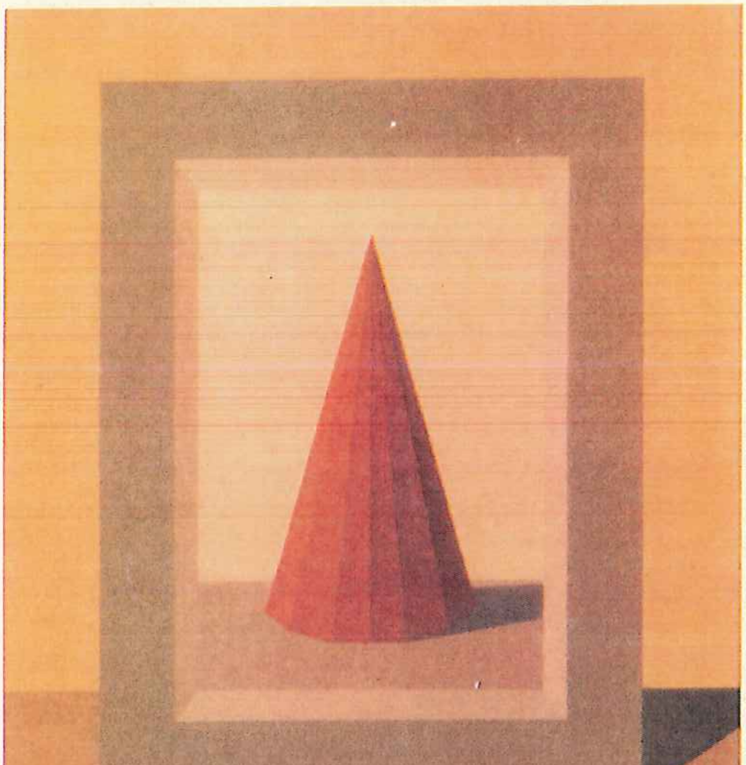
Federigo Enriques
Ugo Amaldi

Elementi di geometria



COLLEZIONE BIBLIOTECA
Edizioni Studio Tesi

Federigo Enriques
Ugo Amaldi

Elementi di geometria

Edizioni Studio Tesi

Federigo Enriques e il ruolo dell'intuizione nella geometria e nel suo insegnamento

Di questo famosissimo manuale scolastico, scritto da uno dei più grandi matematici italiani contemporanei, Federigo Enriques, in collaborazione con un altro eminente matematico della scuola romana, Ugo Amaldi, esistono innumerevoli versioni ed edizioni che punteggiano i primi cinquant'anni del secolo. Sarebbe impossibile elencarle tutte. Moltissime edizioni della versione degli *Elementi di geometria* rivolta alle scuole secondarie superiori furono pubblicate fra il 1903 e gli anni Cinquanta. Altre versioni dello stesso testo furono preparate in funzione dei programmi e delle esigenze delle scuole e degli istituti tecnici e di altri ordini di scuole oggi scomparsi, come le Scuole normali e le Scuole complementari. Infine, vanno ricordate, per la evidente parentela di impostazione, le *Nozioni di geometria,* dovute agli stessi autori, rivolte alle scuole di avviamento al lavoro e di avviamento professionale e agli istituti magistrali inferiori.

Gli *Elementi di Geometria* di Enriques e Amaldi hanno rappresentato quindi un'operazione didattica, culturale ed editoriale di enorme successo che testimonia, in particolare, l'interesse che gli autori nutrivano per i problemi dell'insegnamento della matematica e della creazione di una solida formazione scientifica di massa in un paese che aveva una tradizione così debole su questo piano. Si tratta pertanto di un'opera che riveste un duplice interesse: sul piano storico, perché rappresenta un prodotto culturale e pedagogico di successo dovuto a due fra i maggiori scienziati italiani moderni, dei quali esprime in modo evidente la visione scientifica e culturale; sul piano didattico, perché nonostante sia passato molto tempo e i programmi delle scuole italiane siano cambiati — poco, tuttavia, e non in modo culturalmente rilevante — essa rappresenta ancora un valido e interessante punto di riferimento per la ricerca didattica volta a individuare i modi migliori per introdurre le nozioni di base della geometria.

