

## ARTICOLO DODICESIMO

---

Sulla teoria elementare degli isoperimetri di OSCAR CHISINI  
a Bologna.

La teoria antica degli isoperimetri quale si trova nel V libro di PAPPÒ è dovuta a ZENODORO <sup>(1)</sup>: essa contiene già le proposizioni principali, cioè che il triangolo isoscele ha area maggiore di ogni triangolo di ugual base e perimetro, che il poligono regolare ha la superficie massima fra tutti i poligoni isoperimetri collo stesso numero di lati, che l' $n+1$ -gono regolare racchiude area maggiore dell' $n$ -gono regolare di ugual perimetro, e che infine il cerchio è maggiore di ogni poligono che sia racchiuso da egual contorno.

La teoria resta poi invariata finchè, col sorgere del calcolo differenziale e con la diffusione delle ricerche di massimo e di minimo, nasce il problema del poligono articolato, cioè il problema di trovare quale sia il poligono di area massima fra tutti quelli con dati lati. La risoluzione di questo problema è dovuta a CRAMER <sup>(2)</sup>; il quale dimostra, prima elementarmente e poi col sussidio del calcolo differenziale, che fra tutti i quadrangoli con dati lati ha area massima quello iscrittibile in un cerchio, e da questa proposizione deduce che il poligono iscritto ha area maggiore di ogni altro che ne abbia i medesimi lati.

Questo resta il contenuto fondamentale della teoria classica sul massimo delle figure piane isoperimetriche, quale la troviamo codificata per esempio nel trattato di

<sup>(1)</sup> Cfr. *Zeitschrift für Math. und Phys.* Bd 22 nell'*Hist. und Liter. Abteilung* a pag. 173 l'art. di CANTOR.

<sup>(2)</sup> Cfr. *Histoires de l'Academia Royale de Sciences et Belles Lettres*, Berlino anno 1852, pag. 283.

TOMMASINO <sup>(1)</sup> e nel notissimo *Abregé de Isopérimetrie* <sup>(2)</sup> di LHULLIER.

Se il sorgere del calcolo differenziale aveva richiamato l'attenzione sulle questioni di massimo e di minimo della geometria, i metodi del calcolo fecero poi abbandonare i procedimenti sintetici: questi ritornano in onore con STEINER <sup>(3)</sup>, il quale riprende le proposizioni dell'isoperimetria piana, deducendo le proprietà dei poligoni iscritti e dei poligoni regolari dalla proprietà di massimo del cerchio che egli dimostra direttamente: e per questa via egli può facilmente estendere i suoi teoremi alle figure sulla sfera.

È notevole in STEINER la varietà e ricchezza dei metodi: mercè cui egli può anche trattare brillantemente i problemi di massimo e di minimo relativi ai solidi determinando quali piramidi e prismi racchiudano volume massimo sotto determinata area, e dimostrando che la sfera è il solido di volume massimo fra quelli di egual superficie. Inoltre egli intravede ed enuncia il teorema dimostrato poi da LINDELÖF <sup>(4)</sup>: fra i poliedri di data specie, quello che racchiude il volume massimo sotto data superficie è circoscritto a una sfera che tocca le singole faccie nel loro baricentro.

Così si svolge e si compie la teoria degli isoperimetri, di cui — con qualche dilucidazione e complemento — ricostruiamo storicamente lo sviluppo nei primi Capitoli di questo Articolo.

Le dimostrazioni però, quali furon date da PAPPO fino a STEINER, presentano tutte una lacuna fondamentale, messa in rilievo dall'analisi moderna: si ammette che esista un  $n$ -gono di area massima fra quelli di dato perimetro, una curva d'area massima fra quelle di dato contorno, ecc. Quindi la necessità o di dimostrare questo postulato o di stabilire in modo diretto i teoremi, indipendentemente da esso.

<sup>(1)</sup> Cfr. TOMMASINI JAC. ANDREAE, *De Maximis et Minimis*, Pisis, 1774.

<sup>(2)</sup> Questo *Abregé* è l'appendice del libro di LHULLIER intitolato *Polygonometrie* ed edito a Ginevra nel 1789. Cfr. anche dello stesso A. il *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum*, Varsaviae, 1782.

<sup>(3)</sup> Cfr. nel « Journal de Crelle » del 1842 le due memorie di STEINER, *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur le sphère e dans l'espace en général*.

<sup>(4)</sup> Cfr. *Math. Annalen*, Bd. II, pag. 150.

Ora la dimostrazione del postutato consegue dagli sviluppi superiori dell'analisi moderna (Cfr. Art. 13). Ma anche restando nel campo elementare, i teoremi di ZENODORO e di CRAMER si possono dimostrare rigorosamente, seguendo CARATHEODORY e STUDY <sup>(1)</sup>, ove s'interpretino le dimostrazioni classiche come procedimenti di trasformazione che conducono a serie illimitate di figure *convergenti verso una figura limite*.

Appunto CARATHEODORY e STUDY, prendendo le mosse dalla teoria di STEINER, hanno dimostrato: il primo che il cerchio ha area massima fra tutte le curve di ugual contorno, e il secondo che il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono che ne abbia lo stesso perimetro; ed una semplice trasformazione dei ragionamenti usati da CARATHEODORY, ci offre la trattazione elementare dei poligoni isoperimetri emendata dalla lacuna tradizionale.

Con ciò la teoria stessa potrebbe ritenersi esaurita; ma si affaccia naturale la domanda se gli stessi teoremi non possano rendersi indipendenti dal presupposto del massimo, confrontando direttamente il poligono regolare a uno di quelli di ugual perimetro o il poligono iscritto nel cerchio a uno di quelli che ne abbia i medesimi lati e dimostrando in ciascun caso che il primo ha area maggiore del secondo. Ho potuto rispondere a questa domanda limitandomi all'uso di procedimenti affatto elementari ed euclidei, e presento quindi i risultati così ottenuti, come a coronamento dell'edificio. Ciò che qui appaia di meno semplice e rapido in confronto ai metodi classici varrà almeno a mettere in maggior luce tutto il valore che appartiene alle proposizioni esistenziali nelle ricerche di massimo.

L'ultima parte della nostra trattazione si riferisce all'isoperimetria solida. Qui per altro ci limitiamo ad esporre i classici sviluppi di STEINER, compilati per i poliedri da LINDELÖF, ammettendo in generale il postulato del massimo. A ciò servono di complemento alcune note critiche.

<sup>(1)</sup> Cfr. *Math. Annalen*, Bd. 68, pag. 133.

## CAPITOLO I.

La teoria degli isoperimetri in Pappo <sup>(1)</sup>.

§ 1. Lemmi sui triangoli. — *Lemma I.* Fra tutti i triangoli di data base e dato perimetro il massimo è l'isoscele, e più generalmente fra due triangoli di ugual base e di ugual perimetro è maggiore quello che più si accosta al triangolo isoscele, cioè in cui è minore la differenza fra gli altri due lati.

Per la dimostrazione vedi Cap. III, n. 2 e 3.

*Lemma. II.* Siano dati (Fig. 1) i triangoli  $ABC$  e  $BDE$  isosceli e simili fra loro, e i triangoli  $ABC'$  e  $BDE'$  pure isosceli, ma non simili fra loro, e sia

$$BC + BE = BC' + BE'$$

cioè i due primi triangoli  $ABC$ ,  $BDE$  abbiano insieme lo stesso perimetro degli altri due triangoli  $ABC'$ ,  $BDE'$ .

Dico che i triangoli

$$ABC \text{ e } BDE$$

presi insieme hanno area maggiore dei triangoli

$$ABC' \text{ e } BDE'$$

pare presi insieme.

Noto che  $C$  e  $C'$  sono sull'asse di  $AB$ , ed  $E$  e  $E'$  sull'asse di  $BD$ .

Essendo

$$BC + BE = BC' + BE'$$

se  $C$  è esterno al triangolo  $ABC$  sarà  $E'$  interno al triangolo  $BED$  o viceversa.

Per fissare le idee supponiamo che sia  $E'$  esterno ad  $ABC$ .

(1) Cfr. PAPPI ALEXANDRINI, *Mathematicae Collectiones*, Bononiae, MDCLX, e anche nel terzo volume dell'edizione Hultsch (Berlino, 1878) alla pag. 1189 il supplemento *Zenodori Commentarius de Figuris isoperimetricis*.

Distinguiamo due casi

- 1)  $AB \leq BD$
- 2)  $AB > BD$ .

Per semplicità darò la dimostrazione del teorema solo nel primo caso che è quello che effettivamente serve per il resto della teoria.

Siano  $C_1$  e  $C_1'$  i simmetrici di  $C$  e  $C'$  rispetto  $AB$ .

Per ipotesi è

$$\widehat{ABC} = \widehat{EBD}$$

quindi i tre punti  $C_1, B, E$ , sono per diritto, ed è quindi  $C_1B + BE = C_1E$ . Inoltre pur per ipotesi è

$$\widehat{ABC} \neq \widehat{E'BD}$$

quindi i tre punti  $C_1', B, E'$ , non sono per diritto, e quindi è

$$C_1'B + BE' > C_1'E'.$$

Siccome poi è anche

$$EB + BC = E'B + BC'$$

così ho

$$EC_1 = EB + BC = E'B + BC' = E'B + BC_1' > E'C_1'.$$

Ora essendo  $CC'$  e  $EE'$  parallele fra di loro, ho che  $C_1E$  è più inclinata su  $E'E$  che non la  $C_1'E'$  quindi se da  $C_1$  mandassi la parallela alla  $C_1'E'$  questa taglierebbe il segmento  $E'E$ , quindi ho

$$EE' > C_1C_1'$$

e quindi anche

$$EE' > CC'.$$

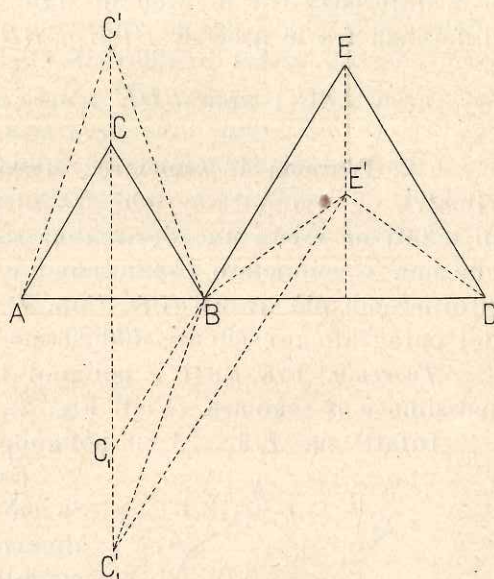


Fig. 1.

Ho quindi che la differenza fra le altezze dei triangoli  $ABC$  e  $ABC'$  è minore che la differenza fra le altezze dei triangoli

$$BDE \text{ e } BDE'$$

essendo inoltre

$$AB < BD$$

è la differenza fra le aree di  $ABC$  e  $ABC'$  minore che la differenza fra le aree di  $BDE$  e  $BDE'$ , quindi

$$\text{area } ABC + \text{area } BDE > \text{area } ABC' + \text{area } BDE'.$$

§ 2. **Teorema di Zenodoro: massimo fra i poligoni isoperimetri.** — Ammettiamo che fra tutti i poligoni isoperimetri di  $n$  lati ne esista uno di area massima. Da questo postulato, che non è enunciato esplicitamente da PAPP0 e sul quale ritorneremo più avanti (Cfr. Cap. V, § 18) e mediante i lemmi del paragrafo precedente deduciamo il

*Teorema.* Fra tutti i poligoni isoperimetri di  $n$  lati il massimo è il regolare. (Vedi Fig. 2).

Infatti sia  $A_1 A_2 \dots A_n$  il poligono che realizza il massimo.

Esso deve essere equilatero.

Se ciò non fosse esso avrebbe almeno due lati consecutivi disuguali. Siano essi per esempio

$$A_1 A_2 \text{ e } A_2 A_3.$$

Sulla base  $A_1 A_3$  costruiamo il triangolo isoscele  $A_1 A_2' A_3$  per il quale sia

$$A_1 A_2' + A_2' A_3 = A_1 A_2 + A_2 A_3.$$

Il punto  $A_2'$  insieme cogli altri  $A_1 A_3 \dots A_n$  mi determina un

poligono  $A_1 A_2' A_3 \dots A_n$  che ha lo stesso perimetro di  $A_1 A_2 \dots A_n$  avendone però area maggiore, in quanto il triangolo  $A_1 A_2 A_3$  ha area minore del triangolo  $A_1 A_2' A_3$ ; e ciò sarebbe contro l'ipotesi che il poligono  $A_1 A_2 \dots A_n$  sia il massimo fra tutti gli  $n$ -goni che ne hanno il medesimo perimetro.

Il poligono  $A_1 A_2 \dots A_n$  che realizza il massimo deve anche essere equiangolo.

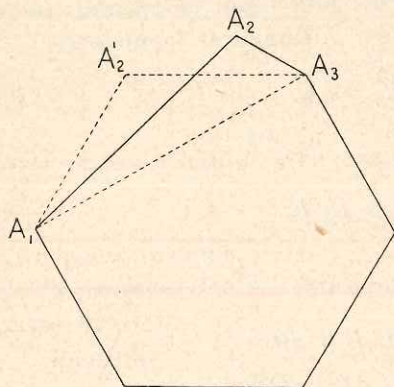


Fig. 2.

Questo si vede immediatamente nel caso di  $n = 4$ , perchè il quadrato ha evidentemente altezza (e quindi area) maggiore di un rombo che ne abbia gli stessi lati.

Possiamo adunque supporre  $n > 4$ . Occorre notare dapprima che se il nostro poligono non è equiangolo vi sono almeno due angoli disuguali non consecutivi. Infatti se questo non fosse, anzitutto dovrebbero essere tutti gli angoli di indice pari uguali fra di loro, e così pure uguali fra di loro quelli di indice dispari. Per di più dovrebbero essere uguali i due angoli non consecutivi  $A_1$  e  $A_4$ . Ma essendo uguali  $A_1$  e  $A_4$ , tutti gli angoli di indice dispari (che sono uguali fra loro) sarebbero uguali a tutti gli angoli di indice pari (che sono uguali fra loro) e il poligono sarebbe equiangolo contro l'ipotesi. Dunque è assurdo che non vi siano due angoli disuguali consecutivi.

Ciò posto siano  $A_r$  e  $A_s$  due angoli non consecutivi disuguali. (Vedi Fig. 3).

Supponiamo, per fissare le idee,

$$A_r > A_s.$$

Consideriamo i triangoli

$$A_{r-1}A_rA_{r+1} \text{ e } A_{s-1}A_sA_{s+1}.$$

Essendo

$$A_{r-1}A_r = A_rA_{r+1} = A_{s-1}A_s = A_sA_{s+1}$$

sarà

$$A_{r-1}A_{r+1} > A_{s-1}A_{s+1}.$$

Divido il segmento  $2A_rA_{r+1}$  in due parti  $x$  e  $y$  proporzionali ad  $A_{r-1}A_{r+1}$  e  $A_{s-1}A_{s+1}$ , cioè ho

$$x + y = 2A_rA_{r+1}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_{r-1}A_{r+1}}{A_{s-1}A_{s+1}}.$$

Ciò fatto costruisco il triangolo isoscele

$$A_{r+1}A'_rA_{r-1}$$

in cui è

$$A_{r+1}A'_r = A'_rA_{r-1} = x$$

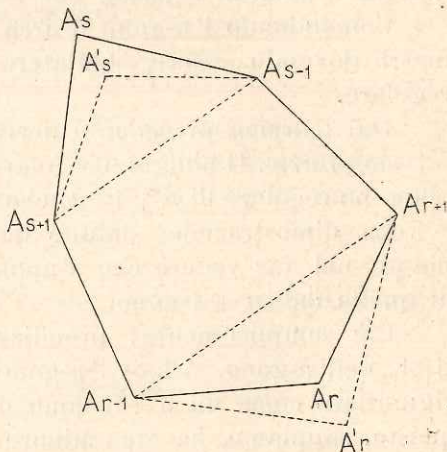


Fig. 3.

e il triangolo pure isoscele

$$A_{s+1} A'_s A_{s-1}$$

in cui è

$$A_{s+1} A'_s = A'_s A_{s-1} = y.$$

Ora se nel poligono

ai triangoli

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A_{r-1} A_r A_{r+1}$$

sostituisco i triangoli

$$A_{s-1} A_s A_{s+1}$$

$$A_{r-1} A'_r A_{r+1}$$

$$A_{s-1} A'_s A_{s+1}$$

ottengo un poligono dello stesso numero di lati, dello stesso perimetro e di area maggiore, in quanto per il lemma II la somma dei triangoli

$$A_{r-1} A'_r A_{r+1} \quad \text{e} \quad A_{s-1} A'_s A_{s+1}$$

è maggiore della somma dei triangoli

$$A_{r-1} A_r A_{r+1} \quad \text{e} \quad A_{s-1} A_s A_{s+1}.$$

Ma questo contraddice all'ipotesi che  $A_1 A_2 \dots A_n$  sia l' $n$ -gono che racchiude l'area massima fra i suoi isoperimetri, dunque è assurda l'ipotesi che esso non sia equiangolo.

