Periodico di Matematica (IV) Vol. II (2) dicembre 2020, pp. 109-156

Insiemi completi del quarto ordine

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

Sunto*:* *Il presente lavoro è il naturale proseguimento dello studio degli insiemi di punti materiali appartenenti alla retta, contenuto nell'articolo ''Insiemi completi del terzo ordine'' di Franco Francia, pubblicato sul periodico di matematica, anno 33, vol. XVI, n.1, Edizioni A.f.s.u. Questo articolo, come il precedente, è rivolto, in particolare, all'attenzione dei docenti di matematica offrendo loro indicazioni su possibili percorsi didattici.*

Parole Chiave*: Punti materiali con eguale posizionamento, Insiemi completi, Complementare di un insieme di punti materiali, Insiemi congruenti.*

Abstract: *This work is the natural continuation of the study of the sets of material points belonging to the line, contained in the article 'Insiemi completi del terzo ordine'' by Franco Francia, published in Periodio di Matematica, anno 33, vol. XVI, n.1, edited by A.f.s.u.. This article, like the previous one, is aimed, in particular, at the attention of mathematics teachers by offering them information on possible educational paths.*

Keywords*: Material points with equal positioning, Complete Sets, Complementary of a set of material points, Congruent Sets.*

1 – Cenni sugli insiemi di punti materiali

Richiamiamo definizioni e proprietà fondamentali degli insiemi completi in modo schematico. Per approfondire ulteriormente gli argomenti è sufficiente consultare l'articolo precedentemente citato nel sommario.

Def. 1 Sia $R \times S$ il prodotto cartesiano di R, insieme dei reali, e S, insieme dei punti dello spazio euclideo. Un sottoinsieme finito di $R \times S$: $I = (m_1P_1, m_2P_2, \cdots, m_n P_n)$, è detto insieme di punti materiali di ordine n. In ogni elemento di I: $m_i P_i$, detto punto materiale, si distingue, oltre al punto $P_i \in S$ (indicato con lettera maiuscola), l'elemento $m_i \in R$, (indicato con lettera minuscola), detto massa associata a P_i. Diremo sostegno di I l'insieme $J = (P_1, P_2, , \cdots, P_n)$.

Def. 2 Prodotto di due punti materiali: $(m_i P_i)$ e $(m_j P_J)$, è il numero reale ottenuto moltiplicando il prodotto delle masse dei due punti materiali per il quadrato della distanza dei relativi punti: $(m_i P_i) \cdot (m_j P_j) = (m_i \cdot m_j) \cdot [d(P_i P_j)]^2$.

Def. 3 Il prodotto di un punto materiale (n P) per un insieme di punti materiali $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \cdots, m_h P_h)$ è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando (n P) per ciascun elemento di I: $(n\ P) \cdot I = \{n\, m_1 [d(PP_1)]^2 + n\, m_2 [d(PP_2)]^2 +, \cdots, n\, m_h [d(PP_h)]^2\}$.
Se la massa del punto P è unitaria: $1 \cdot P$, conveniamo di indicare il prodotto così: $P \cdot I$.

Def. 4 Se il prodotto di un qualsiasi punto materiale P, di massa unitaria, per I, con $I \in R \times S$, è costante: $P \cdot I = cost$, allora, I è detto insieme completo. Se le masse di tutti gli elementi di I sono nulle: $I = (0 \cdot P_1, 0 \cdot P_2, \cdots, 0 \cdot P_h)$, I è detto insieme completo improprio.

Def. 5 Il prodotto di un numero reale r per
$I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \cdots, m_h P_h)$ è così definito:
$r \cdot I = [(r \cdot m_1)P_1, (r \cdot m_2)P_2, \cdots, (r \cdot m_h)P_h] = I'$

Nota 1 È facile dimostrare che, se I è completo, anche $I' = r \cdot I$ è completo. Gli insiemi completi I e I′ sono detti equivalenti.

Def.6 Diciamo "ridotto di I", e scriviamo: rid.(I), l'insieme di punti materiali ottenuti sostituendo gli elementi di I, aventi stessa posizione, con un unico punto materiale avente stessa posizione e massa eguale alla somma delle masse. Nel ridotto di I sono omessi gli elementi con massa nulla.

Nota 2 È facile dimostrare che, se I è completo anche rid.(I) è completo.

2 – Cenni sugli insiemi del terzo ordine

Accenniamo al teorema che fissa le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali del terzo ordine omettendone la dimostrazione, facilmente reperibile mediante le indicazioni bibliografiche contenute nel sommario.

TH. 1 Sia $I = (m \cdot A, s \cdot B, n \cdot C)$ un insieme di punti materiali del terzo ordine essendo m,s,n le masse , rispettivamente, dei punti A,B,C, distinti e allineati sulla retta r. L'insieme I è completo se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ m \cdot a + s \cdot b + n \cdot c = 0 \end{cases} \qquad (2,1)$$

essendo $a < b < c$ le ascisse, rispettivamente, di A, B, C, riferite ad un punto H, scelto in modo arbitrario, sulla retta r.

<u>NOTA 3</u>

a) Sviluppando il sistema (2,1) si hanno le seguenti soluzioni:

$m = K \cdot (c - b) = K \cdot d(B, C)$, $s = -K \cdot (c - a) = -K \ d(A, C)$, $n = K \cdot (b - a) = K \cdot d(A, B)$ (2,2)

con $K \in R^*$, arbitrario.

Tenendo conto che: $(c - b) > 0$, $(c - a) > 0$, $(b - a) > 0$,

Fig. 1

i segni di m e n, masse, rispettivamente, di A e C, estremi del segmento [A, C] contenente B, sono concordi; sono discordi rispetto a s, massa di B, punto interno di [A, C]. Evidenziando i segni delle masse di I è quindi possibile riconoscere la collocazione reciproca sulla retta r dei punti di J = (A, B, C) che chiamiamo ''insieme di sostegno dell'insieme completo I''. Sintetizziamo quanto detto precedentemente con la seguente regola:

''Sia I = (m A, s B, n C) un insieme completo; se le masse m e n sono di segno concorde, allora, i punti associati A e C sono estremi del segmento [A, C]; il punto B di massa s, con segno discorde rispetto ai segni di m e n, è punto interno di (A, C)''.

b) Essendo I = (m A, s B, n C) un insieme completo deve risultare : $P \cdot I = \text{cost.}$ Essendo P un qualsiasi punto dello spazio lo sostituiamo con A; tenendo conto della (2,2) si ha:

$P \cdot I = A \cdot I = m \cdot 0 + s \cdot (b - a)^2 + n \cdot (c - a)^2 =$

$= - K\ (c-a)\cdot(b-a)^2 + K\ (c-a)^2\cdot(b-a) =$
$= K\cdot(c-a)\cdot(b-a)(c-b).$

Oppure scriviamo così:

$$P\cdot I = K\cdot d(A,B)\cdot d(B,C)\cdot d(C,A).$$

c) Sviluppando teoremi similari al TH.1 si può verificare che insiemi di punti materiali del primo e secondo ordine siano completi solo se impropri : $I_1 = (0\cdot P)$ e $I_2 = (0\cdot P, 0\cdot Q)$.

Introduciamo, di seguito, alcune definizioni che permettono di individuare agevolmente la posizione dei punti rispetto all'insieme di appartenenza.

3 – Insiemi di punti del IV ordine

Def. 7 Sia J un insieme di n punti , con $n > 2$, appartenenti alla retta r. Siano r^+ e r^- le semirette opposte, appartenenti a r, con origine $P \in J$. Se una delle due semirette aperte non contiene punti di J , allora, P è detto ''estremo di J''. Se entrambe le semirette r^+ e r^- contengono elementi di J, P è detto ''interno di J''.

Def. 8 Sia J un insieme di n punti non allineati, appartenenti al piano π. Siano π^+ e π^- i semipiani opposti su π con origine la retta r. Se uno dei due semipiani aperti non contiene punti di J, allora, r è detta ''retta esterna''. Se entrambi i semipiani di π contengono punti di J, allora, r è detta ''retta interna a J''.

Def. 9 L'elemento P appartenente a J, insieme di punti non allineati del piano π, è detto punto esterno se appartiene ad una retta esterna a J ; in particolare , il punto è detto vertice se esiste una retta esterna di J contenente il solo punto P.

Def. 10 La retta esterna a J è detta aderente a J se contiene almeno due punti di J. I punti esterni di J, appartenenti ad una retta aderente a J, sono detti punti aderenti di J.

TH. 2 Sia P l'estremo di un insieme J di punti di ordine n, con n > 2, appartenenti alla retta r. Sia t la retta passante per P, distinta da r, e sia π il piano contenente t e r. Indichiamo con π^+ il semipiano chiuso, avente sostegno π e origine t , contenente Y, un elemento di J distinto da P. Il semipiano chiuso π^+, contenente $Y \in J$, contiene tutti gli elementi di J.

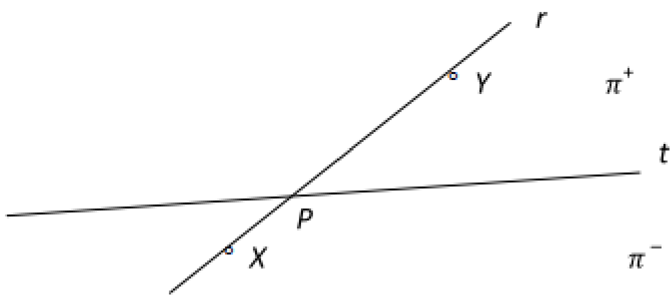

Fig. 2

Indichiamo con π^- il semipiano opposto a π^+. Supponiamo per assurdo che, i punti X,Y $\in$ J distinti da P, risultino: Y $\in \pi^+$ e X $\in \pi^-$. Per l'assioma della partizione del piano, se Y e X appartenessero, rispettivamente, a π^+ e π^-, il segmento [X,Y] conterrebbe P. In tal caso il punto P risulterebbe interno a (X,Y), e quindi a J, in contraddizione con le ipotesi.

NOTA 4 Sia J = (A, B, C, D) un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Effettuiamo tutte le possibili partizioni di J, i cui elementi siano coppie di punti dell'insieme. Di queste partizioni consideriamo solo quelle contenenti coppie appartenenti a rette che si intersechino in un punto U. (escludiamo il caso di rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Def. 11 Le rette passanti per A, B e C, D si intersecano in U, punto interno sia di (A, U, B) sia di (C, U, D). Chiamiamo coniugati interni di J gli insiemi J′ = (A, U, B) e J′′ = (C, U, D) i cui estremi sono, rispettivamente (A, B) e (C, D).

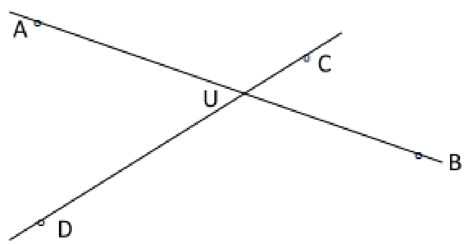

Fig. 3

Def. 12 Le rette passanti per A, C e D, B si intersecano in U, estremo di (A, C, U) e di (D, B, U). Chiamiamo coniugate esterne di J le terne J′ = (A, C, U) e J′′ = (D, B, U).

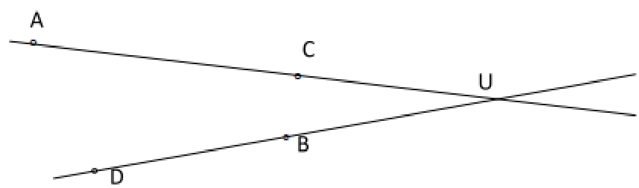

Fig. 4

Def. 13 Le rette r e s passanti, rispettivamente, per (A, B) e (C, D) si intersechino in U, punto che risulta interno a (C, D) ed esterno ad (A, B). I due insiemi J′ = (A, B, U) e J′′ = (C, U, D) sono detti coniugati alterni di J. In particolare, J′ è detto coniugato esterno di J; l’insieme J′′ è detto coniugato interno.