Soffermiamoci su questi due aspetti e in modo particolare sulla figura di Federigo Enriques.

Può apparire estenuante e noioso ritornare sul tema delle "due culture" per imbastire lamenti apparentemente infondati — in tempi in cui i saperi scientifico-tecnici appaiono come i dominatori della nostra vita quotidiana — per lo scarso conto in cui viene tenuta la cultura scientifica. Eppure, il caso di Enriques, ovvero l'immagine che la cultura italiana ha della sua opera e del suo pensiero, è un esempio clamoroso di quanto in Italia la cultura scientifica sia ancora qualcosa di profondamente debole. Parliamo, si badi bene, di *cultura scientifica* e non di cultura tecnica, oppure del più povero e fuorviante surrogato della cultura scientifica: e cioè una divulgazione sensazionalista, acritica e superficiale delle scoperte della scienza. Mentre in altri paesi i grandi scienziati che non si limitarono a una visione ristretta e grettamente tecnicistica della loro attività sono ricordati e considerati come "uomini di cultura", lo stesso non accade ancora da noi. Federigo Enriques — a parte la memoria degli "adetti ai lavori" — è ricordato essenzialmente come un matematico che tentò una curiosa quanto avventata "sortita" sul terreno filosofico e rientrò precipitosamente alla "base" in seguito alla cocente sconfitta che gli venne inflitta dai filosofi neoidealisti e *in primis* da Benedetto Croce. E se le menti più aperte si spingono a interpretare questo episodio come la testimonianza di una gretta chiusura della cultura italiana del primo Novecento nei confronti dei temi della scienza, quasi nessuno manca di sottolineare il carattere velleitario di quella "sortita", le debolezze e la mancanza di rigore di Enriques sul piano filosofico, e quindi l'inevitabilità della sconfitta. Il che è sostanzialmente vero ma diventa per lo più un alibi per dimenticare completamente il contenuto specifico del contributo culturale di Enriques. Si è dimenticato che Enriques fu un pensatore di grande respiro e di acutissima intelligenza che esplorò non soltanto tutti i temi della cultura scientifica e filosofica della sua epoca ma si spinse a riflettere anche sul tema dei rapporti fra la scienza ed esperienze umane anche apparentemente lontanissime, come quelle artistiche o religiose. E proprio l'audacia e la disinvoltura con cui egli non arretrò di fronte all'analisi di connessioni che una cultura paludata guardava con sufficienza sono alla radice dei difetti (una certa superficialità e un certo azzardo nelle conclusioni), ma anche delle qualità e della modernità del suo pensiero. In un periodo in cui le interrelazioni fra conoscenza scientifica e le tante altre forme di conoscenza sono viste in modo più "laico" e aperto, il pensiero di Federigo Enriques dovrebbe suscitare un'attenzione e un interesse assai maggiori di quanto gliene siano concessi. È espressione di un pervicace provincialismo culturale (questo sì estenuante) e di una perdurante ostilità nei confronti della cultura di provenienza scientifica considerare come ovvio che un vasto pubblico non possa trovare interessante il rileggere tante pagine di un pensatore come Enriques e altrettanto ovvio che esso desideri leggere avidamente pagine intere di quotidiano che ripropongono i taccuini di Croce, nel quadro della "riscoperta" della modernità del suo pensiero.

