Ratio Mathematica 10
(1996), 3 - 8

UN PROBLEMA DI MINIMO PER IL NASTRO DI MÖBIUS

Franco Eugeni*, Fulvio Zuanni**

SUNTO - Un nastro di Möbius si costruisce a partire da una striscia di carta rettangolare di lato "corto" h e lato "lungo" L. Fissato h si pone il problema di trovare il minimo di L. Sperimentalmente si puo' intuire che tale valore minimo e' $L_{min} = h\sqrt{3}$, ma il dimostrarlo non e' banale ed accosta l'allievo a problematiche che presentano i tre aspetti di analisi sperimentale, formulazione del modello e risoluzione logico-deduttiva.

UN MODELLO MATERIALE DI NASTRO DI MÖBIUS

Il nastro di Möbius e' un ben noto esempio di superficie ad una sola faccia. La costruzione classica del nastro di Möbius e' ben nota. Prendiamo una striscia di carta rettangolare EKE'K' di lati h=5cm e L=30cm.

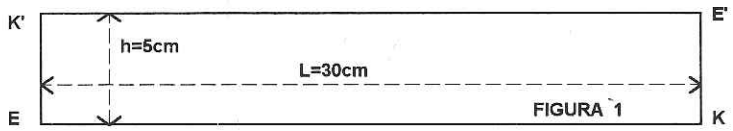

FIGURA 1

Si puo' piegare la carta in modo da formare un cilindro facendo coincidere E con K e K' con E'. Se invece si congiungono le due estremita' dopo averne rovesciata una, facendo coincidere E con E' e K con K', si ottiene un nastro di Möbius. Sperimentalmente, si puo' ripetere la costruzione accorciando L. Cio' si puo' fare agevolmente fino a circa L=3h. Con molta difficolta' si riesce a farlo ancora quando L=2h, mentre sembra impossibile con L=h.

* Facolta' di Ingegneria - Terza Universita' di Roma
** Facolta' di Ingegneria - Universita' de L'Aquila

Ricordiamo un modo semplice di costruire il modello materiale di nastro di Möbius che ci sara' utile per la risoluzione del problema.
Prendiamo ancora una striscia di carta di altezza data h e lunghezza L "sufficientemente" grande. Pieghiamo ($\alpha_1>0$) la striscia lungo il segmento AB come in figura 2. E' immediato convincersi che non si perde di generalita' imponendo che sia $\alpha_1<\pi/2$.

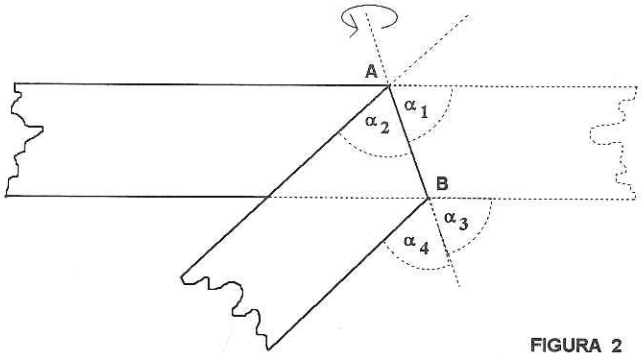

FIGURA 2

Gli angoli α_1 e α_2 sono tra loro congruenti per effetto del "piegamento". Inoltre gli angoli α_1 e α_2 sono congruenti rispettivamente agli angoli α_3 e α_4 perche' corrispondenti.
Quindi, possiamo porre $\alpha:=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$ con $0<\alpha<\pi/2$.
Ora, pieghiamo ($\beta_1>0$) la striscia lungo il segmento CD come in figura 3. Gli angoli β_1 e β_2 sono tra loro congruenti per effetto del "piegamento". Quindi, possiamo porre $\beta:=\beta_1=\beta_2$.

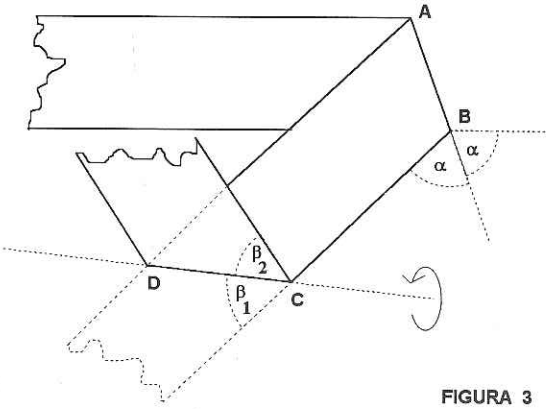

FIGURA 3

E' immediato rendersi conto che, affinche' quest'ultimo pezzo di striscia si sovrapponga a quello iniziale, deve essere $\beta_1<\pi/2$ e $(2\alpha+\beta_1+\beta_2)=(2\alpha+2\beta)>\pi$ da cui $(\pi/2-\alpha)<\beta<\pi/2$.

A questo punto, tagliamo i due pezzi sovrapposti della striscia lungo il segmento EF, come in figura 4, ed uniamo i lembi così ottenuti.

