Periodico di Matematica (IV) Vol. II (2) dicembre 2020, pp. 171-182

Funzioni $\mathfrak{I}$-monotone e loro applicazioni alla didattica dell'Analisi Matematica

Antonio Maturo* Pierpaolo Palka**

* Mathesis Abruzzo; via Pianacci 24, Montesilvano, e_mail antomato75@gmail.com
** Dipartimento di Ingegneria; Viale Pindaro 29, Pescara, e_mail p.palka@unich.it

Sunto. *Si introduce il nuovo concetto di funzione $\mathfrak{I}$-monotona. Vengono enunciati alcuni teoremi su tali funzioni. Infine, la teoria svolta viene utilizzata per fornire un nuovo itinerario didattico per presentare la teoria dei limiti di funzioni.*

Parole chiave: *Funzioni $\mathfrak{I}$-monotone. Limiti di funzioni. Continuità.*

Abstract. *The new concept of $\mathfrak{I}$--monotone function is introduced. Some theorems on these functions are stated. Finally, the developed theory is used to provide a new didactic itinerary to present the theory of limits of functions.*

Keywords: *$\mathfrak{I}$--monotone functions. Limits of functions. Continuous functions.*

1 - Introduzione

Un problema comune ai docenti degli ultimi anni delle Scuole Medie Superiori e a quelli del primo anno di Università è la necessità di introdurre in maniera efficace il concetto di limite e mostrare come da esso dipende la comprensione degli altri concetti di Analisi Matematica.

La pratica didattica mostra come le varie definizioni di limite, anche quando sono apprese e ripetute correttamente dagli studenti, appaiono loro come qualcosa di "estraneo" rispetto al loro modo di intendere la Matematica
Alcuni dei difetti principali delle definizioni usuali sono
(a) *la non costruttività*. Le definizioni non forniscono un criterio per individuare il limite di una funzione. Esse forniscono semplicemente un modo, piuttosto difficoltoso, per verificare che un certo elemento ℓ, trovato non si sa come, è il limite. È significativo il fatto che spesso gli studenti le chiamano "le dimostrazioni del limite".
(b) *la staticità*. Le definizioni non fanno capire il ruolo della variabile x e della funzione f(x): esse sono statiche e non dinamiche, in quanto non si vede bene come varia f(x) per x che tende a x_0.
(c) *la difficoltà di visualizzazione*. Le usuali rappresentazioni geometriche del concetto spesso inducono gli studenti a dare interpretazioni particolari. La conseguenza è che non viene compreso l'aspetto generale. Spesso il concetto di limite viene banalizzato. Ad esempio, sono molto frequenti certe dannose rappresentazioni che fanno sembrare che il limite deve essere necessariamente $f(x_0)$ a meno di strane pignolerie da parte dell'insegnante.
(d) *la mancanza di generalità.* In genere, invece di dare una sola definizione di limite, se ne danno tante di tipo particolare. Ciò porta non solo ad un aumento del numero di definizioni ma anche a far perdere di vista l'essenza del concetto.
(e) *la non applicabilità a tutte le funzioni.* Le funzioni appaiono divise in due classi, quelle *privilegiate* che hanno il limite e quelle *non rilevanti* che sono prive di limite.

Le difficoltà presenti nella definizione di limite si riflettono, poi, sul concetto di funzione continua.
In alcuni lavori del nostro gruppo di ricerca (Maturo, Varone, 1994, 1995) sono stati messi in evidenza alcuni errori presenti nei testi scolastici nel presentare la definizione di funzione continua ed è stato dimostrato che la classe delle funzioni soddisfacenti alle definizioni date in tali testi è molto diversa da quella delle funzioni continue.
Negli ultimi anni, tenuto conto delle notevoli proprietà delle funzioni monotone sia per quanto riguarda i loro limiti che le loro proprietà di continuità, abbiamo sperimentato, nel primo anno dei corsi di laurea in Architettura, un itinerario per presentare il concetto di limite in passi successivi, iniziando dalle funzioni numeriche monotone di variabile reale per finire con le funzioni fra spazi topologici.
I risultati emersi agli esami sono stati soddisfacenti. Infatti, la circostanza di partire da definizioni più pratiche, ma non meno generali di quelle classiche, ha permesso di ottenere una assimilazione dei concetti visibilmente superiore da parte degli studenti.

