i_0} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m})^n + (2^{j_0} r_1^{j_1} r_2^{j_2} \dots r_h^{j_h})^n = (2^{k_0} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_t^{k_t})^n$$

Da cui segue:

$$2^{i_0 n} \text{Dispari}_1^n + 2^{j_0 n} \text{Dispari}_2^n = 2^{k_0 n} \text{Dispari}_3^n.$$

Indicando rispettivamente con D_1 , D_2 e D_3 le variabili precedenti si può scrivere:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{j_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n. \quad (2)$$

5. Dividendo i tre termini della terza uguaglianza (2), di cui al punto 4, per il minore dei fattori costituiti dalle potenze di 2, si possono avere tre casi:

Primo caso: Supponiamo sia $2^{i_0 n}$ il minore. In questo caso si otterrebbe:

$$D_1^n + 2^{(j_0 - i_0)n} D_2^n = 2^{(k_0 - i_0)n} D_3^n, \text{ ossia: } \text{dispari} + \text{pari} = \text{pari}, \text{ il che è assurdo.}$$

Nel caso fosse $2^{j_0 n}$ il minore, si ricadrebbe in una situazione analoga.

Secondo caso: Supponendo sia $2^{k_0 n}$ il minore, si avrebbe:

$$2^{(i_0 - k_0)n} D_1^n + 2^{(j_0 - k_0)n} D_2^n = D_3^n, \text{ ossia: } \text{pari} + \text{pari} = \text{dispari}.$$

Terzo caso: Si supponga ora l'uguaglianza di tutte e tre o di due delle potenze del 2.

- a. Se tutte le predette potenze sono uguali si dividono tutti e tre i termini dell'uguaglianza considerata per il predetto valore ($2^{i_0 n}$) e si ottiene: $D_1^n + D_2^n = D_3^n$, ossia *dispari+dispari=dispari*,.
- b. Si supponga ora di avere le due potenze pari del primo membro della relazione (2) uguali, la stessa relazione si può scrivere nella forma semplificata:

$$2^{j_0 n} (D_1^n + D_2^n) = 2^{k_0 n} D_3^n \quad (2.a)$$

- c. In questa eventualità, però, vanno esaminate ulteriori condizioni:

c.1 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 < i_0$.

Dividendo ambo i membri per $2^{k_0 n}$ la (2.a) si trasforma nella: $2^{(j_0 - k_0)n} (D_1^n + D_2^n) = D_3^n$, che conduce all'assurdo di ottenere: *pari=dispari*.

c.2 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 = i_0$

Si rimanda al punto a.

c.3 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 > i_0$. In questo caso la (2) si può scrivere:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{i_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n$$

e quindi:

$$D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n \quad \text{ove } h = k_0 - i_0 \quad (3)$$

L'eguaglianza (3) corrisponde al caso B.6.

Finora non si è fatta alcuna distinzione tra n pari e n dispari.

Esaminiamo la (3) con n pari, in questo caso:

$$\frac{D_1^n + D_2^n}{2} \text{ risulta sempre dispari.}$$

Infatti la eguaglianza (3) si può scrivere dividendo primo e secondo membro per due nel modo seguente:

$$\frac{D_1^{2m} + D_2^{2m}}{2} = \frac{2^{h2m} D_3^{2m}}{2}$$

In dette condizioni il primo membro è sempre dispari mentre il secondo resta pari, e quindi l'eguaglianza di partenza è falsa.

Infatti un numero dispari elevato a una potenza pari è sempre un numero dispari, che diviso per due si presenta sempre nella forma $2m + 0,5$; sommando due numeri del tipo

$2m + 0,5$ si ottiene un numero dispari (la dimostrazione in dettaglio è riportata in Appendice 3).

Con n dispari, quindi $n = 2m + 1$ con m intero ≥ 1

Si possono avere, nella ipotesi $D_2 > D_1$, due sottocasi ⁽¹⁾:

1. $D_2 - D_1 = 4s$ con s intero ≥ 1 per cui $D_2 = D_1 + 4s$

In tale caso la eguaglianza (3) si può scrivere dividendo primo e secondo membro per due nel modo seguente:

$$\frac{D_1^{2m+1} + (D_1 + 4s)^{2m+1}}{2} = \frac{2^{h(2m+1)} D_3^{2m+1}}{2}$$

In dette condizioni il primo membro è sempre dispari mentre il secondo resta pari, e quindi l'eguaglianza (3) è falsa.

Infatti un numero dispari elevato a una potenza dispari è sempre un numero dispari; nella ipotesi di cui sopra che la distanza tra D_2 e D_1 sia un multiplo di 4, il primo membro della relazione di cui sopra è sempre del tipo $2m + 0,5 + 2m + 0,5$ o $2m + 1 + 0,5 + 2m + 1 + 0,5$ e pertanto è sempre un numero dispari. (la dimostrazione in dettaglio è riportata in Appendice 4).

