Franco Eugeni - Bruno Rizzi

Su alcune generalizzazioni dei numeri perfetti

1. *Introduzione*

E' ben noto come dai Pitagorici in avanti i numeri perfetti siano stati oggetto di osservazioni, studio, congetture. Nell'antichità si partì dalla osservazione che i numeri 6 e 28 sono eguali alla somma delle loro parti aliquote, ossia alla somma dei loro divisori inferiori al numero stesso. Risulta cioè:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

anzi la divisione tramandataci da Nicomaco (I sec. d. C.) e Teone di Smirne (III sec. d. C.) è più fine, nel senso che dividevano i numeri in *mancanti, perfetti, abbondanti* a seconda che la somma delle parti aliquote è minore, eguale o maggiore del numero stesso — così 8 è un numero mancante, 12 è un numero abbondante, risulta cioè:

$$8 > 1 + 2 + 4 \qquad 12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$$

Non si sa se esistono numeri perfetti dispari a parte il fatto che, come ha dimostrato Catalan, se ne esistono devono avere almeno 45 cifre. Abbiamo accennato ai numeri perfetti pari, questi come hanno dimostrato Euclide (III sec. a. C.) ed Eulero (1707 - 1783), sono tutti della forma

$$E_p = 2^{p-1} \quad (2^p - 1)$$

essendo p e $2^p - 1$ numeri primi.

Non si sa attualmente se i numeri perfetti pari sono in numero finito o infinito, dipendendo ciò dalla caratterizzazione dei numeri primi di Mersenne (1588 - 1648):

$$2^p - 1.$$

Si può ben dire che lo studio di questi numeri ha condotto ad importanti risultati relativamente alla conoscenza concreta di numeri primi via via più grandi. Così ad esempio negli anni 50 il più grande numero primo conosciuto era $2^{127} - 1$, oggi $2^{44497} - 1$, numero formato da ben 13395 cifre.

Le enormi difficoltà incontrate nello studio dei numeri perfetti hanno fatto sì che i matematici affrontassero problemi che presentano varianti e analogie con gli stessi.

Così alla fine del secolo scorso sono nati i numeri perfetti di 2ª specie che presentano la variante di considerare il prodotto, anzichè la somma, delle parti aliquote.

Nel nostro lavoro abbiamo ottenuto nuovi risultati su generalizzazioni dei numeri perfetti di 2ª specie.

2. *Definizioni e risultati*

Come si legge (1) nel Dickson, E. Lionnet (1879) chiama: *numeri perfetti di 2ª specie quei naturali n, più grandi di uno ($n \in N_2$), che sono uguali al prodotto dei divisori inferiori* (cioè diversi da n stesso) di n.

In simboli se $p(n)$ denota il prodotto di *tutti* i divisori di n, risulta se n è perfetto di 2ª specie:

$$p(n) = n^2 \tag{2.1}$$

(ad es. se $n = 8$ poichè i divisori di 8 sono 1, 2 ,4, 8 il loro

(1) Cfr [2] pag. 58

prodotto è 64 perciò 8 è un numero perfetto di 2ª specie).

Sarà utile nel seguito dedurre (1) una espressione della funzione aritmetica $p(n)$.

Se f è una qualsiasi funzione *incondizionatamente additiva*, i. a. (2) e se $\nu(n)$ indica il numero dei divisori di n funzione che come è noto quando $n = \prod_{1}^{r}{}_i p_i^{\alpha_i}$ si esprime tramite la

$$\nu(n) = \prod_{1}^{r}{}_i (1 + \alpha_i) \tag{2.2}$$

vale (3) *l'identità di Pellegrino* (caratteristica per le funzioni incondizionatamente additive):

$$\sum_{d|n} f(d) = \frac{1}{2} \nu(n) f(n) \tag{2.3}$$

Dalla identità (2.3) posto $f(n) = \log n^k$ $(k \in N_1)$ si ha:

$$\sum_{d|n} \log d^k = \log \prod_{d|n} d^k = \log \quad n^{k\,\nu(n)/2}$$

da cui detto $p_k(n)$ il prodotto delle potenze *k-me* dei divisori di n si ottiene (4):

---

(1) Una espressione si trova in Cipolla [1] che la deduce da considerazioni sul cosiddetto *fattoriale integrale* dicendo che è una formula nota, ma senza citarne le « introvabili » fonti.