Torneremo fra poco sulle ragioni dell'interesse attuale per molte delle visioni di Enriques, o almeno dei temi da lui sollevati. Iniziamo però col dare qualche cenno biografico[1]. Prima però è necessario aprire una parentesi per spiegare i motivi per cui la nostra attenzione, in relazione al manuale che viene qui presentato, è rivolta soprattutto al pensiero di Enriques. Questa speciale attenzione non vuole difatti sminuire l'importanza del contributo di Amaldi, che è fuori discussione: tuttavia, l'impronta concettuale e l'impostazione data al testo sono altrettanto indiscutibilmente dovuti a Enriques. D'altra parte, Ugo Amaldi ebbe il ruolo importante di essere un fedele e accorto interprete della visione scientifica della scuola matematica romana del primo Novecento: e tale funzione egli esercitò in varie occasioni, come nella cura che egli pose alla riedizione delle magistrali *Lezioni di meccanica razionale* di un altro grande matematico romano, Tullio Levi-Civita.

Ugo Amaldi nacque a Verona nel 1875 e studiò a Bologna dove ebbe come maestri lo stesso Enriques, Cesare Arzelà e Salvatore Pincherle. Nel 1903 conseguì la cattedra di algebra e geometria algebrica presso l'Università di Cagliari. Si trasferì presso l'Università di Modena nel 1906, quindi presso l'Università di Padova, dove restò dal 1919 al 1924. Infine, nel 1924, fu chiamato presso la facoltà di scienze dell'Università di Roma dove restò fino alla morte, avvenuta nel 1957. Amaldi si dedicò soprattutto all'analisi matematica ma aveva un non comune cultura algebrico-geometrica e, di fatto, fu uno dei massimi specialisti italiani nel campo della teoria dei gruppi continui di trasformazioni. La sua collaborazione con Enriques fu intensa e non riguardò soltanto i manuali che qui ci interessano, ma anche le famose *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Date le caratteristiche del modo di lavorare di Enriques — che illustreremo fra poco — e in particolare la sua ostilità nei confronti del lavoro metodico e ordinato, la redazione dei manuali scolastici di geometria fu dovuta soprattutto alla sua penna. Ma, come ci ricordano le biografie, il ruolo di Enriques nella definizione dell'impostazione generale, del metodo, della stesura, dei contenuti, e persino nella "dettatura" del testo, fu dominante.

Veniamo ora a qualche cenno biografico su Enriques.

Federigo Enriques nacque a Livorno il 5 Gennaio 1871 e frequentò le scuole secondarie a Pisa manifestando subito il suo interesse per la matematica che fu tuttavia provocato, come egli stesso ebbe a dire significativamente, non tanto da un'interesse specifico quanto da «un'infezione filosofica liceale». Ebbe come maestri universitari grandi matematici come Betti, Dini, Bianchi, Volterra e De Paolis e, laureatosi brillantemente nel 1891, dopo un anno di perfezionamento a Pisa venne a Roma nel novembre del 1892, per seguire il corso di Luigi Cremona. Qui ebbe inizio la profonda amicizia con un altro grande matematico, Guido Castelnuovo. Divenne professore ordinario presso l'Università di Bologna nel 1896 e trascorse in quella città ventotto anni, fino al 1922: un periodo tra i più felici e produttivi della sua vita, in cui videro la luce i suoi contributi più elevati ed importanti sul terreno matematico e filosofico. Fu durante questo soggiorno a Bologna che egli divenne presidente della Società filosofica italiana (dal 1907 al 1913); in tale veste organizzò e presiedette il IV Congresso internazionale di filosofia che si tenne in questa città nel 1911 e che fu teatro della famosa controversia con Croce.

Nel 1922 fu chiamato presso l'Università di Roma, dove fondò l'Istituto nazionale per la storia delle scienze, fu direttore del «Periodico di matematiche» rivolto agli insegnanti delle scuole secondarie, e presidente della Società italiana di scienze fisiche e matematiche «Mathesis». È impossibile dare qui un elenco anche incompleto delle onorificenze nazionali ed estere che gli vennero attribuite.

Dal 1938 al 1944 fu sospeso dall'insegnamento per le leggi razziali antiebraiche. Nel 1944 gli fu restituita la cattedra universitaria. Morì per un'affezione cardiaca il 14 giugno 1946.