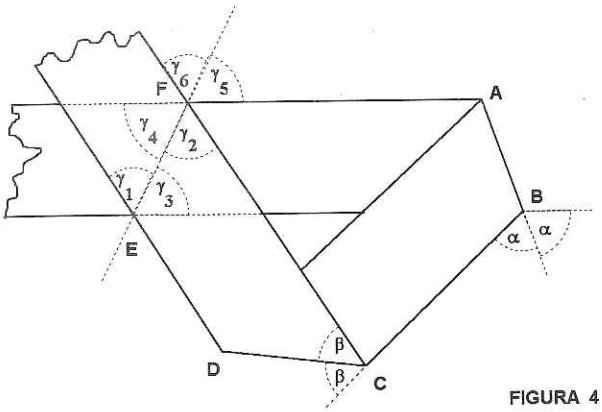

FIGURA 4

Con considerazioni analoghe alle precedenti si vede che $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=\gamma_5=\gamma_6$.
Quindi, possiamo porre $\gamma:=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=\gamma_5=\gamma_6$.
Inoltre, si vede subito (figura 5) che $(2\alpha+2\beta+2\gamma)=2\pi$, da cui

$$\gamma = (\pi - \alpha - \beta) \tag{1}$$

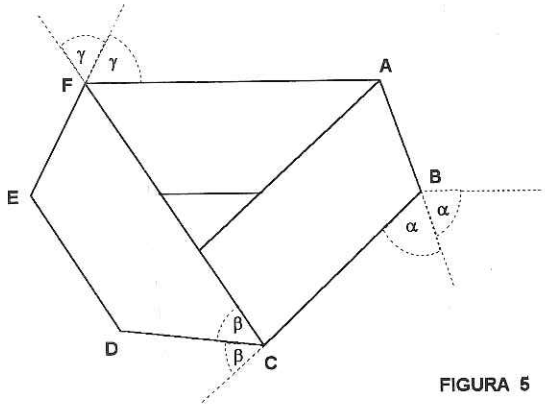

FIGURA 5

Il modello di nastro così costruito puo' essere "svolto" nello spazio tridimensionale "staccando" (letteralmente) i triangoli sovrapposti relativi ai lati AB, CD ed EF ottenendo la classica superficie ad una sola faccia che tutti conoscono. Se facciamo scorrere una penna, senza mai sollevarla, su tale oggetto riusciamo a tornare al punto di partenza e riusciamo a segnare tutto il nastro.

SULLA LUNGHEZZA DEL NASTRO DI MÖBIUS

Nel costruire il modello precedente, di altezza h data, abbiamo inizialmente richiesto che la striscia fosse "sufficientemente" lunga, cioe' si e' supposto L>>h. In effetti, se utilizzassimo una striscia molto "corta", ad esempio con h ed L quasi uguali, ci accorgeremmo di non essere capaci di effettuare tale costruzione. Sorge spontaneo, quindi, il problema di stabilire quale debba essere, fissato h, il valore minimo di L, ovvero la lunghezza minima della striscia di carta, per poter ottenere l'indicato modello materiale di nastro di Möbius.

Un primo modo di "accorciare" la striscia e' quello di far coincidere B con C (o, equivalentemente, D con E o A con F) come in figura 6.

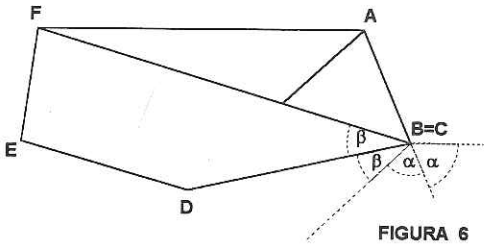

FIGURA 6

Questo e' sempre possibile, mentre ci si acorge subito che, in generale, non si riesce a soddisfare a tutte e tre le condizioni contemporaneamente.
Inoltre, si noti che deve essere:

$$2\alpha + \beta \leq 2\pi \qquad (2)$$

$$\alpha + 2\beta \leq 2\pi \qquad (3)$$

in caso contrario i punti E ed F apparterrebbero ad uno stesso lato della striscia iniziale e la costruzione descritta non sarebbe possibile.

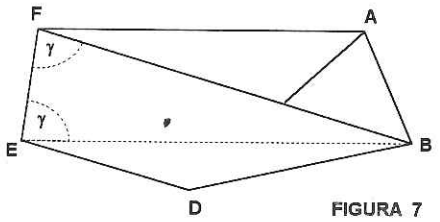

FIGURA 7

Dalla figura 7 si osserva che BF=BE in quanto il triangolo EBF e' isoscele sulla base EF.

Indicata con K (figura 8) la proiezione di E su BF, abbiamo che BK=BF-FK.

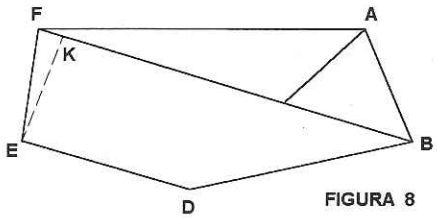

FIGURA 8

Calcoliamo, ora, la lunghezza della striscia. Per farlo, tagliamo la striscia lungo il segmento EK. Svolgendola su di un piano otteniamo un rettangolo come in figura 9. **Si noti che** al segmento FK' della figura 9 corrisponde il segmento FK della figura 8, per cui BK=BF-FK'.