(2) Una funzione aritmetica è *i. a.* se $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ Cfr. ad es. B. Rizzi [4].

(3) Cfr. F. Pellegrino [3]. si tratta di una comunicazione ad un congresso U.M.I. del 1951 ove la formula è data senza dimostrazione

(4) Si noti che come facilmente si prova $n^{k\,\nu(n)/2}$ è sempre intero, poichè se uno almeno degli esponenti di un primo che divide n è un dispari $\nu(n)$ è pari. Altrimenti se tutti gli esponenti dei primi che dividono n sono pari, n è un quadrato (perfetto).

$$p_k\ (n) = \prod_{d|n} d^k = n^{k\,\nu\,(n)/2} \tag{2.4}$$

che per $k = 1$, posto $p_1 = p$ fornisce l'espressione richiesta.

Diamo la seguente dimostrazione del:

Teorema (2.1) (*di Lionnet*): *I numeri perfetti* di 2ª specie *sono tutti e soli i cubi di un numero primo e i numeri secondi* (prodotto di due primi distinti).

Dim. Si vede direttamente che se $n = p^3$ oppure $n = p_1\, p_2$ vale la (2.1).
Inversamente se $n \in N_2$ soddisfa la (2.1) riesce per la (2.4):

$$p(n) = n^{\nu\,(n)/2} = n^2$$

e quindi i numeri perfetti di 2ª specie sono tutti e soli quelli per cui:

$$\nu\ (n) = 4.$$

Ora se $n = \prod_{1}^{r}{}_i\, p_i^{\alpha_i}$ deve essere per la (2.2)

$$\prod_{1}^{r}{}_i\ (1 + \alpha_i) = 1.4 = 2.2$$

Dunque si può avere che $r = 1$ con $1 + \alpha = 4$, $\alpha = 3$ oppure $r = 2$ con $1 + \alpha_1 = 1 + \alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e quindi è $n = p^3$ ovvero $n = p_1\, p_2$ *C.V.D.*
Una prima generalizzazione potrebbe nascere chiamando *amicabili di 2ª specie una eventuale coppia* (m, n) *di naturali tra loro distinti, maggiori, di uno, tali che il prodotto dei divisori inferiori dell'uno eguaglia l'altro.*

Tuttavia questa definizione è una definzione vuota, in quanto come proveremo *siffatti numeri non esistono*. Premettiamo il

Lemma: Condizione necessaria a che m, $n \in N_2$, $m \neq n$,

siano amicabili di 2ª specie è che m e n abbiano gli stessi fattori primi.

Dim. La definizione degli « eventuali » numeri amicabili di 2ª specie si traduce in formule nella:

$$p(n) = p(m) = m \cdot n$$

ovvero per la (2.4) nella:

$$m^{\nu(m)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

Essendo $m, n \in N_2$ è $\nu(m) \geq 2$, $\nu(n) \geq 2$, segue che se $p|m$ allora necessariamente $p|n$ ed inversamente. *C.D.V.*

Dimostriamo poi il:

Teorema (2.2): *Non esistono numeri amicabili di 2ª specie.*

Dim: Siano $m, n \in N_2$ con $m \neq n$ due eventuali numeri tra loro amicabili di 2ª specie. Posto

$$n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i} \quad , \quad m = \prod_1^r p_i^{\beta_i} \quad , \quad \text{segue:}$$

$$m^{\nu(n)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

da cui si deducono le identità:

$$\prod_1^r p_i^{\alpha_i \nu(n)/2} = \prod_1^r p_i^{\beta_i \nu(n)/2}$$

$$\alpha_i \nu(m) = \beta_i \nu(n) = 2(\alpha_i + \beta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