Un brano famoso e spesso citato, in cui Guido Castelnuovo racconta i primi incontri con Enriques, descrive con grande efficacia la sua mentalità, il grande ruolo che egli attribuiva all'intuizione nello studio dei problemi scientifici, sino a forme di vero e proprio fastidio per lo studio metodico e pedante:

> Stavo per suggerirgli la lettura di libri e memorie, ma mi accorsi subito che non sarebbe stata questa la via più conveniente. Federigo Enriques era un mediocre lettore. Nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava. Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica. Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'Enriques si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superfici algebriche secondo l'indirizzo italiano[2].

Castelnuovo allude qui a quell'insieme di ricerche che, nell'arco di pochi anni, posero le basi della moderna geometria algebrica e che, per la profondità dei risultati e l'originalità del metodo, diedero fama mondiale alla scuola italiana di geometria. Il ricorso sistematico all'intuizione come strumento non soltanto di scoperta ma spesso anche di dimostrazione, fu rimproverato alla scuola italiana, in quanto fonte non soltanto di geniali intuizioni ma anche di scarsa attendibilità dei risultati conseguiti, se non addirittura di errori. È ben vero che Enriques attribuiva all'intuizione nella dimostrazione un ruolo forse eccessivo. Ricorda il suo allievo Fabio Conforto che, nel corso di una passeggiata in cui il Conforto contestava la validità di un suo risultato, egli si arrestò e, mostrando con la canna da passeggio un cagnolino affacciato a una finestra, esclamò: «Lei vede quel cane? Ebbene io "vedo" allo stesso modo la verità del mio teorema».

L'opera di Enriques (e di Castelnuovo) si presenta così come una congerie vastissima di risultati che l'analisi successiva, ispirata dai procedimenti di rigore logico della scuola assiomatica, ha riesaminato, sceverando tante intuizioni geniali da un numero non irrilevante di errori. Il movimento assiomatico in matematica ha avuto un merito indiscutibile: quello di mostrare il valore dell'adesione alle regole della logica formale, come garanzia della verità dei risultati (una prassi che il matematico francese Jean Dieudonné ha addirittura qualificato come espressione di «probità scientifica»). Tuttavia, oggi si è meno disposti ad aderire alle granitiche certezze del movimento assiomatico e si è riscoperto non soltanto il ruolo dell'intuizione nella scoperta matematica, ma anche che i procedimenti del matematico non possono essere ridotti a una applicazione automatica delle regole della logica formale e soprattutto che molti di questi procedimenti poggiano su principi irriducibili alla logica formale: in questo clima mutato, le visioni epistemologiche di Enriques rivelano un'inaspettata vitalità e un nuovo interesse. Infatti, per Enriques, il ricorso all'intuizione non era soltanto un "modo di pensare" qualsiasi, ma era espressione di una visione ben definita del processo della scoperta scientifica e quindi di una filosofia della scienza e, in particolare, della matematica. Questa visione connetteva strettamente la forma dei procedimenti logici con il processo storico reale con cui la conoscenza scientifica si era venuta formando.

Nel presentare un suo trattato, Enriques faceva un'osservazione che riveste un'importanza speciale anche nella considerazione degli *Elementi di geometria* che vengono qui riproposti:

> Il lettore che abbia seguito gli sviluppi di questo trattato — osservava Enriques — può averne ritratto l'impressione che l'autore abbia dato troppo posto ad esempi e casi particolari, lasciandosi in qualche modo guidare dal sentimento di curiosità del naturalista che raccoglie in un museo i più diversi tipi di animali, di piante e di minerali. Ma come il museo riesce a dare un'idea della ricchezza di forme della vita e conduce quindi a problemi generali della biologia, anche la raccolta di esempi, in questo campo delle matematiche, assume un significato essenziale sotto l'aspetto euristico o storico-costruttivo della scienza[3].