2. $D_2 - D_1 = 2 + 4s$ con s intero ≥ 0 per cui $D_2 = D_1 + 2 + 4s$

⁽¹⁾ Il caso $D_1 = D_2$ è riportato in Appendice 5; con $D_1 \neq D_2$ si è considerato il $D_2 > D_1$, il caso $D_2 < D_1$ si tratta in maniera analoga

Consideriamo la (3) $D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n$ ove $h = k_0 - i_0$

Come è noto, con n intero dispari

$$\frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d(\text{dispari})$$

Posto

$$D_1 + D_2 = 2^w D_4,$$

ove D_4 è la parte dispari di $D_1 + D_2$ e dividendo i due membri della (3) per $D_1 + D_2$, si ottiene

$$\frac{2^{hn} D_3^n}{D_1 + D_2} = \frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d$$

e anche

$$\frac{2^{hn} D_3^n}{2^w D_4} = \frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d$$

(3b)

Se

$$2^{hn} \neq 2^w$$

l'uguaglianza (3b) non è verificata divenendo del tipo pari = dispari.

Pertanto condizione necessaria affinché la (3) sia possibile è che

$$2^{hn} = 2^w.$$

Ne consegue

$$D_3^n = D_4 \times d$$

quindi per dimostrare che D_3^n è una potenza n -esima occorre dimostrare che

$D_4 \times d$ è una potenza n -esima.

- d. Si supponga ora di avere uguali una potenza del primo membro e una potenza del secondo membro, la relazione (2), che per comodità si riporta:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{j_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n$$

- e. Assume i seguenti aspetti:

d.1 Sia $j_0 = k_0$ e $k_0 < i_0$

In questo caso si ottiene:

$$2^{(i_0 - k_0)n} D_1^n + D_2^n = D_3^n \quad (4)$$

che corrisponde al caso B.8.

sia $i_0 = k_0$ e $k_0 < j_0$ si ottiene

$$D_1^n + 2^{(j_0 - k_0)n} D_2^n = D_3^n \text{ che corrisponde al caso B.7.}$$

Considerando n dispari e scrivendo la (4) nel modo seguente:

$$2^{(i_0-k_0)n} D_1^n = D_3^n - D_2^n$$

risulta che:

- se $D_3 - D_2 = 2$ il secondo membro diviso per 2 è sempre dispari
- se $D_3 - D_2 = 2+4s$ il secondo membro diviso per 2 è sempre dispari
- se $D_3 - D_2 = 4s$ il secondo membro diviso per $4s$ è sempre dispari

e quindi i primi due casi non sono proponibile; il terzo è da esaminare solo se la eguaglianza è verificata.

La relativa dimostrazione è facilmente costruibile con i meccanismi riportati in Appendice.

d.2 Sia $j_0 = k_0$ e $k_0 > i_0$

In questo caso si ottiene:

$$D_1^n + 2^{(k_0-i_0)n} D_2^n = 2^{(k_0-i_0)n} D_3^n$$

che non è proponibile.

d.3 Sia $i_0 = k_0$ e $k_0 > j_0$

In questo caso si ottiene:

$$2^{(k_0-j_0)n} D_1^n + D_2^n = 2^{(k_0-j_0)n} D_3^n$$

che non è proponibile

Consideriamo ora il caso con n pari uguale a 4, z dispari, x dispari e y pari

Posto

$$z^4 = x^4 + y^4$$

si può scrivere

$$(z^2)^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2$$

Da cui si evince che z^2 , x^2 , y^2 sono una terna pitagorica, che, come è noto, sono legati dalle seguenti relazioni nel caso di una terna pitagorica primitiva:

$$z^2 = h^2 + k^2$$

$$y^2 = 2h k \quad 5)$$

$$x^2 = h^2 - k^2$$

con h e k interi positivi primi tra di loro, uno pari e l'altro dispari e $h > k$ e pertanto, avendo posto $z^4 = x^4 + y^4$ deve risultare:

$$(h^2 + k^2)^2 = (2hk)^2 + (h^2 - k^2)^2 \quad 6)$$

Esaminando le 5) si evince che essendo:

$$h^2 + k^2 + h^2 - k^2 = z^2 + x^2$$

risulta

$$2h^2 = z^2 + x^2$$

e quindi, essendo x e z dispari, deriva che h deve essere dispari e quindi k pari.

