

La Retta Euclidea Reale a partire da una relazione d'ordine

Franco Eugeni¹, Raffaele Mascella²

Sunto. Seguendo l'indirizzo di Peano si introduce una assiomatica della retta euclidea reale. Si creano confronti con assiomatiche equivalenti e si prova che l'ente così introdotto è isomorfo al gruppo additivo dei numeri reali.

Abstract. Following Peano thought we introduce an axiomatic theory of the euclidean real straight line. It creates some comparisons with other equivalent axiomatic structures and we prove that the structure so introduced is isomorphic to the additive group of real numbers.

Parole chiave: Geometria Euclidea, Assiomatica, Retta Reale.

1. Introduzione

Nello studio dei fondamenti della Geometria Euclidea raramente si fissa l'attenzione alla retta come ente a se stante. Usualmente gli assiomi sono dati almeno a definire la geometria piana e la geometria della retta nasce, in questo contesto, come geometria indotta dal piano sulla retta. Del resto una qualunque definizione di retta euclidea conduce ad una struttura equivalente al campo ordinato dei numeri reali e quindi è, in un certo senso, una definizione "per altra via" di questa struttura.

Da un punto di vista storico gli unici tentativi di definizione della retta euclidea sono quelli dovuti a M. Pasch [3] ed a G. Peano [1], [2]. I lavori di Peano, che rispetto al lavoro di Pasch hanno il merito di essere espressi mediante un linguaggio simbolico, sono stati rivisitati

¹ Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: eugenif@tin.it

² Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: rmascella@tin.it

dal punto di vista logico e critico-formale in P. Freguglia [8]. L'analisi di Freguglia evidenzia come gli assiomi presentati da Peano, il quale di fatto non va oltre le problematiche relative alla geometria di posizione, siano rivisitabili da un punto di vista formale, ma sono comunque coerenti dal punto di vista logico.

Dal nostro punto di vista, il lavoro di Peano poteva e doveva essere completato considerando che gli assiomi, e le proprietà che Peano ne aveva dedotto, non approfondivano le problematiche relative al movimento dei segmenti e non trattavano affatto quelle concernenti la continuità della retta, per cui l'assiomatica andava resa completa in modo da costruire pure l'isomorfismo con il campo reale.

Nel nostro lavoro questo aspetto viene trattato a fondo fino a pervenire, appunto, alla completa organizzazione della retta euclidea anche dal punto di vista della congruenza e continuità.

Abbiamo evitato, essenzialmente per ragioni di spazio, di riportare quelle dimostrazioni che hanno la caratteristica della banalità o che presentano delle difficoltà non enormi. Tuttavia il lettore interessato, che non volesse ripercorrere la via dimostrativa individualmente, potrà consultare il capitolo sulla geometria della retta in preparazione per il volume [10].

2. I postulati di appartenenza e di ordinamento

Sia L un insieme non vuoto di elementi detti "punti".

Gli assiomi di appartenenza, occupandoci unicamente della geometria della retta, si limitano ad un solo assioma di esistenza.

Ass. II. (Esistenza di due punti) Su L ci sono almeno due punti.

Gli assiomi di ordinamento sono forniti, prima di tutto, attraverso una relazione d'ordine totale " $\leq$ " fra i punti di L . Ciò è possibile in quanto, utilizzando l'assiomatica classica della relazione di "stare fra", si può dimostrare che la relazione " $\leq$ " è indotta dallo "stare fra" (cfr. [10]).

Comunque dati in L due punti A, B ad essi è associata una parte di L , denotata con $]A, B[$ che si chiama "segmento assoluto aperto".

Denotiamo con S l'insieme di tutti i segmenti assoluti:

$S = \{]A, B[: A, B \in L \}$. Poniamo infine $[A, B] =]A, B[\cup \{A, B\}$.

Supponiamo che la coppia (L, S) soddisfi agli assiomi che seguono.

Ass. II1. (Ordinamento) Su L è assegnato un ordinamento totale " $\leq$ ".

Ass. II2. (Prolungabilità) Dati i punti distinti A e C , esiste almeno un punto D tale che $C \in]A, D[$.

Ass. II3. (Densità) Dati i punti distinti A e C , c'è sempre almeno un punto B tale che $B \in]A, C[$.