Su questa analogia fra lo spirito di classificazione naturale e la considerazione degli oggetti matematici insisteva anche Castelnuovo, nella sua commemorazione di Enriques, chiarendone bene i termini e il ruolo sul terreno specifico della ricerca matematica:

L'analogia porterebbe a pensare alla classificazione che fanno i naturalisti degli animali e delle piante, partendo dagli organismi più semplici. Ma perché la analogia tornasse, bisognerebbe immaginare un naturalista che, chiuso nel suo studio, indagasse, dal punto di vista teorico, quali tipi di organismi siano compatibili con le leggi della morfologia e della fisiologia, e poi ricercasse quali tra questi si incontrino effettivamente in natura[4].

In altri termini, il modo di procedere del matematico non si contrappone a quello delle altre scienze sperimentali ma se ne differenzia soltanto perché il procedimento mentale precede necessariamente la ricerca "sul campo": esso non può comunque fare a meno di un complesso di oggetti "concreti", se non vuol muoversi in un contesto vuoto e privo di significati e contenuti. E inoltre, la raccolta e l'analisi dei "materiali" è l'attività fondamentale che determina la forma storica della scienza matematica.

In una conferenza del 1928, Castelnuovo chiarì ulteriormente il metodo seguito da lui e da Enriques nelle loro ricerche geometriche:

Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superfici regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superfici dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a *divinare* alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superfici di ambedue le vetrine; mettevamo poi a *cimento* queste proprietà con la costruzione di nuovi *modelli*. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le famiglie di superficie[5].

Intuizione, logica e *storia* sono quindi, per Enriques, i tre aspetti fondamentali del pensiero matematico: aspetti che sarebbe sbagliato e fuorviante disgiungere e isolare l'uno dall'altro. È facile intuire che questa visione era parte di una concezione unitaria della conoscenza che tendeva a ricomporre e conciliare ogni contrapposizione e antinomia.

La passione per i temi della filosofia della scienza e della filosofia in senso generale fu una costante di tutta la vita di Enriques. Già nel 1906 egli pubblicò il suo più importante contributo a questo ordine di temi, il volume *Problemi della scienza*[6]; a esso ne seguirono altri[7] assieme a numerosissimi articoli pubblicati su riviste italiane ed estere.

Da quanto precede si comprende come, per Enriques, il modo in cui i concetti scientifici vengono acquisiti sul piano psicologico è almeno altrettanto importante della loro verifica formale: infatti, la struttura dei concetti scientifici è determinata dalla via psicologica attraverso cui essi sono stati conseguiti. Pertanto l'analisi della genesi psicologica dei concetti e delle teorie scientifiche è l'aspetto centrale della teoria della conoscenza. Muovendosi temerariamente contro la corrente montante dell'assiomatica e del logicismo, Enriques si spingeva fino al punto di attribuire un ruolo subordinato alla logica nel processo della conoscenza. Fra i vari procedimenti mentali — egli osservava — «se ne distinguono alcuni, in cui vengono volontariamente soddisfatte certe condizioni di coerenza, i quali si denominano appunto procedimenti logici. In questo senso la Logica può riguardarsi come una *parte* della Psicologia»[8]. E poiché i processi psicologici si manifestano nel tempo, un ruolo fondamentale ha, per Enriques, la *storia della scienza*, in quanto strumento di ricostruzione della genesi delle teorie scientifiche[9].

Si comprende facilmente come una siffatta visione psicologistica del processo dell'acquisizione della conoscenza scientifica fosse legato a una concezione fortemente *soggettivistica*. La scienza è, per Enriques, una costruzione essenzialmente soggettiva, in quanto espressione di un'attività psicologica e storicamente determinata del soggetto scientifico: fu cecità di Croce il non vedere quanto una visione siffatta avesse evidenti punti di contatto con un approccio di tipo idealistico. Una cecità forse giustificabile dal carattere eclettico, eterodosso e difficilmente catalogabile con cui Enriques presentava il suo punto di vista.