Dall'esame delle 6) emerge che se $(h^2 - k^2)$ fosse un quadrato dispari (x^2) ed $(h^2 + k^2)$ un quadrato dispari (z^2), essendo:

$$z^2 = h^2 + k^2 = (h + k)^2 - 2hk$$

e quindi

$$2hk = (h + k)^2 - z^2$$

Che si può scrivere:

$$y^2 = 2hk = (h + k - z)(h + k + z)$$

e quindi

$$y^4 = (h + k - z)^2 (h + k + z)^2$$

e

$$h + k - z = a^2$$

$$h + k + z = b^2 \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ interi pari}$$

sommando:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = h + k$$

e si ottiene pari = dispari, contrariamente all'ipotesi $(h + k)$ *dispari*, e quindi l'eguaglianza di Fermat con $n = 4$ e con z, x *dispari* e y *pari* non trova soluzioni in N .

Per n *pari* multiplo di 4:

$$z^n = x^n + y^n$$

si può scrivere: $(z^m)^2 = (x^m)^2 + (y^m)^2$

$$m = 2n$$

e la dimostrazione è analoga alla precedente.

Consideriamo ora il caso n pari non multiplo di quattro e cioè:

$n = 2(2m + 1)$ con z dispari, x dispari e y pari.

Posto $z^n = x^n + y^n$

Si può scrivere $(z^{2m+1})^2 = (x^{2m+1})^2 + (y^{2m+1})^2$

e pertanto la terna z^{2m+1} , x^{2m+1} e y^{2m+1} è una terna pitagorica, che come tale deve soddisfare le seguenti eguaglianze:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 60 \cdot m_1 \quad 7)$$

$$x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 12 \cdot m_2 \quad 8)$$

con m_1 e m_2 interi.

Se m_1 è dispari la eguaglianza 7) non è rispettata, in quanto la parte pari di 60 è pari a 2^2 mentre la prova pari di y^{2n+1} è almeno 2^3 e quindi risulta una eguaglianza del tipo pari = dispari.

Con m_1 pari esaminiamo i casi possibili:

$$a) \quad x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} \cdot z^{2m+1} = 60 \cdot m_1 \quad 9)$$

$$\text{essendo } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{risulta: } m_1 = 2^{2m-1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2m}$$

$$\text{e} \quad y^{2m+1} \cdot x^{2m+1} = 12 \cdot m_2 \quad 10)$$

$$\text{essendo } 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{risulta: } m_2 = 2^{2m-1} \cdot 3^{2m}$$

dalle 9) e 10) risulta: $z^{2m+1} = 5 \cdot \frac{m_1}{m_2}$

e quindi $z^{2m+1} = 5 \cdot 5^{2m} = 5^{2m+1}$

inoltre: $x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 2^{2m+1} \cdot 3^{2m+1}$

e quindi $x^{2m+1} = 3^{2m+1}$

$$y^{2m+1} = 2^{2m+1}$$

ma non essendo la terna 5^{2m+1} , 3^{2m+1} e 2^{2m+1} una terna pitagorica

l'ipotesi iniziale $z^{2(2m+1)} = x^{2(2m+1)} + y^{2(2m+1)}$ è falsa.

b) nel caso esaminato al punto a) risulta che:

$$- m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1}$$

$$- m_2 \cdot 12 = 6^{2m+1}$$

pertanto:

$$b1) \text{ se } m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1} \cdot 2^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

con $d = \text{intero dispari}$, risulta:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 30^{2m+1} \cdot 2^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

$$\text{da cui: } z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 60^{2m+1} \cdot d^{2m+1} \quad 1)$$

che risulta del tipo dispari = pari

$$b2) \text{ se } m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

risulta:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 30^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

ma detta eguaglianza è improponibile in quanto il secondo membro non sarà mai del tipo $m_1 \cdot 60$

La procedura esposta è universale, nel senso che risolve il caso di n pari, sia con n multiplo di quattro che con $n = 2(2m + 1)$, con z dispari, x dispari e y pari.

3 - Conclusioni

L'eguaglianza di Fermat dal punto di vista della parità e della disparità delle basi presenta otto casi possibili. Di questi otto quattro non sono proponibili. Dei quattro rimanenti basta risolverne uno, cioè il caso B.1. con le tre basi pari ed n pari e dispari. Essendo le primitive di B.1. riconducibili ai casi B.6., B.7. e B.8. basta risolvere detti casi, che si riconducono a B.6. e B.7. in quanto la soluzione del B.7. risolve anche il caso B.8.

Sono stati risolti quasi tutti i sottocasi in cui si sono suddivisi i casi B.6. e B.7., in particolare completamente il caso B.6. con n pari, individuando anche il percorso per risolvere il caso con n dispari, e il caso B.7. Per quanto detto risulta anche che una terna pitagorica può essere solo del tipo $dispari = pari + dispari$.