Concludendo l' $n$ -gono d'area massima fra i suoi isoperimetri dovendo essere equilatero e equiangolo è l' $n$ -gono regolare.

Dal teorema precedente deriva il

*Corollario.* Il poligono regolare di  $n$  lati ha area minore del poligono regolare di  $n+1$  lati che ne abbia lo stesso perimetro.

La dimostrazione datane da PAPP0 consiste essenzialmente nel far vedere che l'apotema dell' $n$ -gono è minore di quella dell' $n+1$ -gono.

Più semplicemente: prendiamo un punto  $A_{n+1}$  sul lato  $A_1 A_n$  dell' $n$ -gono. Allora l' $n$ -gono regolare  $A_1 A_2 \dots A_n$  si può riguardare come un  $n+1$ -gono non regolare  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ , e questo, sappiamo, ha area minore dell' $n+1$ -gono regolare di ugual perimetro.



§ 3. **Proprietà isoperimetrica del cerchio.** — Il cerchio ha area maggiore di ogni poligono  $P$  che ne abbia lo stesso perimetro  $p$ .

Per il teorema di ZENODORO basta dare la dimostrazione nel caso che  $P$  sia regolare.

Sia  $C$  il cerchio di perimetro  $p$ . Sia  $P'$  il poligono simile a  $P$  circoscritto a  $C$ :  $p'$  sia il suo perimetro. Indico con  $a$  e  $a'$  gli apotemi di  $P$  e  $P'$  e noto che  $a'$  è il raggio di  $C$ .

Si ha

$$\frac{a}{a'} = \frac{p}{p'}$$

Ma  $p'$  perimetro di un poligono circoscritto a  $C$  è maggiore di  $p$  circonferenza di  $C$ ; è quindi  $a < a'$ .

Ora l'area di  $P$  è data da  $\frac{1}{2}ap$  e quella di  $C$  da  $\frac{1}{2}a'p$ , quindi l'area di  $C$  è maggiore di quella di  $P$ .

## CAPITOLO II.

**Il Teorema di Cramer: massimo dei poligoni articolati** (1).

§ 4. **Caso del quadrangolo.** — *Teorema.* Fra tutti i quadrangoli con dati lati quello iscrivibile in un cerchio è massimo.

Siano (Fig. 4) i due quadrangoli

$$ABCD \text{ e } A'B'C'D'$$

coi lati omologhi uguali, e sia  $ABCD$  iscrivibile.

Nel quadrangolo  $ABCD$  la somma di due angoli opposti è uguale a due retti, esso avrà quindi due angoli non acuti consecutivi.

Siano essi  $A$  e  $B$ .

Sia il quadrangolo  $A'B'C'D'$  non iscrivibile, quindi diverso dal quadrangolo  $ABCD$ . Sarà

$$A' \neq A \text{ e } B' \neq B.$$

(1) Cfr. *Histoires de l'Academie Royale de Sciences e Belles Lettres de Berlin*. Anno 1852, pag. 283 la memoria postuma di CRAMER.

Se

$$A' < A,$$

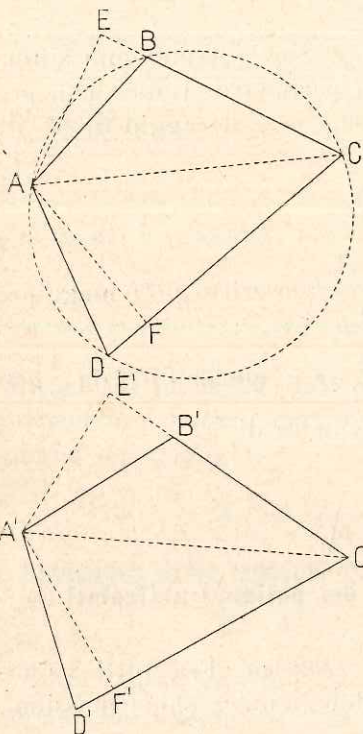
i due triangoli  $ABD$  e  $A'B'D'$  hanno

Fig. 4.

$$A' < A$$

$$AB = A'B'$$

$$AD = A'D',$$

$$B'D' < BD.$$

è quindi

Considerando allora i due triangoli  $BDC$  e  $B'D'C'$  si ha

$$C' < C.$$

Per la stessa ragione se fosse anche  $B' < B$  sarebbe  $D' < D$ , il che è impossibile essendo

$$A+B+C+D = A'+B'+C'+D'$$

dunque non può essere contemporaneamente

$$A' < A \text{ e } B' < B$$

e per la stessa ragione non può neppure essere contemporaneamente

$$A < A' \text{ e } B < B'.$$

Concludendo uno dei due angoli  $A'$  e  $B'$  dovrà esser maggiore e l'altro minore dell'omologo: per fissare le idee supponiamo che sia

$$B' > B.$$

Conduco  $AE$  perpendicolare a  $BC$  e  $AF$  perpendicolare a  $DC$  e analogamente costruisco  $A'E'$  e  $A'F'$ .

Consideriamo per ora il caso in cui  $F'$  non sia esterno a  $D'F'$ , cioè il caso in cui

$$D' \leq \frac{\pi}{2}.$$

Siccome il quadrangolo  $ABCD$  è iscrivibile sarà  $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ , quindi

$$\widehat{ABE} = \widehat{ADF},$$

e quindi i triangoli

$$ABE \text{ e } ADF$$

sono simili e si ha

$$1) \quad \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{DF}.$$

Inoltre essendo per ipotesi

$$ABC < A'B'C',$$

è

$$EAB < E'A'B',$$

ed essendo inoltre, come abbiamo già notato

$$ADC < A'B'C''$$

è

$$DAF > D'A'F''.$$

È quindi

$$2) \quad \frac{AE}{BE} > \frac{A'E'}{B'E'}$$

$$3) \quad \frac{AF}{DF} < \frac{A'F'}{D'F'}$$

Dal triangolo  $ABC$  si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BE} \cdot \overline{BC}$$

e dal triangolo  $ADC$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DF} \cdot \overline{DC}.$$

Indi

$$4) \quad \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DF} \cdot \overline{DC}.$$

La stessa relazione vale per il quadrangolo  $A'B'C'D'$  e si ha

$$5) \quad \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 + 2\overline{B'E'} \cdot \overline{B'C'} = \overline{A'D'}^2 + \overline{D'C'}^2 - 2\overline{D'F'} \cdot \overline{D'C'}.$$

Essendo

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad AD = A'D', \quad DC = D'C'$$

si ha dalle 4) e 5)

$$\overline{BE} \cdot \overline{BC} + \overline{DF} \cdot \overline{DC} = \overline{B'E'} \cdot \overline{B'C'} + \overline{D'F'} \cdot \overline{D'C'}.$$

Quindi essendo  $BC = B'C'$ ,  $DC = D'C'$

$$\overline{BC}(\overline{B'E'} - \overline{BE}) = \overline{DC}(\overline{D'F'} - \overline{DF})$$

cioè

$$6) \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DF} - \overline{D'F'}}{\overline{B'E'} - \overline{BE}}.$$

I triangoli rettangoli

$$ABE \text{ e } A'B'E'$$

hanno ugual ipotenusa: è quindi

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{A'E'}^2 + \overline{B'E'}^2$$

cioè

$$(\overline{AE} + \overline{A'E'}) (\overline{AE} - \overline{A'E'}) = (\overline{B'E'} + \overline{BE}) (\overline{B'E'} - \overline{BE})$$

cioè

$$7) \quad \frac{\overline{AE} + \overline{A'E'}}{\overline{B'E'} + \overline{BE}} = \frac{\overline{B'E'} - \overline{BE}}{\overline{AE} - \overline{A'E'}}.$$

Nello stesso modo si ha

$$8) \quad \frac{\overline{AF} + \overline{A'F'}}{\overline{D'F'} + \overline{DF}} = \frac{\overline{DF} - \overline{D'F'}}{\overline{A'F'} - \overline{AF}}.$$

Ma dalla 2) si ha

$$2) \quad \frac{\overline{AE} + \overline{A'E'}}{\overline{BE} + \overline{B'E'}} < \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$$

e dalla 3)

$$3) \quad \frac{\overline{AF} + \overline{A'F'}}{\overline{DF} + \overline{D'F'}} > \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}.$$

Quindi per le 1) 7) 8) si ha

$$9) \quad \frac{\overline{B'E'} - \overline{BE}}{\overline{AE} - \overline{A'E'}} < \frac{\overline{DF} - \overline{D'F'}}{\overline{A'F'} - \overline{AF}}$$

cioè

$$\frac{\overline{DF} - \overline{D'F'}}{\overline{B'E'} - \overline{BE}} > \frac{\overline{A'F'} - \overline{AF}}{\overline{AE} - \overline{A'E'}}$$

e per la 6)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} > \frac{\overline{A'F'} - \overline{AF}}{\overline{AE} - \overline{A'E}}$$

cioè

$$\overline{BC} \cdot \overline{AE} + \overline{DC} \cdot \overline{AF} > \overline{DC} \cdot \overline{A'F'} + \overline{BC} \cdot \overline{A'E}.$$

Ma

$$\overline{BC} \cdot \overline{AE} \text{ è l'area del triangolo } ABC,$$

$$\overline{DC} \cdot \overline{AF} \text{ è l'area del triangolo } ADC$$

quindi  $\overline{BC} \cdot \overline{AE} + \overline{DC} \cdot \overline{AF}$  è l'area del quadrangolo  $ABCD$  e analogamente, essendo  $BC = B'C'$ ,  $DC = D'C'$ ,  $\overline{BC} \cdot \overline{A'E'} + \overline{DC} \cdot \overline{A'F'}$  è l'area del quadrangolo  $A'B'C'D'$ .

Si ha quindi che l'area di  $ABCD$  è maggiore dell'area di  $A'B'C'D'$ .

Abbiamo dimostrato il teorema nell'ipotesi di  $D' < 90^\circ$ . Se  $D'$  fosse  $> 90^\circ$ , costruisco il quadrangolo  $A''B''C''D''$  coi lati uguali agli omologhi di  $A'B'C'D'$ , in cui l'angolo  $D''$  è retto.

Essendo  $D'' > D$  sarà  $B'' > B$ , quindi il quadrangolo  $A''B''C''D''$  sarà minore del quadrangolo  $ABCD$ .

Inoltre il triangolo  $A''D''C''$  è maggiore del triangolo  $A'D'C'$  essendo uguali le basi  $A''B''$  e  $A'B'$ , ed essendo l'altezza di  $A''D''C''$  maggiore dell'altezza di  $A'D'C'$  essendo  $D''$  retto.

Ora essendo  $D' < D''$  è  $B'' < B'$ , pur restando  $B''$  ottuso essendo maggiore di  $B$ .

Analogamente il triangolo  $A''B''C''$  è maggiore del triangolo  $A'B'C'$ , in quanto hanno uguali le basi  $A''B''$  e  $A'B'$ , e l'altezza di  $A''B''C''$  è maggiore di quella di  $A'B'C'$ , in quanto l'angolo ottuso  $B''$  è minore dell'angolo ottuso  $B'$ .

Quindi l'area del quadrangolo  $A'B'C'D'$  è minore dell'area di  $A''B''C''D''$ , e in definitiva *a fortiori* l'area di  $A'B'C'D'$  è minore di quella di  $ABCD$  (1).

(1) La dimostrazione che CRAMER dà di questo suo teorema ha l'aspetto puramente euclideo non contenendo passaggi algebrici i quali sono sostituiti dalle trasformazioni sulle proporzioni. Ho creduto però opportuno presentare la dimostrazione in questa forma per facilitarne la lettura che, per la dimostrazione originale, riesce in verità piuttosto faticosa.

NOTA. L'ipotesi che il quadrangolo  $ABCD$  sia iscritto in un cerchio, cioè che

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{DF},$$

serve solo per passare dalle 7) e 8) alla 9).

Per questo passaggio è sufficiente che sia

$$\frac{AE}{BE} < \frac{AF}{DF}.$$

Notiamo inoltre che le formule 6) 7) 8) esprimono solo le costruzioni eseguite sui quadrangoli  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ .

Possiamo quindi concludere che l'area di un quadrangolo  $ABCD$  è maggiore di quella di un quadrangolo  $A'B'C'D'$  (i cui lati sono uguali agli omologhi del precedente) quando si abbiano le tre disuguaglianze

$$\frac{A'E'}{B'E'} < \frac{AE}{BE} < \frac{AF}{DF} < \frac{A'F'}{D'F'}$$

cioè per gli angoli,

$$E'A'B' > EAB > DAF > D'A'F'$$

o

$$B' - 90^\circ > B - 90^\circ > 90^\circ - D > 90^\circ - D',$$

$$B + D - 180^\circ < B' + D' - 180^\circ,$$

cioè quando la somma di due angoli opposti del primo quadrangolo differisca da  $180^\circ$  gradi meno che non l'analoga somma del secondo.

§ 5. Caso del poligono generale. — Ammettiamo ora che esista un poligono di area massima fra tutti quelli con dati lati: questo postulato è adoperato da CRAMER nel suo ragionamento senza essere esplicitamente enunciato, e su di esso ritorneremo in seguito (Cfr. Cap. V, §§ 8-13). Ciò ammesso, dal teorema del numero precedente deriva l'altro

*Teorema* (di CRAMER). Fra tutti i poligoni di cui sono dati i lati, succedentesi in un ordine assegnato, è massimo il poligono iscritto in un cerchio.

Questo teorema è già stato dimostrato per il quadrangolo.

Si considerino ora i poligoni con  $n > 4$  lati assegnati (in grandezza ed ordine). Per quanto abbiamo ammesso vi sarà

in questa classe un poligono  $P$  di area massima. Se  $P$  non fosse iscrivibile avrebbe almeno quattro vertici

$$A_r A_s A_p A_q$$

non appartenenti a un cerchio.

Considero allora (vedi Fig. 5) il quadrangolo  $A_r A_s A_p A_q$ .

Sostituisco, nel poligono dato, al quadrangolo  $A_r A_s A_p A_q$  il quadrangolo  $A_r' A_s' A_p' A_q'$  che ne abbia gli stessi lati e sia inscritto in un cerchio, e ciò lasciando invariate le altre parti del poligono. Ottengo così un poligono  $P'$  che ha un'area evidentemente maggiore di  $P$  pur avendone gli stessi lati.

Ebbene questo è contro l'ipotesi, quindi  $P$  è iscrivibile in un cerchio.

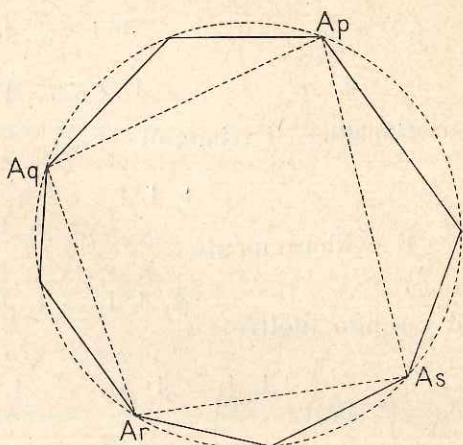


Fig. 5.

§ 6. **Unicità del poligono articolato iscrivibile.** — A questo punto è opportuno dimostrare che è unico il poligono con dati lati iscrivibile in un cerchio.

A tale oggetto premetto alcuni lemmi.

*Lemma I.* Se due poligoni (convesse)

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A_1' A_2' \dots A_n'$$

hanno i lati ordinatamente uguali, e tutti gli angoli uguali meno uno, il lato di chiusura è maggiore in quella che ha l'angolo disuguale maggiore.

Infatti

Supponiamo che sia

$$A_i < A_i'$$

Nota che i poligoni

$$A_1 A_2 \dots A_i \text{ e } A_1' A_2' \dots A_i'$$

sono uguali, e così pure i poligoni

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A'_1 A'_2 \dots A'_n.$$

Considero i triangoli

$$A_1 A_i A_n \text{ e } A'_1 A'_i A'_n.$$

È evidentemente

$$\widehat{A_1 A_i A_n} > \widehat{A'_1 A'_i A'_n}$$

ed essendo inoltre

$$A_1 A_i = A'_1 A'_i \text{ e } A_i A_n = A'_i A'_n$$

è

$$A_1 A_n > A'_1 A'_n$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Da qui deriva immediatamente il

*Lemma II.* Se due poligonali

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A'_1 A'_2 \dots A'_n$$

hanno i lati ordinatamente uguali e gli angoli della prima sono tutti maggiori o uguali (ma non tutti uguali) ai lati della seconda è

$$A_1 A_n > A'_1 A'_n.$$

E come conseguenza si ha

*Lemma III.* Se due poligoni

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A'_1 A'_2 \dots A'_n.$$

hanno i lati omologhi uguali non possono essere tutti gli angoli del primo, meno due consecutivi, maggiori degli omologhi del secondo.