La critica che Enriques conduce contro l'oggettivismo della scienza classica è particolarmente vivace. La visione oggettivistica della scienza, contrapponendosi a ogni visione storica e psicologica del processo della conoscenza, è da lui vista come un elemento di divisione e frammentazione dell'attività generale del sapere. Per Enriques, l'ideale "antistorico" del riduzionismo fisico-matematico classico si basa su un oggettivismo dogmatico che nega ogni ruolo all' "attività dello spirito" e svaluta in modo ingiusto la funzione della metafisica. Per Enriques, la scienza ottocentesca — sotto l'influenza del positivismo — ha rifiutato i problemi posti dalla metafisica ed ha così manifestato una vera e propria forma di pusillanimità del pensiero. Nessun problema è "insolubile", ma vi sono soltanto problemi che non sono stati ancora formulati in modo corretto; né vi è una realtà "inconoscibile", bensì oggetti tutti accessibili alla conoscenza, sebbene essi si presentino disposti in una serie infinita che crea la falsa immagine di una realtà inconoscibile. Questa rivalutazione (sia pur parziale) della metafisica è uno dei tratti più singolari e audaci della visione di Enriques: egli non ne concepisce peraltro il ruolo in modo tradizionale, ritenendo la metafisica, da un lato, come un sistema di *rappresentazioni psicologiche* del processo genetico della scienza e, dall'altro, come un *sistema di immagini*, un *modello*, che può promuovere associazioni utili al progresso della scienza. La modernità di una siffatta visione è particolarmente evidente, ove si pensi che una parte consistente della modellizzazione matematica contemporanea, rinunciando all'obiettivo di una descrizione e di una previsione quantitativa esatta, si propone di determinare modelli spesso formulati in termini geometrici qualitativi di alcuni aspetti della realtà che permettano non tanto di *prevedere* quanto di *fornire immagini*, in breve di proporre *spiegazioni* e *interpretazioni* del significato dei fenomeni in esame. Ora, indipendentemente da ogni valutazione di tali tendenze, la connessione fra sistema metafisico e modello geometrico-intuitivo — «sistema di immagini» — presente nella concezione di Enriques, ne costituisce una sorprendente anticipazione.

L'elemento più interessante e vivo del soggettivismo di Enriques è rappresentato dal ponte che la sua visione getta fra la conoscenza scientifica e altre forme di sapere e di attività intellettuali e in particolare dell'analisi che egli conduce, da tale punto di vista, delle correlazioni fra i diversi settori della conoscenza scientifica. Così, egli sviluppa una critica (sia pure abbozzata) dei tentativi riduzionisti di estendere una concezione di tipo meccanicistico a settori della scienza diversi dalla fisica come la biologia, la fisiologia o la psicologia.

La concezione scientifico-filosofica di Enriques presenta una singolare miscela di atteggiamenti innovativi e atteggiamenti conservatori. Non c'è dubbio che la visione intuitiva della geometria e, più in generale, del processo della conoscenza matematica, affonda le sue radici in una tradizione ottocentesca e si contrappone alle nuove visioni allora emergenti, come l'assiomatica e il formalismo. D'altra parte, la concezione soggettivista lo porta a una severa critica della scienza fisico-matematica classica e a un apprezzamento delle nuove tendenze della fisica moderna, come la teoria della relatività e le teorie quantistiche. Soprattutto nella prima egli scorge l'emergere di una visione geometrica del cosmo che privilegia il punto di vista qualitativo e sintetico rispetto a quello quantitativo tradizionale[10].