In sintesi si è pervenuti alla situazione seguente:

	z dispari, x dispari, y pari	z pari, x dispari, y dispari
n = 2	Caso possibile	Caso non possibile
n pari > 2	Caso non possibile	Caso non possibile
n dispari	Indicato il percorso per la soluzione	Indicato il percorso per la soluzione

Gli autori ritengono rilevante che i risultati raggiunti siano stati ottenuti utilizzando le proprietà dell'aritmetica e dell'algebra elementare.

4 - Appendice

4.1 - Appendice 1

Alcune proprietà delle operazioni elementari tra numeri interi pari e dispari

1. Somma

$$\begin{aligned} [pari] + [pari] &= [pari] \\ [dispari] + [dispari] &= [pari] \\ [dispari] + [pari] &= [dispari] \end{aligned}$$

2. Prodotto

$$\begin{aligned} [pari] \bullet [pari] &= [pari] \\ [dispari] \bullet [pari] &= [pari] \end{aligned}$$

Infatti è sufficiente che uno dei numeri sia multiplo di 2 per avere un risultato *pari*.

$$[dispari] \bullet [dispari] = [dispari]$$

posto $d_1 = (n_1 + 1)$; $d_2 = (n_2 + 1)$;

in cui n_1 ed n_2 sono numeri pari si ha:

$$d_1 \bullet d_2 = (n_1 + 1) \bullet (n_2 + 1) = n_1 \bullet n_2 + n_1 + n_2 + 1$$

in cui $n_1 \bullet n_2$ è pari, n_1 ed n_2 sono pari e quindi il risultato finale è *dispari*.

3. Potenza

$$\begin{aligned} [pari^n] &= [pari] \\ [dispari^n] &= [dispari] \end{aligned}$$

4. Fattoriale

n_1 pari: $n_1! = \text{pari}$

m_1 dispari: $m_1! = \text{pari}$

4.2 - Appendice 2

1. $x = y$

2. $z > x$

3. $z^n = x^n + y^n \Rightarrow z^n = 2x^n$ da cui $z = x^n \sqrt[n]{2}$ e dunque z è irrazionale.

4.3 - Appendice 3

Consideriamo $\frac{D^{2m}}{2}$ con D intero dispari e $2m$ intero pari

Primo caso: $\frac{D}{2} = 2m + 0,5$ per cui:

$$\frac{D^{2m}}{2} = \frac{D}{2} \times D^{2m-1} = (2m + 0,5) \times D^{2m-1} = 2m \times D^{2m-1} + 0,5 \times$$

$$D^{2m-1} = \text{pari} + \frac{D}{2} \times D^{2m-2} =$$

$$= \text{pari} + \text{pari}, 5 \times D^{2m-2} = \dots = 2m + 0,5$$

Secondo caso: $\frac{D}{2} = \text{dispari}, 5$ per cui:

$$\frac{D^{2m}}{2} = \frac{D}{2} \times D^{2m-1} = \text{dispari}, 5 \times D^{2m-1} = \text{dispari} \times D^{2m-1} +$$

$$0,5 \times D^{2m-1} = \text{dispari} + \frac{D}{2} \times D^{2m-2} =$$

$$= \text{dispari} + \text{dispari}, 5 \times D^{2m-2} = \dots = \text{pari}, 5$$

Tanto detto, $\frac{D_1^{2m} + D_2^{2m}}{2}$ è sempre dispari essendo la somma di pari, 5 più pari, 5.

4.4 - Appendice 4

Se consideriamo $\frac{D_1^{2m+1} + (D_1 + 4s)^{2m+1}}{2}$ si fa notare che

con s intero ≥ 1 $\frac{D_1^{2m+1}}{2}$ e $\frac{(D_1 + 4s)^{2m+1}}{2}$, essendo la distanza

tra D_1 e $D_1 + 4s$ multiplo di quattro, sono entrambi o del tipo pari, 5 o del tipo dispari, 5 e per tanto l'espressione di cui sopra è sempre dispari.

4.5 - Appendice 5

$$D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n \quad (3)$$

con $D_1 = D_2$ la (3) si può scrivere $2D_1^n = 2^{hn} D_3^n$

dividendo per 2 $D_1^n = 2^{hn-1} D_3^n$

e quindi dispari uguale pari.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'ing. Paolo Fargione per la lettura critica e i preziosi suggerimenti.

Si ricorda il contributo fornito in una fase iniziale dello studio dall'amico ing. Pietro Di Giuseppe, purtroppo scomparso.

Bibliografia

Frajese A., Maccioni L.(1970). *Gli elementi di Euclide*. Milano: UTET.

Niven I. (1961). *Numbers: rational and irrational*. New York: Random House.

Corri L. (2020). *Breve storia dei numeri primi*. Milano: Hoepli.