Ciò posto veniamo al

*Teorema.* Esiste un solo poligono iscrivibile in un cerchio che abbia lati dati susseguentisi in un ordine assegnato.

Sieno  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i lati dati; vi sarà certo fra questi un lato del quale nessun altro è più grande: sia esso  $a_n$ .



Supponiamo che esistano due poligoni

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

e

$$A'_1 A'_2 \dots A'_n$$

di lati rispettivamente uguali ad  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ambedue inscrittibili. Vogliamo dimostrare che essi sono uguali.

Per ipotesi è

$$a_1 = A_1 A_2 = A'_1 A'_2$$

$$a_2 = A_2 A_3 = A'_2 A'_3$$

.....

$$a_n = A_n A_1 = A'_n A'_1.$$

Cominciamo col dimostrare che i due cerchi  $C$  e  $C'$  circoscritti ai due poligoni sono uguali.

Supponiamo che non lo siano: sarà allora il raggio  $r$  del primo diverso dal raggio  $r'$  dell'altro: per fissare le idee sia

$$r < r'.$$

Essendo  $a_n$  non minore degli altri lati, i lati

$$A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$$

e

$$A'_1 A'_2, A'_2 A'_3, \dots, A'_{n-1} A'_n$$

saranno inscritti in archi minori di  $\pi$ , ed essendo  $r < r'$  sarà

$$\text{arco } A_1 A_2 > \text{arco } A'_1 A'_2$$

$$\text{arco } A_2 A_3 > \text{arco } A'_2 A'_3$$

.....

$$\text{arco } A_{n-1} A_n > \text{arco } A'_{n-1} A'_n.$$

Sarà quindi per gli angoli

$$A_1 A_2 A_3 > A'_1 A'_2 A'_3$$

$$A_1 A_3 A_4 > A'_1 A'_3 A'_4$$

$$A_1 A_4 A_5 > A'_1 A'_4 A'_5$$

.....

$$A_1 A_{n-1} A_n > A'_1 A'_{n-1} A'_n.$$

Il che è assurdo per il precedente *Lemma III*.

È adunque  $r = r'$ .

Essendo  $r = r'$ , gli archi

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$$

risultano uguali ai corrispondenti, e così pure per gli angoli si ha

$$A_2 = A_2'$$

$$A_3 = A_3'$$

.....

$$A_{n-1} = A'_{n-1}$$

I due poligoni quindi, avendo uguali tutti i lati e  $n-2$  angoli consecutivi, sono uguali.

Da questo teorema, notando che una poligonale  $A_1A_2 \dots A_n$  inscritta in un semicerchio insieme alla sua simmetrica rispetto al lato di chiusura  $A_1A_n$  costituisce un poligono inscritto in un cerchio, si deduce immediatamente il

*Corollario.* È unica la poligonale di dati lati inscritta in un semicerchio.

NOTA. Fra i trattati sugli isoperimetri che mi sono noti, l'unico che esamina la questione di unicità sopra risolta è il *Traité de Geometrie Elementaire* di LEGENDRE. Ma la risposta che egli porge è incompleta. LEGENDRE dimostra effettivamente che è unica la poligonale con dati lati iscritta in un semicerchio ed afferma che la sua dimostrazione si può estendere al caso di un poligono qualunque. In fatto l'estensione del ragionamento svolto dall'A. suppone che ogni lato del poligono inscritto nel cerchio sia sotteso da un arco minore di  $180^\circ$ .

### CAPITOLO III.

#### L'assetto della teoria Classica.

§ 7. **Proprietà di minimo della riflessione della luce e sue conseguenze.** — *Lemma.* Se un raggio di luce deve andare da un punto  $A$  a un punto  $B$  riflettendosi su di una retta  $HK$ , esso segue la via più breve possibile, cioè, dati in posizione i punti  $A$  e  $B$  e la retta  $HK$  esterna al segmento  $AB$ , fra tutte le spezzate  $ACB$  aventi il vertice  $C$  sulla retta  $HK$ , è

minima quella in cui sono uguali gli angoli  $ACH$  e  $KCB$  che  $HK$  forma con i due lati  $AC$  e  $CB$  <sup>(1)</sup>. (Fig. 6).

Per dimostrarlo costruiamo  $B'$  simmetrico di  $B$  rispetto  $HK$ .

Consideriamo la spezzata  $ACB$  in cui

$$HCA = KCB$$

e la spezzata  $AC'B'$  in cui

$$HC'A \neq KC'B$$

Nota che

$$CB' = CB$$

e

$$C'B' = C'B.$$

Siccome

$$HCA = KCB$$

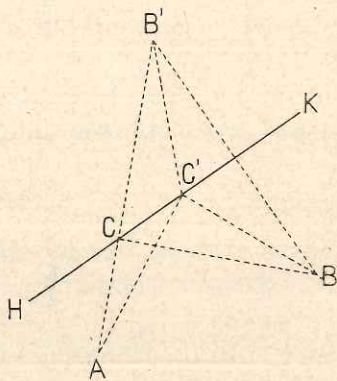


Fig. 6.

i punti  $A, C, B'$  sono allineati.

Ho quindi che nel triangolo  $AC'B'$

$$AB' < AC' + C'B'$$

e per conseguenza

$$AC + CB < AC' + C'B'.$$

Da questo lemma nel caso particolare che  $HK$  sia parallela ad  $AB$  si deduce immediatamente il

*Teorema.* Fra tutti i triangoli di ugual base e ugual area l'isoscele è quello che ha perimetro minore.

Ora per la legge di reciprocità (vedi Art. 11) resta dimostrato senz'altro che:

fra tutti i triangoli di ugual base e ugual perimetro l'isoscele ha la massima area.

Per la dimostrazione diretta di questa proposizione vedi Cap. IV, § 13. Il teorema ora dimostrato può assumere la forma più generale:

Fra due triangoli  $AC_1B$  e  $AC_2B$  di ugual base  $AB$  e ugual

<sup>(1)</sup> ERONE di Alessandria deduce appunto le proprietà della riflessione della luce dall'ipotesi che essa percorra il cammino più breve possibile. Cfr. MACH, *Die Mechanik*, Leipzig 1901, pag. 398.

altezza  $h$ , ha perimetro minore quello in cui è minore la differenza degli altri due lati. (Fig. 7).

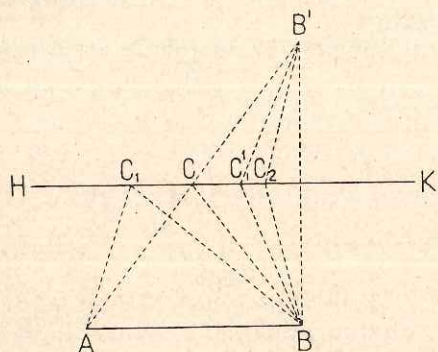


Fig. 7.

Supponiamo

$$AC_1 > C_2B$$

$$AC_2 > C_2B,$$

e per di più

$$AC_2 - C_2B > AC_1 - C_1B,$$

dico che è

$$AC_1 + C_1B < AC_2 + C_2B.$$

Sia  $HK$  la parallela alla  $AB$  alla distanza  $h$ : su  $HK$  si troveranno  $C_1$  e  $C_2$ .

Sia  $C$  il vertice del triangolo isoscele di base  $AB$  e altezza  $h$ . Per le nostre ipotesi  $C_2$  dovrà esser distante da  $C$  più di  $C_1$ . Posso supporre  $C_1$  e  $C_2$  dalla stessa banda di  $C$ : se ciò non fosse mi basterebbe sostituire al triangolo  $AC_1B$  il triangolo  $AC_1'B$  suo simmetrico rispetto la mediana di  $AB$ .

Sia  $B'$  il simmetrico di  $B$  rispetto  $HK$ .

Ho allora evidentemente

$$AC_1' + C_1'B < AC_2 + C_2B'$$

quindi anche

$$AC_1 + C_1B < AC_2 + C_2B.$$

Anche qui per la legge di reciprocità risulta implicitamente dimostrato che:

fra due triangoli di ugual base e ugual perimetro ha area maggiore quello in cui è minore la differenza degli altri due lati.

Per la dimostrazione diretta di questo teorema vedi Cap. IV, § 13.

NOTA. Le dimostrazioni sono qui sviluppate secondo il TOMMASINO; in PAPP0 invece si dimostrano direttamente le due proposizioni reciproche, pur fondandosi sulla proprietà di minimo della riflessione della luce.

§ 8. **Equilateralità del massimo fra i poligoni isoperimetri.** — Ammettiamo ora che esista un triangolo di area massima fra tutti i triangoli isoperimetri. Da questo postulato <sup>(1)</sup> deduciamo facilmente il

*Teorema.* Di tutti i triangoli di egual perimetro l'equilatero è il massimo.

Infatti il triangolo  $ABC$  che realizza il massimo deve essere isoscele rispetto a qualsiasi suo lato assunto come base: deve quindi essere

$$AB = BC = CA.$$

Come per il triangolo ammettiamo che in generale esista un  $n$ -gono di area massima fra tutti gli  $n$ -goni isoperimetri.

Da questo postulato <sup>(2)</sup> deriva il

*Teorema.* Fra tutti i poligoni isoperimetri di un dato numero  $n$  di lati, il massimo deve essere equilatero (Fig. 8).

Sia  $A_1 A_2 \dots A_n$  il poligono che realizza il massimo: se due dei suoi lati per esempio

$$A_1 A_2 \text{ e } A_2 A_3$$

non fossero uguali, sostituendo al triangolo  $A_1 A_2 A_3$  il triangolo isoscele  $A_1 A_2' A_3$  di ugual base e di ugual perimetro, otterremmo un poligono  $A_1 A_2' \dots A_n$  di perimetro uguale a quello di  $A_1 A_2 \dots A_n$  e di area maggiore, contro l'ipotesi che  $A_1 A_2 \dots A_n$  sia il massimo.

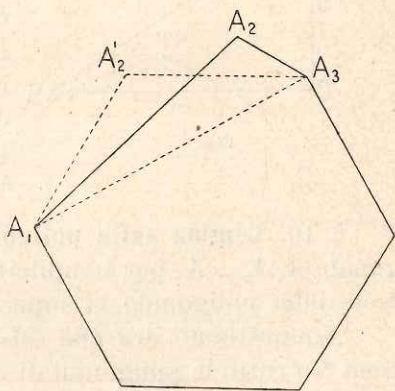


Fig. 8.

Notiamo che mentre il triangolo equilatero è determinato dal suo perimetro, non così accade per i poligoni di più di 3 lati: per determinare quindi quale fra gli  $n$ -agoni isoperimetri abbia la massima area dobbiamo premettere 2 lemmi svolti nei due paragrafi seguenti.

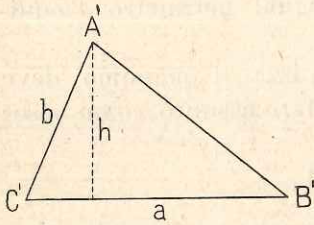
§ 9. **Lemma sul triangolo rettangolo.** — Fra tutti i triangoli di cui sono fissati due lati  $a$  e  $b$ , e per i quali è arbitrario

<sup>(1)</sup> A proposito di questo postulato vedi Cap. V, § 18.

<sup>(2)</sup> Anche a proposito di questo postulato vedi Cap. V, § 18.

l'angolo compreso  $C$ , è massimo quello nel quale  $C$  è retto. (Fig. 9).

Consideriamo i due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  nei quali è



$$BC = B'C' = a$$

$$AC = A'C' = b$$

$$\widehat{C} = 90^\circ \text{ mentre } \widehat{C'} \neq 90^\circ.$$

Dico che l'area di  $ABC$  è maggiore di quella di  $A'B'C'$ . Infatti consideriamo  $CB$  come base del triangolo  $ABC$  e  $C'B'$  come base del triangolo  $A'B'C'$ . Abbiamo che l'altezza di  $A'B'C'$  è minore del lato  $A'B'$ , quindi è minore anche di  $AB$  altezza di  $ABC$ . Il triangolo  $ABC$  avendo ugual base e altezza maggiore del triangolo  $A'B'C'$  ha l'area maggiore.

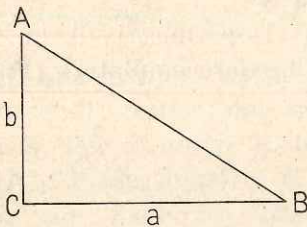


Fig. 9.

§ 10. **Lemma sulla poligonale articolata.** — Data la poligonale  $A_1 A_2 \dots A_n$  per semplicità di dicitura chiameremo superficie della poligonale la superficie del poligono  $A_1 A_2 \dots A_n$ .

Ammettiamo ora che esista una poligonale d'area massima fra tutte le poligonali di dati lati. Ammesso questo postulato <sup>(1)</sup> veniamo al

12. *Teorema.* Fra tutte le poligonali  $A_1 A_2 \dots A_n$  aventi i medesimi lati susseguenti nel medesimo ordine (per le quali cioè sono arbitrari gli angoli) ha l'area massima quella che è inscritta in una semicirconferenza di cui  $A_1 A_n$  è il diametro.

Sia  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$  la poligonale che realizza il massimo. Sia  $A_r$  un suo vertice qualunque. Per dimostrare che la poligonale è inscritta nella semicirconferenza di diametro  $A_1 A_n$  basta che dimostri che l'angolo  $A_1 A_r A_n$  è retto (vedi Fig. 10).

(1) A proposito di questo postulato vedi Cap. V, § 18.

Supponiamo che  $A_r$  non sia retto, esso sarà uguale a

$$90^\circ + \delta^\circ \quad (\delta^\circ \leq 0^\circ).$$

Consideriamo la poligonale  $A_1'A_2'A_n'$  coi lati uguali a quelli della precedente, ma per la quale l'angolo

restando  $A_r'$  è divenuto uguale a  $A_r - \delta$ .  
 $A_2' = A_2, A_3' = A_3, \dots, A_{n-1}' = A_{n-1}.$

Osservo che il poligono

è uguale al poligono  $A_1 A_2 \dots A_r$   
 $A_1' A_2' \dots A_r$

mentre il triangolo  $A_1' A_r' A_n'$ , che vien ad avere l'angolo in  $A_r$  retto è maggiore (per il § 9) del triangolo  $A_1 A_r A_n$ ; inoltre il poligono

$A_r A_{r+1} \dots A_n$   
 è uguale al poligono

$$A_r' A_{r+1}' \dots A_n'.$$

Si conclude che la poligonale

$$A_1' A_2' \dots A_n'$$

ha area maggiore della poligonale

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

contro l'ipotesi che quest'ultima sia la massima.

Abbiamo così che la poligonale d'area massima ha retto ciascun angolo  $A_1 A_r A_n$  ed è quindi iscritta in una semicirconferenza.

§ 11. Massimo fra i poligoni articolati. - Poligoni isoperimetri. — Fra tutti i poligoni di cui sono dati i lati  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$  e il loro modo di succedersi è massimo quello inscritto nel cerchio.

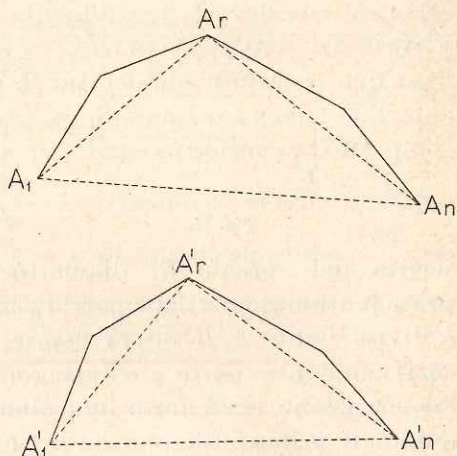


Fig. 10.