È quasi superfluo sottolineare che l'audacia con cui Enriques gettava un ponte (e anzi una stretta connessione) fra epistemologia, psicologia e storia poneva le basi per una visione unitaria della teoria della conoscenza e, di conseguenza, per una visione unitaria dell'insegnamento. Il nucleo centrale unificante del processo di apprendimento doveva essere la filosofia: proprio il punto da cui era partito il percorso personale di Enriques verso la scienza e la matematica in particolare. Non deve quindi sorprendere che Enriques considerasse la riforma dell'insegnamento come uno strumento fondamentale per la realizzazione delle sue concezioni nel campo della teoria della conoscenza. Il progetto di riforma dell'Università formulato da Enriques[11] si opponeva a ogni visione tecnicistica o parcellizzata del sapere ed era coerente con la sua concezione generale: tutte le branche teoriche dovevano essere raggruppate a cerchio attorno a una «facoltà filosofica»; e attorno a questo cerchio dovevano essere collocate delle «scuole di applicazione» e quindi dei «collegi di insegnamento normale», preposti alla preparazione dei docenti secondari. La riforma dell'Università era quindi strettamente connessa a una riforma dell'insegnamento secondario che doveva garantire la trasmissione del carattere strettamente unitario della conoscenza.

D'altro canto l'attenzione di Enriques per l'insegnamento secondario non si manifestò soltanto in una serie di iniziative culturali e istituzionali, come quelle cui si è sopra accennato. Esso si espresse in un lavoro di riflessione teorica che era legato strettamente alla sua attività di ricerca matematica (e, in particolare, geometrica) e di cui i suoi manuali di insegnamento sono una diretta e coerente espressione.

L'interesse di Enriques per le questioni dei fondamenti della geometria si riscontra fin dai primi anni dell'insegnamento universitario a Bologna. Esso ebbe un ruolo importante nella nascita e nella maturazione della tesi già richiamata secondo la quale, nel fondare la geometria, accanto al criterio logico di indipendenza e compatibilità dei postulati occorre tener conto del criterio psicologico, che porta ad indagare le sensazioni e le esperienze che hanno condotto a formulare quei postulati. La filosofia della scienza psicologistica di Enriques trova così una diretta e coerente espressione nell'interesse per i problemi dell'apprendimento della matematica. Dopo aver studiato le iniziative prese a Göttingen dal grande matematico tedesco Felix Klein di organizzare dei corsi rivolti alla formazione e riqualificazione degli insegnanti secondari, Enriques iniziò a pubblicare una serie di monografie che studiavano numerosi problemi di geometria elementare esaminati da un punto di vista superiore. Questa attività, a cui egli associò diversi discepoli e colleghi, diede luogo alla redazione di un famoso volume (pubblicato per la prima volta nel 1900, poi riedito varie volte, fino all'edizione finale in quattro volumi) che tratta dei principi della geometria e dell'algebra elementari visti alla luce dei punti di vista più elevati della ricerca matematica[12].

Infine, l'interesse di Enriques per i problemi dell'insegnamento della matematica si manifestò nella pubblicazione di una nutrita serie di manuali rivolti ai diversi ordini delle scuole secondarie e tecniche, di cui il testo qui riproposto costituisce un importante esempio. Ritroviamo in queste pagine tutti gli elementi della concezione scientifica e matematica che abbiamo qui sommariamente riassunto.

La visione che ispira questo testo è quanto mai lontana da un'impostazione assiomatica o astratta. La geometria non è per Enriques una scienza che studia per via logico-deduttiva le proprietà di uno spazio definito astrattamente mediante un sistema di assiomi. Al contrario, la geometria è la scienza che studia le proprietà di *forma* e *estensione* dei corpi fisici. Essa nasce quindi isolando, nella considerazione dei corpi fisici, quelle proprietà che si riferiscono alla forma e all'estensione, rispetto a tutte le altre proprietà dipendenti dalla materia di cui essi sono costituiti. La nozione di *figura geometrica* nasce dal processo di idealizzazione di queste proprietà e il corpo concreto diventa un *modello* di tale nozione. Così, osserva Enriques, un dado di avorio si ripresenta all'interno dello studio della geometria, come "modello" della figura geometrica detta "cubo".