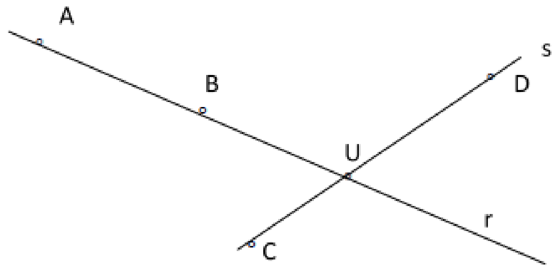

Fig. 5

<u>TH. 3</u> Sia J = *(A, B, C, D)* un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Se gli insiemi J′ = (A, U, B) e J′′ = (C, U, D) sono coniugati interni, allora, gli elementi di J sono tutti punti esterni dell'insieme di appartenenza.

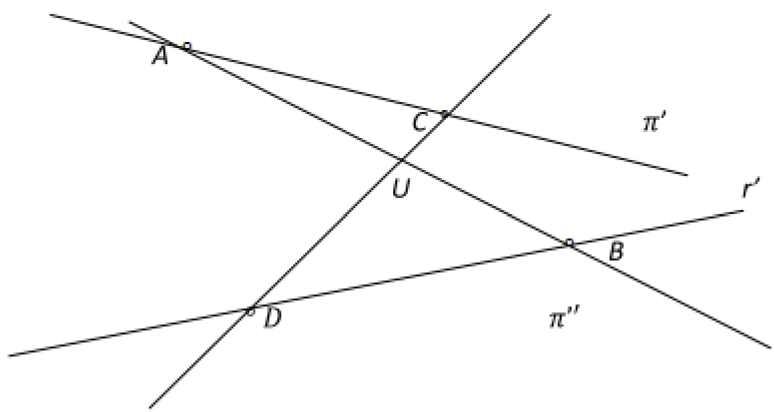

Fig. 6

Sia r′ la retta passante per B e D, estremi di J′ e J′′. Per il TH.2 , se U appartiene a π′ , semipiano con origine r′, anche A e C appartengono a π′ pertanto il semipiano opposto π′′ non contiene elementi di J. La r′ è aderente a J e aderenti a J *(esterni di J)* sono i punti B e D *(nota 4*). Procedendo in modo analogo risulta che anche A e C sono punti aderenti a J. Tutti gli elementi di J sono, quindi, punti esterni dell'insieme.

<u>TH.4</u> Sia J = *(A, B, C, D)* un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano. Se gli insiemi J' = (A, C, U) e J'' = (D, B, U) sono coniugati esterni, allora, gli elementi di J sono tutti punti esterni.

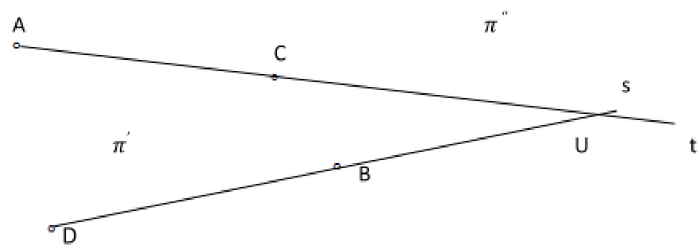

Fig. 7

Il punto U è l'estremo dei due insiemi J' e J'' appartenenti, rispettivamente, alle rette t e s. Per il TH.2 i punti B e D appartengono ad uno stesso semipiano π′ con origine t. PoichÈ i rimanenti punti di J, A e C ,appartengono a t, il semipiano π′′, opposto a π′ , è vuoto pertanto t è retta aderente a J e così A e C. Procedendo in modo analogo risulta che anche D e B sono esterni a J.

<u>TH. 5</u> Sia J= (A, B, C, D) un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Se J'= (C, U, D) e J'' = (A, B, U) sono coniugati alterni di J, essendo U punto interno di J' e B punto interno di J'', allora, B è punto interno di J.

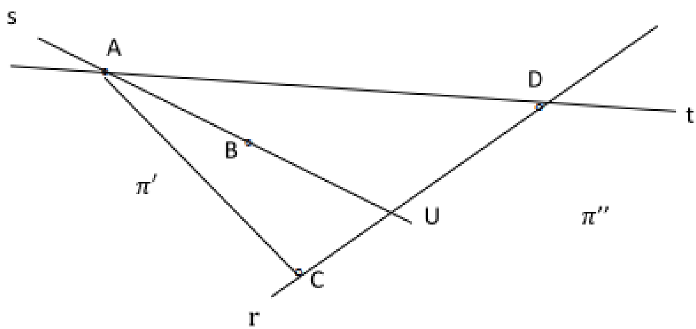

Fig. 8

Se B è punto interno di J′′, utilizzando il linguaggio tradizionale della geometria diciamo che B è punto interno del lato di estremi (A, U) comune ai due triangoli di vertici (A, U, C) e ((A, U, D) pertanto, per l'assioma di Pasch, tutte le rette passanti per B, intersecando [A, D] oppure [A, C] oppure [C, U] oppure [U, D], sono interne a J e quindi, per la def.3, anche B è interno a J.

<u>NOTA 5</u> Sia r la retta passante per C, U, D. Per il TH. 2 , i punti A e B dell'insieme coniugato esterno I′′, con U estremo, appartengono ad uno stesso semipiano π′ individuato da r ; il semipiano opposto , π ′′ , non contiene punti di J pertanto la retta r è aderente a J e aderenti sono i punti C e D. Sia t la retta passante per A e D, estremi di J′ e J′′. PoichÈ U è punto comune di J′ e J′′ , per il TH.2, i punti B,U,C appartengono allo stesso semipiano π* individuato da t, contenente U, pertanto il semipiano π** , opposto a π* , non contiene punti di J . Essendo t aderente a J, anche A, D sono aderenti a J. In sintesi, se U è punto interno di J, i rimanenti punti sono tutti esterni.

4 – Insiemi di punti materiali del IV ordine

TH.6 L'unione di due insiemi materiali completi è un insieme completo.

NOTA 6 Dall'unione dei due insiemi ternari completi, I′ e I′′, i cui sostegni siano insiemi di punti complanari, J′ e J′′, in generale, scaturisce un insieme completo del 6° ordine a meno che i due insiemi non contengano, rispettivamente, elementi aventi stessa posizione e masse opposte. Consideriamo questa seconda ipotesi.

TH.7 Ai due insiemi completi ternari I′ e I′′ appartengano, rispettivamente, i punti materiali opposti h P e – h P essendo: I′ = (m A, s B, h P) e I′′ = (n C, t D, – h P). Dall'unione di I′ e I′′ e dalla successiva riduzione si ottiene l'insieme completo I = (m A, s B, n C, t D) del IV ordine e si ha:

a) $m + s + n + t = 0$
b) $A,B,C,D \in \pi$ essendo π un piano di S

Effettuando l'unione si ha:
$I' \cup I''$ = (m A, s B, h P, n C, t D, – h P).
Riducendo si ottiene l'insieme completo del IV ordine:
I = rid.(m A, s B, h P, n C, t D, – h P) = (m A, s B, n C ,t D).
Tenendo conto che la somma delle masse di I′ e I′′ è:
$m + s + h = 0$ e $n + t - h = 0$, eseguendo la somma delle masse di I si ha: $m+s+n+t = (m + s + h) + (n + t - h) = 0$.

Le rette r′ e r′′ contenenti, rispettivamente, i punti A, B, P e i punti C, D, P, intersecandosi in P, appartengono ad uno stesso piano e così i punti dell'insieme J = (A, B, C, D).

NOTA 7 Le condizioni per poter ricavare un insieme completo del IV ordine, stabilite mediante il TH.3, utilizzando insiemi completi del III ordine, possono sembrare particolarmente restrittive: in realtà è sufficiente, per poter ricavare un insieme completo del IV ordine, che gli insiemi ternari abbiano, rispettivamente, due punti materiali egualmente posizionati, non necessariamente opposti. Ad esempio:

siano I′ = (4 A, – 5 P, 1 B), I′′ = (6 A, – 8 Q, 2 C) due insiemi completi. I punti materiali 4 A e 6 A dei due insiemi sono egualmente posizionati ma non opposti. Moltiplicando I′ per 3 e I′′ per – 2 si ottengono due insiemi completi ′′equivalenti′′ ai precedenti, soddisfacenti le condizioni del TH.3. Infatti si ha:

$$(3\ I') \cup (2\ I'') = (12\ A, -15\ P, 3\ B, -12\ A, 16\ Q, -4\ C)$$

Riducendo si ha:

$$I = \text{rid}\cdot [(3\ I') \cup (2\ I'')] = (-15\ P, 3\ B, 16\ Q, -4\ C)$$

Questo procedimento, che permette di generare un insieme completo del IV ordine utilizzando due insiemi ternari completi del terzo ordine, può essere percorso in senso inverso : dato un insieme completo I del IV ordine è possibile ricavare due insiemi ternari completi I′ e I′′ soddisfacenti la condizione $I' \cup I'' = I$.

Premettiamo alcune definizioni.

Def.14 Sia (m A, s B) l′insieme contenente due punti materiali e r sia la retta contenente i punti A e B. Le masse associate ad A e B soddisfino le seguenti relazioni: $m \neq 0, s \neq 0, m + s \neq 0$.

Fissato un qualsiasi sistema di coordinate ascisse su r, siano α e β le ascisse di A e B. Il punto materiale [–(m + s)P], con P individuato su r dall'ascissa $\gamma = \frac{m\alpha+s\beta}{m+s}$ è detto complementare di (m A, s B).

<u>TH.8</u> Se il punto materiale – (m + s)P è il complementare di (m A,s B), allora,

I = [mA, –(m + s)P, sB] è un insieme completo. Omettiamo la dimostrazione che si può facilmente ottenere mostrando che per l'insieme I risultano verificate le condizioni di completezza del TH.1.

<u>Def.15</u> Sia I un insieme completo del IV ordine. Sia I' l'insieme ternario completo ricavato dalla unione di due punti materiali di I, scelti conformemente alla def.14, e dal relativo complementare. Gli insiemi completi I' e I'', essendo I'' = rid. $\{I \cup [(-1)I']\}$, sono detti componenti di I.

<u>NOTA 8</u> Sia I = (m A, s B, n C, t D) un insieme completo; sia – (m + s)X il complementare di m A, s B, elementi scelti in modo arbitrario, con m + s $\neq 0$. Per il TH.8 la componente:

I' = [m A, s B, – (m + s) X] di I è un insieme completo e completa risulta la componente

I'' = rid. $\{I \cup [(-1)I']\}$ = rid. [m A, s B, n C, t D, – m A – s B, (m + s) X] = [n C, t D, (m + s) X].

Osserviamo che le due componenti I', I'' di I hanno un elemento opposto: $\pm\,(m + s)X$.

<u>TH.9</u> Sia I = (m A, s B, n C, t D) un insieme completo del IV ordine essendo m, s, n, t le masse associate, rispettivamente, ai punti A, B, C, D di S. Si ha:

a) $m + s + n + t = 0$
b) A, B, C, D $\in \pi$ essendo π un piano dello spazio S.

Siano I′ e I′′ le componenti di I. Essendo I l'unione di due insiemi completi I′ e I′′ contenenti un punto materiale opposto (Nota.4), sussistono le ipotesi del TH.7 in virtù del quale risultano verificate a), b).

<u>NOTA 9</u> Dal TH.9 risulta che la somma delle masse di I = (m A, n B, s C, h D), insieme completo del IV ordine, è zero: $m + n + s + h = 0$, pertanto si hanno due casi:

a) due masse di I sono positive e due negative;
b) una massa è negativa, le rimanenti tre sono positive (o viceversa)

Caso a)

Nell'ipotesi che le masse siano: m, n > 0 e s, h < 0, ricaviamo le seguenti componenti di I:

I′ = [m A, – (m + n) X, n B] e I′′ = [s C, – (s + h) X, h D]; per la nota 1 a), sia (A, B) sia (C, D) sono estremi, rispettivamente, di (A, X, B) e di (C, X, D); le due terne J′ = (A, X, B) e J′′ = (C, X, D) sono quindi coniugate interne di J = (A, B, C, D) pertanto, per il TH.3, tutti i punti di J sono esterni.