Osservazione. L'insieme L è illimitato, come conseguenza diretta dell'assioma di prolungabilità; inoltre L è denso per l'assioma, per questo così denominato, di densità. E' del tutto evidente come tra due punti distinti di L vi siano sempre infiniti punti.

Dati due punti A e B , con $A \leq B$, consideriamo il segmento ordinato $(A, B) = (]A, B[, \leq)$ che prende il nome di "segmento orientato positivamente". L'altro segmento, ottenuto considerando la relazione inversa, $-(A, B) = (]A, B[, \geq)$ prende invece il nome di "segmento orientato negativamente" o "opposto" del segmento (A, B) . Salvo indicazioni diverse, nel seguito ci riferiremo sempre a segmenti con orientamento positivo.

Definiamo infine gli insiemi: $I(A) = \{P \in L \mid A \leq P\}$, denominata "semiretta destra" di origine A , e $I'(A) = \{P \in L \mid P \leq A\}$, denominata "semiretta sinistra" di origine A . Questi insiemi, per l'ordinamento totale sull'insieme L , hanno in comune il solo punto A .

3. I postulati di congruenza e relative conseguenze

Gli assiomi di questo gruppo definiscono una relazione fra i segmenti di retta ed individuano, almeno intuitivamente, anche il concetto di movimento degli stessi segmenti sulla retta.

Supponiamo definita una relazione " $\equiv$ " sull'insieme dei segmenti orientati detta "congruenza" ed il seguente gruppo di assiomi.

Ass. III1. (*Invertibilità dei segmenti*) Ogni segmento (A, B) è congruo al suo opposto $-(A, B)$.

Ass. III2. (*Pseudotransitività*) Se $(A', B') \equiv (A, B)$ e $(A'', B'') \equiv (A, B)$ allora vale anche $(A', B') \equiv (A'', B'')$.

Corollario 3.1. La congruenza è una relazione d'equivalenza.

Dim. Cfr. [10].

Ass. III3. (*Addizionabilità*) Siano (A, B) , (B, C) segmenti disgiunti così come (A', B') e (B', C') . Se $(A, B) \equiv (A', B')$ e $(B, C) \equiv (B', C')$ allora vale pure $(A, C) \equiv (A', C')$.

Ass. III4. (*Trasporto*) Dati i punti A, B, A' ed una semiretta di origine A' , esiste un unico punto C su tale semiretta tale che $(A, B) \equiv (A', C)$.

Osservazione. L'assioma del trasporto individua due punti, uno su ciascuna semiretta di origine A' : $C \in I(A')$ e $C' \in I'(A')$. Per tali punti vale dunque $C' \leq A' \leq C$.

Corollario 3.2. Siano assegnati i punti A e B e la semiretta di origine A che contiene B . Se il punto B' soddisfa $(A, B) \equiv (A, B')$ allora $B' = B$ (analogamente se $(B, A) \equiv (B', A)$ allora $B' = B$).

Proposizione 3.3. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A < H \leq B$, $K \in I(H)$. Allora vale anche $B < K$.

Dim. Cfr. [10].

Corollario 3.4. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A < H$, $B \in I(A)$, $K \in I(H)$. Allora vale $B < K$.

Proposizione 3.5. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A \leq K < B$, $H \in I'(K)$. Allora vale anche $H < A$.

Corollario 3.6. Siano dati A, B, H, K tali che: $(A, B) \equiv (H, K)$, $K < B$, $A \in I'(B)$, $H \in I'(K)$. Allora vale anche $H < A$.

Osservazione. Per via dei risultati 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, due segmenti non possono essere congruenti se sono contenuti l'uno nell'altro.

Proposizione 3.7. Siano A, B, H, K, D in modo che $(A, B) \equiv (H, K)$ e $A \leq D \leq B$. Allora esiste ed è unico il punto F che soddisfa: $H \leq F \leq K$, $(A, D) \equiv (H, F)$, $(D, B) \equiv (F, K)$.

Dim. Cfr. [10].

Osservazione. In base alla proposizione precedente, dati due segmenti ed una qualsiasi suddivisione del primo segmento, è possibile suddividere il secondo segmento, in modo peraltro unico, in modo da avere segmenti rispettivamente corrispondenti.

