

V. E. BONONCINI

dell' Università di Bologna

A. FORLANI

dell' Istituto Tecnico Industriale
Aldini - Valeriani di Bologna

TRIGONOMETRIA

PER I LICEI SCIENTIFICI

CARLO SIGNORELLI - EDITORE - MILANO

VIA CARLO BOTTA, 16

PREFAZIONE

La geometria, nella meravigliosa perfezione a cui seppero portarla i Greci, scopre le proprietà più recondite delle figure che entrano nell'ambito della sua indagine, ma quando si tratta di dare una misura a queste figure o a qualche loro parte (lunghezza di un segmento, area di una superficie, ecc.) essa offre soltanto procedimenti grafici che per la loro natura non possono dare di queste misure che un valore approssimato e l'approssimazione è tale da risultare insufficiente nella maggior parte dei casi della pratica.

Per supplire a questa deficienza si introdussero, già sul finire dell'età romana, alcuni enti che oggi si chiamano funzioni trigonometriche o goniometriche o circolari. Col progredire delle scienze si accrebbero i problemi per la cui risoluzione si faceva ricorso a tali enti e così per rendere più facile il loro uso venne modificata e generalizzata la primitiva definizione. Le nuove definizioni non si sostituirono a quella iniziale, ma ad essa si aggiunsero rimanendo legate al gruppo di problemi che le avevano originate e il risultato fu che si faceva appello a una piuttosto che a un'altra delle definizioni a seconda che tornava più comodo.

Con l'affermarsi della geometria analitica è stato possibile raccogliere le diverse definizioni in un'unica generale.

Nella nostra esposizione ci siamo tenuti per l'appunto a quest'ultima definizione. Delle altre ne abbiamo conservate due perchè particolarmente utili, specie una, in molte questioni; abbiamo però mostrato l'intima connessione di queste con la definizione generale facendo vedere come da questa esse si possono dedurre. Per questo nel primo capitolo abbiamo esposto i primi elementi della geometria analitica, limitandoci allo stretto necessario.

La disposizione della materia è stata fatta raggruppando in uno stesso capitolo proprietà, applicazioni e problemi affini. Ad esempio le equazioni trigonometriche, con relative applicazioni geometriche, le abbiamo trattate tutte insieme in un unico capitolo. L'esame dell'indice, d'altronde, dà un'idea chiara dei criteri seguiti nella suddetta disposizione.

Abbiamo seguito un'esposizione logica e rigorosa il più possibile, come del resto si conviene a una buona trattazione matematica, tenuto conto anche del carattere e degli scopi che l'insegnamento della matematica si prefigge in questo tipo di scuola. Nello stesso tempo si è cercato di presentare gli argomenti in forma piana e semplice, chiarendo e illustrando i concetti più importanti con opportuni esempi atti a metterne in luce tutta la loro portata.

Il volume è poi corredato da una vasta raccolta di esercizi proposti, per la maggior parte ormai classici e in parte coi risultati.

Ringraziamo vivamente la Casa Editrice Carlo Signorelli che ha realizzato la pubblicazione di questo volume in una accuratissima edizione.

GLI AUTORI

Bologna, marzo 1964

I N D I C E

<i>PREFAZIONE</i>	Pag. 3
-----------------------------	--------

CAPITOLO PRIMO

Ascisse sulla retta - Coordinate cartesiane nel piano

1. Geometria elementare e geometria analitica	Pag. 5
2. Rette e segmenti orientati	» 6
3. Misura algebrica dei segmenti	» 6
4. Identità di CHASLES	» 7
5. Coordinate ascisse sulla retta	» 7
6. Distanza di due punti	» 9
7. Punto che divide un segmento in un dato rapporto	» 9
8. Coordinate cartesiane nel piano	» 10
9. Coordinate di punti situati in particolari posizioni rispetto agli assi	» 11
10. Distanza di due punti	» 14
11. Punto che divide un segmento in un dato rapporto	» 15
12. Il concetto di funzione. Rappresentazione grafica di una funzione	» 16
13. Alcuni esempi di diagrammi cartesiani	» 19

CAPITOLO SECONDO

Misura degli angoli e degli archi di una circonferenza

1. Misura degli angoli	Pag. 30
2. Misura degli archi	» 31
3. Una proprietà dell'ampiezza di un arco. Lunghezza di un arco	» 32
4. Il sistema circolare di misurazione	» 34
5. Passaggio da un sistema di misura ad un altro	» 35
6. Passaggio dal sistema sessagesimale al circolare e viceversa	» 35
7. Alcune applicazioni	» 36
8. Misura algebrica degli archi	» 38
9. Generalizzazione del concetto di arco	» 39
10. Misura algebrica degli angoli	» 40
11. Generalizzazione del concetto di angolo	» 40

CAPITOLO TERZO

Definizione e prime proprietà delle funzioni trigonometriche

1. Scopo della trigonometria	Pag. 42
2. Prima definizione delle funzioni trigonometriche	» 43
3. Seconda definizione delle funzioni trigonometriche	» 46
4. La circonferenza trigonometrica. Modificazione della definizione di funzioni trigonometriche	» 47
5. Periodicità delle funzioni trigonometriche	» 49
6. Valore delle funzioni trigonometriche e di alcuni archi particolari	» 49
7. Variazione delle funzioni trigonometriche e loro diagrammi . .	» 52
8. Relazioni tra le funzioni trigonometriche di archi legati da particolari relazioni	» 61
9. Riduzione di un arco al primo giro	» 66
10. Riduzione di un arco al primo quadrante	» 67
11. Cenno sulle tavole trigonometriche e logaritmico-trigonometriche	» 71
12. Le relazioni fondamentali tra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco	» 73
13. Considerazioni sulle relazioni fondamentali	» 73
14. Espressione delle funzioni trigonometriche per mezzo di una di esse	» 74
15. Identità trigonometriche	» 78