2 - Funzioni ℑ-Monotone e loro Limiti

Si propone il seguente itinerario di lavoro:

1. si definiscono dapprima l'insieme $R^\wedge = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, gli estremi inferiore e superiore dei suoi sottoinsiemi ed il concetto di punto di accumulazione. Si chiamano *numeriche* le funzioni a valori in R^;
2. si definiscono i limiti destro e sinistro per le funzioni monotone definite in sottoinsiemi di R^;

3. si generalizzano e si unificano le precedenti definizioni introducendo il nuovo concetto di funzione numerica $\Im$-monotona e quello di limite di tale funzione;
4. si danno le definizioni di limite minimo, limite massimo e limite per le funzioni numeriche definite in spazi metrici;
5. si estendono, per quanto possibile, le definizioni date a funzioni fra spazi topologici.

Nella pratica didattica è opportuno trattare prima il caso particolare delle funzioni monotone definite in sottoinsiemi di R^ perché tali funzioni possono essere rappresentate graficamente in maniera efficace e senza dar luogo a false interpretazioni.
In questo lavoro, sia per brevità sia per limitarci a presentare concetti nuovi, ci occuperemo del caso più generale delle funzioni numeriche $\Im$-monotone che definiamo prima in riferimento agli spazi metrici e successivamente per gli spazi topologici.
Sia (S, d) uno spazio metrico e siano f una funzione numerica definita in un sottoinsieme X di S e x_0 un punto di accumulazione per X. Indichiamo con $\Im$ la famiglia dei cerchi di centro x_0.

Definizione 2.1 Diciamo che la funzione f è *$\Im$-crescente* in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I-\{x_0\}) \cap X,\ d(x_1, x_0) < d(x_2, x_0) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \qquad (2.1)$$

Intuitivamente, se x, diverso da x_0, si avvicina a x_0, la f(x) cresce, non necessariamente in senso stretto.
È facile verificare la seguente

Proposizione 2.2 Se la funzione f è $\Im$-crescente in x_0, allora, per ogni coppia I_1 e I_2 di intorni di x_0 soddisfacenti la (2.1), si ha:

$$\sup f((I_1-\{x_0\})\cap X) = \sup f((I_2-\{x_0\})\cap X). \qquad (2.2)$$

Tenuto conto della proposizione 2.2 si può dare la seguente

Definizione 2.3 Sia f una funzione $\mathfrak{I}$-crescente in x_0 e sia I un intorno di x_0 soddisfacente la (2.1). Diciamo *limite monotono* della f in x_0 il numero

$$lm(f, x_0) = \sup f((I-\{x_0\})\cap X). \qquad (2.3)$$

Definizione 2.4 Diciamo che la funzione f è *$\mathfrak{I}$-decrescente* in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I-\{x_0\})\cap X,\ d(x_1, x_0) < d(x_2, x_0) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \qquad (2.4)$$

Intuitivamente, se x, diverso da x_0, si avvicina a x_0, la f(x) decresce. È facile verificare la seguente

Proposizione 2.5 Se la funzione f è $\mathfrak{I}$-decrescente in x_0, allora, per ogni coppia I_1 e I_2 di intorni di x_0 soddisfacenti la (2.3) si ha che

$$\inf f((I_1-\{x_0\})\cap X) = \inf f((I_2-\{x_0\})\cap X). \qquad (2.5)$$

Tenuto conto della proposizione 2.5 diamo la seguente

Definizione 2.6 Sia f una funzione $\mathfrak{I}$-decrescente in x_0 e sia I un intorno di x_0 soddisfacente la (2.3). Diciamo *limite monotono* della f in x_0 il numero

$$lm(f, x_0) = \inf f((I-\{x_0\})\cap X). \qquad (2.6)$$

Definizione 2.7 Una funzione f si dice *$\mathfrak{I}$-monotona* in x_0 se è $\mathfrak{I}$-crescente o $\mathfrak{I}$-decrescente in x_0.