Per fissare meglio le idee prendiamo a considerare (Fig. 11) i due esagoni

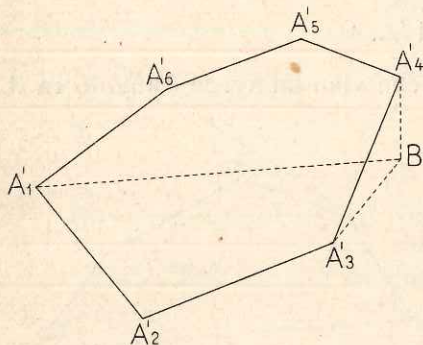
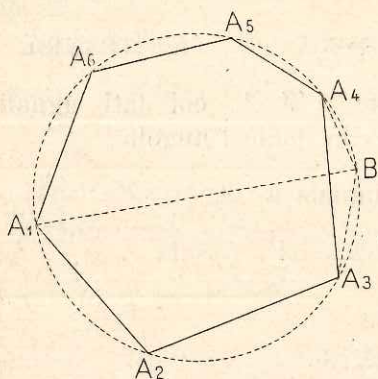


Fig. 11.

$$A_1 A_2 \dots A_6$$

e

$$A'_1 A'_2 \dots A'_6,$$

dei quali solo il primo è inscritto in un cerchio.

Costruiamo il diametro  $A_1 B$ . Siano  $A_3$  e  $A_4$  i due vertici del primo poligono contigui a  $B$ . Costruisco il triangolo  $A_3 B A_4$  e su  $A_3' A_4'$  costruisco il triangolo  $A_3' B' A_4'$  uguale al triangolo  $A_3 B A_4$  e similmente posto. Ciò fatto conduco la  $A_1 B$  e la  $A_1' B'$ .

Nota che le poligonali  $A_1' A_6' A_5' A_4' B'$  e  $A_1' A_2' A_3' A_4' B'$  non possono entrambe essere inscritte in un semicerchio di diametro  $A_1' B'$  perchè altrimenti l'esagono  $A_1' A_2' \dots A_6'$  sarebbe inscritto nel cerchio di diametro  $A_1' B'$ .

Ora per il teorema precedente ciascuna delle parti in cui l'ettagono  $A_1 A_2 A_3 B A_4 A_5 A_6$  è diviso dalla  $A_1 B$  dovrà essere maggiore od uguale della corrispondente parte dell'ettagono  $A_1' A_2' A_3' B' A_4' A_5' A_6'$  e per l'osservazione testè fatta una almeno dovrà essere maggiore: quindi il primo ettagono ha area maggiore del secondo.

Essendo poi uguali i due triangoli  $A_3 B A_4$  e  $A_3' B' A_4'$  sarà anche l'esagono  $A_1 \dots A_6$  maggiore dell'esagono  $A_1' \dots A_6'$ .

Come caso particolare di questo teorema si ha il

*Corollario.* Fra tutti i poligoni isoperimetri di dato numero di lati, massimo è il regolare.

Infatti il massimo deve essere equilatero e deve essere iscritto in un cerchio.

Di qui, tenuto conto che il poligono regolare di  $n$  lati può essere considerato come un poligono non regolare di  $n+1$  lati in cui due lati siano per diritto si deduce (come al § 2



del Cap. I) che il poligono regolare di  $n+1$  lati ha area maggiore del poligono regolare di  $n$  lati che abbia il medesimo perimetro.

§ 12. **Proprietà isoperimetrica del cerchio.** — Se consideriamo il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati, cioè praticamente confondentesi con un poligono regolare di un numero abbastanza grande di lati il cui perimetro sia uguale alla circonferenza del cerchio, tenuto conto che l'area dei poligoni regolari isoperimetri aumenta con l'aumentare del numero dei lati, avremo che il cerchio ha area maggiore di ogni poligono  $P$  che ne abbia lo stesso contorno  $p$ .

Possiamo rendere rigorosa questa deduzione nel modo seguente :

Sia  $n$  il numero dei lati del poligono  $P$ . Sia  $P'$  il poligono regolare di  $2n$  lati di perimetro  $p$ . La sua area sarà maggiore di quella di  $P$ : sia  $\delta$  la differenza fra queste due aree.

Si sa che (Cfr. ENRIQUES e AMALDI, *Geometria Elementare* ed. sesta, n. 533) che l'area di un cerchio differisce dall'area del poligono regolare circoscritto di  $m$  lati per meno dell'area del triangolo isoscele che ha per base il perimetro del poligono e per angoli alla base  $\frac{180^\circ}{m}$ . Determino un  $\bar{m}$  tale che l'area del triangolo isoscele di base  $p$  e di angoli alla base  $\frac{180^\circ}{m}$  sia minore di  $\delta$ . Valendo questo per ogni  $m > \bar{m}$  posso supporre  $\bar{m} > 2n$ .

Considero ora il poligono regolare  $\bar{P}$  di  $\bar{m}$  lati di perimetro  $p$ .

Sia  $\bar{C}$  il cerchio inscritto: la sua circonferenza è minore di  $p$  perimetro di  $\bar{P}$ .

L'area di  $\bar{P}$  è maggiore di quella di  $P'$  che supera di  $\delta$  quella di  $P$ ; quella di  $\bar{C}$  differisce da quella di  $\bar{P}$  per meno di  $\delta$ , quindi l'area di  $\bar{C}$  è maggiore di quella di  $P$ .

Sia ora  $C$  il cerchio di circonferenza  $p$ : esso ha area maggiore di quella di  $\bar{C}$ , quindi *a fortiori* maggiore di  $P$ .

NOTA. Una dimostrazione più breve di questo teorema è la dimostrazione di PAPPUS la quale si ottiene confrontando l'apotema del poligono  $P$  con il raggio del cerchio  $C$  che ha lo stesso perimetro (Cfr. Cap. I, § 3).

## CAPITOLO IV.

La teoria secondo Steiner <sup>(1)</sup>.

§ 13. Lemmi sui triangoli e equilateralità del massimo. —  
*Lemma I.* Fra tutti i triangoli di ugual base e ugual perimetro l'isoscele ha l'area massima. (Fig. 12).

Siano il triangolo  $ABC$ , isoscele, e il triangolo  $A'B'C'$  non isoscele, aventi ugual base e ugual perimetro.

Per ipotesi è adunque  $AB = A'B'$

$$AC + CB = A'C' + C'B'.$$

Nel triangolo  $A'B'C'$  non isoscele, dei due angoli alla base  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  suppongo che sia  $\widehat{B}$  il maggiore.

Per la dimostrazione pongo il triangolo  $A'B'C'$  ad aver la base in comune col triangolo  $ABC$  come in figura. Noto anzitutto che l'angolo  $\widehat{CAB}$  deve essere maggiore dell'angolo  $\widehat{C'AB}$ .

Infatti supposto  $\widehat{C'AB} \geq \widehat{CAB}$ , essendo  $\widehat{C'BA} > \widehat{C'AB}$ , e  $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ , il punto  $C$  risulterebbe interno al triangolo  $AC'B$ , e quindi sarebbe  $AC + CB < AC' + C'B$  il che è contro l'ipotesi. Per la stessa ragione anche  $C'$  deve essere esterno al triangolo  $ABC$ ; essendo inoltre  $\widehat{DAB} < \widehat{CAB}$ , il lato  $AD$

dovrà intersecare il lato  $CB$ : sia  $D$  questo punto d'intersezione.

Essendo  $\widehat{CBA} = \widehat{BAC} > \widehat{C'AB}$ , nel triangolo  $ADB$ , ho

$$DA > DB.$$

Posso quindi prendere nell'interno di  $DA$  un punto  $B''$  tale che

$$DB'' = DB.$$

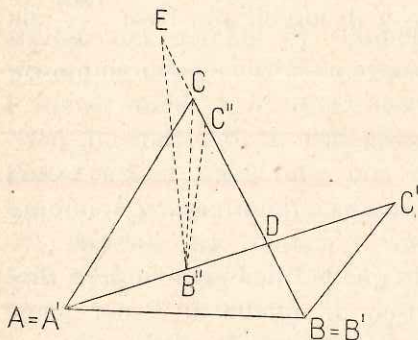


Fig. 12.

Prendo ora sul raggio  $DC$  un segmento  $DC'' = DC'$ . Con

<sup>(1)</sup> Vedi nel *Journal de Crelle* del 1842 le due memorie di STEINER, *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général.*

questo i due triangoli  $DBC'$ ,  $DB''D''$  risultano uguali: se riuscirò a dimostrare che  $C''$  è interno a  $DC'$  e che quindi il triangolo  $DAC$  contiene il triangolo  $DB''C''$ , risulterà il nostro assunto, cioè che il triangolo  $ABC$  (somma dei triangoli  $ADB$  e  $ADC$ ) è maggiore del triangolo  $ABC'$  (somma dei triangoli  $ADB$  e  $BDC'$ ).

Ora è facile vedere che  $C''$  non può cadere in  $C$ , e neppure in un punto  $E$  esterno a  $DC$ . Infatti se  $C''$  cadesse in  $C$  si avrebbero uguali i due triangoli  $DB''C$  e  $DBC'$  quindi  $B''C = BC'$ , e  $CB$ , che è uguale a  $CD + DB'$ , risulterebbe uguale a  $B''C'$ , che è la somma di  $B''D + DC'$ . Si avrebbe allora

$$AB'' + B''C = (AC' - C'B'') + C'B = AC' + C'B - C'B' = AC + CB - CB = AC$$

mentre nel triangolo  $AB''C$  il lato  $AC$  deve essere minore della somma degli altri due.

Dunque  $C''$  non può cadere in  $C$ . Ma tanto meno può cadere in  $E$ , perchè in questa ipotesi l'analisi precedente porterebbe alla conclusione, evidentemente assurda,

$$AB' + B'E = AC - CE.$$

Il nostro teorema resta così completamente dimostrato.

Notiamo che con questo stesso procedimento (vedi Fig. 13) si dimostra la proposizione più generale:

« Dati due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  aventi la medesima base  $AB = A'B'$  e ugual perimetro, se dei quattro angoli  $\widehat{C'AB}$ ,  $\widehat{CBA}$ ,  $\widehat{C'A'B'}$ ,  $\widehat{C'B'A'}$  l'angolo  $\widehat{C'A'B'}$  è il minore, il triangolo  $A'B'C'$  ha area minore del triangolo  $ABC$ .

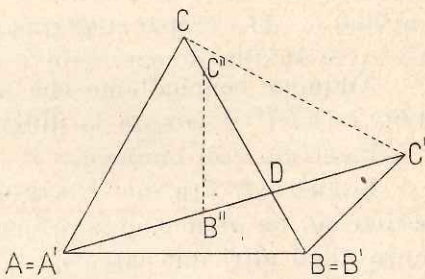


Fig. 13.

*Osservazione.* L'ipotesi che l'angolo  $\widehat{C'A'B'}$  sia minore degli altri angoli

$$\widehat{CAB}, \widehat{CBA}, \widehat{C'B'A'}, \text{ porta } A'C' > AC.$$

Infatti non può essere  $AC = A'C'$  perchè i due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  risulterebbero uguali.

Non può neppur essere  $A'C' < AC$ , perchè verrebbe  $B'C' > BC$ , e quindi nel triangolo  $C'BC$  sarebbe

$$\widehat{C} > \widehat{C'}$$

quindi *a fortiori* nel triangolo  $AC'C$  si avrebbe

$$\widehat{C} > \widehat{C'}$$

e per conseguenza

$$AC' > AC$$

contro l'ipotesi  $AC' < AC$ .

Deve quindi essere  $AC' > AC$ .

Ora noi possiamo supporre di aver sovrapposto il triangolo  $A'B'C'$  al triangolo  $ABC$  ponendo il vertice  $A'$  su quello dei due vertici  $A$  e  $B$  da cui parte il maggiore dei due lati  $AC$  e  $BC$ : possiamo supporre cioè che in figura sia

$$AC > BC.$$

Siccome è  $A'C' > AC$ , si conclude che  $A'C'$  è maggiore anche di  $BC$ .

Essendo poi  $A'C' + C'B' = AC + CB$  si ha che  $C'B'$  è minore di  $AC$  e di  $CB$ , quindi

$$A'C' - C'B' > AC - CB.$$

Adunque concludiamo che nel maggiore dei due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  è minore la differenza dei due lati  $AC - CB$ .

Possiamo così enunciare il

*Lemma II.* Fra due triangoli aventi ugual base e ugual perimetro, ha area maggiore quello in cui è minore la differenza degli altri due lati (<sup>1</sup>).

Ammettiamo ora come fa STEINER (senza dirlo però esplicitamente) che esista un ennagono di area massima fra tutti gli ennagoni di dato perimetro: deduciamo come al Cap. 3 § 8 il

*Teorema.* Fra tutti i poligoni isoperimetri il massimo deve essere equilatero.

(<sup>1</sup>) Per la legge di reciprocità restano implicitamente dimostrati i reciproci dei *lemmi I e II*: chi volesse la dimostrazione diretta di questi reciproci veda Cap. 3 § 7.

§ 14. **Il teorema principale: proprietà isoperimetrica del cerchio.** — Stabilito, come al § 9 del Cap. 3, che fra tutti i triangoli di cui sono fissati due lati  $a$  e  $b$ , e per i quali è arbitrario l'angolo compreso  $C$ , è massimo quello nel quale  $C$  è retto, e ammesso che esista una curva di area massima fra tutte quelle di dato contorno <sup>(1)</sup>, veniamo al

*Teorema principale.* Fra tutte le figure di ugual perimetro il cerchio è quella che ha l'area massima.

Sia  $C$  la curva di perimetro  $p$  che racchiude l'area massima.

Anzitutto  $C$  deve essere convessa. Infatti: supponiamo che la  $C$  possieda una concavità (vedi Fig. 14), cioè che esistano due punti  $A$  e  $B$  del contorno tali che la corda  $AB$  sia esterna alla  $C$ . I punti  $A$  e  $B$  dividono la  $C$  nei due archi  $A\bar{D}B$  e  $A\bar{E}B$ . Così l'area racchiusa dalla curva  $C$  risulta la differenza fra l'area racchiusa dal segmento  $AB$  e dall'arco  $BEA$  e l'area racchiusa del segmento  $AB$  e dall'arco  $ADB$ .

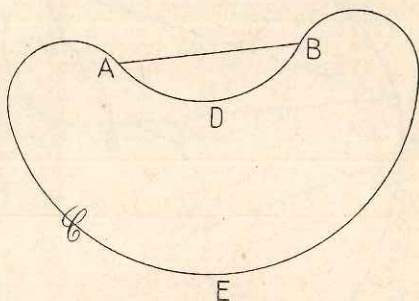


Fig. 14.

L'area quindi racchiusa dalla  $C$  è minore dell'area racchiusa dalla curva  $C'$  composta della corda  $AB$  e dall'arco  $BEA$ . La lunghezza di  $C'$  è evidentemente minore di  $p$ . Con una similitudine riduciamo  $C'$  con una curva  $C''$  di lunghezza  $p$ .  $C''$  avrà area maggiore di  $C'$ , quindi anche di  $C$ , contro l'ipotesi che la  $C$  abbia l'area massima. La curva  $C$ , quindi, non può avere concavità.

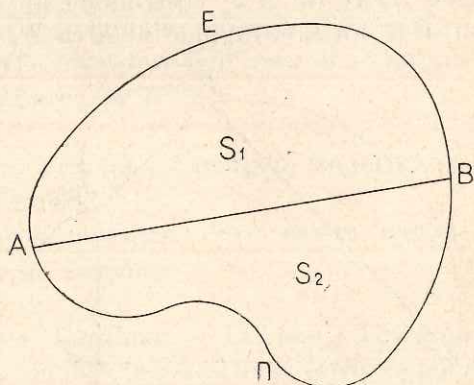


Fig. 15.

Ciò premesso consideriamo sulla curva  $C$  un punto arbitrario  $A$ : sia  $B$  il punto della  $C$ , tale che l'arco  $ADB$  sia uguale all'arco  $AEB$  (vedi Fig. 15).

<sup>(1)</sup> A proposito di questo postulato vedi Cap. V.

Siano  $S_1$  e  $S_2$  le due parti in cui la superficie di  $C$  è divisa da  $AB$ . Dico che  $S_1$  e  $S_2$  hanno ugual area. Supponiamo che ciò non sia e supponiamo che sia  $S_1$  la parte che ha l'area maggiore. Sostituisco a  $S_2$  la figura  $S_2'$  simmetrica di  $S_1$  rispetto ad  $AB$ .  $S_1$  e  $S_2'$  insieme costituiscono una figura  $C'$  che evidentemente ha perimetro uguale al perimetro di  $C$  ed ha area maggiore, e ciò contro l'ipotesi che  $C$  realizzi il massimo.

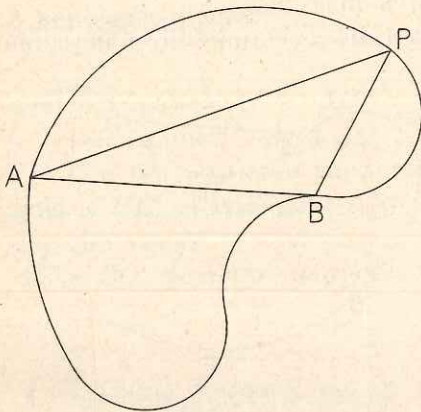


Fig. 16.

