Una dimostrazione elementare del calcolo di ζ (2).

Antonio Lungo
Istituto Tecnico Commerciale "A. Gallo" di Aversa (CE)

Sunto

Partendo dall'analisi storica della questione del calcolo della somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, dopo aver esposto la dimostrazione data da Eulero nel 1736, questo lavoro si propone di fornire una dimostrazione del tutto elementare, che faccia uso semplicemente di formule e nozioni regolarmente trattate nella scuola media superiore.

Analisi storica

La serie che ha per termini i reciproci dei quadrati degli interi, ha interessato molti matematici del XVII e XVIII secolo.

La (semplice) dimostrazione della sua convergenza invitava a determinarne la somma. Jacques Bernoulli [1654-1705] sapeva della convergenza in quanto i termini della serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

sono ciascuno minore o uguale a ciascun termine corrispondente della serie

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k-1)}+\cdots$$

che sapeva essere convergente a 2, ma nel 1689 ammise la propria incapacità per il calcolo della somma.

In una lettera del 1673 Henry Oldenburg [1615?-1677] chiese a Leibniz [1647-1716] quale fosse la somma della serie in questione, ma non ottenne alcuna risposta. Anche Pietro Mengoli [1625-1686] ci provò senza però alcun risultato.

Il successo spetta, come spesso, al grande Eulero [1707-1783] un secolo più tardi. Eulero ottenne il risultato nel 1736 ed è probabile che lo abbia comunicato a Daniel Bernoulli [1700-1790]: la lettera di Eulero è andata smarrita, estraiamo dalla risposta il seguente passo

" *The theorem on the sum of the series*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{pp}{6} \quad \textit{and} \quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{p^4}{90},$$

is very remarkable. You must no doubt have came upon a posteriori. I should very much like to see your solution ".

Quando Jean Bernoulli [1667-1748] venne a conoscenza del risultato ottenuto da Eulero scrisse

" *e così viene soddisfatto l'ardente desiderio di mio fratello che, rendendosi conto che la ricerca di tale somma era più difficile di quanto si sarebbe potuto pensare confessava apertamente che tutti i suoi ferventi sforzi erano stati vani. Se almeno fosse vivo ora!* "

La dimostrazione di Eulero

Eulero ottenne il risultato considerando il noto sviluppo in serie

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

ed osservando che l'uguaglianza sen z = 0 poteva essere concepita come l'equazione polinomia infinita

$$0 = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

dalla quale dividendo il tutto per z si ha

$$0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots,$$

e sostituendo z^2 con x, si ottiene l'equazione

$$0 = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \cdots .$$

In base alla teoria delle equazioni algebriche, se il termine costante è uno, la somma dei reciproci delle radici è uguale al coefficiente del termine lineare cambiato di segno: in questo caso è $\frac{1}{3!}$. D'altra parte le radici dell'equazione nell'incognita z sono $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, e così via; per cui le radici dell'equazione nell'incognita x sono π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, e così via. Dunque

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots, \qquad \text{ossia}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

Mediante l'uso assai temerario delle regole algebriche valide soltanto per casi finiti, a polinomi di grado infinito, Eulero riuscì a risolvere il problema, e con lo stesso metodo riuscì a determinare la somma dei reciproci di potenze pari sino alla 26-*esima*, scoprendo che tali valori sono tutti della forma $\alpha \cdot \pi^k$ con $\alpha \in Q$; ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{12}}=\frac{651\pi^{12}}{638512875},\qquad \dots,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}}=\frac{2^{24}\cdot 76977927\pi^{26}}{27!},\ \dots$$

Per le serie dei reciproci di potenze dispari i risultati non si conoscono del tutto, infatti ancora oggi non si sa se la somma dei reciproci dei cubi dei numeri interi positivi sia un multiplo razionale di π^3, mentre si conoscono alcuni risultati significativi come ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^3}=\frac{\pi^3}{32},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^5}=\frac{\pi^5}{360},\qquad \text{etc:}$$

ed è stato dimostrato nel 1978 da Roger Apéry che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=1.202056\ldots$$

è un *numero irrazionale* ma ancora non si sa se è un trascendente.

Una dimostrazione elementare $\zeta(2)$

Diamo una dimostrazione elementare della relazione

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Partendo dalla formula di de Moivre [1667-1754] e tenendo conto dell'identità binomiale, si ha

$$\cos n\varphi+i\,\mathrm{sen}\,n\varphi=(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi\,(i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^k.$$

Poiché i^k è reale se k è pari, immaginario se k è dispari possiamo separare i termini, ottenendo così ($\left[\frac{n}{2}\right]$ e $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ sono le parti intere di $\frac{n}{2}$ e di $\frac{n-1}{2}$)

$$\cos n\varphi+i\,\mathrm{sen}\,n\varphi=$$

$$=\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2h}\cos^{n-2h}\varphi\cdot(i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{2h}+\sum_{h=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2h+1}\cos^{n-2h-1}\varphi\cdot(i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{2h+1}=$$

$$=\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^h\binom{n}{2h}\cos^{n-2h}\varphi\cdot\mathrm{sen}^{2h}\varphi+i\sum_{h=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^h\binom{n}{2h+1}\cos^{n-2h-1}\varphi\cdot\mathrm{sen}^{2h+1}\varphi\ .$$

Uguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei due membri si hanno le

$$(1) \qquad \cos n\varphi = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h}\varphi \cdot \operatorname{sen}^{2h}\varphi ,$$

$$(2) \qquad \operatorname{sen} n\varphi = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h-1}\varphi \cdot \operatorname{sen}^{2h+1}\varphi \ .$$

Dunque, per la (2) e poiché $\operatorname{sen}^{2h}\varphi = (1-\cos^2\varphi)^h$, cos $n\varphi$ si può esprimere con un polinomio in $\cos\varphi$. Se n è dispari e quindi $n - 2h - 1$ pari, si può esprimere sen $n\varphi$ con un polinomio in sen φ (basta tener presente che $\cos^{n-2h-1}\varphi = \left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{n-2h-1}{2}}$); se invece n è pari e quindi $n - 2h - 1$ dispari, si può esprimere sen $n\varphi$ con un polinomio in $\cos\varphi$ sen φ (osservando che $\operatorname{sen}^{2h+1}\varphi = \operatorname{sen}\varphi \cdot \left(1-\cos^2\varphi\right)^h$).

Dalle (1) e (2) si hanno, per $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e per $\varphi \neq k\pi$, rispettivamente, le

$$(3) \qquad \cos n\varphi = \cos^n\varphi \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \tan g^{2h}\varphi \ ,$$

$$(4) \qquad \operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen}^n\varphi \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cot ang^{n-2h-1}\varphi \ .$$

Da quest'ultima partiamo per il calcolo di $\zeta(2)$.
Posto $n = 2m+1$ si ha

$$(5) \quad \operatorname{sen}(2m+1)\varphi = \operatorname{sen}^{2m+1}\varphi \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{2m+1}{2h+1} \cot ang^{2m-2h}\varphi ,$$

e posto $\varphi_k = \dfrac{k\pi}{2m+1}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ si ha

$$\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k = \operatorname{sen} k\pi = 0, \ \operatorname{sen}\varphi_k \neq 0,$$

e pertanto

$$\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{2m+1}{2h+1} \cot ang^{2m-2h}\varphi_k = 0 , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

ossia l'equazione algebrica di grado m

$$(6) \qquad \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \cdots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1} = 0$$

ammette le m soluzioni

(7) $$\cot\text{ang}^2\frac{\pi}{2m+1},\ \cot\text{ang}^2\frac{2\pi}{2m+1},\cdots,\ \cot\text{ang}^2\frac{m\pi}{2m+1}\ .$$

Poiché la somma delle radici dell'equazione

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \qquad (a_0 \neq 0)$$

è $-\frac{a_1}{a_0}$, si ha per la (6)

$$\sum_{k=1}^{m}\cot\text{ang}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}$$

ossia la notevole identità

(8) $$\sum_{k=1}^{m}\cot\text{ang}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Dalla (8) e dalla $\frac{1}{\text{sen}^2\varphi} = \cos\text{ec}^2\varphi = 1 + \cot\text{ang}^2\varphi$, si ottiene

(9) $$\sum_{k=1}^{m}\cos\text{ec}^2\varphi = \sum_{k=1}^{m}\left(1 + \cot\text{ang}^2\frac{k\pi}{2m+1}\right) = m + \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{2m(m+1)}{3}.$$

Le formule (8) e (9) consentono di determinare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Tenendo conto che, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si hanno le

$$\text{sen}\, x < x < \text{tang}\, x \Rightarrow \text{sen}^2 x < x^2 < \text{tang}^2 x \Rightarrow \frac{1}{\text{tang}^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\text{sen}^2 x}\ ,$$

ed in conclusione

$$\cot\text{ang}^2 x < \frac{1}{x^2} < \cos\text{ec}^2 x\ ,$$

per cui riferendoci agli m numeri $\frac{k\pi}{2m+1}$, (k = 1, 2, . . . , m) si ha

$$\cot\text{ang}^2\frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} < \cos\text{ec}^2\frac{k\pi}{2m+1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

e sommando su k tra 1 ed m e tenendo conto delle

$$\sum_{k=1}^{m}\cot\text{ang}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},\ \sum_{k=1}^{m}\text{cosec}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(m+1)}{3},$$

si ottiene

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)}{3},$$

ossia

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2}{3}\frac{m(m+1)}{(2m+1)^2},$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right),$$

e poiché per $m \to +\infty$ il primo e l'ultimo termine tendono a $\frac{\pi^2}{6}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il procedimento indicato per il calcolo di $\zeta(2)$ consente di ricavare i successivi valori $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, ...

[1] Con p si indicava il rapporto tra circonferenza e diametro di uno stesso cerchio.