Si possono dimostrare facilmente i seguenti

Teorema 2.8 (*Della restrizione*) Sia f una funzione $\mathfrak{I}$-monotona in x_0 e sia f_Y la restrizione di f ad un sottoinsieme Y di X avente x_0 come punto di accumulazione. Allora anche f_Y è $\mathfrak{I}$-monotona in x_0 e risulta

$$lm(f, x_0) = lm(f_Y, x_0). \qquad (2.7)$$

Teorema 2.9 Siano f, definita in un insieme X, e g, definita in un insieme Y, due funzioni $\mathfrak{I}$-monotone in x_0 e sia $Z=\{x\in X\cap Y: f(x)=g(x)\}$. Se x_0 è di accumulazione per Z allora

$$lm(f, x_0) = lm(g, x_0). \qquad (2.8).$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui S = R^. Se f(x) è una funzione definita in R, strettamente crescente e limitata, si pone

$$f(-\infty) = \inf f(R) \text{ e } f(+\infty) = \sup f(R).$$

Ponendo, per ogni x, y $\in$R^, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ si ottiene una metrica in R^. Un esempio si ottiene ponendo f(x) = arctg x, un altro ponendo $f(x) = x/(1+x^2)^{1/2}$.
Ogni funzione monotona definita in un insieme X che ha x_0 come punto di accumulazione e come estremo inferiore o superiore è una funzione $\mathfrak{I}$-monotona rispetto alla famiglia dei cerchi di centro x_0.
Se l'insieme X, di definizione della funzione f, è tale che x_0 è di accumulazione sia per $X_s = X\cap(-\infty, x_0)$ che per $X_d = X\cap (x_0, +\infty)$ allora la f è $\mathfrak{I}$-monotona, rispetto ai cerchi di centro x_0, se assume valori uguali in punti equidistanti da x_0, rispetto alla metrica d.
In generale, se sono monotone la restrizione f_s della f ad X_s e quella, f_d, a X_d ed x_0 è di accumulazione sia per X_s che per X_d, sono definiti i

limiti $lm(f_s, x_0)$ e $lm(f_d, x_0)$ e si dicono, rispettivamente, *limite sinistro e destro* della f in x_0.

3 - Limiti di Funzioni Numeriche

Sia (S, d) uno spazio metrico e sia f una funzione numerica definita in un insieme X contenuto in S.

Per ogni $x \in X$ indichiamo con C_x il cerchio chiuso di centro x_0 e raggio uguale a $d(x, x_0)$ e poniamo $D_x = C_x \cap (X - \{x_0\})$.

Definizione 3.1 Diciamo *estremo inferiore monotono* di f la funzione $\alpha(x) = \inf f(D_x)$ e diciamo *estremo superiore monotono* di f la funzione $\beta(x) = \sup f(D_x)$.

Dalla definizione precedente segue il

Teorema 3.2 Per ogni $x \in X$ si ha

(a) $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$;

(b) $\alpha(x)$ è $\mathfrak{I}$-crescente in x_0;

(c) $\beta(x)$ è $\mathfrak{I}$-decrescente in x_0;

(d) $lm(\alpha, x_0) \leq lm(\beta, x_0)$.

In base al teorema precedente possiamo dare la

Definizione 3.3 Diciamo *minimo limite* della f(x) per x che tende ad x_0 il numero

$$\min \lim(f, x_0) = lm(\alpha, x_0) \tag{3.1}$$

diciamo *massimo limite* della f(x) per x che tende ad x_0 il numero

$$\max \lim(f, x_0) = lm(\beta, x_0) \tag{3.2}$$

Se $\min \lim(f, x_0) = \max \lim(f, x_0)$ tale valore comune, indicato con $\lim(f, x_0)$ si dice *limite* della funzione f(x) per x che tende ad x_0.

Si possono facilmente dimostrare i seguenti
Teorema 3.4 Se la f è $\mathfrak{I}$-monotona in x_0 allora esiste lim(f, x_0) ed è uguale a lm(f, x_0).