Dimostrerò ora che l'arco  $AEB$  e l'arco  $ADB$  sono due semicerchi, e così risulterà dimostrato che  $C$  è un cerchio. Per dimostrare che questi archi sono due semicerchi, basta che dimostri che da un punto qualunque  $P$  di uno di essi il segmento  $AB$  è visto secondo un angolo retto. Dimostreremo questo per assurdo: supponiamo adunque che l'angolo  $APB$  non sia retto (v. Fig. 16). Costruiamo

(vedi Fig. 17) un triangolo  $A'P'B'$ , rettangolo in  $P'$ , e tale che sia

$$A'P' = AP, \quad P'B' = PB.$$

Il triangolo così ottenuto ha area maggiore del triangolo  $APB$ . Su  $A'P'$  costruiamo un arco uguale all'arco  $\widehat{AP}$  e su  $P'B'$  un arco uguale all'arco  $\widehat{PB}$ . Fatto questo costruiamo

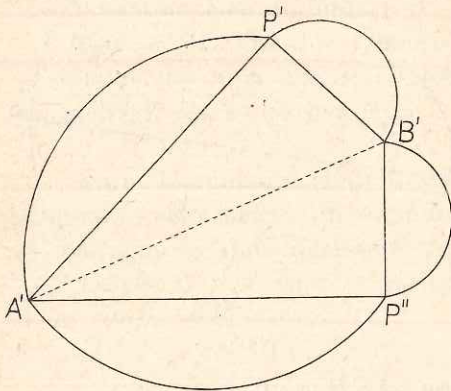


Fig. 17.

gli archi  $A'P''$  e  $P''B'$  simmetrici di  $A'P'$  e  $P'B'$ . Otteniamo così la curva  $A'P''B'P'$  che ha evidentemente contorno uguale a quello della curva  $C$ , pur avendone area maggiore, contro l'ipotesi che la  $C$  fosse la curva d'area massima.

Quindi l'angolo  $APB$  non può non esser retto; l'arco  $APB$  è adunque un semicerchio, e la curva  $C$  un cerchio.

§ 15. I teoremi di Cramer e Zenodoro dedotti dal teorema principale.

*Teorema* (di CRAMER). Fra tutti i poligoni con dati lati il massimo è quello inscrittibile in un cerchio.

Consideriamo i poligoni  $P$  e  $P'$  aventi i medesimi lati. (Fig. 18).

Supponiamo  $P$  inscrittibile in un cerchio e  $P'$  non inscrittibile. Circoscriviamo a  $P$  il cerchio  $C$ .

Costruiamo sul lato  $A'B'$  di  $P'$  un arco di cerchio uguale all'arco  $\widehat{AB}$  del centro  $C$ . Nello stesso modo operiamo sugli altri lati di  $P'$ .

Otteniamo così una figura  $F'$  composta del poligono  $P'$  e di un certo numero di segmenti di cerchio (numero uguale a quello dei lati di  $P$ ). Questa figura ha come contorno una linea la cui lunghezza è evidentemente la lunghezza del cerchio  $C$ . È pure evidente che l'area di  $C$  meno l'area di  $P$  è uguale all'area di  $F'$  meno l'area di  $P'$ , ma l'area di  $C$  è maggiore dell'area di  $F'$ , quindi l'area di  $P$  è maggiore dell'area di  $P'$ .

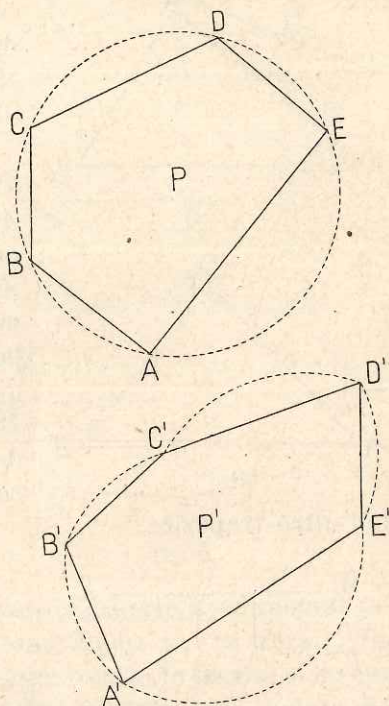


Fig. 18.

*Teorema* (di ZENODORO). Fra tutti i poligoni isoperimetri di  $n$  lati il massimo è il regolare.

Infatti l' $n$ -gono di area massima deve essere equilatero (§ 8) e inscrittibile in un cerchio.

§ 16. Il metodo di simmetrizzazione. — Del suo « Teorema principale » STEINER dà ben cinque dimostrazioni: eredo opportuno riassumere qui una di esse, interessante per il metodo su cui si fonda, metodo che STEINER stesso estende alla dimostrazione che la sfera è, fra i solidi di uguale superficie, quello di volume massimo.

Facciamo prima due osservazioni:

Sia dato il triangolo scaleno  $ABC$ : sappiamo già che il triangolo isoscele  $A'B'C'$  di ugual base e ugual altezza ha la somma dei lati  $A'C' + C'B'$  minore della somma dei lati omologhi  $AC + CB$  dell'altro triangolo (vedi Fig. 19).

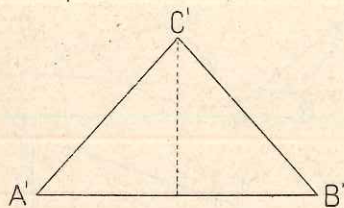
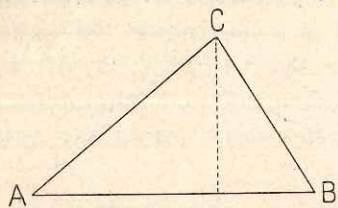


Fig. 19.

Come evidente conseguenza di ciò, si ha che dato un trapezio  $ABCD$  nel quale i lati  $AD$  e  $CB$  non siano uguali, il trapezio  $A'B'C'D'$  (vedi Fig. 20) avente la medesima altezza e le medesime basi che il precedente, ma nel quale i lati non paralleli  $A'D'$  e  $B'C'$  siano uguali, ha la somma dei lati  $A'D' + B'C'$  minore della somma dei lati omologhi  $AD + BC$

dell'altro trapezio.

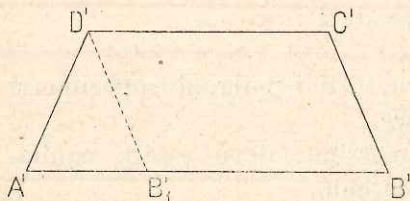
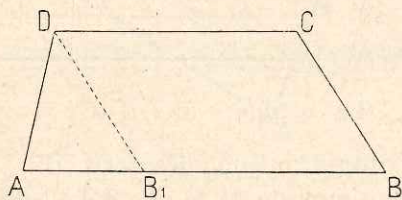


Fig. 20.

Consideriamo ora il pentagono  $ABCDE$ .

Servendoci delle due proposizioni precedenti è facile costruire, come mostra la figura 21, un ottagono  $A'B_1'E'C_1'D'C'E_1'B'$  equivalente al pentagono dato, ma di perimetro minore, e avente un asse di simmetria  $A'D'$  parallelo a una direzione prefissata.

Dato così un poligono qualunque che non abbia un asse di simmetria parallelo a una qualche retta, esso può esser trasformato in un poligono equivalente, e di minor perimetro, avente un asse di simmetria parallelo a questa retta.

Siccome questo stesso procedimento si può evidentemente adoperare per una curva qualunque, si conclude che la curva la quale ha l'area massima fra tutte quelle che ne hanno lo



stesso perimetro, deve avere un asse di simmetria parallelo a qualunque retta, cioè deve essere un cerchio.

Tralasciamo di riprodurre le altre tre dimostrazioni di questo stesso teorema, nonchè le molteplici applicazioni fattene da STEINER sembrandoci tuttocì di secondario interesse. Crediamo piuttosto utile seguire ancora STEINER nella sua

§ 17. Teoria degli isoperimetri per le figure sferiche. — La teoria degli isoperimetri ora svolta per le figure piane si può ripetere per le figure sferiche, quasi alla lettera: valgono

infatti per le figure sferiche le stesse proprietà enunciate per le figure piane, in quanto sussistono anche per la sfera le due proposizioni fondamentali che reggono tutta la teoria: si ha cioè

1) Fra tutti i triangoli sferici di data base e dato perimetro l'isoscele racchiude la massima superficie.

2) Fra tutte le figure sferiche di dato perimetro il cerchio racchiude l'area massima.

La dimostrazione della proposizione 1) si dà ripetendo parola per parola la dimostrazione data al § 13 per la proposizione analoga riguardante i triangoli piani.

Anche la proposizione 2) si dimostra come l'analoga per le figure piane, occorre però dimostrare un lemma analogo a quello sul triangolo rettangolo (Cfr. § 9 e § 14) lemma il cui enunciato e la cui dimostrazione differiscono notevolmente da quelli dati per le figure piane.

Il lemma per le figure sferiche si enuncia così:

Fra tutti i triangoli, di cui sono date le lunghezze di due lati, il massimo è quello nel quale l'angolo compreso fra i due lati è uguale alla somma degli altri due: in questo triangolo il terzo lato è il diametro del cerchio circoscritto al triangolo stesso.

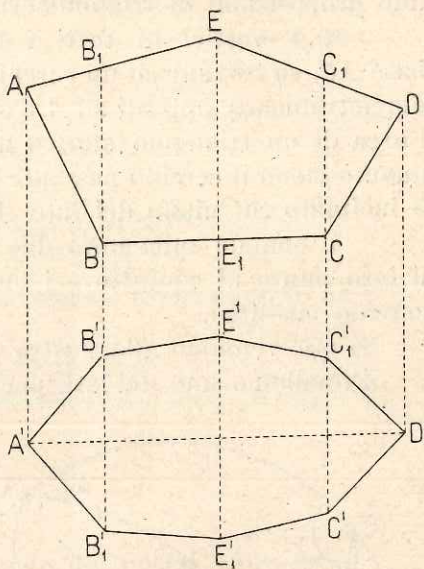


Fig. 21.

Prima di dimostrare questo *lemma* sarà bene ricordare due proposizioni di trigonometria sferica.

a) I vertici di tutti i triangoli equivalenti, di data base  $AC$ , si trovano su un cerchio che passa per i punti  $A_1$  e  $C_1$  diametralmente opposti ad  $A$  e a  $C$ , e reciprocamente: inoltre l'area di un triangolo sferico di base  $AC$  è tanto maggiore quanto meno il cerchio passante per il suo vertice e per  $A_1$  e  $C_1$  è inclinato sul piano del lato  $AB$ .

b) quando sulla sfera due cerchi sono tangenti fra loro, il loro punto di contatto e i loro poli si trovano su uno stesso cerchio massimo.

E ora veniamo alla nostra dimostrazione (vedi Fig. 22).

Prendiamo uno dei lati, per esempio  $AC$ , come base fissa:

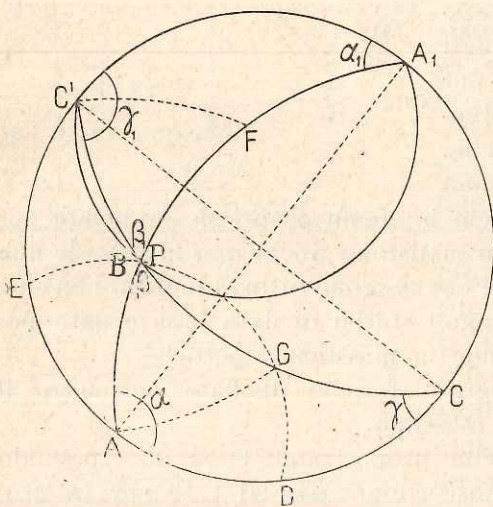


Fig. 22.

allora il nostro triangolo, di cui è data anche la lunghezza del lato  $AB$ , dovrà avere il vertice  $B$  sul cerchio  $DBE$  di cui  $A$  è il polo e di cui il raggio sferico è uguale alla lunghezza data di  $AB$ . Siano  $A_1$  e  $C_1$  i punti diametralmente opposti ad  $A$  e a  $C$ : allora ciascuno dei cerchi che passano per  $A_1$  e  $C_1$  è il luogo geometrico dei vertici di un sistema di triangoli equivalenti costruiti sulla base  $AC$ .

Il cerchio  $C_1BA_1$ , che contiene il vertice del triangolo massimo che ricerchiamo, dovrà essere inclinato il meno possibile sul piano del lato  $AC$ ; esso, dovendo inoltre avere almeno un punto (il vertice del triangolo cercato) comune col cerchio  $DBE$ , sarà il cerchio  $C_1BA_1$  tangente in  $B$  al cerchio  $DBE$ . Allora il triangolo  $ACB$  che ha per vertice il punto  $B$ , punto di contatto dei due cerchi  $C_1BA_1$  e  $DBE$ , è il triangolo cercato.

Notiamo che per la proposizione b) il polo  $F$  del cerchio  $C_1BA_1$  si trova sul prolungamento del lato  $AB$ .

Sarà allora

$$FA_1 = FB = FC_1$$

e nel triangolo  $A_1BC_1$  si ha

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1.$$

Ma è anche

$$\alpha + \alpha_1 = \gamma + \gamma_1 = 180^\circ$$

(perchè  $\alpha$  e  $\alpha_1$  sono uguali agli angoli supplementari di  $z$  e  $\gamma$ )  
onde

$$\beta_1 = \beta$$

si conclude quindi che è

$$\alpha = \beta + \gamma$$

il che costituisce la prima parte del nostro enunciato.

Dimostriamo ora la seconda parte.

Costruiamo il cerchio massimo  $AC$  che divide l'angolo  $\alpha$  in modo che sia

$$BAC = \beta: BAC = \gamma.$$

Allora si ha

$$AG = BC = CG$$

dunque  $G$  è il polo e  $BC$  il diametro del cerchio circoscritto al triangolo  $ABC$ , che è quanto volevamo dimostrare.

Restando così stabilite per le figure sferiche le due proposizioni 1) e 2) restano implicitamente dimostrate tutte le proprietà che da esse derivano, fra le quali notiamo le più importanti, cioè:

- 1) Il cerchio ha area maggiore d'ogni altra figura sferica di ugual contorno.
- 2) Fra tutti poligoni sferici di dati lati il massimo è quello inscrittibile in un cerchio.
- 3) Fra tutti gli  $n$ -goni sferici di dato perimetro il massimo è il regolare.
- 4) Fra due poligoni sferici regolari di ugual perimetro è maggiore quello che ha maggior numero di lati.

## CAPITOLO V.

## La critica moderna e l'esistenza del massimo.

§ 18. Sul postulato del massimo. - Caso del triangolo. — Al § 11 abbiamo dimostrato che l' $n$ -gono regolare ha area maggiore di ogni  $n$ -gono non regolare che ne abbia ugual perimetro, e ciò ammettendo che fra tutti gli  $n$ -goni isoperimetri né esista uno che racchiude l'area massima, e, fondandoci su un postulato analogo, abbiamo dimostrato che fra gli  $n$ -goni con dati lati quello inscritto nel cerchio ha l'area maggiore di tutti.

Per PAPPO e per tutti i suoi successori, STEINER compreso, non v'era alcun dubbio sull'esistenza di questo massimo, esistenza che veniva sempre tacitamente ammessa; solo la critica moderna (cfr. Art. 13) ha messo in luce che si racchiude qui un postulato di cui è naturale chiedere la dimostrazione, affinché venga colmata la lacuna tradizionale.

A ciò si perviene appunto mercè i teoremi sull'esistenza del massimo e del minimo delle funzioni continue, da cui si deduce in particolare che esiste effettivamente un  $n$ -gono di area massima tanto fra quelli di dato perimetro, come fra quelli di dati lati (cfr. Art. 13). Parimente, la teoria delle funzioni di linea permette di stabilire l'esistenza d'una linea d'area massima fra tutte quelle di lunghezza data (ibidem).

Se si fa astrazione da questi teoremi generali, e non si dà per concessa *a priori* l'esistenza del massimo a cui essi si riferiscono, i procedimenti svolti innanzi per stabilire i teoremi di ZENODORO e di CRAMER, ci appaiono come dimostrazioni insufficienti; un poligono di dato perimetro non regolare, oppure un poligono di dati lati non inscritto in un cerchio, danno luogo ad una *serie illimitata di trasformazioni* che aumentano l'area senza mutare il perimetro o i lati dati.

Che cosa si può dedurre rigorosamente da ciò?

Un esame approfondito della questione basato sul *postulato della continuità* (Vol. I, Art. 5) ci farà vedere che la serie anzidetta di trasformazioni permette di *riconoscere l'esistenza d'una figura limite* che risponde al massimo richiesto. In questo modo si riesce dunque a colmare la lacuna delle trat-

tazioni classiche e a dimostrare rigorosamente i teoremi di ZENODORO e di CRAMER sui poligoni.