Proposizione 3.8. Siano $A \leq B \leq C$, $D \leq E \leq F$ con $(A, C) \equiv (D, F)$. Allora vale:

i) se $(A, B) \equiv (D, E)$ allora anche $(B, C) \equiv (E, F)$;

ii) se $(A, B) \equiv (E, F)$ allora anche $(B, C) \equiv (D, E)$.

Dim. Supponiamo $(A, B) \equiv (D, E)$. Per l'assioma del trasporto esiste, ed è unico, $H \in I(E)$ tale che $(B, C) \equiv (E, H)$. Per l'assioma di addizionabilità segue che $(A, C) \equiv (D, H)$ dunque $(D, F) \equiv (D, H)$ da cui $H = F$ e perciò $(B, C) \equiv (E, F)$.

Supponiamo ora $(A, B) \equiv (E, F)$: esiste, ed è unico, $K \in I'(E)$ tale che $(B, C) \equiv (K, E)$. Sempre per l'addizionabilità segue $(A, C) \equiv (K, F)$ e dunque $(D, F) \equiv (K, F)$. Perciò $D = K$ e dunque $(B, C) \equiv (D, E)$.

Proposizione 3.9. Siano $(A, B) \equiv (C, D)$, $A < C$, $(A, B) \cap (D, E) \neq \emptyset$. Allora valgono $C \in (A, B)$ e $B \in (C, D)$.

Dim. Cfr. [10].

Proposizione 3.10. Siano $(A, B) \equiv (C, D)$. Allora $(A, C) \equiv (B, D)$.

Dim. Cfr. [10].

Definizione. Per mezzo del postulato del trasporto, allorché si fissi definitivamente un punto O , è indotta un'operazione binaria

$$"+": L \times L \rightarrow L \quad (1)$$

di addizione sui punti di L . L'operazione $A + B = C$ è definita individuando il punto C nel modo seguente:

- a) se $O \leq A$ si prende l'unico punto $C \in I(B)$ per cui $(O, A) \equiv (B, C)$;
- b) se $A \leq O$ si prende l'unico punto $C \in I'(B)$ per cui $(A, O) \equiv (C, B)$.

Definizione. Dato un punto A , definiamo il punto $-A$ in questo modo:

- a) se $O \leq A$ prendiamo $-A \in I'(O)$ tale che $(-A, O) \equiv (O, A)$;
- b) se $A \leq O$ prendiamo $-A \in I(O)$ tale che $(O, -A) \equiv (A, O)$.

Per come è definito, il punto $-A$ è unico.

Nel seguito scriveremo anche $A - B$ per indicare la somma $A + (-B)$ e parleremo, per questo, anche di "differenza" fra due punti.

Proposizione 3.15. Se $A < B$ allora $-B < -A$.

Dim. La verifica è ovvia utilizzando l'assioma III3.

Teorema 3.17. La struttura $(L, +)$ soddisfa:

- i) "+" è associativa;
 - ii) il punto O è l'elemento neutro di "+";
 - iii) per qualunque $A \in L$ esiste il suo elemento opposto dato da $-A$;
 - iv) "+" è commutativa;
- e dunque è un gruppo commutativo.

Dim. Per la verifica completa delle proprietà cfr. [10].

Definizione. Dati un punto A ed un naturale n , definiamo l' n -esimo "multiplo" nA come il punto:

- i) $nA = O$ se $n = 0$;
- ii) $nA = A$ se $n = 1$;
- iii) $nA = A + A + \dots + A$, cioè il punto ottenuto sommando n volte il punto A , se $n > 1$.

Corollario 3.18. Siano dati i punti A, B ed i naturali n, m . Valgono le seguenti proprietà:

a) $(m + n)A = mA + nA$; b) $m(nA) = (mn)A$; c) $n(A + B) = nA + nB$.

Teorema 3.20. Sia dato $A \neq O$. Allora $A = \{B \in L \mid B = nA, n \in \mathbb{N}\}$ è isomorfo a $\mathbb{N}$.

Dim. Basta considerare l'applicazione $\phi: A \rightarrow \mathbb{N}$, dove $\phi(nA) = n$.