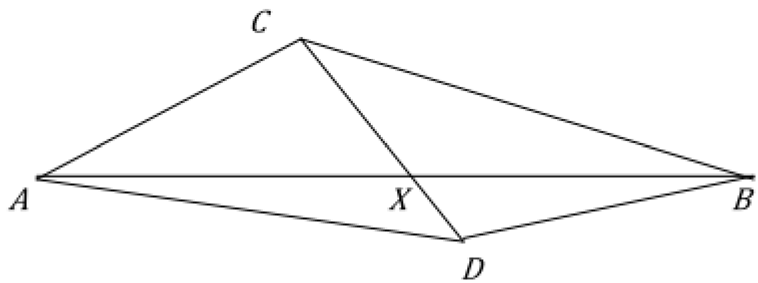

Fig. 9

Caso b)

Nell'ipotesi che le masse siano m, n, h > 0, s < 0, scelta, ad esempio, la coppia di punti materiali m A, n B di I si ottengono le seguenti componenti:

I' = [m A, – (m + n) X, n B] e I'' = [s C, + (m + n) X, h D].

Per la nota 1 a), essendo m, n > 0, risulta che A e B sono estremi di (A, X, B) e X è punto interno. Analogamente, considerando I'', essendo concordi le masse (m + n) e h, per la nota 1 a), il punto C è interno di (D, C, X). Si ha, allora, che (A, X, B) e (D, C, X) sono insiemi coniugati alterni pertanto, per il TH. 5, C è punto interno di (A, B, C, D).

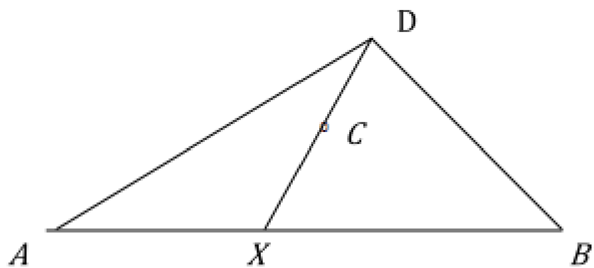

Fig. 10

NOTA 10 Dalla nota precedente possiamo ricavare la seguente regola: '' Se l'insieme quaternario completo I contiene una coppia di punti associati a masse positive e una coppia di punti associati a masse negative, allora, i punti dell'insieme completo I sono tutti punti esterni. Se l'insieme quaternario completo I contiene un solo punto C con massa discorde rispetto alle masse dei rimanenti punti, allora, C è punto interno; tutti i rimanenti sono punti esterni ''.

4.1 – Applicazioni

Applicazione 1 Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero (A,B,C,D) e risulti: $d(A,B) = 3\sqrt{10}$, $d(B,C) = \sqrt{65}$, d(C,D) = 9, $d(A,D) = \sqrt{26}$.

Trovare i moduli di [A, C] e [B, D] sapendo che si ha:

$$\frac{d(A,H)}{d(H,C)} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{d(B,H)}{d(H,D)} = \frac{52}{3} \qquad (4,1)$$

Nota. 11 Utilizzando il linguaggio degli insiemi di punti materiali, il precedente enunciato diviene:

Applicazione 1′ Siano (A, H, C) e (D, H, B) gli insiemi coniugati interni di J = (A, B, C, D) e risulti:
$d(A,B) = 3\sqrt{10}$, $d(B,C) = \sqrt{65}$, d(C,D) = 9, $d(A,D) = \sqrt{26}$.

Trovare i moduli di [A,C] e [B,D] sapendo che si ha:

$$\frac{d(A,H)}{d(H,C)} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{d(B,H)}{d(H,D)} = \frac{52}{3} \qquad (4,1)$$

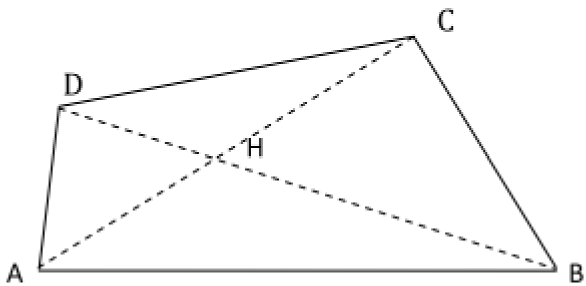

Fig. 11

Dalle (4,1) risultano completi i due insiemi: (3 A, – 5 H, 2 C) e (3 B, – 8 H, 5 D). Moltiplicando il primo insieme per + 8, il secondo per – 5, si ha:

$$I' = (24\ A, -40\ H, 16\ C) \quad e \quad I'' = (-15\ B, 40\ H, -25\ D).$$

Riducendo l'unione $I' \cup I''$ si ottiene l'insieme completo: $I = (24\ A, 16\ C, -15\ B, -25\ D)$.

Eseguendo il prodotto di I per A e C si ottiene l'equazione: $A \cdot I = C \cdot I$; sviluppando si ha:

$$16\,[d(A,C)]^2 - 15\,[d(A,B)]^2 - 25\,[d(A,D)]^2 =$$
$$= 24\,[d(A,C)]^2 - 15\,[d(B,C)]^2 - 25\,[d(D,C)]^2.$$

Posto $d(A,C) = x$, si ha : $8x^2 = 1000$ da cui $d(A,C) = 5\sqrt{5}$.
Analogamente, sviluppando l'equazione: $B \cdot I = D \cdot I$, si ha:

$$24\,[d(A,B)]^2 + 16\,[d(C,B)]^2 - 25\,[d(D,B)]^2 =$$
$$= 24\,[d(D,A)]^2 + 16\,[d(D,C)]^2 - 15\,[d(D,B)]^2.$$

Posto $d(D,B) = y$, si ha: $y^2 = 128$ da cui $d(D,B) = 8\sqrt{2}$.

<u>Applicazione 2</u> Siano A, B, C i vertici di un triangolo. Sia N il punto che divide il segmento [A,B] secondo il rapporto

$$\frac{d(A,N)}{d(N,B)} = \frac{5}{9} \qquad (4,2)$$

Sia H il punto che divide il segmento [C, N] secondo il rapporto

$$\frac{d(C,H)}{d(H,N)} = \frac{2}{3} \qquad (4,3)$$

Sapendo che $d(A,C) = 10\sqrt{2}$, $d(C,B) = 2\sqrt{29}$, $d(A,H) = 10$, $d(H,B) = 6\sqrt{2}$, calcolare $d(C,H)$ e $d(A,B)$.

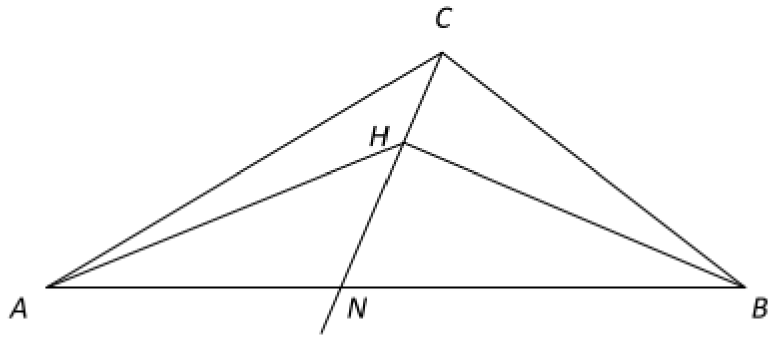

Fig. 12

Utilizzando il linguaggio degli insiemi di punti materiali il testo precedente diviene: “Siano (A, N, B) e (C, N, H) gli insiemi coniugati alterni di I = (A, B, C, N) . . .”

Da (4,2) e (4,3) si ricavano gli insiemi completi: I′ = (9 A, – 14 N, 5 B) e I′′ = (3 C, – 5 H, 2 N).

Effettuando l’unione di I′ e (7 · I′′) e riducendo si ha l’insieme completo:

I = rid.[I′ ∪ (7 · I′′)] = rid.(9 A, – 14 N, 5 B ,21 C, – 35 H, 14 N) = (9 A, 5 B, 21 C ,– 35 H). Essendo I completo si ha:

H · I = C · I ; sviluppando, si ha:

$9 \cdot [H,A]^2 + 5 \cdot [H,B]^2 + 21 \cdot [H,C]^2 = 9 \cdot [C,A]^2 + 5 \cdot [C,B]^2 - 35 \cdot [C,H]^2$. Posto d(H, C) = x, si ha :

$9 \cdot 100 + 5 \cdot 72 + 21 \cdot x^2 = 9 \cdot 200 + 20 \cdot 9 - 35 \cdot x^2$ da cui $d(H,C) = 2\sqrt{5}$.

Svolgendo la seguente equazione : A · I = B · I , si ha :

$5 \cdot [A,B]^2 + 21 \cdot [A,C]^2 - 35 \cdot [A,H]^2 = 9 \cdot [B,A]^2 + 21 \cdot [B,C]^2 - 35 \cdot [B,H]^2$ da cui d(A,B) = 14.

NOTA 12 Dato un insieme quaternario completo I = (s_1 P_1, s_2 P_2, s_3 P_3, s_4 P_4) è sempre possibile trovare l'equivalente I' le cui masse siano espresse mediante due parametri m e n .

Moltiplicando le masse di I per un reale $K \neq 0$ si ottiene l'insieme completo equivalente I'. Poniamo , ad esempio:

$K = \frac{1}{s_3}$, si ha : $I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_1,\right)$ (4,4)

Essendo $\frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0$, posto: $\frac{s_1}{s_3} = m$, $\frac{s_2}{s_3} = n$, $\frac{s_3}{s_3} = 1$, si ha:

$\frac{s_4}{s_3} = -(m+n+1)$. Sostituendo i rapporti $\frac{s_i}{s_2}$ nella (4,4), si ottiene :

I' = [$m \cdot P_1$, $n \cdot P_2$, $1 \cdot P_3$, – $(m + n + 1) \cdot P_4$] da cui risulta che è possibile esprimere le masse mediante m e n.

Applicazione 3 Sia J = (A,B,C,D)un insieme quaternario di punti del piano π. Verificare se l'insieme J contiene punti interni essendo: d(A,B) = $\sqrt{130}$, d(B,C) = $5\sqrt{2}$, d(C,D) = 5, d(A,D) = $\sqrt{5}$, d(A,C) = $2\sqrt{10}$, d(B,D) = $5\sqrt{5}$.

Con riferimento alla nota 12, attribuiamo all'insieme completo I, avente sostegno J, la seguente forma:

$I = [m \cdot A,\ n \cdot B, (1 - m - n) \cdot C, -1 \cdot D]$. (4,5)

Essendo I completo deve risultare : $\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ C \cdot I = D \cdot I \end{cases}$

Sviluppando si ha :

$$\begin{cases} n[d(A,B)]^2 + (1-m-n)[d(A,C]^2 - [d(A,D)]^2 = m[d(A,B)]^2 \\ \quad +(1-m-n)[d(B,C)]^2 - [d(B,D)]^2 \\ m[d(A,C)]^2 + n[d(B,C)]^2 - [d(D,C)]^2 = m[d(A,D)]^2 + n[d(B,D)]^2 \\ \quad +(1-m-n)[d(C,D)]^2 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} 14\,n - 12\,m + 11 = 0 \\ -10\,n + 12\,m - 10 = 0 \end{cases}$$ Essendo $n = -\frac{1}{4}$ $m = \frac{5}{8}$,

sostituendo nella (4,5) e riducendo si ha

I = (5 A, – 2 B, 5 C, – 8D). Tenendo conto della nota 10, essendo due masse di I positive e due negative, l'insieme non contiene punti interni.