Teorema 3.5 (*Limiti di una restrizione*) Sia Y un sottoinsieme di X avente x_0 come punto di accumulazione e siano f_Y, α_Y e β_Y, rispettivamente, le restrizioni di f, α e β ad Y.
Allora α_Y e β_Y sono, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore monotono di f_Y e risulta

(a) $\forall x \in Y$, $\alpha(x) \leq \alpha_Y(x) \leq f_Y(x) \leq \beta_Y(x) \leq \beta(x)$;

(b) min lim (f, x_0) $\leq$ min lim (f_Y, x_0) $\leq$ max lim (f_Y, x_0) $\leq$ max lim (f, x_0).

In particolare, se esiste lim (f, x_0) allora esiste anche lim (f_Y, x_0) ed i due limiti sono uguali.

Un'applicazione immediata dei teoremi precedenti si ha per S=R^ ed f funzione monotona tale che x_0 è di accumulazione sia per $X_s = X \cap (-\infty, x_0)$ che per $X_d = X \cap (x_0, +\infty)$. Supponiamo, per fissare le idee, che la f sia crescente. In maniera analoga si ragiona se essa è decrescente. Il minimo limite della f in x_0 è lm(f_s, x_0), limite sinistro della f in x_0, il massimo limite è lm(f_d, x_0), limite destro della f in x_0. Se tali limiti sono uguali il valore comune è il limite della f in x_0.
Chiamiamo *intorno* di un insieme A qualunque insieme I che contiene un aperto contenente A. In seguito, indichiamo con Δ(A) la famiglia degli intorni di un insieme A.
A partire dalle definizioni date si può dimostrare facilmente il seguente

Teorema 3.6 Risulta l_1 = min lim (f, x_0) e l_2 = max lim (f, x_0) se e solo se valgono le seguenti proprietà

(P1) $\forall I \in \Delta([l_1, l_2]), \exists\, J \in \Delta(x_0): x \in (J-\{x_0\}) \cap X \Rightarrow f(x) \in I$;

(P2) $\forall a \in (l_1, l_2), \forall J \in \Delta(x_0), \exists x_1, x_2 \in (J-\{x_0\}) \cap X: f(x_1) < a < f(x_2)$.

Dal teorema precedente segue il

Teorema 3.7 Risulta $\boldsymbol{\ell}$ = lim (f, x_0) se e solo se vale la seguente proprietà

$$\forall I \in \Delta(\boldsymbol{\ell}), \exists\, J \in \Delta(x_0): x \in (J-\{x_0\}) \cap X \Rightarrow f(x) \in I. \qquad (3.3)$$

La (3.3) è una formula che ha significato anche per funzioni non numeriche. Allora dal teorema 3.7 siamo indotti a dare la seguente *definizione generale di limite*.

Definizione 3.8 Siano S e T due spazi topologici, $X \subseteq S$, $Y \subseteq T$, sia x_0 un punto di accumulazione per X e sia f una funzione di X in Y. Diciamo che f(x) ha limite $\boldsymbol{\ell}$ per x che tende a x_0 se è verificata la (3.3).

Con l'itinerario considerato la definizione generale di limite è un punto di arrivo. Nel frattempo, gli studenti hanno assimilato tutti i più importanti aspetti relativi al concetto di limite per le funzioni numeriche e sono pronti ad assimilare eventuali generalizzazioni.
Nella Scuola Media Superiore la definizione 3.8 può evidentemente essere omessa. Nell'Università essa è comunque un importante completamento della teoria svolta e permette di trovare facilmente risultati molto generali (cfr. ad es. Maturo, 1986).
Nella Scuola Media Superiore, se si considerano solo funzioni ad una sola variabile si può anche evitare di introdurre il concetto di

spazio metrico. Penso, però, che si debba comunque introdurre R^ e operare tenendo presente (anche senza nominarla esplicitamente) la struttura di spazio metrico di R^. In particolare, è opportuno dare una definizione unica di limite minimo, limite massimo e limite sia se x_0 ed i limiti sono finiti sia se uno o più di essi sono infiniti.
Se x_0 è un punto di R si può utilizzare la metrica euclidea. Allora le funzioni $\mathfrak{I}$-monotone considerate sono simmetriche rispetto alla retta $x=x_0$.