È ovvio inoltre che la proprietà di massimo del cerchio (che diventa il teorema principale di STEINER) risulterà quindi a sua volta rigorosamente dimostrata dato che la lunghezza e l'area d'una linea chiusa sono definiti come limiti della lunghezza e dell'area dei poligoni iscritti.

Esaminiamo ora la dimostrazione data al § 8 del fatto che il triangolo equilatero è il massimo fra tutti quelli di egual perimetro.

Ammettendo l'esistenza del massimo e fondandoci sul teorema che dice essere il triangolo isoscele maggiore di ogni altro di ugual base e ugual perimetro, affermiamo che il triangolo che racchiude l'area massima deve essere isoscele rispetto a qualunque suo lato assunto come base, cioè deve essere equilatero.

Possiamo trasformare come ha fatto LHULLIER <sup>(1)</sup>, questo ragionamento per assurdo in un procedimento infinito che trasforma un triangolo qualunque  $ABC$ , non equilatero, in un altro equilatero di ugual perimetro e di area maggiore.

Sia  $3p$  la somma dei lati di  $ABC$ .

Riduciamo  $ABC$  isoscele sulla base  $AB$  conservandone il perimetro. Otteniamo un triangolo  $A_1B_1C_1$  di area maggiore.

Sia  $x$  la differenza fra uno dei due lati uguali e la base  $A_1B_1$ . Preso uno dei due lati uguali, per esempio  $A_1C_1$  come nuova base, ripetiamo la stessa operazione. Otteniamo un triangolo isoscele  $A_2B_2C_2$  nel quale la differenza fra la base e uno dei lati uguali è evidentemente  $\frac{x}{2}$ . Ripetendo indefinitamente questa operazione abbiamo una successione dei triangoli

$$ABC \quad A_1B_1C_1 \quad A_2B_2C_2 \dots \quad A_nB_nC_n \dots$$

di ugual perimetro e di area crescente nei quali la differenza dei lati tende a zero, avendo essa per l'ennesimo triangolo il valore  $\frac{x}{2^n}$ .

(1) Vedi nella *Polygonometrie* di LHULLIER, (Genève, 1789) l'*Abrégé d'Isopérimétrie*.

I triangoli anzidetti tendono adunque al triangolo equilatero di perimetro  $3p$ . Siccome le loro aree vanno crescendo, si ha che l'area di  $ABC$  è minore dell'area del triangolo equilatero che ne abbia il medesimo perimetro  $3p$ .

§ 19. **Procedimento di Caratheodory.** — In modo analogo, quantunque più complicato, si riesce a dimostrare che, fra tutte le poligonali di dati lati, quella inscritta in una semicirconferenza racchiude l'area massima, e ciò nel modo seguente.

Consideriamo la poligonale  $A_0A_1\dots A_n$  non inscritta in una semicirconferenza. È intuitivo che se la poligonale  $A_0A_1\dots A_n$  avesse qualche angolo concavo, la si potrebbe ridurre convessa con aumento di area; e ciò è dimostrato rigorosamente al § 21 (Corollario del teorema 2). Possiamo quindi supporre che la poligonale  $A_0A_1\dots A_n$  sia convessa.

Indichiamo con  $r_i$  e  $s_i$  i segmenti  $A_iA_0$  e  $A_iA_n$ , e con  $\theta_i$  indichiamo l'angolo

$$A_0A_iA_n.$$

Notiamo che se rendiamo retto l'angolo sotto il quale  $A_0A_n$  è veduto dal vertice  $A_i$ , l'area della poligonale viene aumentata di

$$\frac{1}{2}r_i s_i(1 - \text{sen } \theta_i).$$

Ciò posto, nella nostra poligonale  $A_0A_1\dots A_n$ , rendiamo retto l'angolo  $\theta_i$  per il quale è massimo il valore

$$\frac{1}{2}r_i s_i(1 - \text{sen } \theta_i)$$

e se vi sono più angoli pei quali questo valore è massimo, rendiamo retto l'angolo di indice minore. Otteniamo così una nuova poligonale  $A'_0A'_1\dots A'_n$ , che riduciamo convessa qualora non lo sia, e su questa operiamo come sulla  $A_0A_1\dots A_n$  e così di seguito.

Otteniamo così una successione di poligonali

$$P_1 P_2 \dots P_n$$

nelle quali l'area va crescendo.

Dico anzitutto che esse tendono alla poligonale con lati uguali a quelli della  $P$ , inscritta in una semicirconferenza.

Per dimostrarlo riportiamo tutte queste poligonali ad avere in comune il punto  $A_0$  ed avere l'estremo  $A_n$  su una medesima semiretta. Su questa semiretta otteniamo così un insieme numerabile di punti

$$A_n A_n' A_n'' \dots A_n^i \dots$$

che ammetterà almeno un punto limite: sia  $M$  uno dei punti limiti di questo insieme:  $M$  non sarà certo all'infinito essendo tutti i punti  $A_n^i$  distanti da  $A_0$  per meno della lunghezza della poligonale  $A_0 A_1 \dots A_n$ .

Possiamo allora dalla successione delle  $P$  estrarre una successione di poligonali  $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n \dots$  i cui estremi da un certo punto in poi cadono nell'intervallo  $M - \frac{\varepsilon}{2}, M + \frac{\varepsilon}{2}$ , dove  $\varepsilon$  è arbitrariamente piccolo.

Poichè le aree delle poligonali  $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n \dots$  non possono crescere all'infinito, così da una certa poligonale in poi il massimo valore di

$$\frac{1}{2} r_i s_i (1 - \text{sen } \theta_i)$$

deve essere minore di una quantità  $\eta$  piccola a piacere; quantità che possiamo facilmente determinare in modo che i vertici di ciascuna poligonale (da quella in poi) distino per meno di  $\frac{\varepsilon}{2}$  dal semicerchio che ha per diametro la congiungente gli estremi della poligonale. Abbiamo quindi che le poligonali  $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n \dots$ , da una di esse in poi, hanno tutti i vertici distanti dal semicerchio di diametro  $OM$  per meno di  $\varepsilon$ .

Esse quindi tendono a una poligonale

$$\bar{A}_0 \bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$$

inscritta in questo semicerchio. Avendo tutte queste poligonali i lati uguali ai lati della poligonale  $A_0 A_1 \dots A_n$ , si ha che anche la poligonale limite ha i lati uguali a quelli della poligonale  $A_0 A_1 \dots A_n$ .

A questo punto notiamo che, essendo unica la poligonale di dati lati inscrittibile in una semicirconferenza, la successione

$$A_n A_n' A_n'' \dots A_n^i \dots$$

ammette un unico punto limite, e quindi, come successione

$$\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n \dots$$

si può prendere addirittura la successione

$$P_1 P_2 \dots P_n \dots$$

Siccome poi queste poligonali hanno area crescente, così la poligonale limite  $\bar{A}_0 \bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ , che è la poligonale inscrittibile in una semicirconferenza, ha area maggiore della poligonale  $A_0 A_1 \dots A_n$  dalla quale eravamo partiti. In questo modo resta stabilito il nostro teorema indipendentemente dal postulato del massimo.

NOTA. La dimostrazione che abbiamo esposta è dovuta a CARATHÉODORY. Veramente egli (*Math. Annalen*. Bd. 69, pag. 133) adopera questo procedimento per dimostrare che il semicerchio racchiude area maggiore di qualunque altra curva aperta di ugual lunghezza. Notiamo che anche in questo caso bisogna supporre che le curve di cui si tratta siano convesse. A questo proposito Cfr. § 21.

§ 20. Metodo di Study. — Sarà bene far vedere come anche il metodo di simmetrizzazione adoperato da STEINER per passare da una figura a un'altra di ugual perimetro, ma di area maggiore, metodo che gli permette di concludere che il cerchio ha l'area massima fra tutte le figure di ugual perimetro, possa esser modificato in modo da dare un procedimento col quale si trasforma un poligono qualunque in un cerchio di ugual perimetro e di area maggiore.

Il procedimento che stiamo per esporre è dovuto a STUDY <sup>(1)</sup>.

Consideriamo un poligono convesso  $P$  di perimetro  $p$ .

Esso può essere supposto convesso: infatti è intuitivo che se non fosse convesso lo si può render tale aumentandone l'area e conservandone il perimetro  $p$ , come è rigorosamente stabilito al § 21 (Teorema 1°).

Dividiamo il contorno in due parti uguali mediante i punti  $A$  e  $B$ . La retta  $AB$  taglia il poligono in due parti

<sup>(1)</sup> *Math. Annalen*, Bd. 69, pag. 157.



$P'$  e  $P''$ . Supponiamo che sia  $P' \geq P''$ . A  $P''$  sostituisco il simmetrico di  $P'$ : ottengo così un poligono  $P_1$  di perimetro  $p$  e di area maggiore od uguale di quella di  $P_1$  e avente  $AB$  come asse di simmetria.

Siano ora  $C$  e  $D$  i due punti di mezzo dei semiperimetri  $AB$ . La  $CD$  è perpendicolare ad  $AB$  e divide il poligono  $P_1$  in due punti  $P_1'$  e  $P_1''$ . Supponiamo che sia  $P_1' \geq P_1''$ . A  $P_1''$  sostituisco il simmetrico di  $P_1'$  rispetto a  $CD$ , e ottengo così un poligono  $P_2$  avente due assi di simmetria  $AB$  e  $CD$ , perimetro  $p$  e area maggiore od uguale a quella di  $P_1$  (vedi Fig. 23).

Ora indichiamo con  $O$  il punto d'intersezione dei due assi di simmetria, e con  $M$  il punto di mezzo della parte di contorno compreso fra  $A$  e  $B$ .

Mando per  $M$  la retta parallela alla bisettrice dell'angolo  $COB$ . Essa intersechi

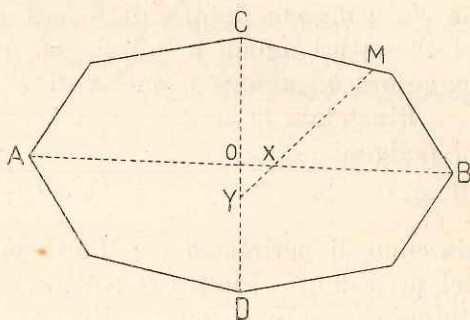


Fig. 23.

$OC$  in  $Y$  e  $OB$  in  $X$ .

Consideriamo i due settori

$$S_1 = CYM \quad \text{e} \quad S_2 = MXB.$$

Noto che gli angoli  $CYM$  e  $MXB$  sono uguali a  $\frac{360^\circ}{8}$  e che la somma dei settori  $S_1 + S_2$  è maggiore o uguale del settore  $COB$ .

Supponiamo  $S_1 \geq S_2$ .

Se immaginiamo i due lati  $CY$  e  $MY$  di  $S_1$  costituiti da specchi,  $S_1$  per successive riflessioni ci da un poligono  $P_3$ , dotato di quattro assi di simmetria e composto di otto settori uguali a  $S_1$ : il poligono  $P_3$  così ottenuto ha evidentemente quindi perimetro  $p$  e area maggiore od uguale a quella di  $P_2$ .

Sia ora  $M_1$  il punto di mezzo di  $CM$ . Mandiamo da  $M_1$  la parallela alla bisettrice dell'angolo  $CYM$ .

Essa incontri  $CY$  in  $Y_1$  e  $YM$  in  $X_1$ .

Consideriamo i due settori

$$S_1' = CY_1M_1 \quad S_1'' = M_1X_1M$$

È

$$S_1' + S_1'' \geq S_1.$$

Supponiamo che sia

$$S_1' \geq S_1''.$$

Siccome l'angolo  $CY_1M_1$  è uguale  $\frac{360^\circ}{16}$ , così il settore  $S_1'$  mi definisce un poligono  $P_1$ , che si ottiene da  $S_1'$  come  $P_2$  da  $S_1$ , poligono dotato di 8 assi di simmetria e composto di 16 settori uguali a  $S_1'$ .  $P_1$  ha quindi perimetro  $p$  e area maggiore od uguale a quella di  $P_2$ .

Ripetendo la stessa costruzione otteniamo una successione di poligoni

$$P_1 P_2 \dots P_n \dots$$

ciascuno di perimetro  $p$  e di area maggiore od uguale a quella del precedente: inoltre il poligono  $P_i$  è dotato di  $2^{i-1}$  assi di simmetria ed è formato di  $2^i$  settori uguali fra di loro e ottenuti per successive immagini speculari di un settore  $S_i$ .

Indichiamo con  $r_i$  e  $s_i$  i due lati del settore  $S_i$ , lati che risultano inclinati fra di loro di  $\frac{360^\circ}{2^i}$ . Siccome il settore  $S_i$  è limitato da  $r_i$  e  $s_i$  e dalla  $2^i$ -esima parte del perimetro  $p$  del poligono  $P_i$ , così la differenza fra i suoi due lati  $r_i$  e  $s_i$  sarà minore di  $\frac{p}{2^i}$  e tutti i punti del contorno di  $P_i$  disteranno per meno di  $\frac{2p}{2^i}$  dal cerchio di raggio  $\rho = r_i$ .

L'aggregato dei valori  $r_i$  avrà al meno un valore limite  $r$ .

Allora dalla successione dei poligoni  $P_i$  possiamo estrarre una successione di poligoni  $\bar{P}_i$  convergenti al cerchio  $C$  di raggio  $r$ .

Ora poichè la lunghezza della linea limite è minore od uguale del limite della lunghezza della linea variabile si avrà

$$p \geq 2\pi r.$$

Per di più ci occorre far vedere che  $C$  ha area maggiore di  $P$ . Siccome i poligoni  $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n \dots$  hanno ciascuno area

maggiore od uguale del precedente, così è evidente che il cerchio  $C$  avrà area maggiore od uguale a quella di  $P$ . Ora per esser sicuri che  $C$  abbia area effettivamente maggiore di quella di  $P$  occorrerebbe dimostrare (il che non è difficile) che non può accadere che ciascuno dei poligoni  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, \dots$  abbia area precisamente uguale a quella del precedente. Ma senza fare quest'analisi ci basterà trovare il modo di passare dal poligono  $P$  al poligono  $P_1$  con effettivo aumento di area. A ciò si arriva facilmente servendosi della costruzione di STEINER indicata al § 16. Ottenuto con essa dal poligono  $P$  un poligono  $P_1'$  avente area uguale e perimetro minore, e un asse di simmetria  $AB$ , con una similitudine si otterrà il poligono  $P_1$  avente lo stesso perimetro  $p$ , area certamente maggiore e un asse di simmetria  $AB$ . Dimostrato così che si può ottenere un cerchio  $C$  d'area maggiore di quella di  $P$  e di perimetro minore od uguale, risulta subito che il cerchio, la cui circonferenza sia uguale a  $p$ , ha area maggiore di quella di  $P$ , che è quanto si voleva stabilire.

NOTA. Modificato leggermente il procedimento di STUDY può essere reso privo di passaggio al limite.

Preso il poligono  $P$  col metodo di STEINER ora accennato, lo riduciamo a un poligono  $P'$  di perimetro uguale e area maggiore. Sia  $\alpha$  la differenza fra le aree di  $P$  e  $P'$ . Al poligono  $P'$  applichiamo il procedimento di STUDY, fermandoci al poligono  $P_i$  per il quale è

$$\pi \cdot p \cdot \frac{4p}{2^i} < \alpha.$$

Considero il cerchio di raggio

$$r_i - \frac{2p}{2^i}$$

esso è tutto interno al poligono  $P_i$  quindi ha circonferenza minore di  $p$ .

Invece il cerchio di raggio

$$r_i + \frac{2p}{2^i}$$

è esterno al poligono  $P_i$  e quindi ne ha superficie maggiore.

Notiamo inoltre che è  $r_i < p$ : la differenza quindi fra l'area di  $C$  e quella di  $P_i$  è minore di

$$\pi \cdot p \frac{4p}{2_i}$$

e quindi minore di  $\alpha$ .

Siccome  $P_i$  ha area maggiore di  $P'$ , così l'area di  $C$  è maggiore dell'area di  $P$ : quindi a maggior ragione il cerchio di circonferenza  $p$  avrà area maggiore di quella di  $P$ .

§ 21. Sulla convessità. — Eliminato il postulato del massimo, dal quale si deduce che di tutte le curve isoperimetre la maggiore deve essere convessa, e che così pure deve essere senza concavità la poligonale e il poligono d'area massima fra quelli con dati lati, nel riprodurre i procedimenti di CARATHÉODORY e di STUDY, abbiamo dovuto supporre che le poligonali, i poligoni e le curve che abbiamo incontrato fossero convessi. Dovendosi ora giustificare appieno queste ipotesi mi propongo qui di dimostrare:

1) Che dato un  $n$ -gono concavo  $P$ , si può costruire un  $n$ -gono  $P'$  convesso di ugual perimetro e di area maggiore.