Definizione. Dati A ed un naturale n , definiamo $-n(A) = n(-A)$. E' un semplice esercizio estendere la validità del corollario 3.18 ai numeri relativi.

Teorema 3.21. Sia dato $A \neq O$. L'insieme $\Gamma = \{C \in L \mid C = nA, n \in \mathbb{Z}\}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Dim. Basta considerare l'applicazione $\mu: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ in cui $\mu(nA) = n$.

Definizione. Dati A, B ed un naturale non nullo n tali che $nA = B$, diciamo che A è l' n -esimo "sottomultiplo" del punto B . In simboli scriveremo $A = \frac{1}{n}B$.

Proposizione 3.22. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Si ha: $nA = nB$ se e solo se $A = B$.

Dim. Cfr. [10]

Corollario 3.23. Dato $n \in \mathbb{N}_0$, siano dati i punti A e B aventi l' n -esimo sottomultiplo. Allora:

a) $\frac{1}{n}(nA) = A = n\left(\frac{1}{n}A\right)$; b) $\frac{1}{n}(A + B) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B$.

Teorema 3.24. Siano $A = \frac{1}{n}B, m \in \mathbb{Z}$. Allora: $mA = m\left(\frac{1}{n}B\right) = \frac{1}{n}(mB)$.

Dim. Cfr. [10].

Definizioni. Se A, B sono tali che $A = \frac{1}{n}B$, definiamo $\frac{m}{n}B = mA$.

Diremo che due punti C, D sono "commensurabili" se esiste q razionale tale che $D = qC$. L'insieme dei punti commensurabili con C è dato dunque da: $\Sigma_C = \{D \in L \mid D = qC, q \in \mathbb{Q}\}$.

Corollario 3.25. Consideriamo due punti A, B aventi i sottomultipli secondo gli interi non nulli n, t . Valgono le seguenti proprietà:

$$\text{a) } \frac{m}{n} (A+B) = \frac{m}{n} A + \frac{m}{n} B; \text{ b) } \frac{m}{n} \left(\frac{s}{t} A \right) = \frac{ms}{nt} A; \text{ c) } \left(\frac{m}{n} + \frac{s}{t} \right) A = \frac{m}{n} A + \frac{s}{t} A.$$

Corollario 3.26. Nelle ipotesi dell'esistenza dei sottomultipli di A utilizzati, vale $\frac{ms}{ns} A = \frac{m}{n} A$.

Dim. Ovvio per il punto b) del corollario precedente.

Osservazione. Per quanto visto la definizione di $\frac{m}{n} A$ acquista il significato di una moltiplicazione di un punto A per un numero razionale $\frac{m}{n}$.

2.4 I postulati di continuità e l'isomorfismo con i reali

Gli assiomi di questo ultimo gruppo esprimono alcune caratteristiche generali di completamento della struttura di retta.

Ass. IV1. (Eudosso-Archimede) Dati due segmenti qualsiasi (A, B) , (C, D) è sempre possibile determinare un numero naturale n tale che il trasporto del segmento (A, B) reiterato n volte da C sulla semiretta passante per D , porta al di là del punto D .

Corollario 4.1. Dati due punti A, B in L tali che $O < A < B$ (rispettivamente $B < A < O$), esiste sempre un multiplo nA di A tale che $nA > B$ (rispettivamente $nA < B$).

Dim. Se $O < A < B$ basta considerare i segmenti (O, A) e (O, B) , se invece $B < A < O$ si considerano i segmenti (A, O) e (B, O) . La verifica è banale applicando l'assioma IV1.

Definizione. Due classi non vuote S_1, S_2 di L si dicono una coppia di "classi contigue" se:

- i) sono classi "separate", cioè ogni punto della prima classe è minore di ogni punto della seconda classe;
- ii) Dato un segmento arbitrario (E_1, E_2) esiste un punto della prima classe H ed un punto della seconda classe K tali che (H, K) è congruente ad un sottoinsieme di (E_1, E_2) .

Un punto D tale che nessun punto della prima classe è maggiore di D e nessun punto della seconda classe è minore di D , si dice "elemento di separazione".

Corollario 4.2. Siano date due classi contigue S_1, S_2 ed un generico punto $E > O$. Allora esistono $H \in S_1, K \in S_2$ tali che $K - H < E$.