CAPITOLO QUARTO

Prime applicazioni della teoria delle funzioni trigonometriche alla geometria

1. Generalità e premesse	Pag. 82
2. Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo	» 83
3. Alcune applicazioni	» 83
4. Teorema dei seni (o di EULERO)	» 88
5. Considerazioni sul teorema dei seni	» 90
6. Il teorema delle proiezioni	» 91
7. Considerazioni sul teorema delle proiezioni	» 92
8. Il teorema del coseno (o di CARNOT)	» 93
9. Considerazioni sul teorema di CARNOT	» 95
10. Applicazioni e complementi	» 96

CAPITOLO QUINTO

Le formule fondamentali delle funzioni trigonometriche

1. Le formule di addizione e di sottrazione	Pag. 103
2. Le formule di duplicazione	» 108
3. Le formule di bisezione	» 112
4. Le formule di WERNER e di prostaferesi	» 115
5. Applicazioni e complementi	» 119

CAPITOLO SESTO

**Altre applicazioni della teoria delle funzioni trigonometriche
alla geometria**

1. Sulle condizioni di esistenza di un triangolo	Pag. 123
2. Le formule di BRIGGS	» 124
3. Le formule di NEPERO	» 126
4. Le formule di DELAMBRE	» 130
5. Varie forme dell'area di un triangolo	» 132
6. Raggi dei cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti a un dato triangolo	» 133
7. Lunghezza delle bisettrici di un triangolo	» 135
8. Area di un quadrangolo convesso	» 136
9. Modi per rendere una espressione calcolabile con i logaritmi	» 139
10. Risoluzioni delle equazioni di secondo grado mediante i logaritmi	» 145

CAPITOLO SETTIMO

Risoluzione dei triangoli

1. Generalità e osservazioni	Pag. 151
2. Risoluzione dei triangoli rettangoli	» 152
3. Risoluzione dei triangoli qualunque	» 156
4. Alcuni casi di risoluzione di triangoli per i quali gli elementi dati non sono tutti lati e angoli	» 173
5. Cenno sulla risoluzione dei poligoni convessi	» 179

CAPITOLO OTTAVO

Equazioni trigonometriche - Sistemi di equazioni trigonometriche

1. Definizione	Pag. 182
2. Equazioni elementari	» 182
3. Equazioni della forma $\text{sen}(ax + b) = \text{sen}(cx + d)$, ecc.	» 186
4. Equazioni della forma $\text{sen}(ax + b) = c$, ecc.	» 190
5. Equazioni algebriche in $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tg } x$, $\text{ctg } x$	» 192
6. Equazioni della forma $a \cos^2 x + b \text{sen } x + c = 0$, $a \text{sen}^2 x + b \cos x + c = 0$	» 195
7. Equazione omogenea di secondo grado in $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$, equazione omogenea di secondo grado in $\text{sen}^2 x$ e $\text{cos}^2 x$ ed equazioni ad esse riducibili	» 197
8. Equazioni lineari in $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$	» 200
9. Equazioni lineari in $\text{tg } x$ e $\text{ctg } x$	» 205
10. Equazioni varie	» 206
11. Cenno sui sistemi di equazioni trigonometriche	» 209

CAPITOLO NONO

Disequazioni trigonometriche - Discussione di equazioni e di sistemi

1. Disequazioni fondamentali	Pag. 215
2. Disequazioni della forma $\text{sen}(ax + b) \leq c$, $\text{cos}(ax + b) \geq c$, $\text{tg}(ax + b) \geq c$	» 222
3. Disequazioni varie	» 224
4. Risoluzione e discussione di equazioni	» 230
5. Discussione di alcuni problemi	» 247

ESERCIZI

CAPITOLO PRIMO	Pag. 257
CAPITOLO SECONDO	» 268
CAPITOLO TERZO	» 276
CAPITOLO QUARTO	» 289
CAPITOLO QUINTO	» 310
CAPITOLO SESTO	» 326
CAPITOLO SETTIMO	» 332
CAPITOLO OTTAVO	» 337
CAPITOLO NONO	» 360

TESTI CONSULTATI PER GLI ESERCIZI

- A. BASSI - *Esercizi e problemi di algebra complementare*. 2^a edizione; 2 volumi. R. Giusti, Editore, Livorno (1918).
- A. BASSI - *Problemi di matematica elementare*. Vol. I. R. Giusti, Editore, Livorno (1926).
- TH. CARONNET - *Exercices de trigonométrie*. 4^e édition. Librairie Vuibert, Paris (1950).
- F. G. M. - *Esercizi di trigonometria piana tradotti dal francese da R. D. M.* 3 volumi. Casa Editrice A. e C., Torino-Roma-Milano (1951).
- G. MOREL - *Problèmes de Baccalauréat*. Tome I e II. Librairie Vuibert. Paris (1951-1953).
- G. PESCI - *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica*. 5^a edizione. R. Giusti, Editore, Livorno (1921).
- G. A. SERRET - *Trattato di trigonometria piana e sferica*. 9^a edizione tradotta dalla 7^a edizione francese da F. Grassi. Casa Editrice G. B. Petrini, Torino.
- H. VUIBERT - *Problèmes de Baccalauréat*. 15^a édition. Librairie Vuibert, Paris.
- Journal de Mathématiques élémentaires* (dal 1952 al 1959). Librairie Vuibert, Paris.