Posto, come è usuale (1), $\Omega(n) = \sum_1^r \alpha_i$, e som-

(1) La funzione $\Omega(n)$ è una funzione incondizionatamente additiva (cfr. [4]) che esprime il numero dei fattori distinti e no di n.

mando le precedenti si deduce, l'identità:

$$(*)\ \Omega\ (m)\ \nu\ (m) = \Omega\ (n)\ \nu\ (n) = 2\ \Omega\ (m \cdot n)$$

per la coppia (m, n). Mostriamo che tale relazione non può sussistere per alcuna coppia di numeri. Ad esempio scrivendo:

$$\begin{cases} \Omega\ (m)\ \nu\ (n) = 2\ \Omega\ (n) + 2\ \Omega\ (m) \\ \Omega\ (n)\ \nu\ (n) = 2\ \Omega\ (n) + 2\ \Omega\ (m) \end{cases}$$

si ricava:

$$(\nu\ (m) - 2)\ \Omega\ (m) = 2\ \Omega\ (n)$$

$$(\nu\ (n) - 2)\ \Omega\ (n) = 2\ \Omega\ (m)$$

da cui:

$$(\nu\ (m) - 2)\ (\nu\ (n) - 2) = 4.$$

Da questa ultima, necessariamente vera se m, n soddisfano la ipotesi iniziale, si deducono le due alternative:

$$\begin{cases} \nu\ (n) = 4 \\ \nu\ (m) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu\ (m) = 6 \\ \nu\ (n) = 3 \end{cases}$$

Nel primo caso per il Lemma premesso n ed m sono o entrambi il cubo di un primo o entrambi un numero secondo e quindi tra loro eguali contro l'ipotesi.

Nel secondo caso da $\nu\ (n) = 3$ si deduce $n = p^4$ e quindi sempre per il Lemma: $m = p^\alpha$ con $\alpha + 1 = 6$.

Ma come si prova direttamente p^4 e p^7 non possono essere amicabili di 2ª specie. C.V.D.

Non è possibile dunque per il teorema provato con-

siderare l'insieme degli amicabil di 2ª specie essendo questi *vuoto*.

In questo contesto si può anche inquadrare un vecchio problema posto (1) da Paul Halcke (1719):

Determinare i numeri naturali $n \in N_2 - \mathscr{P}$ *per i quali esistano* $q, m \in N_1$ *tali che il prodotto dei divisori di* n *che non superano* n *sia* m^q.

Il problema per via della (2.4) si traduce nella:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = m^q \qquad (2.5)$$

Il problema di Halcke è completamente risolto dal seguente teorema che non ci risulta noto:

Teorema (2.3): *Fissato comunque* $n \in N_2 - \mathscr{P}$, *con* $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$, *la relazione* (2.5) *è soddisfatta da tutte e sole le coppie* (q, m) *tali che:*

$$q \mid \alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, r \qquad (2.6)$$

e con m *avente gli stessi fattori primi di* n, *cioè del tipo:*

$$m = \prod_1^r p_i^{\beta_i}$$ *e con gli esponenti dati dalle:*

$$\beta_i = \frac{1}{q} \cdot \alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) \qquad (2.7)$$

Dim. Ogni coppia (q, m) soddisfacente le (2.6) e (2.7) soddisfa (2.5).

---

(1) [2] pag. 158. Se $n = 1$, o $n \in \mathscr{P}$ si hanno casi così banali e non significativi che è opportuno escludere dal problema generale.