4. Ulteriori Sviluppi della Teoria

Il concetto di funzione $\mathfrak{I}$-monotona si può estendere anche agli spazi topologici. Indichiamo, da ora in poi, con (S, ***A***) uno spazio topologico e con x_0 un punto di S. Introduciamo la seguente

Definizione 4.1 Diciamo che una famiglia $\mathfrak{I}$ di intorni di x_0 è una *base locale ordinata* per x_0 se si verificano le seguenti proprietà

(BO1) $\forall I\in\Delta(x_0), \exists J\in\mathfrak{I}: J \subseteq I$;

(BO2) $\forall I, J\in\mathfrak{I}, J \subseteq I$ o $I \subseteq J$.

Definizione 4.2 Siano f una funzione numerica definita in un sottoinsieme X di S e x_0 un punto di accumulazione per X. Sia $\mathfrak{I}$ una base locale ordinata per x_0.
Diciamo che la funzione f è *$\mathfrak{I}$-crescente* in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$\forall x_1,x_2\in(I-\{x_0\})\cap X, \forall A,B\in\mathfrak{I}, A\subset B, x_1\in A, x_2\in B-A \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$. (4.1)

Diciamo che f è *$\mathfrak{I}$-decrescente* in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$\forall x_1,x_2 \in (I-\{x_0\}) \cap X,\ \forall A,B \in \mathfrak{I},\ A \subset B,\ x_1 \in A, x_2 \in B-A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. (4.2)
Infine, diciamo che f è *$\mathfrak{I}$-monotona* in x_0 se essa è $\mathfrak{I}$-crescente o $\mathfrak{I}$-decrescente.

Le definizioni di funzione $\mathfrak{I}$-crescente o $\mathfrak{I}$-decrescente considerate nel paragrafo 2 si ottengono come casi particolari assumendo come base locale ordinata in x_0 la famiglia dei cerchi di centro x_0. Ripetendo, con le ovvie modifiche, la teoria svolta nel paragrafo 2 si definiscono i limiti per le funzioni $\mathfrak{I}$-monotone con $\mathfrak{I}$ base locale ordinata qualsiasi di x_0.
In particolare si possono estendere la proposizione 2.2 e la definizione 2.3 e si può osservare che il limite monotono l(f, x0) non varia al variare dell'intorno I e della base locale ordinata $\mathfrak{I}$ soddisfacenti la condizione (4.1) o (4.2).
Si può infine estendere al caso in cui S è uno spazio topologico ed $\mathfrak{I}$ una base locale ordinata di x0 anche la teoria svolta nel paragrafo 3.

Bibliografia

Maturo Antonio (1986). *Spazi topologici, limiti e funzioni continue*, Pescara: Libreria dell'Università.

Maturo Antonio, Varone Giuseppina (1994). *I concetti intuitivi di analisi matematica presenti sui testi scolastici: fino a che punto si identificano con quelli rigorosi*? Il caso delle funzioni continue, in Atti del Convegno N.R.D. "FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE: come perchè quando, con quali strumenti insegnare l'Analisi nei diversi ordini di scuola", Siena, 10-12 Marzo 1994, pp.101-106.

Maturo Antonio, Varone Giuseppina (1995). Su una particolare classe di funzioni numeriche: le funzioni pseudo-continue. In «*Periodico di matematiche*», 1, 1995, pp.11-22.

Maturo Antonio (2020). Una analisi critica sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica. In *Dall'intuizione ai concetti: metodologie per elaborare percorsi didattici e modelli matematici*, Collana "Quaderni APAV", n. 5, pp. 81-92.

****

La fisica quantistica: mappa e non territorio

> *Non c'è un mondo quantistico. C'è solo un'astratta descrizione quantistica. È sbagliato pensare che il compito della fisica sia descrivere come la Natura è. La fisica si occupa solo di quanto possiamo dire della Natura.*

Niels Bohr, conferenza tenuta nel 1927 a Como e pubblicata in Niels Bohr, *The Quantum Postulate and the Recent Development of Tomic Theory*, «Nature», 121, 1928, pp. 580-590.

****