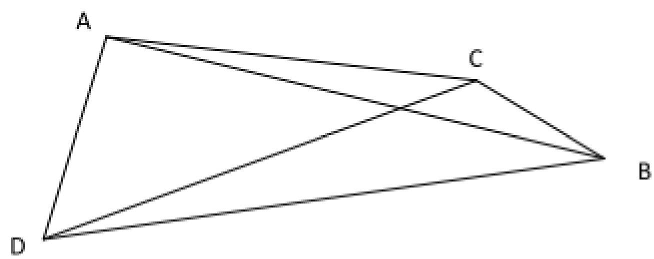

Fig. 13

<u>Applicazione 4</u> Sia J = (A,B,C,D)un insieme quaternario di punti del piano π. Verificare se l'insieme J contiene punti interni (nota 9) essendo: d(A,B) = $6\sqrt{2}$, d(B,C) = $2\sqrt{13}$,

d(C,D) = 5 , d(A,D) = $3\sqrt{5}$, d(A,C) = $\sqrt{10}$, d(B,D) = 3. Come nell'applicazione precedente, attribuiamo all'insieme completo I, avente sostegno J, la seguente forma:

$$I = [m \cdot A,\ n \cdot B, (1-m-n) \cdot C, -1 \cdot D] \qquad (4,6)$$

Essendo I completo deve risultare: $\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ C \cdot I = D \cdot I \end{cases}$

Svolgendo si ha :

$$\begin{cases} n[d(A,B)]^2 + (1-m-n)[d(A,C]^2 - [d(A,D)]^2 = m[d(A,B)]^2 \\ \qquad +(1-m-n)[d(B,C)]^2 - [d(B,D)]^2 \\ m[d(A,C)]^2 + n[d(B,C)]^2 - [d(D,C)]^2 = m[d(A,D)]^2 \\ \qquad +n[d(B,D)]^2 + 0(1-m-n)[d(C,D)]^2 \end{cases}$$

Da cui

$\begin{cases} 2n - 10\,m + 1 = 0 \\ 40\,m + 34\,n - 25 = 0 \end{cases}$ Essendo n = $\frac{1}{2}$, m = $\frac{1}{5}$,

sostituendo nella (4,6) e riducendo l'insieme I diviene:
I = (2 A, 5 B, 3 C, – 10 D). Tenendo conto della nota 10, essendo una massa di I positiva e le rimanenti negative, l'insieme contiene un punto interno, il punto D.

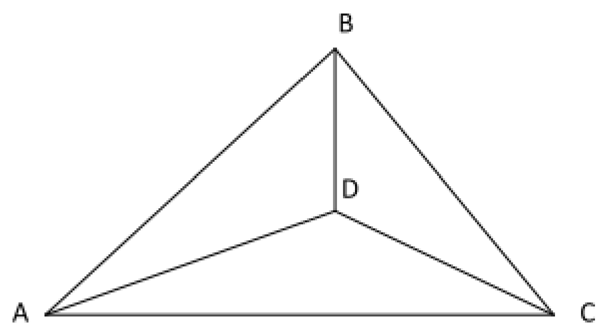

Fig. 14

<u>Applicazione 5</u> Sia H il punto di intersezione delle due diagonali [A, C] e [B, D] del quadrilatero Q(J), con
J = (A, B, C, D). Sapendo che d(B, H)= 4 $\sqrt{2}$, d(D, H) = $\sqrt{2}$, d(A, D) = $\sqrt{5}$, d(C, D) = $\sqrt{10}$, noto il seguente rapporto: $\frac{d(A,H)}{d(H,C)}$ = $\frac{3}{2}$, trovare d(A,C).

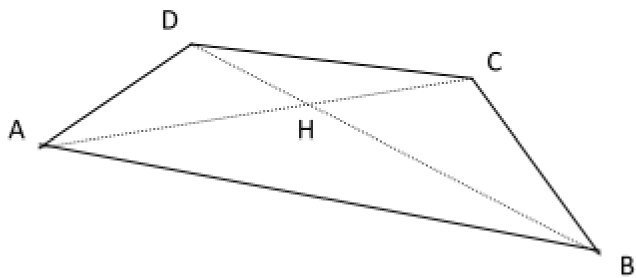

Fig. 15

Gli insiemi J′ = (A, H, C) e J′′ = (D, H, B) sono coniugati interni i J e sono di sostegno, rispettivamente, agli insiemi completi: I′ = (4 D, – 5 H, B) e I′′= (2 A, – 5 H, 3 C).
Sottraendo I′′ a I′ e riducendo si ha: I = I′ – I′′= = (2 A, 3 C, – 4 D, – B). Essendo I completo si ha: D · I = H · I .
Sviluppando si ha:

$2 \cdot [d(A,D)]^2 + 3 \cdot [d(C,D)]^2 - [d(B,D)]^2 = 2 \cdot [d(A,H)]^2 + 3 \cdot [d(C,H)]^2 + 4 \cdot [d(D,H)]^2 - [d(B,H)]^2$.

Posto d(C,H) = 2 x si ha d(A,H) = 3 x. Sostituendo nella precedente equazione si ha: x = 1 pertanto si ha: d(A, H) = 3, d(C,H) = 2 e quindi: d(A,C) = 5.

<u>Applicazione 6</u> Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] di un quadrilatero Q(J) essendo J = (A,B,C,D) e risulti: d(A,C) = $5\sqrt{5}$, d(B,D) = $3\sqrt{5}$.
Sia M il punto di intersezione delle rette t e s passanti, rispettivamente, per (A, D) e (B, C).
Sapendo che $\frac{d(M,D)}{d(D,A)} = \frac{3}{2}$ e $\frac{d(M,C)}{d(C,B)} = \frac{5}{4}$ (4,7) e che d(A,B) = $\sqrt{29}$, d(D,C) = $\sqrt{13}$, trovare d(A,D) e d(B,C).

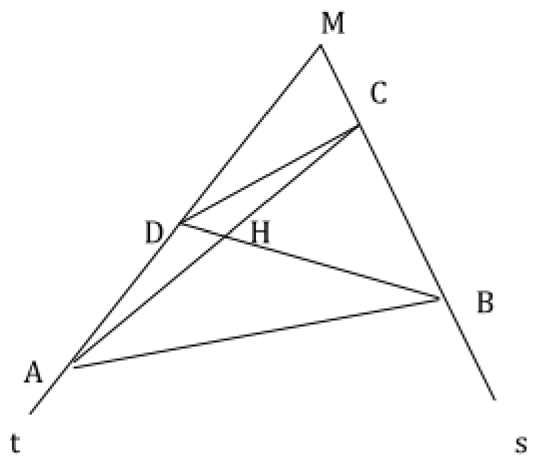

Fig. 16

Dalle (4,7) si ricavano gli insiemi completi I′ = (3 A, – 5 D, 2 M) e I′′ = (5 B – 9 C, 4 M). Effettuando l'unione dei due insiemi (2· I′) e (– 1· I′′) e riducendo si ha:
I = rid.[(2· I′) ∪ (– 1· I′′)] = rid.(6 A, – 10 D, 4 M, – 5 B, 9 C, – 4 M) = (6 A, – 10 D, – 5 B, 9 C).

Essendo I completo si ha : A · I = D · I. Sviluppando:
$9 \cdot [d(A,C)]^2 - 10 \cdot [d(A,D)]^2 - 5 \cdot [d(A,B)]^2 =$
$= 6 \cdot [d(D,A)]^2 + 9 \cdot [d(D,C)]^2 - 5 \cdot [d(D,B)]^2$
Posto d(A,D) = x, si ha: $9 \cdot 125 - 10 \cdot x^2 - 5 \cdot 29 =$
$= 6 \cdot x^2 + 9 \cdot 13 - 5 \cdot 45$, da cui $d(A,D) = 2\sqrt{17}$.
Procedendo in modo analogo, sviluppando B · I = C · I, si ha: d(C,B) = 8.

<u>Applicazione 7</u> Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero Q(J) con

J = (A,B,C,D) e risulti: $d(A,D) = d(A,B) = 3\sqrt{13}$, $d(C,D) = d(C,B) = 2\sqrt{10}$.

Sapendo che $\frac{d(A,H)}{d(H,C)} = \frac{9}{2}$ (4,8), calcolare d(A,C) e d(D,B)

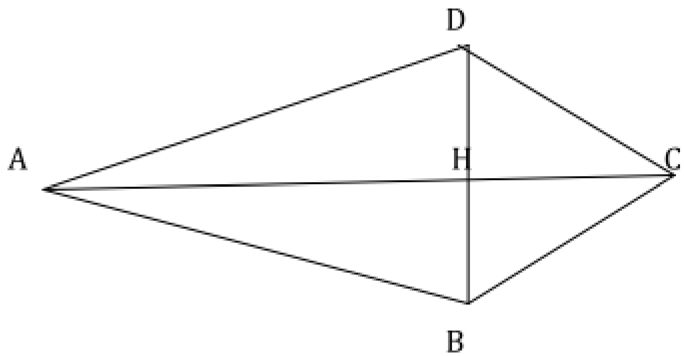

Fig. 17

Dalla (4,8) si ricava l'insieme completo I′ = (2 A, – 11 H, 9 C). Tenendo conto che H è punto medio di (D, B), si ricava l'insieme completo: I′′= (D, –2 H, B). Dalla riduzione dell'unione dei due insiemi completi (2 · I′) e (11 · I′′) si ha l'insieme completo:

I = rid.[(2 · I′) ∪ (11 · I′′] =

= rid. (4 A, –22 H,18 C, –11 D, 22 H, –11 B) =

= (4 A, 18 C, –11 D, –11 B).

Essendo I completo si ha: $A \cdot I = C \cdot I$. Sviluppando, si ha:

$18\,[d(A, C)]^2 - 11\,[d(A, D)]^2 - 11\,[d(A, B)]^2 =$

$= 4\,[d(A, C)]^2 - 11\,[d(D, C)]^2 - 11\,[d(B, C)]^2$.

Posto $d(A, C) = x$, si ha $x^2 = 121$ da cui $d(A,C) = 11$. Procedendo in modo analogo, dall'equazione $A \cdot I = D \cdot I$ si ha d((D,B) = 12.

Applicazione 8 Sia T(A, B, C) un triangolo isoscele e risulti d(A,C) = d(C,B) = 10. Sia H il piede dell'altezza relativa alla base [A, B]. Sia M un punto dell'altezza [C, H]. Siano:

d(A,M) = d(M,B)= $3\sqrt{5}$ i moduli dei lati del triangolo isoscele T(A,B,M). Sapendo che $\frac{d(C,M)}{d(C,H)} = \frac{5}{8}$ calcolare d(C,M) e d(A,B).

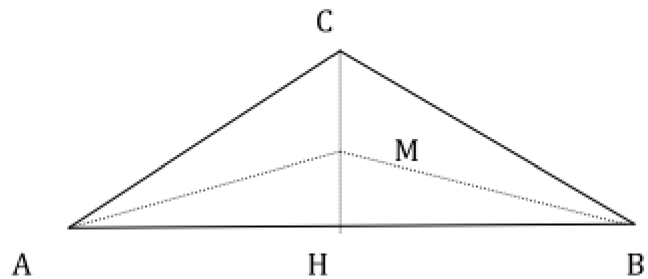

Fig. 18

Gli insiemi J′ = (A, H, B) e J′′ = (C, M, H) sono il sostegno, rispettivamente, degli insiemi completi I′ = (A, – 2 H, B) e I′′ = (3 C – 8 M, 5 H). Effettuando l'unione dei due insiemi completi $(5 \cdot I')$, $(2 \cdot I'')$ e riducendo si ha :

I

$= \text{rid.}[(5 \cdot I') \cup (2 \cdot I'')] = \text{rid}\,,(5A, -\ 10\,H\,,5B,$

$6\,C -\ 16\,M, 10\,H)$ da cui

$I = (5A, 5B, 6\,C, -16\,M)$. Svolgendo l'equazione $M \cdot I = C \cdot I$, si ha:

$5\,[d(A,C)]^2 + 5\,[d(B,C)]^2 - 16\,[d(C,M)]^2 = 5\,[d(A,M)]^2$
$+ 5\,[d(B,M)]^2 - 16\,[d(C,M)]^2$.