Dim. Per la definizione di classi contigue dato un segmento arbitrario (E_1, E_2) esistono $H \in S_1, K \in S_2$ tali che (H, K) è congruente ad un sottoinsieme di (E_1, E_2) . Poniamo allora $E_2 - E_1 = E$, prendiamo cioè il punto E tale che $(E_1, E_2) \equiv (O, E)$. Consideriamo inoltre il punto H_1 tale che $(H, K) \equiv (O, H_1)$ ovvero il punto $H_1 = K + (-H) = K - H$. Per via della congruenza si ha $(O, H_1) \subset (O, E)$ per cui $H_1 < E$.

Ass. IV2. (Cantor) Ogni coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di L ha un elemento di separazione.

Proposizione 4.3. Una coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di L ha un unico elemento di separazione.

Dim. Siano A, A' due elementi separatori della coppia S_1, S_2 di classi contigue, con $A < A'$, e sia E un punto minore della loro differenza (la sua esistenza è assicurata dall'assioma II.3), cioè $E < A' - A$. Allora, presi due punti qualsiasi $A_1 \in S_1, A_2 \in S_2$, poiché $A_1 \leq A, A' \leq A_2$, segue $A_2 - A_1 > A' - A$ (per la prop. 3.7 e coroll.3.4), dunque $A_2 - A_1 > E$ ma ciò contrasta l'ipotesi che S_1, S_2 siano classi contigue.

Teroema 4.4. (Teorema di Dedekind) Sia data una partizione di L in due insiemi non vuoti S_1, S_2 , in modo che nessun punto di S_1 stia tra due punti di S_2 e viceversa. Allora esiste un unico punto O tale che, presi qualsiasi $P_1 \in S_1, P_2 \in S_2$, con $P_1 \neq O \neq P_2$, si ha $P_1 < O < P_2$.

Dim. Cfr. [10].

Teorema 4.4. (Teorema di divisibilità) Di ogni punto A in L esiste il sottomultiplo $\frac{1}{n}A$ secondo un qualsiasi numero naturale n non nullo.

Dim. Supponiamo $O < A$. Consideriamo, sul segmento (O, A) , i sottinsiemi: $X_1 = \{P \in (O, A) \mid nP \leq A\}, X_2 = \{P \in (O, A) \mid A \leq nP\}$. La coppia X_1, X_2 forma una coppia di classi contigue, infatti:

- supponiamo esistano $P_1 \in X_1$ e $P_2 \in X_2$ tali che $P_1 > P_2$; per la prop. 3.19 si avrebbe $nP_1 > nP_2 > A$: assurdo. Dunque X_1 e X_2 sono classi separate;

- sia dato un generico punto $E > O$, siano $H_1 \in X_1$ e $H_2 \in X_2$. Sia inoltre E' tale che $O < E' < E$. Per l'assioma archimedeo esiste un naturale m tale che il trasporto di (O, E') reiterato m volte da H_1 verso H_2 porti al di là del punto H_2 , in altre parole è possibile trovare dei punti E_i tali che $(O, E') \equiv (E_0, E_1) \equiv (E_1, E_2) \equiv \dots \equiv (E_{m-1}, E_m)$ e dove $E_0 = H_1, E_m > H_2$. Tra questi segmenti ne esiste esattamente uno in cui $E_1 \in X_1$ e $E_2 \in X_2$ (la costruzione è identica a quella del teorema 4.4). Supponiamo che il segmento in questione sia (E_i, E_{i+1}) , allora ne segue $E_{i+1} - E_i = E' < E$.

Per l'assioma IV2 la coppia X_1, X_2 ha un elemento separatore H che, soddisfacendo $H_1 \leq H \leq H_2$, soddisfa anche $nH_1 \leq nH \leq nH_2$.

Anche la coppia $S_1 = \{nH_1 \mid H_1 \in X_1\}, S_2 = \{nH_2 \mid H_2 \in X_2\}$ forma una coppia di classi contigue, infatti:

- sono classi separate, utilizzando la prop. 3.19 e il fatto che X_1 e X_2 sono separate;

- sia dato $E > O$, prendiamo un punto E' tale che $O < nE' < E$. Poiché esistono $F_1 \in X_1, F_2 \in X_2$ tali che $F_2 - F_1 < E'$, per tali punti si ha che $nF_1 \in S_1, nF_2 \in S_2$ ed anche $nF_2 - nF_1 = n(F_2 - F_1) < nE' < E$.