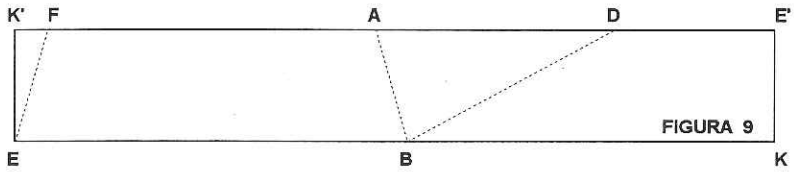

FIGURA 9

Indicata, come in figura 10, con H la proiezione di F su BE abbiamo, che FK'=HE da cui BH = BE-HE = BF-FK' = BK.

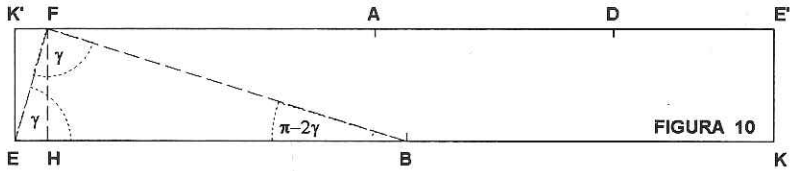

FIGURA 10

Quindi, la lunghezza della striscia e' L = HE + BH + BK = HE + 2BH.
Dalla figura si vede subito che FH = HE tanγ e FH = BH tan(π-2γ).
Da ben note formule di trigonometria si ha che

$$\tan(\pi - 2\gamma) = -\tan(2\gamma) = -\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\tan\gamma}{\tan^2\gamma - 1}$$

Per cui, si ha $HE = \dfrac{h}{\tan\gamma}$ e $2BH = h\dfrac{\tan^2\gamma - 1}{\tan\gamma} = h\tan\gamma - \dfrac{h}{\tan\gamma}$.

Quindi, la lunghezza della striscia EKE'K' (figure 9 e 10) e' data da

$$L = h\tan\gamma \qquad (4)$$

UN PROBLEMA "NATURALE" DI MINIMO

Per minimizzare la lunghezza L appena trovata dobbiamo, evidentemente (poiche' la tangente e' crescente), minimizzare l'ampiezza dell'angolo γ. Tenendo conto di **(1)**, **(2)** e **(3)** si ha

$$2\alpha+\beta\le\pi\Rightarrow\alpha\le\pi-\alpha-\beta\Rightarrow\alpha\le\gamma$$
$$\alpha+2\beta\le\pi\Rightarrow\beta\le\pi-\alpha-\beta\Rightarrow\beta\le\gamma$$
$$\gamma=\pi-\alpha-\beta\Rightarrow2\gamma=2\pi-2\alpha-2\beta\Rightarrow2\alpha+2\beta-\pi=\pi-2\gamma$$
$$2\alpha+\beta\le\pi\Rightarrow2\alpha+2\beta-\pi\le\beta\Rightarrow\pi-2\gamma\le\beta$$
$$\alpha+2\beta\le\pi\Rightarrow2\alpha+2\beta-\pi\le\alpha\Rightarrow\pi-2\gamma\le\alpha$$

Quindi, possiamo scrivere

$$(\pi-2\gamma)\le\alpha\le\gamma \qquad (5)$$

$$(\pi-2\gamma)\le\beta\le\gamma \qquad (6)$$

Per (5) e (6) deve essere $(\pi-2\gamma)\le\gamma$, cioe' $\gamma\ge\pi/3$. Quindi, la lunghezza minima si ottiene con $\gamma=\pi/3$ e, tenendo conto di (4), e'

$$L_{min}=h\sqrt{3}$$

In particolare, se $\gamma=\pi/3$ allora da **(5)** e **(6)** si ha $\alpha=\pi/3$ e $\beta=\pi/3$. Dunque il nastro di lunghezza minima si "ottiene" a partire da un triangolo equilatero.

Si noti che l'ultima relazione rappresenta piu' un estremo inferiore che un minimo per il modello materiale nel momento in cui si richieda "l'assioma intuitivo" di distacco dei triangoli sovrapposti altresì detto "possibilita' di svolgere il nastro nello spazio". In altre parole, il modello minimizzato "rimane schiacciato nel piano".

BIBLIOGRAFIA

1. CARL B.BOYER, *Storia della Matematica*, Oscar Mondadori, 1994.
2. H.B.GRIFFITHS, *Möbius Bands and the Didactics of joy* - a German Philosophy, Mathematics in School (1981), 14-18.
3. H. ZEITLER, *My story about the Moebius bands or How to discover mathematics in a joyful way*, Atti del Convegno Internazionale "Cultura Matematica e Insegnamento" nel decimo anniversario della scomparsa di Luigi Campedelli, Firenze 30 - 31 maggio e 1 giugno 1988, 49-67.