Posto d(C,M) = x , si ha: $5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 - 16 \cdot x^2 =$
$= 5 \cdot 45 + 5 \cdot 45 + 6 \cdot x^2$ da cui d(C, M) = 5. Analogamente, svolgendo l'equazione $A \cdot I = M \cdot I$, si ha d(A,B) = 12.

Applicazione 9 Essendo M il baricentro del triangolo T(J), con J = (A,B,C) , e H il punto medio di [A,B] , si ha: $\frac{d(C,M)}{d(M,H)} = 2$ (4,9). Sapendo che d(A,C) = $2\sqrt{37}$, d(C,B) = $4\sqrt{13}$
,
d(M,A) = $4\sqrt{2}$, trovare d(M,B) , d(C,M), d(A,B) .

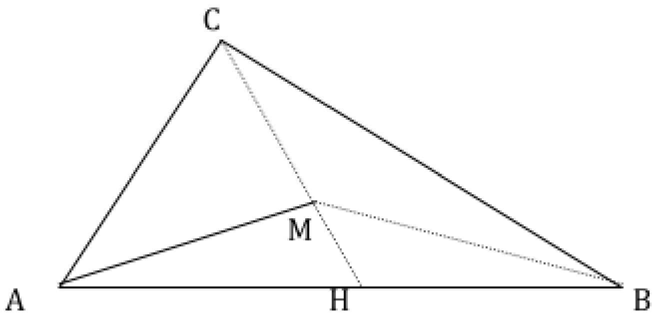

Fig. 19

Dalla (1) si ricava l'insieme completo I' = (C, – 3 M, 2 H); essendo d(A, H) = d(H,B) , si ricava l'insieme completo
I'' = (A, – 2 H, B). Effettuando l'unione di I' e I'' e riducendo si ottiene I = rid.[I' ∪ I''] = rid.(A, – 2 H, B , C, – 3 M , 2 H) =
= (A, B, C, – 3 M).
Per calcolare d(B, M) risolviamo l'equazione
A · I = B · I : $[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 3\,[d(A, M)]^2 =$
$= + [d(C, B)]^2 + [d(A, B)]^2 - 3\,[d(M, B)]^2$

Posto d(M, B) = x , si ha: $x^2 = 52$ da cui d(M,B) = $2\sqrt{13}$.
Risolvendo in modo analogo le equazioni:
M · I = C · I e A · I = M · I ricaviamo d(M,C) = $2\sqrt{17}$ e d(A,B) = 10 .

Applicazione 10 Sia J = (A,B,C) l'insieme dei vertici del triangolo T(J) e M, N siano due punti appartenenti, rispettivamente, ai lati [A,C] e [A,B] e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 2$, $\frac{d(B,N)}{d(N,A)} = 3$ (4,10). Sapendo che d(C,B) = 10, d(M,B) = $4\sqrt{5}$, d(M,N)= $5\sqrt{2}$, calcolare i lati d(C,M), d(N,B).

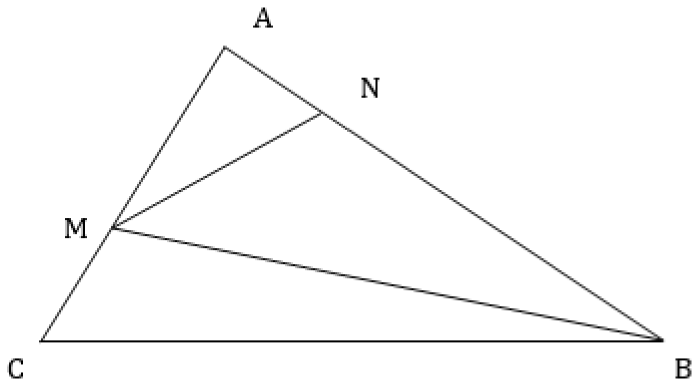

Fig. 20

Da (4,10) si ricavano i due insiemi completi: I′ = (A, – 3 M, 2 C) e I′′ = (3 A, – 4 N, B). Effettuando l'unione dei due insiemi, 3 · I′ e (– 1) · I′′ e riducendo si ha:

I = rid. $\{[\,3 \cdot I'] \cup [\,(-1) \cdot I''\,]\}$ =

= rid. (3A, – 9 M, 6 C, –3 A, 4 N, – B) = (6 C, – B, 4 N, – 9 M).

Posto d(A,M) = 2 · u, per le (4,10) si ha:

d(C,M) = u, d(A,C) = 3 · u (4,11)

Analogamente , posto d(A,N) = v, si ha: d(N,B) = 3 · v e d(A,B) = 4 · v (4,12) . Risolviamo le equazioni:

M · I = A · I e B · I = A · I . Si ha:

$6 \cdot [d(M,C]^2 - [d(M,B]^2 + 4 \cdot [d(M,N]^2 = 6 \cdot [d(A,C]^2 - [d(A,B]^2 + 4 \cdot [d(A,N]^2 - 9 \cdot [d(A,M]^2$

$6 \cdot [d(B,C]^2 - 9\,[d(B,M]^2 + 4 \cdot [d(B,N]^2 = 6 \cdot [d(A,C]^2 - [d(A,B]^2 + 4 \cdot [d(A,N]^2 - 9 \cdot [d(A,M]^2$

Sostituendo le (4,11) e le (4,12) si ha:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 10 \\ 3\,u^2 - 8\,v^2 = -20 \end{cases}$$

da cui $u = 2\sqrt{5}$ e $v = \sqrt{10}$. Quindi si ha: d(C,M) = $2\sqrt{5}$, d(N,B) = $3\sqrt{10}$.

Applicazione 11 Siano N e M due punti appartenenti, rispettivamente, ai lati [A,B] e [A,C] del triangolo T(J), con J = (A,B,C) e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$ e $\frac{d(A,N)}{d(N,B)} = \frac{1}{2}$ (4,13)

Sia H il punto di intersezione delle due diagonali [C, N] e [M, B] del quadrilatero Q(J) con J = (C, B, N, M). Sapendo che d(B,M) = $6\sqrt{5}$, calcolare d(M,H) e d(H,B).

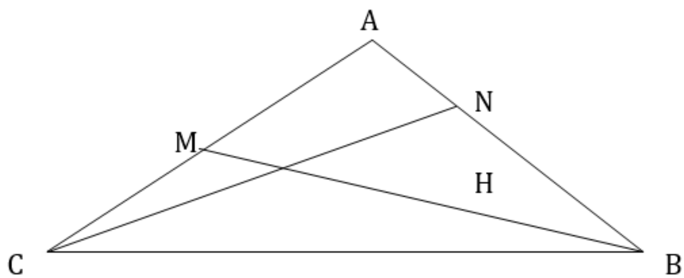

Fig. 21

Da (4,13) si ricavano i due insiemi completi: I′ = (2 A, – 5 M, 3 C) e I′′ = (2 A, – 3 N, B). Riducendo l'unione di I′ e di (– 1)· I′′ si ottiene: I = rid. [I′ ∪ (– 1)· I′′] = (3 C, – 5 M, 3 N, – B).

Il complementare dei punti materiali 3 C, 3 N di I è – 6 X pertanto l'insieme I′′′ = (3 C, – 6 X, 3 N) è completo. Effettuando l'unione: [I ∪ (– 1)· I′′′] e riducendo, si ha: (– 5 M , 6 X, – B). Per il TH.6, contenuto nell'articolo: ''Insiemi completi del terzo ordine'' di Franco Francia, pubblicato sul

Periodico di Matematica, Vol. XVI(1-2), giugno-dicembre 2019, affinchè un insieme ternario sia competo è necessario che le posizioni dei punti materiali ternari siano allineate pertanto il punto X, comune agli insiemi competi (3 C, – 6 X, 3 N) e (– 5 M, 6 X, – B), deve appartenere sia a [C, N] sia a [M, B]; quindi, coincidendo la X con H, possiamo riscrivere i precedenti insiemi così:

I^{IV} = (– 5 M , 6 H, – B), I′′′= (3 C,– 6 H, 3 N); tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti di sostegno dell'insieme completo I^{IV}, si ha: $\frac{d(M,H)}{d(M,B)} = \frac{1}{6}$.

Essendo d(M,B) = $6\sqrt{5}$, dalla precedente relazione risulta d(M,H) = $\sqrt{5}$ e quindi si ha d(H,B) = $5\sqrt{5}$.

Applicazione 12 Sia M il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero Q(J) con J = (A,B,C,D) e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 4$, $\frac{d(B,M)}{d(M,D)} = \frac{3}{2}$ (4,14)

Sia N il punto di intersezione delle rette t′ e t′′passanti, rispettivamente, per i punti (A, D) e (B, C). Trovare d(D,N) essendo d(A,D) = $6\sqrt{2}$.

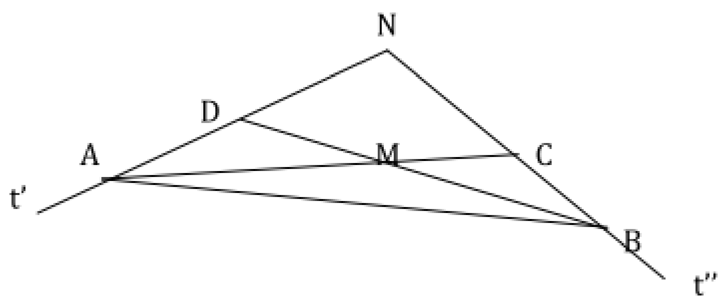

Fig. 22

Dalle (4,14) si ricavano i seguenti insiemi completi: I′ = (A, – 5 M, 4 C), I′′ = (3 D, – 5 M, 2 B).
Effettuando l'unione di I′ e (–1) I′′ e riducendo, si ha:
I = (A, 4 C, –3 D, –2 B). Essendo 2X il complementare di A e -3 D, risulta completo l'insieme I′′′= (A, – 3 D, 2 X). Effettuando l'unione dei due insiemi completi : [I′′′ ∪ (– 1)· I] e riducendo si ha: I^{IV} = (2 B, – 4 C, 2 X).

PoichÈ X appartiene ai due insiemi completi I′′′ e I^{IV} (vedere applicazione 11) deve essere allineato con (A, D) e (B, C) pertanto si ha:

X ≡ N e I′′′ diviene : I′′′ = (A, – 3 D, 2 N). Tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti dell'insieme di sostegno J′′′ di I′′′, si ha: $\frac{d(D,N)}{d(A,D)} = \frac{1}{2}$ (4,15) .

Essendo
d(A,D) = $6\sqrt{2}$, sostituendo nella (4,15) si ha: d(N,D) = $3\sqrt{2}$.

<u>Applicazione 13</u> Sia M un punto interno del triangolo di vertici A, B, C. L'insieme completo, avente sostegno J = (A, B, C, M), sia I = (5 A, 4 B, 6 C, –15 M). Essendo d(A,C) = $3\sqrt{13}$, d(C,B) = 15 , d(A,B) = $9\sqrt{2}$, trovare d(A,N) d(N,B) e d(M,N) sapendo che N è il punto di intersezione del lato [A,B] con la retta r passante per C e M.