L'elemento separatore delle classi S_1, S_2 è il punto A , e poiché è unico, coincide con nH . Da ciò segue che il punto H è l' n -esimo sottomultiplo di A , in simboli: $H = \frac{1}{n}A$.

Corollario 4.5. Dati due punti A, B in L e diversi da O , esiste sempre un sottomultiplo dell'una minore dell'altra.

Corollario 4.6. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Se $nA = B$ allora $A = (1/n)B$.

Teorema 4.7. Sia fissato un punto $U \neq O$. L'insieme dei punti commensurabili con U è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Dim. Basta considerare l'applicazione $\varphi : \Sigma_U \rightarrow \mathbb{Q}$ dove $\varphi(U) = 1$, $\varphi((m/n)U) = m/n$.

Definizione. Siano $A \in L, r \in \mathbb{R}$. Se consideriamo delle classi contigue X_1, X_2 di razionali aventi r come elemento separatore, anche le classi $S_1 = \{x_1A \mid x_1 \in X_1\}, S_2 = \{x_2A \mid x_2 \in X_2\}$ sono contigue di punti in L . Definiamo dunque rA come l'elemento separatore delle classi S_1, S_2 .

Proposizione 4.8. Sia dato $A \in L$, con $A \neq O$. Se $P \in L$ allora esiste unico $r \in \mathbb{R}$ tale che $P = rA$.

Dim. Cfr. [10].

Proposizione 4.9. Siano dati i punti A, B ed i reali p, r . Valgono le seguenti proprietà:

a) $(p + r)A = pA + rA$; b) $p(rA) = (pr)A$; c) $r(A + B) = rA + rB$.

Dim. Cfr. [10].

Proposizione 4.10. Sia $r \in \mathbb{R}_0^+$. Se $A < B$ allora $rA < rB$.

Dim. Cfr. [10].

Teorema 4.11. La struttura $(L, \leq, +)$ è isomorfa a $(\mathbb{R}, \leq, +)$.

Dim. Fissiamo un punto U e consideriamo l'applicazione $\psi : L \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo: $\psi(U) = 1, \psi(rU) = r$. L'esistenza e l'unicità dei

punti rU , al variare di r , rendono l'applicazione ψ una biiezione. Infine, per quanto riguarda la linearità:

$$\begin{aligned}\psi(X_1 + X_2) &= \psi(r_1U + r_2U) = \psi((r_1+r_2)U) = r_1+r_2 = \\ &= \psi(r_1U) + \psi(r_2U) = \psi(X_1) + \psi(X_2).\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Peano G. (1889), I Principii di Geometria logicamente esposti, da *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. II, 59-78
- [2] Peano G. (1894), Sui Fondamenti della Geometria, tratto da *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, 115-157
- [3] Pasch M. (1882), Vorlesungen über neuere Geometrie, Lipsia
- [4] Morin U., Busulini F. (1966), *Elementi di Geometria per le Scuole Medie Superiori*, Quarta edizione, Cedam, Padova
- [5] Hilbert D. (1970), *Fondamenti della Geometria*, traduzione di Pietro Canetta dall'opera *Grundlagen der Geometrie* (1889), Feltrinelli, Milano
- [6] Manara C. F. (1991), Giuseppe Peano ed i Fondamenti della Geometria, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 171-184
- [7] Marchi M. (1991), L'Opera di Peano e la moderna Geometria di Incidenza, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 197-212
- [8] Freguglia P. (1977), Osservazioni inerenti alla Geometria sulla retta di G. Peano, *Archimede*, 2, 95-103
- [9] Eugeni F., Furneri S., Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in: *Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1999*, Edigrafital, Teramo, 101-111
- [10] Eugeni F. (2002), *Critica dei fondamenti*, Edigrafital, Teramo (in corso di stampa)
- [11] Eugeni F., Mascella R., Su alcuni Modelli Geometrici non Archimedei (in preparazione)