2) Che dato un  $n$ -gono  $P$ , concavo, si può costruire un  $n$ -gono  $P'$ , convesso, avente gli stessi lati e area maggiore; e che anche data una poligonale  $P$  concava, si può costruire una poligonale  $P'$ , convessa, avente gli stessi lati e area maggiore.

3) Che data una curva  $C$  concava, composta di un numero finito di segmenti e di archi di cerchio, si può costruire una curva  $C'$ , convessa, di ugual contorno e di area maggiore.

Per le curve mi limito adunque a quelle che sono considerate dalla geometria elementare: credo però opportuno notare che con metodi superiori si dimostra che data una qualunque curva  $C$ , purchè continua, esiste una curva convessa  $C'$ , di lunghezza minima, che abbraccia la curva  $C$  (Art. 13). Se  $C$  è concava questa curva  $C'$  ha area maggiore e perimetro minore di  $C$ . Con una similitudine si riduce  $C'$  ad avere perimetro uguale a  $C$ : si ottiene così una curva concava di perimetro uguale a quello di  $C$  e di area maggiore.

Ed ora veniamo a dimostrare le nostre tre proposizioni.

*Teorema 1).* Dato un  $n$ -gono concavo  $P$  si può costruire un  $n$ -gono convesso  $P'$  di ugual perimetro e area maggiore.

Dimostrerò questo teorema prima nel caso del quadrangolo ( $n=4$ ) e poi, supposto che esso sia vero per il poligono di  $n$  lati, lo dimostrerò per quello di  $n+1$  lati e così sarà dimostrato in generale.

Sia adunque  $P$  un quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$ .

Sia  $A_1$  l'angolo concavo: allora il triangolo  $A_1A_2A_3$  ha evidentemente area maggiore del quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$  e perimetro minore.

Sia  $\bar{A}_4$  un punto interno al segmento  $A_1A_3$ . Considero ora il quadrangolo  $A_1A_2A_3\bar{A}_4$  che coincide col triangolo  $A_1A_2A_3$ . Con una similitudine lo riduco ad aver perimetro uguale a quello di  $A_1A_2A_3A_4$ . Ottengo così un quadrangolo  $A_1'A_2'A_3'A_4'$  di area maggiore del quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$  e quindi anche del quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$  del quale ha lo stesso perimetro.

Ed ora dimostro il teorema in generale. Siano  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  i vertici dell' $n+1$ -gono  $P$  che supponiamo concavo. Sia  $A_{n+1}$  un suo angolo concavo. Considero l' $n$ -gono  $A_1A_2\dots A_n$ . Questo ha area maggiore di  $P$  e perimetro minore.

Con una similitudine lo trasformo in un  $n$ -gono  $\bar{P}$  di perimetro uguale a quello di  $P$ : l'area di  $\bar{P}$  risulta maggiore di quella di  $A_1A_2\dots A_n$  e quindi *a fortiori* maggiore di quella di  $P$ .

Se  $\bar{P}$  è concavo costruisco un  $n$ -gono  $P'$  convesso di perimetro uguale a quello di  $\bar{P}$  e di area maggiore, e questo lo posso fare per ipotesi perchè  $P$  ha solo  $n$  lati. Se  $\bar{P}$  è convesso prendo come poligono  $P'$  il poligono  $\bar{P}$  stesso.

Siano  $A_1'A_2'\dots A_n'$  i vertici di  $P'$ . Il lato  $A_1'A_n'$  lo divido in due mediante un punto  $A_{n+1}$ , preso comunque nel suo interno.  $P'$  è così divenuto un  $n+1$ -gono

$$A_1'A_2'\dots A_{n+1}$$

convesso, di perimetro uguale a quello di  $P$ , e di area maggiore, che è quanto volevamo ottenere.

Se invece  $\bar{P}$  fosse stato convesso avrei considerato  $\bar{P}$  come un  $n+1$ -gono.

*Teorema 2).* Dato un poligono  $P$ , concavo, si può costruire un poligono  $P'$ , convesso, avente gli stessi lati di  $P$  ed area maggiore.

Anche questo teorema lo dimostro prima nel caso del quadrangolo poi, supposto che esso sia vero per il poligono di  $n$  lati, lo dimostro per quello di  $n + 1$  lati, e così resta dimostrato in generale.

Consideriamo adunque prima il caso che  $P$  sia un quadrangolo:  $A_1A_2A_3A_4$  (vedi Fig. 24).

Sia  $A_1$  l'angolo concavo.

Distinguo due casi

- a)  $A_2 \geq 90^\circ$   
 b)  $A_2 < 90^\circ$ .

a) Consideriamo il primo caso.

Essendo  $A_2 \geq 90^\circ$  gli angoli

$$A_1A_3A_2 \quad \text{e} \quad A_3A_1A_2$$

sono entrambi acuti. Allora ribalto il triangolo  $A_1A_4A_3$  intorno ad  $A_1A_3$  e ottengo così il triangolo  $A_1A_4A_3$ .

Essendo  $A_1A_3A_2$  e  $A_3A_1A_2$  acuti ed essendo quindi *a fortiori* tali gli angoli  $A_1A_3A_4$  e  $A_3A_1A_4$ , gli angoli  $A_2A_1\bar{A}_4$  e  $A_2A_3\bar{A}_4$  saranno certo minori di  $180^\circ$ , e quindi il quadrangolo  $A_1A_2A_3\bar{A}_4$  è certo convesso: siccome esso ha i lati uguali e area maggiore del quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$ , così esso è precisamente il quadrangolo cercato.

b) Supponiamo ora che  $A_2$  sia acuto.

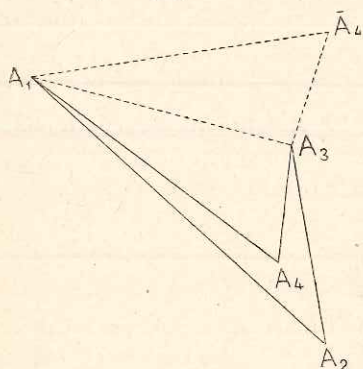


Fig. 24.

Immaginiamo il quadrangolo  $A_1A_2A_3A_4$  costruito di quattro spranghe rigide collegate a cerniera.

Dilato l'angolo  $A_2$  finchè o esso è diventato retto, o i due lati  $A_1A_4$  e  $A_1A_3$  sono venuti per diritto. Noto che con questa dilatazione l'area del triangolo  $A_1A_2A_3$  è aumentata.

Nell'ipotesi di aver dilatato  $A_2$  fino a renderlo retto, opero sul quadrangolo così trasformato come ho fatto nel caso a) e otterrò così un quadrangolo avente i lati di  $A_1A_2A_3A_4$  e area maggiore, in quanto il quadrangolo trasformato ha area maggiore del triangolo  $A_1A_2A_3$  quale risulta dopo la trasfor-

mazione, e il quadrangolo primitivo aveva area minore del triangolo  $A_1A_2A_3$ .

Nell'ipotesi invece di aver dilatato  $A_2$  fino a che i lati  $A_1A_4$  e  $A_4A_3$  siano venuti a esser per diritto, il quadrangolo così trasformato è ridotto convesso, essendo ridotto a coincidere con un triangolo, ed ha area maggiore del quadrangolo primitivo, in quanto, come abbiamo già notato, il triangolo  $A_1A_2A_3$  aumenta di area, con questa dilatazione il quadrangolo primitivo ha area minore del triangolo  $A_1A_2A_3$ , e il quadrangolo trasformato coincide con detto triangolo.

Ora supposto il teorema vero per il poligono di  $n$  lati lo dimostro per quello di  $n + 1$ .

Sia adunque ora l' $n + 1$ -gono concavo  $P$  di vertici  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  (vedi Fig. 25). Sia l'angolo  $A_{n+1}$  concavo. Posso supporre che esso sia l'unico angolo concavo perchè l' $n$ -gono costituito dai vertici  $A_1A_2\dots A_n$  se non è convesso, posso per ipotesi renderlo convesso e ciò con aumento della sua area e quindi dell'area di  $P$ .

Indico con  $\alpha$  e  $\beta$  i due angoli  $A_nA_{n-1}A_2$  e  $A_{n-1}A_2A_1$

Distinguo due casi

a)  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi retti o ottusi

b) o  $\alpha$  o  $\beta$  o tutti e due sono acuti.

a) Consideriamo il primo caso.

Essendo  $\alpha \geq 90^\circ$  e  $\beta \geq 90^\circ$  gli angoli  $A_{n-1}A_nA_1$  e  $A_2A_1A_n$  sono entrambi acuti, e così pure *a fortiori* gli angoli  $A_{n+1}A_nA_1$  e  $A_{n+1}A_1A_n$ .

Ciò posto costruisco  $\bar{A}_{n+1}$  simmetrico di  $A_{n+1}$  rispetto  $A_nA_1$ . Considero l' $n + 1$ -gono

$$A_1A_2\dots A_n\bar{A}_{n+1}.$$

Nota che gli angoli

$$A_{n-1}A_n\bar{A}_{n+1} \text{ e } \bar{A}_{n+1}A_1A_2$$

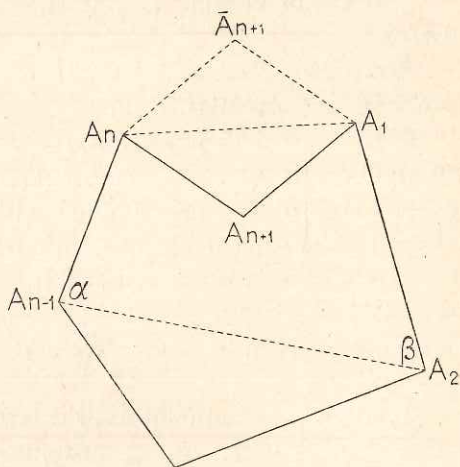


Fig. 25.

somme di angoli acuti sono minori di  $180^\circ$ : l' $n+1$ -gono  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  risulta così evidentemente convesso, e di area maggiore a quella di  $P$ , pur avendone gli stessi lati: esso è quindi il poligono  $P'$  cercato.

b) Consideriamo ora il secondo caso.

Supponiamo per il momento che uno solo dei due angoli, per esempio  $\alpha$ , sia acuto.

Immaginiamo il nostro poligono costituito di spranghe rigide collegate a cerniera in  $A_{n-1}$ ,  $A_n$ ,  $A_{n+1}$ ,  $A_1$  e collegate rigidamente negli altri vertici.

Ora dilato l'angolo  $\alpha$  finchè

o esso diventa retto,

o i due lati  $A_n A_{n+1}$  e  $A_{n+1} A_1$  vengono a essere per diritto,

o i due lati  $A_n A_{n-1}$  e  $A_{n-1} A_{n-2}$  vengono a esser per diritto.

Nota che l'area del quadrangolo  $A_{n-1} A_n A_1 A_2$  è aumentata con questa dilatazione.

Nell'ipotesi di aver dilatato  $\alpha$  fino a renderlo retto, opero sul poligono così trasformato come ho operato nel caso a) e otterrò così un poligono che evidentemente è convesso, ha i lati di  $P$  e area maggiore, ed è quindi il poligono  $P'$  cercato.

Nell'ipotesi di aver ampliato  $\alpha$  finchè sono per diritto i lati  $A_n A_{n+1}$  e  $A_{n+1} A_1$ , l' $n+1$ -gono così trasformato è già convesso e; avendo esso area maggiore di  $P$ , è il poligono  $P'$  cercato.

Nell'ipotesi infine di aver dilatato  $\alpha$  finchè sono per diritto i lati  $A_n A_{n-1}$  e  $A_{n-1} A_{n-2}$ , costruisco  $\bar{A}_{n+1}$  simmetrico di  $A_{n+1}$  rispetto ad  $A_n A_1$ . Ottengo così un  $n+1$ -gono  $\bar{P}$  di area evidentemente maggiore di quella di  $P$ , e nel quale i due lati  $A_n A_{n-1}$  e  $A_{n-1} A_{n-2}$  sono per diritto. Posso quindi considerare  $\bar{P}$  come un  $n$ -gono che, per ipotesi, posso ridurre convesso con aumento di area e lasciandone invariati i lati. Arrivo così a un  $n$ -gono di area maggiore di  $P$ , che posso considerare come un  $n+1$ -gono avente gli stessi lati di  $P$ , due dei quali però formanti un angolo piatto.  $P'$  è quindi l' $n+1$ -gono cercato.

L'ipotesi che anche l'angolo  $\beta$  sia acuto non nuoce nel caso di aver dilatato l'angolo  $\alpha$  fino a che siano venuti per diritto o i lati  $A_n A_{n+1}$  e  $A_{n+1} A_1$  o i lati  $A_n A_{n-1}$  e  $A_{n-2}$ .

Se invece ho dilatato  $\alpha$  fino a renderlo retto, per otte-



nere il poligono  $P'$  dilaterò  $\beta$  con le stesse restrizioni tenute prima per  $\alpha$ , e opererò nei singoli casi come ho fatto precedentemente.

In ogni caso, adunque, si può costruire il poligono convesso  $P'$  aventi gli stessi lati e area maggiore di  $P'$  <sup>(1)</sup>.

*Corollario.* Data una poligonale concava  $A_1 A_2 \dots A_n$  se ne può costruire una convessa avente gli stessi lati e area maggiore.

La poligonale  $A_1 A_2 \dots A_n$  con la sua simmetrica rispetto il lato di chiusura  $A_1 A_n$  costituisce un poligono  $A_1 \dots A_n A_{n+1} \dots A_{2n-2}$  concavo che posso rendere convesso con aumento d'area: ho così il poligono trasformato  $A_1' \dots A_n' A_{n+1}' \dots A_{2n+2}'$ .

La diagonale  $A_1' A_n'$  divide questo poligono in due parti, una delle quali deve aver area maggiore della poligonale  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Ora le due poligonali  $A_1' A_2' \dots A_n'$  e  $A_1' A_{2n-2}' \dots A_n'$  hanno gli stessi lati della poligonale  $A_1 A_2 \dots A_n$ , e sono ambedue convesse: una di esse quindi è la poligonale cercata.

*Teorema 3).* Data una curva concava,  $C$ , composta di un numero finito di segmenti e di archi di cerchio, si può costruire una curva  $C'$ , ancora composta di un numero finito di segmenti e di archi di cerchio, la quale sia convessa, abbia lo stesso perimetro di  $C$  ed area maggiore.

Noi costruiremo dapprima una curva  $\bar{C}$  convessa, di area maggiore di quella di  $C$ , e di perimetro minore: con una similitudine ridurremo  $\bar{C}$  ad avere il perimetro di  $C$ : otterremo così una curva la cui area sarà ancora maggiore di quella di  $C$ : questa curva sarà la curva  $C'$  cercata.

Vediamo adunque come si ottenga  $\bar{C}$ .

Se  $C$  contiene degli archi di cerchio concavi, sostituendo a essi le rispettive corde otteniamo una curva  $C_1$  di perimetro minore e di area maggiore. Possiamo adunque supporre addirittura che  $C$  sia priva di archi concavi.

$C$  per ipotesi ha delle concavità: esse possono essere di tre tipi:

- a) angoli concavi formati da due archi di cerchio,
- b) angoli concavi formati da due segmenti,
- c) angoli concavi formati da un arco di cerchio e da un segmento.

(1) Ad alcune parti del nostro procedimento, abbiamo dato per maggior chiarezza, forma meccanica; esse però possono ridursi e senza alcuna difficoltà, a ragionamenti puramente euclidei.

Vediamo dapprima come si facciano sparire le concavità del primo tipo.

Sia  $A_i$  un angolo concavo formato dai due archi di cerchio  $A_{i-1}A_i$  e  $A_iA_{i+1}$ . Costruisco (vedi Fig. 26) la  $t$ , tangente comune ai due archi cui appartengono i due cerchi, e precisamente quella (delle due tangenti comuni) che è dalla parte della congiungente i due centri da cui si trova la concavità dell'angolo  $A_i$ .

Siano  $M$  e  $N$  i punti di contatto della  $t$  coi due cerchi.

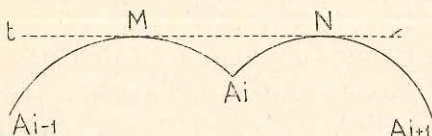


Fig. 26.

Distinguiamo quattro

casi.