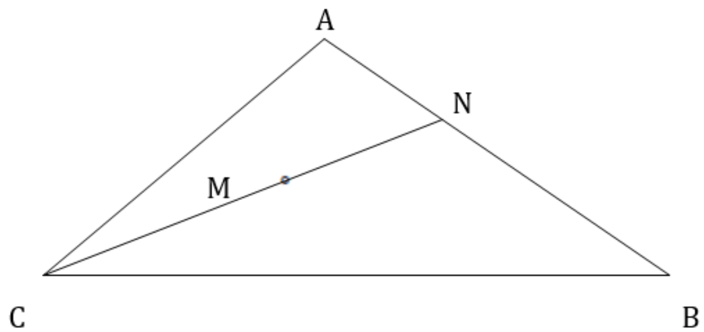

Fig. 23

Il complementare dei punti materiali 5 A e 4 B di I è – 9 X. L'insieme I' = (5 A, –9 X, 4 B) è completo pertanto anche:
I'' = [I' ∪ (– 1)· I] = (6 C, –15 M, 9 X) è un insieme completo. Il punto X, appartenendo sia a J' sia a J'', insiemi di sostegno, rispettivamente, di I' e I'', deve risultare allineato sia con (A,B) sia con (C,M) pertanto X $\equiv$ N e si ha:
I' = (5 A, –9 N, 4 B) e I''= (6 C, –15 M, 9 N).
Tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti dell'insieme I' = (5 A, –9 N, 4 B), si ha: $\frac{\mathrm{d(A,N)}}{\mathrm{d(A,B)}} = \frac{4}{9}$ da cui d(A,N) = $4\sqrt{2}$, d(N,B) = $5\sqrt{2}$. Essendo I'completo , si ha: C · I' = N · I' da cui: d(C,N) = $5\sqrt{5}$. Tenendo conto della relazione fra masse, essendo note la distanza [C,N], si ha : d(M,N) = $2\sqrt{5}$.

Applicazione 14 Siano h_1 e h_2 due semirette uscenti dal punto H. Siano A e B due punti equidistanti da H, appartenenti, rispettivamente, a h_1, h_2. La semiretta h_0, uscente da H e passante per M, punto medio di (A, B) contiene il punto medio Z di una qualsiasi coppia di punti X, Y, equidistanti da H, appartenenti, rispettivamente, ad h_1, h_2. (La h_0 è la bisettrice)

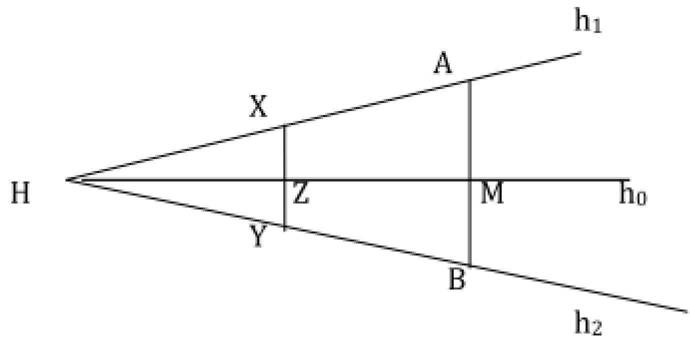

Fig. 24

Supponiamo sia: d(X, H) = d(Y, H) = m e d(A, X) = d(B, Y) = = n. Sono completi gli insiemi

I′ = (m A, – (m + n) X, n H),

I′′ = (m B, – (m + n) Y, n H),

I′′′= (m A –2m M, m B),

I^{IV}= [(m + n) X, –2 (m + n) Z, (m+n) Y].

Anche l'insieme rid.[I′ ∪ I′′ ∪ (−I′′′) ∪ I^{IV}] è completo e si ha:
[I′ ∪ I′′ ∪ (−I′′′) ∪ I^{IV}] = [mA,–(m+ n)X, nH, mB,–(m+n)Y, nH, –mA,2mM, –mB,(m+ n)X, –2(m+ n)Z, (m +n)Y].

Riducendo e dividendo per 2 si ottiene l'insieme completo:

I = $\frac{1}{2}\cdot$ rid. [I′ ∪ I′′ ∪ (−I′′′) ∪ I^{IV}] = [n H ,– (m + n) Z , m M]

Essendo I un insieme ternario completo proprio, i punti H, Z, M devono essere allineati.

<u>Applicazione 15</u> Siano d(A, B) = m, d(B, C)= s, d(A, C) = n, con m < n, i moduli dei lati del triangolo T(J) con J = (A,B,C). Siano h_1, h_2 le semirette uscenti da A, passanti,

rispettivamente, per C e B. Sia h_0 la bisettrice (vedere applicazione 14) di h_1 , h_2 intersecante [B,C] in H. Verificare che sia : $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{d(A,B)}{d(A,C)}$; calcolare d(A,H).

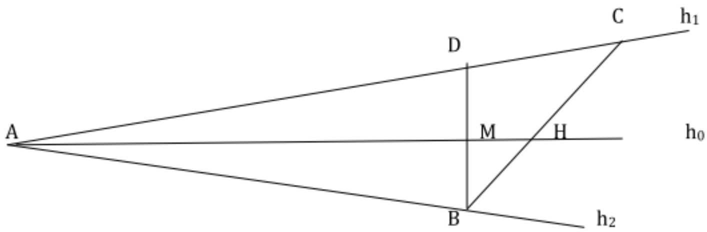

Fig. 25

Sia D il punto su h_1 soddisfacente la seguente relazione: d(A, D) = d(A,B) = m e M sia il punto medio di [B,D]. La bisettrice h_0 (vedere applicazione 11) passa per M, punto medio di [D, B]. I punti B, M, D sono di sostegno all'insieme completo (D, – 2 M, B) equivalente a I′ = (n D, – 2 n M, n B), con n ≠ 0.

Anche l'insieme I′′ = [(n – m) A, – n D, m C] è completo. Dall'unione dei due insiemi I′ e I′′ si ottiene l'insieme quaternario completo I = [(n – m)A, n B, m C – 2 n M]. Essendo – (n + m)X il complementare di n B, m C, risulta completo l'insieme I′′′= [n B, – (n + m) X, m C] e così l'insieme I – I′′′ = [(n - m) A, – 2 n M, (n + m) X] da cui si deduce che X, allineato sia con B,C sia con A,M , coincide con H pertanto scriviamo così: I′′′= [n B, – (n + m) H, m C].

Tenendo conto della nota 1, della relazione fra masse e distanze dei punti di I′′′, si ha: $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{m}{n}$ (4,16) ;

essendo , inoltre: $\frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{m}{n}$ (4,17) , da(4,16) e (4,17) si ha:

$\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{d(A,B)}{d(A,C)}$.

Per calcolare d(A,H) risolviamo l'equazione: $A \cdot I''' = H \cdot I'''$.
Si ha:
$n\,[d(A,B)]^2 - (n+m)\,[d(A,H)]^2 + m\,[d(A,C)]^2 =$
$= n\,[d(H,B)]^2 + m\,[d(H,C)]^2$.
Posto d(A,H) = x , tenendo conto che dalla (1) si ha:
$d(H,C) = \frac{ns}{m+n}$, $d(H,B) = \frac{ms}{m+n}$, l'equazione diviene:
$n\,m^2 - (n+m)\,x^2 + m\,n^2 = n\,\frac{m^2 s^2}{(m+n)^2} + m\,\frac{n^2 s^2}{(m+n)^2}$
da cui $x^2 = m\,n\left[1 - \frac{s^2}{(m+n)^2}\right]$.

<u>Applicazione 16</u> Siano (A,X) e (B,Y) due coppie di punti appartenenti, rispettivamente, alle due semirette r_1 e r_2 con origine H e risulti: $\frac{d(X,A)}{d(A,H)} = \frac{d(Y,B)}{d(B,H)} = m$ (4,18)

Siano P e Z due punti allineati, rispettivamente, con (A, B) e (X, Y) e risulti: $\frac{d(B,P)}{d(P,A)} = \frac{d(Y,Z)}{d(Z,X)} = h$, (4,19)
Mostrare che H, P, Z sono punti allineati.

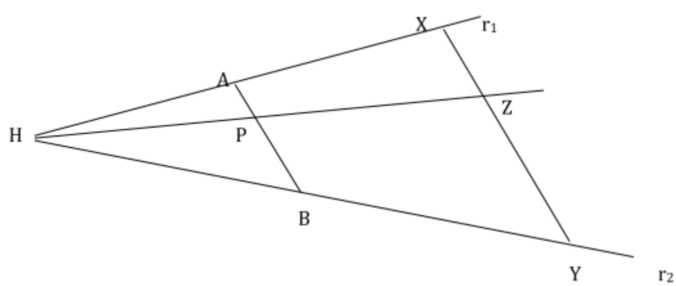

Fig. 26

Dalla (4,18) si ottengono gli insiemi completi:
$I' = [m\,H, -(m+1)\,A, X]$ e $I'' = [m\,H, -(m+1)\,B, Y]$.
Dalla (4,19) si ottengono gli insiemi completi:
$I''' = [h\,A, -(h+1)\,P, B]$ e $I'''' = [h\,X, -(h+1)\,Z, Y]$.

Svolgiamo la seguente unione di insiemi:

$\left[(h \cdot I') \cup I'' \cup (m+1) \cdot I''' \cup [(-1) \cdot I'''']\right] =$

= [mh H, – (m +1) hA, hX, m H, – (m +1) B, Y, h(m +1) A,

– (m +1)(h +1) P, (m +1) B, – h X, (h + 1) Z, – Y]

Riducendo e dividendo per (h + 1) si ha I = [m H, – m + 1) P, Z. Essendo I un insieme completo e proprio, i punti H, P, Z devono essere allineati.

<u>Applicazione 17</u> I punti N e M appartengano, rispettivamente, a [A,C] e [B,C], lati del triangolo di vertici (A,B,C) e risulti: d(A,N) = $2\sqrt{5}$, d(N,C) = $4\sqrt{5}$, d(B,M) = $2\sqrt{10}$, d(M,C) = $2\sqrt{10}$. Sapendo che la retta r, passante per N e M , interseca in H la retta s passante per A e B e che si ha: d(N,H) = $4\sqrt{10}$, calcolare d(M,N) , d(H,A) .

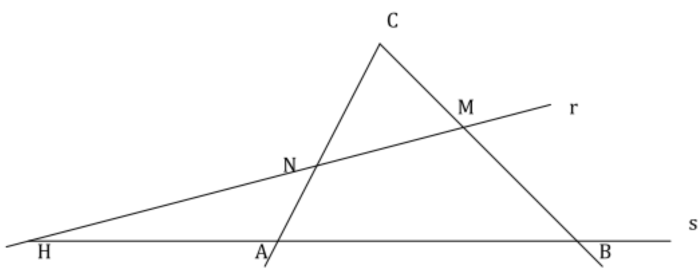

Fig. 27

Risultano completi i seguenti insiemi: I′ = (2 A, – 3 N, C) e I′′ = (B, – 2 M, C). Sottraendo membro a membro si ottiene l'insieme completo I′′′ = I′ – I′′ = (2 A, – 3 N, – B, 2 M).

Indicando con X il complementare dei punti materiali:

– 3 N, 2 M ϵ I′′′ , l'insieme I^{IV} = (2 M, – 3 N, X) è completo. Effettuando la differenza fra i due insiemi completi I′′′ e I^{IV} si ottiene l'insieme completo I^{V} = (B, –2 A, X). Confrontando I^{IV} e I^{V} risulta che X, essendo allineato sia con A, B sia con N, M, coincide con H pertanto risulta:

I^{IV} = (2 M, – 3 N, H) e I^{V} = (B, – 2 A, H).

Da I^{IV} si ha: $\frac{d(M,N)}{d(N,H)} = \frac{1}{2}$. Essendo d(N,H) = $4\sqrt{10}$ risulta d(M,N) = $2\sqrt{10}$. Inoltre, risulta: $C \cdot I^{IV} = N \cdot I^{IV}$.

Sviluppando si ha: $2\,[d(M, C)]^2 - 3[d(N, C)]^2 + [d(H, C)]^2 = 2\,[d(M, N)]^2 + [d(H, N)]^2$.

Posto d(H,C) = x, si ha: $2(2\sqrt{10})^2 - 3(4\sqrt{5})^2 + x^2 = 2(2\sqrt{10})^2 + (4\sqrt{10})^2$ da cui $x^2 = 400$ e quindi D(H, C) = 20.