Inversamente se (m, q) è una coppia soddisfacente la (2.5) e cioè tale che:

$$n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = \prod_{1}^{r}{}_i \, p_i^{\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2}-1\right)} = m^q$$

per essere $\nu(n) \neq 2m$ ha necessariamente gli stessi fattori primi di n e posto $m = \prod_{1}^{r}{}_i \, p_i^{\beta_i}$ risulta:

$$\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) = \beta_i \, q \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

e quindi le (2.6) con gli esponenti β_i di m dati dalle (2.7). C.V.D.

Un caso particolare del *problema di Halcke* è quello dei numeri (1) che chiameremo q-perfetti di 2ª specie.

Chiamiamo così *quei naturali* $n \in N_2$ *tali che il prodotto dei divisori inferiori eguaglia il prodotto di* k *numeri eguali ad* n. In simboli:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = n^q \tag{2.8}$$

ovvero:

$$p(n) = n^{q+1} \tag{2.9}$$

---

(1) Un naturale n si dice *q-perfetto di 1ª specie* quando la somma dei divisori di n, inferiori ad n, eguaglia la somma di q naturali eguali ad n. In simboli $\sigma(n) = (q+1)\, n$. Per $q = 1$ si hanno i perfetti di 1ª specie.

Si tratta dunque del problema di Halcke, per $m = n$. Da notare che per $q = 1$ si ritrova la definizione dei numeri perfetti di 2ª specie. Il teorema (2.3) si specializza nel seguente:

Teorema (2.4): *Fissato comunque* $n \in N_2 - \mathscr{P}$, C.N.E.S. *a che* n *sia* q-perfetto *è che sia:*

$$\nu(n) = 2(q + 1) \tag{2.10}$$

Dim. Segue subito dalla dimostrazione del teorema precedente ripetuta in questo caso, osservando che la relazione:

$$\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1 \right) = \beta_i q$$

per essere $\alpha_i = \beta_i$ e per il fatto che $\frac{\nu(n)}{2} - 1$ non è in generale un intero si scrive:

$$\nu(n) - 2 = 2q.$$

Vogliamo ora pervenire, fissato q, ad una costruzione dei numeri q-perfetti. Il problema è quello di trovare tutti gli $n = \prod_1^r{}_i \, p_i^{\alpha_i}$ tali che:

$$\nu(n) = \prod_1^r{}_i \, p_i^{\alpha_i} = 2(q + 1)$$

Siano: $m_1, m_2, \ldots, m_k$ un qualsiasi sistema *completo* di k divisori di $2(q + 1)$, cioè tali che $\prod_1^k{}_i \, m_i = 2(q + 1)$ e sia $1 \leqq k \leqq \Omega(2(q + 1))$. Gli interi n aventi k fattori primi arbitrari $p_1, \ldots, p_k$ sono q-perfetti se e solo se gli

esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ degli stessi sono dati dalle relazioni:

$$\alpha_i = m_i - 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

al variare, in tutti i modi possibili, del sistema completo di k divisori.

Così ad esempio se $q + 1 = p \in \mathscr{P}$ si hanno i numeri del tipo p_1^{α} e $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ essendo $k=1, 2$ con $\alpha=2(q + 1)$, e $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2_q + 1 = p\text{-}1$ e cioè i numeri del tipo $p_1^{2(q+1)}$, $p_1 p_2^{2q+1}$ con p_1 e p_2 arbitrari sono tutti e soli i numeri q-perfetti quando $q+1$ è primo.

BIBLIOGRAFIA

1 M. CIPOLLA — *Sui principi del calcolo artimetico-integrale.* Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali, serie 5°, vol. VIII, Catania, 1915

2 L. E. DICKSON — *History of the theory of numbers* vol. I, Chelsea, New Work, (1971).

3 F. PELLEGRINO — *Sviluppi moderni del calcolo numerico-integrale di Michele Cipolla.* Atti IV Congresso U.M.I., Taormina, 1951.

4 B. RIZZI — *L'albero e il traliccio degli interi.* Periodico di Matematiche; serie V, vol. 49, 1973.