Qual è il criterio con cui vengono definite le proprietà fondamentali delle figure geometriche? Un assiomatico avrebbe risposto che queste proprietà fondamentali sono nient'altro che "postulati" e quindi il criterio è puramente arbitrario o tutt'al più convenzionale. Enriques risponde invece che il criterio è quello dell'*evidenza*, e quindi che le proprietà di base sono stabilite dall'*osservazione sensibile* dei corpi reali che è l'unica origine del concetto di tali figure geometriche. Si tratta evidentemente anche in tal caso di *postulati* (e infatti Enriques usa esplicitamente questo termine) ma il significato ne è profondamente diverso, perché essi non hanno alcun carattere di astrattezza o di arbitrarietà: al contrario, sono quanto di più determinato (dall'osservazione sensibile) possa darsi. Subentra a questo punto il processo dimostrativo che consente di ottenere per via di puri *ragionamenti* delle conclusioni cui da sola l'osservazione sensibile non potrebbe pervenire, perché talora queste conclusioni sono persino imprevedibili. Si noti che, nel definire il processo dimostrativo, Enriques lo distingue sì dal processo di intuizione sensibile (basato sull'evidenza fisica), ma non lo identifica affatto con i procedimenti della logica: egli parla qui, più in generale, di «ragionamenti», facendo così appello al carattere puramente «mentale», ma non necessariamente logico-deduttivo del processo dimostrativo.

Fin dalle prime pagine assistiamo alla nascita della nozione di punto geometrico come risultato dell'atto di poggiare la punta di una matita su un foglio e della nozione di retta come risultato dell'atto di far scorrere la punta di una matita lungo una riga o delle idee intuitive di filo teso e di raggio di luce. Ed ecco nascere il piano come prolungamento infinito del foglio da disegno, o delle immagini intuitive di una superficie di acqua immobile, della parete di un muro. Fino al punto in cui l'osservazione ci porgerà i primi postulati, come quello secondo cui nel piano vi sono infinite rette e ogni coppia di punti appartiene a una retta e a una sola: essi sono il riflesso dell'osservazione empirica che un filo può essere teso in infiniti modi su un piano.

A poco a poco poi, definiti i postulati di base, il "puro ragionamento" prende il posto dell'intuizione spaziale. Ma mai definitivamente. Difatti l'osservazione si ripresenterà in almeno altre due occasioni: ogni qual volta sarà necessario introdurre un nuovo postulato e quando l'osservazione di una figura geometrica condurrà a porci domande e a supporre proprietà non evidenti della figura medesima. L'osservazione costituisce così l'elemento propulsore fondamentale per porre *domande*, le quali prendono la forma di *problemi*, e indica al contempo la via per ottenere la risposta.

Il lettore attento potrà riscoprire in questo testo, che espone gli elementi fondamentali della geometria elementare classica piana e spaziale, tutti gli elementi delle concezioni filosofiche e geometriche di Enriques. Sul piano didattico, esso ripropone elementi di riflessione che non possono essere soffocati da un'adesione acritica alle tendenze dominanti o più in voga.

Come si è detto all'inizio, le edizioni di questo testo sono moltissime e una scelta in un contesto così ampio non è facile. La presente edizione è stata scelta in quanto essa sembra offrire tre vantaggi. In primo luogo, essa segue un'impostazione che si adatta a molte esigenze di formazione e insegnamento. In secondo luogo, il formato del testo ha una lunghezza media rispetto alle altre edizioni: quindi, questa versione è non soltanto particolarmente elastica sul piano didattico ma fornisce un modello adeguato del trattato di Enriques per chi sia soltanto interessato a conoscerne le caratteristiche sul piano culturale. Infine, questa edizione propone un numero molto elevato di problemi ed esercizi sulla cui utilità e interesse è superfluo insistere.

Giorgio Israel

Indice

Elementi di geometria

I. Rette e piani. Segmenti e angoli. Poligoni

II. Figure eguali. Criteri di eguaglianza dei triangoli

XIX. Figure rotonde

XX. Regole di misure relative ai poliedri e ai solidi rotondi

Esercizi e complementi