Per calcolare d(A, H) svolgiamo la seguente equazione:

$C \cdot I' = N \cdot I'$. Si ha:

$2\,[d(A, H)]^2 - 3[d(N, H)]^2 + [d(H, C)]^2 = 2\,[d(N, A)]^2 + [d(N, C)]^2$ da cui d(A, H) = 10

Applicazione 18 I punti M e N appartengano, rispettivamente, ai lati [A, S] e [B, S] del triangolo di vertici (A,B,S) e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,S)} = \frac{1}{5}$ (4,20) , $\frac{d(B,N)}{d(N,S)} = 2$ (4,21)

Sia t la retta passante per S intersecante nei punti T e H, rispettivamente, i segmenti [A, B] e [M, N].

Sapendo che si ha : $\frac{d(AT)}{d(TB)} = \frac{4}{5}$ (4,22), trovare $\frac{d(M,H)}{d(H,N)}$ e $\frac{d(S,H)}{d(H,T)}$.

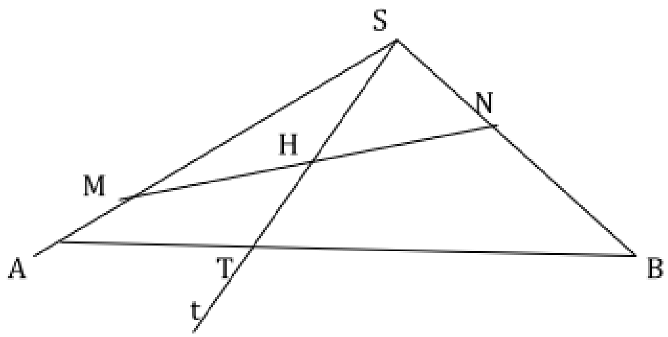

Fig. 28

Da (4,20) , (4,21) , (4,22) si ricavano i seguenti insiemi completi:

I_1 = (5 A, – 6 M, S), I_2 = (B, – 3 N, 2 S), I_3 = (5 A, – 9 T, 4 B)

Dall'unione e dalla successiva riduzione degli insiemi completi: I_1, (4 I_2), (– I_3), si ha:

$I = \frac{1}{3}$ rid. [$I_1 \cup (4\ I_2) \cup (-I_3)$] =

= $\frac{1}{3}$ rid.(5 A, – 6 M, S, 4 B, – 12 N, 8 S, – 5 A, 9 T, – 4 B) =

= (3 S, 3 T, – 2 M, – 4 N).

Il complementare degli elementi 3 S, 3 T $\in$ I è – 6 X pertanto I′ = (3 S, – 6 X, 3 T) è un insieme completo. Anche l'insieme I′′ = I – I′, differenza di due insiemi completi, è completo e risulta:

I′′ = (3 S, 3 T, –2 M, – 4 N, –3 S, 6 X, – 3 T) = (–2 M, 6 X, –4 N).

Essendo I′ e I′′ insiemi completi del terzo ordine, i punti S, X, T sono allineati e così M, X, N pertanto X coincide con il punto H. Sostituendo H in I′ e I′′, dividendo i due insiemi per 2, si ha: I′ = (S, – 2 H, T), I′ = (M, – 3 H, 2 N) da cui risulta: $\frac{d(S,H)}{d(H,T)} = 1$ e $\frac{d(M.H)}{d(H,N)} = 2$.

5 – Insiemi completi divisori dello zero

DEF.16 Siano $J' = (P_1, P_2, P_3)$ e $J'' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ due terne di punti ordinati secondo gli indici 1, 2, 3. Diciamo corrispondenti due elementi, appartenenti rispettivamente a J' e J'', aventi stesso indice.

DEF.17 Siano (P_i, P_j) e (Q_i, Q_j) due coppie di punti corrispondenti appartenenti, rispettivamente, a $J' = (P_1, P_2, P_3)$ e $J''= (Q_1, Q_2, Q_3)$. Se $d(P_i , P_j) = d(Q_i , Q_j)$, allora, diciamo che le coppie sono congruenti e scriviamo: $(P_i , P_j) \equiv (Q_i , Q_j)$.

DEF.18 Gli insiemi ternari J' e J'' sono detti congruenti se ogni coppia di punti di J' è congruente con la coppia corrispondente di J''.

Nota 13 Sia P un qualsiasi punto dello spazio. Essendo I un insieme completo si ha:

$P \cdot I =$ cost. Se la costante generata dal precedente prodotto è zero l'insieme I è un divisore dello zero e lo indichiamo così: I^0. Il teorema che segue stabilisce una condizione sufficiente per individuare alcuni casi di insiemi completi, divisori dello zero.

TH.10 Siano $J' = (A, B, C)$ e $J''= (M, N, S)$ due terne di punti allineati. Supponiamo che effettuando la seguente assegnazione di indici: (A_1, B_2, C_3) e (M_1, N_2, S_3), i due insiemi risultino congruenti essendo:

$d(A_1,B_2) = d(M_1,N_2) = n$, $d(B_2,C_3) = d\ N_2,S_3) = m$,

$d(A_1,C_3) = d\ M_1,S_3) = (m + n)$

Verificandosi le precedenti ipotesi è possibile ricavare due insiemi completi I_1 e I_2 la cui differenza: $I = I_1 - I_2$, è un insieme completo, divisore dello zero.

Per il TH.1 gli insiemi $I_1 = [mA, -(m+n)B, nC]$ e $I_2 = [mM, -(m+n)N, nS]$] sono completi e quindi anche $I = I_1 - I_2$ è un insieme completo. Per la nota 1, b), successiva al th.1, si ha, qualunque sia il punto P dello spazio S: $P \cdot I_1 = m\, n\, (m+n)$ e $P \cdot I_2 = m\, n\, (m+n)$.
Essendo $P \cdot I = P \cdot (I_1 - I_2) = P \cdot I_1 - P \cdot I_2 =$
$= m\, n\, (m+n) - m\, n\, (m+n) = 0$. L'insieme I, è, quindi, un divisore dello zero.

<u>NOTA. 14</u> Supponiamo che due punti corrispondenti, appartenenti, rispettivamente, agli insiemi J' e J'', insiemi già definiti nel precedente teorema, siano coincidenti; ad esempio, risulti: $A \equiv M \equiv X$. In questo caso le J' eJ'' possiamo riscriverle così:

$I_1 = [mX, -(m+n)B, nC]$,
$I_2 = [mX, -(m+n)N, nS]$]

La $I = I_1 - I_2$ diviene: $I = [-(m+n)B, nC, (m+n)N, -nS]$.
In questo caso si ottiene un divisore dello zero quaternario.

<u>Applicazione 19</u> Sia J = (A,B,C,D) l'insieme dei vertici del rettangolo R(J) appartenenti al piano π. Trovare la distanza del punto P (non appartenente necessariamente a π) dal vertice A sapendo che $d(B,P) = \sqrt{10}$, $d(C,P) = \sqrt{26}$, $d(D,P) = \sqrt{41}$.

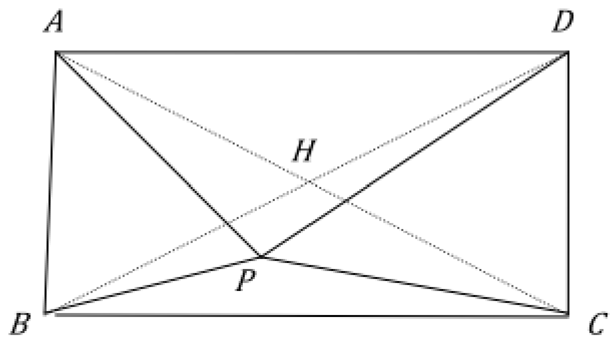

Fig. 29

(Assumiamo la seguente definizione di rettangolo: il rettangolo è un quadrilatero le cui diagonali si intersecano nel punto medio ed hanno stesso modulo). Essendo H il punto di intersezione delle diagonali [A, C] e [B, D], assegniamo agli elementi (A, H, C) e (B, H, D) i seguenti indici: (A_1, H_2, C_3) e (B_1, H_2, D_3), evidenziando la congruenza dei due insiemi. Essendo d(A, H) = d(H, C) = d(B, H) = d(H, D), gli insiemi I′ = (A, –2 H, C) e I′′ = (B, – 2H, D) sono completi ed hanno un punto materiale in comune pertanto, per il TH.10 e per la nota 8, l'insieme completo

$$I^0 = \text{rid.}\{ I' \cup [(-1)I''] \} = (A, C, -B, -D)$$

è un insieme quaternario, divisore dello zero. Si ha:

$$P \cdot I^0 = [d(P,A)]^2 + [d(P,C)]^2 - [d(P,B)]^2 - [d(P,D)]^2 = 0 .$$

Posto d(P, A) = x , risulta

$P \cdot I^0 = x^2 + 26 - 10 - 41 = 0$ da cui d(P,A) = 5 .

<u>Applicazione 20</u> Sia H il punto di intersezione delle diagonali [B, D] e [A, C] di un trapezio isoscele e risulti:

$d(A, H) = d(B, H) = n$, $d(D, H) = d(C, H) = m$, $d(A, B) = d$.
Calcolare $d(A, D)$ e $d(D, C)$.

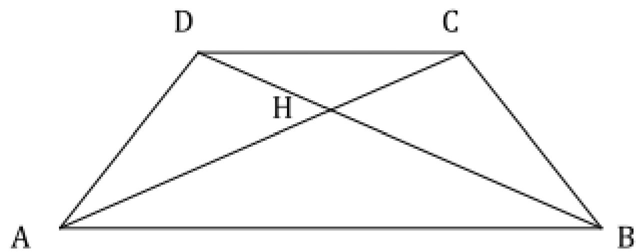

Fig. 30

Data la congruenza di $J' = (A_1, H_2, C_3)$ e $J'' = (B_1, H_2, D_3)$, per il TH.10, gli insiemi completi, aventi sostegno J' e J'' possono essere così rappresentati:
$I' = [m\,A, -(m + n)\,H , n\,C]$ e $I'' = [m\,B, -(m + n)\,H , n\,D]$.
L'insieme completo $I^0 = \text{rid.}\{I' \cup [(-1)I'']\} =$
$= (m\,A, -m\,B, n\,C, -nD)$ è un divisore dello zero.
Per calcolare $d(A,D)$ sviluppiamo l'equazione
$A\cdot I^0 = 0$: $A \cdot I^0 = - m\,[d(A, B)]^2+n\,[d(A, C)]^2 -n\,[d(A, D)]^2=0$.
Posto $d(A, D) = x$, sostituendo si ha :
$- m\,d^2 + n\,(n + m)^2 - n\,x^2 = 0$
da cui $d(A,D) = \sqrt{(m+n)^2 - \frac{d^2 \cdot m}{n}}$.
Per calcolare $d(D,C)$ sviluppiamo l'equazione $D\cdot I^0$ da cui si ha:
$m\,[d(D, A)]^2 - m\,[d(D,B)]^2 + n\,[d(D,C)]^2 = 0$.
Posto $d(D, C) = y$, sostituendo , si ha :
$m\left((m+n)^2 - \frac{m}{n}\,d^2\right) - m\,(m + n)^2 + n\,y^2 = 0$
da cui $d(D,C) = \frac{m}{n}\,d$.

Applicazione 21 Le lunghezze delle basi di un trapezio isoscele siano d(A, B) = a e d(D,C) = b con a > b. Trovare d(P,A) sapendo che d(P,B) = s, d(P,C) = k, d(P,D) = h (fig. 31).

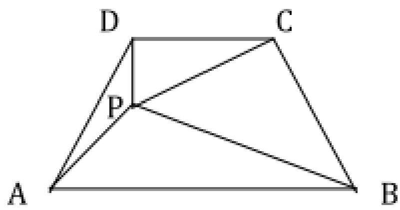

Fig. 31

Siano M e N le proiezioni ortogonali di D e C su [A, B]; sia H il punto medio di (A, B). Si ha: d(A, M) = d(N, B) = $\frac{a-b}{2}$ d(M, H) = d(H, N) = $\frac{b}{2}$, d(A, H) = d(H, B) = $\frac{a}{2}$.

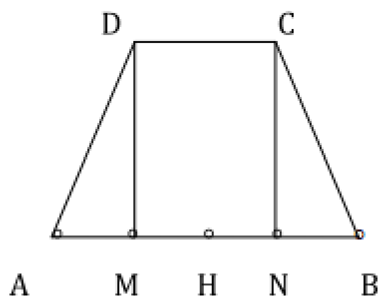

Fig. 32

Dalle precedenti relazioni si deduce che (A_1,M_2,H_3) e (B_1,N_2,H_3) sono congruenti, sostegno degli insiemi completi: $I' = \left(\frac{b}{2}\ A,\ -\frac{a}{2}\ M,\ \frac{a-b}{2}\ H\right)$ e $I'' = \left(\frac{b}{2}\ B,\ -\frac{a}{2}\ N,\ \frac{a-b}{2}\ H\right)$ aventi in comune il punto materiale $\frac{a-b}{2}$ H .

Dal TH.10, si ha che $I' \cup [(-1)I'']$ è un divisore dello zero:

$I' \cup [(-1)I''] = \left(\frac{b}{2} A, -\frac{a}{2} M, \frac{a-b}{2} H, -\frac{b}{2} B, \frac{a}{2} N, -\frac{a-b}{2} H \right)$

Riducendo si ha: $I_1^0 = (b\,A, -a\,M, -b\,B, a\,N])$.

Anche i punti (M, N, C, D), essendo vertici di un rettangolo, come risulta dall'applicazione 17, sono di sostegno ad un insieme completo, divisore dello zero: $I_2^0 = (M, -N, C, -D)$.

E' facile dimostrare che l'unione di due insiemi completi, divisori dello zero, è un insieme completo, divisore dello zero; quindi, essendo i $I^0 = I_1^0 \cup [a \cdot I_2^0] = (b\,A, -b\,B, a\,C, -aD)$ un insieme completo, divisore dello zero, si ha :

$P \cdot (b\,A, -b\,B, a\,C, -a\,D) = b \cdot [d(P,A)]^2, -b \cdot [d(P,B)]^2, a \cdot [d(P,C)]^2, -a \cdot [d(P,D)]^2 = 0$

Posto $d(P,A) = x$, si ha : $b\,x^2 - b\,s^2 + a\,k^2 - a\,h^2 = 0$ da cui

$d(P,A) = \frac{\sqrt{bs^2 - ak^2 + ah^2}}{b}$

6 – Condizioni di completezza di un insieme del IV ordine

<u>Th.11</u> L'insieme $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ contenga terne di punti non allineati, appartenenti al piano π sul quale sia fissato un qualsiasi sistema cartesiano ortonormale (O,x,y), mediante il quale risulti:

$P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_3 = (x_4, y_4)$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'insieme $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$, con $m_i \in R$ sia completo, sono le seguenti :

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0 \\ m_1y_1 + m_2y + m_3y_3 + m_4y_4 = 0 \end{cases} \qquad (6,1)$$

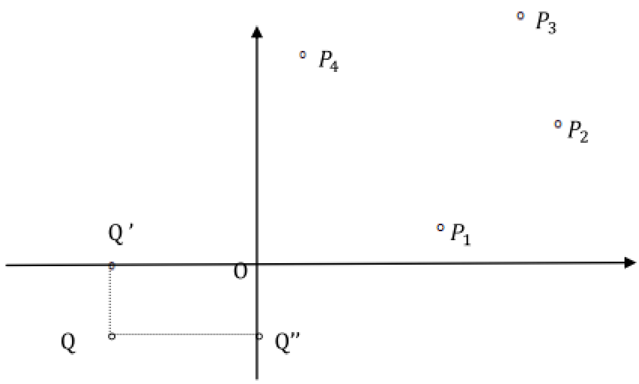

Fig. 33

<u>Condizione necessaria</u>

Affinchè I sia completo deve risultare: $O \cdot I = Q' \cdot I$ (6,2) essendo Q' = (d,0) un qualsiasi punto sull'asse delle x.

Si ha, allora:

$O \cdot I = m_1 [(x_1)^2 + (y_1)^2] + m_2 [(x_2)^2 + (y_2)^2] + m_3 [(x_3)^2 + (y_3)^2] + m_4 [(x_4)^2 + (y_4)^2]$

$Q' \cdot I = m_1 [(x_1 + d)^2 + (y_1)^2] + m_2 [(x_2 + d)^2 + (y_2)^2] + m_3 [(x_3 + d)^2 + (y_3)^2] + m_4 [(x_4 + d)^2 + (y_4)^2] =$

$= O \cdot I + 2\, d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) + d^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$

Sostituendo $O \cdot I$ e $Q' \cdot I$ nella (6,2) si ha:

$2d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) + d^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 0$

Affinchè la precedente relazione risulti eguale a zero, essendo d l'ascissa di un qualsiasi punto sull'asse x, deve risultare: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0$ (6,3)

Analogamente, essendo Q'' = (0,h) un qualsiasi punto sull'asse delle y, se I è completo, deve risultare:
$O \cdot I = Q'' \cdot I$. Procedendo come sopra si ricavano le seguenti condizioni:
$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, $m_1 y_1 + m_2 y + m_3 y_3 + m_4 y_4 = 0$ (6,4)
Da (6,3) e (6,4) si ricava la tesi.

Condizione sufficiente
Procedendo a ritroso, nell'ipotesi che le (1) siano verificate, si ottiene: $O \cdot I = Q \cdot I$, essendo Q = (d, h) un qualsiasi punto del piano.

Applicazione 22 Trovare le coordinate di H, punto di intersezione delle rette r e s, passanti, rispettivamente, per A = (– 3, – 1), B = (2, 4) e per D = (4,12), C = (9,2).

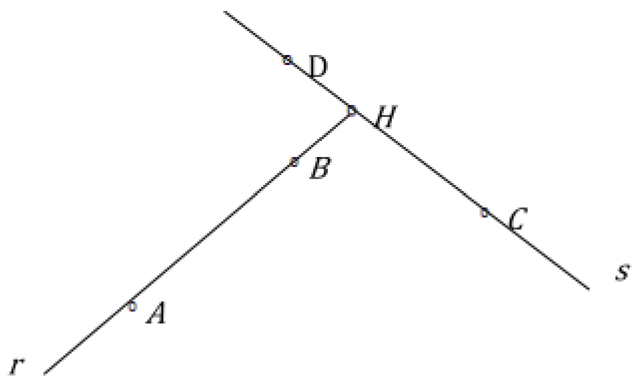

Fig. 34

Tenendo conto della nota 9 l'insieme completo con sostegno (A, B, C, D) è $[m\ A, n \cdot B, 1 \cdot C, -(m+n+1) \cdot D]$ (6,5)

L'insieme I, essendo completo, per il TH.11 deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m \cdot (-3) + n \cdot 2 + 1 \cdot 9 - (m+n+1) \cdot 4 = 0 \\ m \cdot (-1) + n \cdot 4 + 1 \cdot 2 - (m+n+1) \cdot 12 = 0 \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} m = 2 \\ n = -\frac{9}{2} \end{cases}$

Sostituendo m e n nella (6,5) e moltiplicando per 2, si ha:

I = $(4 \cdot A, -9 \cdot B, 2 \cdot C, 3 \cdot D)$.

Indicato con $-5 \cdot Z$ il complementare di $2 \cdot C$ e $3 \cdot D$, essendo $I' = (2 \cdot C, -5 \cdot Z, 3 \cdot D)$ un insieme completo, Z risulta allineato con C e D. PoichÈ anche:

$I'' = \text{rid.}[I \cup (-1) \cdot I'] = (4 \cdot A, -9 \cdot B, 5 \cdot Z)$ è un insieme completo, Z è allineato con A e B pertanto coincide con il punto di intersezione H di r e s. Posto H = (x,y), dalle condizioni di completezza di I' (oppure I'') si ha:

$$\begin{cases} 2 \cdot 9 - 5 \cdot x + 3 \cdot 4 = 0 \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot y + 3 \cdot 12 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

Applicazione 23 Le coordinate dei vertici di un quadrilatero Q(A, B, C, D) sono A = (– 6 ,0), B = (2, – 4), C = (14, 0), D = (2, 4). La retta t, passante per A, interseca in M e in N la r e la s, rette passanti, rispettivamente, per D e C e per B,C.

Sapendo che $\frac{d(M,A)}{d(A,N)} = 2$, trovare le coordinate di M e N.

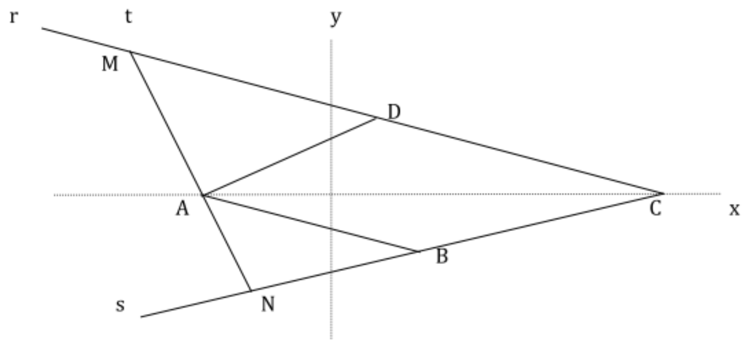

Fig. 35

Gli insiemi completi con sostegno (C,D,M), (C,B,N), (M,A,N) sono:

I_1 = [M, – (1 + m) D, m C], I_2 = [N, – (1 + n) B, n C],

I_3 = [M, – 3 A, 2 N)

Effettuando le seguenti operazioni: $I_1 \cup (2\ I_2) \cup [\ (-1)\ I_3\ ]$, si ha:

I = ([3 A, –2 (1 + n)B, (m +2 n) C – (1 + m)D]

Essendo I un insieme completo devono risultare soddisfatte le condizioni del TH. 11:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-6) - 2 \cdot (1+\mathrm{n}) \cdot 2 + (\mathrm{m} + 2\,\mathrm{n}) \cdot 14 - (1+\mathrm{m}) \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 0 - 2 \cdot (1+\mathrm{n}) \cdot (-4) + (\mathrm{m} + 2\mathrm{n}) \cdot 0 - (1+\mathrm{m}) \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\mathrm{n} = \frac{1}{4} \quad , \quad \mathrm{m} = \frac{3}{2}$$

Sostituendo n e m in I_1, moltiplicando le masse per 2, si ottiene l'equivalente di I_1:

I_1' = (2 M, – 5 D, 3 C).

Per le condizioni di completezza di un insieme ternario, posto M = (x,y) , si ha : $\begin{cases} 2 \cdot \mathrm{x} - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 14 = 0 \\ 2 \cdot \mathrm{y} - 5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 0 \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} \mathrm{x} = -16 \\ \mathrm{y} = 10 \end{cases}$ e quindi M = (– 16 , 10)

Procedendo in modo analogo , sostituendo n = $\frac{1}{4}$ in I_2 si ottiene: N = (– 1, – 5)

Bibliografia

Francia F. (1985). Insiemi di punti materiali. In *Archimede* N.1, Le Monnier.

Francia F. (2019). *Insiemi completi del terzo ordine*. In *Periodico di Matematica*, Vol. I (1-2).

****

Non si può capire il mondo fisico senza la matematica

«Se siamo interessati alla natura fondamentale del mondo fisico, o del mondo in generale, l'unico strumento a nostra disposizione è oggi il ragionamento matematico. Non credo quindi che si possano apprezzare pienamente (in verità, non credo neppure che si possano apprezzare granché) questi aspetti del mondo – il carattere di universalità delle leggi, le relazioni tra le cose – se non si capisce la matematica. Che io sappia, non c'è altra via; non abbiamo un modo per descrivere accuratamente questi aspetti o per cogliere le interrelazioni senza matematica».

(Richard Feyman, *Il piacere di scoprire*, Milano: Adelphi, 2020, p. 33)

****