- 1)  $M$  si trova sull'arco  $A_iA_{i-1}$  e  $N$  sull'arco  $A_iA_{i+1}$
- 2)  $M$  si trova sul prolungamento dell'arco  $A_iA_{i-1}$  e  $N$  sull'arco  $A_iA_{i+1}$
- 3) viceversa:  $M$  si trova sull'arco  $A_iA_{i-1}$  e  $N$  sul prolungamento dell'arco  $A_iA_{i+1}$ .
- 4)  $M$  si trova sul prolungamento dell'arco  $A_iA_{i-1}$  e  $N$  sul prolungamento dell'arco  $A_iA_{i+1}$ .

Vediamo ora come si operi nei singoli casi.

1) Nel primo caso sostituisco agli archi  $MA_i$  e  $A_iN$  il segmento  $MN$ .

2) Nel secondo caso mando da  $A_{i-1}$  la tangente al cerchio cui appartiene l'arco  $A_iA_{i+1}$ , e precisamente, delle due tangenti, quella che è dalla parte di  $A_i$  rispetto la congiungente di  $A_{i-1}$  col centro. Il punto di contatto  $\bar{N}$  viene allora a cadere nell'arco  $A_i\bar{N}$ , e l'arco  $A_{i-1}A_i$  risulta esterno a questa tangente. In questo caso quindi sostituisco agli archi  $A_{i-1}A_i$  e  $A_i\bar{N}$  il segmento  $A_{i-1}\bar{N}$ .

3) Similmente opero nel terzo caso.

4) In quest'ultimo caso la  $A_{i-1}A_{i+1}$  risulta evidentemente non secante i due archi  $A_iA_{i-1}$  e  $A_iA_{i+1}$ . Sostituisco adunque il segmento  $A_{i-1}A_{i+1}$  ai due archi  $A_{i-1}A_i$  e  $A_iA_{i+1}$ .

In tutti i quattro casi adunque trasformo la curva data  $C$  in un'altra  $C_1$  che ha una concavità del primo tipo di meno di quelle che avesse  $C$ .

Siccome  $C$  ha un numero finito di concavità del primo tipo, ripetendo la costruzione indicata un numero sufficiente  $r$  di volte, arriverò a una curva  $C_r$ , di area maggiore di quella di  $C$ , di perimetro minore e senza concavità del primo tipo.

La curva  $C_r$  adunque ha solo concavità del secondo e del terzo tipo.

Indichiamo con  $n_r$  il numero degli elementi (segmenti o archi di cerchio) di cui è composta la  $C_r$ : essa è adunque un poligono mistilineo di  $n_r$  vertici:  $A_1 A_2 \dots A_{n_r}$ .

Indichiamo con  $s_r$  il numero degli angoli concavi di  $C_r$ : indichiamo con  $S_r$  il numero  $2n_r + s_r$ , relativo alla curva  $C_r$ .

Farò vedere come, se  $C_r$  ha un angolo concavo, si possa costruire una curva  $C_{r+1}$  di area maggiore e perimetro minore di  $C_r$ , e per la quale è  $S_{r+1} < S_r$ . Non potendo il numero  $S$  divenir negativo applicando al massimo  $S_r$  volte questa costruzione arriverò a una curva  $\bar{C}$  senza angoli concavi, e quindi convessa, di perimetro minore di  $C_r$  e di area maggiore, e quindi anche di perimetro minore e di area maggiore di  $C$ ;  $\bar{C}$  è adunque la curva che ci proponiamo di costruire.

Vediamo adunque come si passi da  $C_r$  a  $C_{r+1}$ .

Sia  $A_i$  un angolo concavo di  $C_r$ .

Distinguiamo due casi:

1)  $A_i$  è formato da due segmenti.

2)  $A_i$  è formato da un segmento e da un arco di cerchio.

1) Consideriamo il primo caso: sia  $A_i$  formato dai segmenti  $A_{i-1}A_i$  e  $A_iA_{i+1}$ .

Ad essi sostituisco il segmento  $A_{i-1}A_{i+1}$ : ottengo così una curva  $C_{r+1}$  d'area maggiore e di perimetro minore di  $C_r$ , con un lato di meno di  $C_r$  e tutt'al più con un angolo concavo in più (questo nel caso che i due vertici  $A_{i-1}$  e  $A_{i+1}$  fossero diventati vertici di due angoli concavi): è adunque

$$n_{r+1} = n_r - 1$$

$$s_{r+1} \leq s_r + 1$$

quindi

$$S_{r+1} < S_r$$

2) Esaminiamo ora il secondo caso.

Sia l'angolo concavo  $A_i$  formato dal segmento  $A_{i-1}A_i$  e dall'arco di cerchio  $A_iA_{i+1}$ . Mando da  $A_{i-1}$  la tangente al cerchio cui appartiene l'arco  $A_iA_{i+1}$ , e precisamente la tangente che, rispetto la congiungente  $A_{i-1}$  col centro del cerchio, è dalla stessa parte di  $A_i$ . Sia  $M$  il punto di contatto.

Due ipotesi possono avverarsi:

a)  $M$  è sul prolungamento dell'arco  $A_i A_{i+1}$ .

b)  $M$  è sull'arco  $A_i A_{i+1}$ .

a) Nella prima ipotesi la  $A_{i-1} A_{i+1}$  è non secante l'arco  $A_i A_{i+1}$ , e quindi sostituisco la  $A_{i-1} A_{i+1}$  al segmento  $A_{i-1} A_i$  e all'arco  $A_i A_{i+1}$ . Ottengo così una curva  $C_{r+1}$  di area maggiore e di perimetro minore di  $C_r$  per la quale, come nel caso precedente è

$$S_{r+1} < S_r.$$

b) Nell'ipotesi che  $M$  sia sull'arco  $A_i A_{i+1}$  sostituisco al segmento  $A_{i-1} A_i$  e all'arco  $A_i M$  il segmento  $A_{i-1} M$ .

Se facendo ciò in  $A_{i-1}$  non ho introdotto un nuovo angolo concavo, la curva così trasformata da già evidentemente la  $C_{r+1}$  cercata per la quale è  $S_{r+1} < S_r$ .

Se invece ho introdotto un nuovo angolo concavo in  $A_{i-1}$  considero l'elemento (segmento o arco di cerchio)  $A_{i-2} A_{i-1}$ .

Distinguo ora due sottocasi:

α)  $A_{i-2} A_{i-1}$  è un segmento.

β)  $A_{i-2} A_{i-1}$  è un arco di cerchio.

α) Nel primo sottocaso ai segmenti  $A_{i-2} A_{i-1}$  e  $A_{i-1} M$  sostituisco il segmento  $A_{i-2} M$ . Ottengo così una curva  $C_{r+1}$  che ha al massimo un angolo concavo di più di  $C_r$  ma ha un elemento di meno: per essa quindi è  $S_{r+1} < S_r$ . È poi inutile dire che l'area di  $C_{r+1}$  è maggiore dell'area di  $C_r$  e il perimetro minore.

β) Consideriamo ora il secondo sottocaso, cioè supponiamo che  $A_{i-2} A_{i-1}$  sia un arco di cerchio.

In quest'ipotesi operiamo sui due archi di cerchio  $A_{i-2} A_{i-1}$  e  $M A_{i+1}$  come abbiamo operato quando ci siamo proposti di togliere le concavità formate da due cerchi (vedi pag. 590).

Sia  $t'$  la tangente comune dei due cerchi,  $M'$  e  $N'$  i punti di contatto.

Se  $M'$  e  $N'$  sono interni ai due archi la curva che ottengo  $C_{r+1}$  ha lo stesso numero di elementi dello  $C_r$  ma un angolo concavo di meno.

Se solo uno dei punti  $M'$  o  $N'$  è interno al proprio arco, la curva  $C_{r+1}$  che ottengo ha un elemento di meno di  $C_r$  e al massimo lo stesso numero di angoli concavi.

Se  $M'$  e  $N'$  sono esterni ai due archi la curva  $C_{r+1}$  che

ottengo ha due elementi di meno della  $C_r$ , e al massimo un angolo concavo in più.

Concludendo adunque se la curva  $C_r$  ha una concavità posso in tutti i casi costruire una curva  $C_{r+1}$ , di area maggiore e di perimetro minore, per la quale è

$$S_{r+1} < S_r.$$

E il nostro teorema è così finalmente dimostrato.

## CAPITOLO VI.

### La teoria degli isoperimetri resa indipendente dall'esistenza del massimo.

§ 22. **Introduzione.** — Abbiamo rilevato che le trattazioni classiche della teoria degli isoperimetri contengono una lacuna là dove presuppongono l'esistenza del massimo (o del minimo) in una classe di poligoni dati. Ma si è pur visto che questa lacuna può essere colmata, e che gli stessi procedimenti classici possono interpretarsi come serie di trasformazioni conducenti ad una *figura-limite*, la cui esistenza si dimostra rigorosamente — in base al postulato di continuità — seguendo CARATHÉODORY o STUDY <sup>(1)</sup>.

Resta tuttavia la domanda se questo procedimento infinito non possa essere evitato, fondando in nuovo modo tutta la trattazione sopra uno schema diverso ed affatto elementare, in cui si confronti direttamente la figura-massimo colle altre figure di cui vuolsi dimostrare maggiore.

A questa domanda rispondono i seguenti sviluppi in cui dimostro appunto direttamente ed elementarmente il teorema di CRAMER e ne deduco il teorema di ZENODORO.

Il teorema di CRAMER afferma, come sappiamo, che il poligono di area massima fra quelli con lati dati, è inscrittibile in un cerchio. Quando nulla si presupponga circa l'esistenza del massimo occorre anzitutto dimostrare che un poligono articolato può deformarsi in guisa da divenire

<sup>(1)</sup> Chi desiderasse una trattazione elementare ed essenzialmente algebrica dei problemi dell'isoperimetria veda R. STURM, *Massima und Minima in Elementaren Geometrie*. Editore da Teubner a Lipsia nel 1910.

iscritto in un cerchio: in altre parole occorre dimostrare l'esistenza di un poligono iscrivibile con lati dati.

Dopo ciò si farà il confronto diretto fra questo poligono iscrivibile e un altro poligono qualunque coi medesimi lati, dimostrando che il primo ha area maggiore del secondo.

La deduzione del teorema di ZENODORO (massimo fra gli isoperimetri) si otterrà subito dal teorema di CRAMER, appena si faccia vedere che ogni poligono, non equilatero, può trasformarsi in un altro equilatero, avente lo stesso perimetro e area maggiore. Qui l'esistenza del poligono regolare che realizza il massimo non esige una dimostrazione nuova, sia perchè questa dimostrazione consegue dall'esistenza del poligono iscrivibile, sia perchè può ritenersi data nel § 2 dell'articolo 5 del volume I in quanto la costruzione del poligono regolare si riduce alla divisione in parti uguali dell'angolo di 4 retti. Qualora non si voglia far uso del postulato della continuità a cui si ricorre in quelle dimostrazioni, il teorema di ZENODORO risulterà ancora stabilito nell'ordine di idee strettamente euclidee per i poligoni costruibili elementarmente. E qui si riconosce appunto un vantaggio della trattazione esposta in questo capitolo su quella del capitolo precedente.

Ora la trasformazione di un poligono in un altro equilatero di area maggiore, dove si lasci invariato il perimetro e il numero dei lati, suggerisce l'idea analoga di aumentare l'area di un poligono già reso equilatero rendendone uguali i lati. Per tal modo si otterrà infatti una diretta dimostrazione del teorema di ZENODORO indipendente dal teorema di CRAMER e conforme al punto di vista storico dove si considera il poligono regolare come poligono equilatero equiangolo anzichè come poligono equilatero iscritto in un cerchio.

Abbiamo creduto interessante svolgere questa seconda dimostrazione del teorema di ZENODORO quantunque per verità gli sviluppi occorrenti a compierla risultino alquanto complicati. Essa varrà in ogni caso a lumeggiare le difficoltà che s'incontrano da chi voglia trattare sotto diversi aspetti, ma in modo rigoroso ed elementare, la teoria classica degli isoperimetri.

§ 23. Lemma sull'esistenza del poligono con dati lati iscrivibile di un cerchio. — Dall'ammettere che esista un poligono di area massima fra quelli con dati lati, siccome

questo deve essere inscritto in un cerchio, deriva che esiste almeno un poligono con dati lati inscrivibile in un cerchio: questo poligono inoltre è unico come abbiamo dimostrato al § 6. Ora, non volendosi accettare il postulato del massimo, occorrerà dimostrare direttamente l'esistenza di un poligono  $P_n$ , inscrivibile in un cerchio, e avente i lati ordinatamente uguali a quelli di un poligono dato.

A tale oggetto cominceremo col far vedere come esista un poligono  $P_n'$ , inscritto in un cerchio, i cui lati siano, non uguali, ma proporzionali agli  $n$  lati  $a_1 a_2, \dots, a_n$  di un altro poligono.

Supponiamo ora che il segmento  $a_n$  sia maggiore o semplicemente non minore degli altri; siccome i segmenti  $a_1 a_2 \dots a_n$  sono lati di un poligono dovrà essere il massimo di essi minore della somma degli altri; e sarà:

$$a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Costruisco (vedi Fig. 27) il triangolo isoscele  $ABL$ , in cui

$$AB = a_n$$

$$AL = LB = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}).$$

Ora costruisco il cerchio  $C$  passante per  $A$  e  $B$  e quivi tangente rispettivamente alle rette  $AL$  e  $BL$ .

Ho allora che l'arco  $AB$  (che è minore di  $180^\circ$  essendo acuti gli angoli  $A$  e  $B$ ) è minore di  $AL + BL$  e quindi anche di  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ .

Ora inscriviamo nel cerchio  $C$ , a partire da  $A$  e dalla parte di  $B$ , una poligonale di lati  $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ . L'estremo  $D$  di questa poligonale verrà evidentemente a cadere al di là di  $B$ .

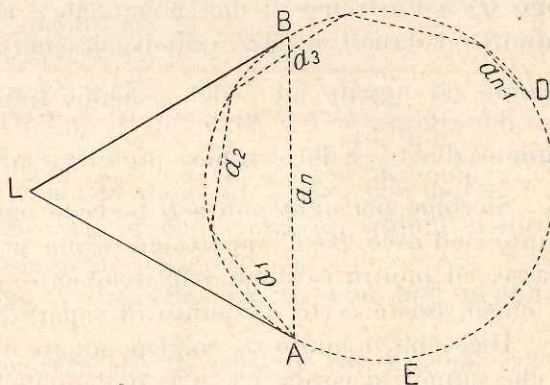


Fig. 27.

Sul prolungamento dell'arco  $DBA$  prendo un arco  $AE$  minore di  $\frac{1}{n}$  della circonferenza e del resto arbitrario.

Preso ora un punto generico  $P$  dell'arco  $BDE$  (estremi inclusi) costruiamo la corda  $AP$ . Poi costruiamo  $n - 1$  segmenti

$$a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1}$$

tali che

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{a'_2}{a_2} = \dots = \frac{a'_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{AP}{a_n}.$$

Fatto ciò iscriviamo nel cerchio  $C$ , a partire da  $A$  e dalla parte di  $B$ , una poligonale di lati  $a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1}$ : sia  $Q$  l'estremo di questa poligonale. Così a ogni punto  $P$  viene associata una poligonale e un punto  $Q$ , estremo di essa.

Conveniamo per fissare le idee che il cerchio  $C$  vada percorso a partire da  $A$  nel senso  $ABD$ ; possiamo dire allora che il punto  $Q$  o precede  $P$ , o coincide con  $P$ , o segue  $P$ .

Ora, fra i punti  $P$  dell'arco  $BDE$  operiamo una partizione: assegniamo alla prima classe e indichiamo con  $H$  ogni punto  $P$  tale che per esso e per ciascuno dei precedenti il punto  $Q$  segua  $P$ , assegniamo alla seconda classe e indichiamo con  $K$  ogni punto  $P$  tale che o per esso o per qualcuno dei suoi precedenti il punto  $Q$  preceda  $P$  o coincida con  $P$ . Con ciò è evidente che il punto  $B$  appartiene alla classe  $H$ . Inoltre il punto  $E$  appartiene alla classe  $K$ : infatti il suo punto omologo  $Q_E$  è l'estremo di una poligonale i cui  $n - 1$  lati sono minori od uguali ad  $AE$ , quindi ciascuno iscritto in un arco minore od uguale ad  $\frac{1}{n}$  del cerchio; quindi l'arco  $ABQ_E$  è minore di  $\frac{n-1}{n}$  del cerchio, quindi  $Q_E$  precede  $E$ .

Siccome poi ogni punto  $H$  precede ogni punto  $K$ , e ogni punto dell'arco  $BDE$  appartiene o alla prima o alla seconda classe, ed inoltre esistono effettivamente punti di entrambe le classi, esiste certo un punto di separazione  $X$ .

Dico che il punto  $Q_X$  corrispondente di  $X$  coincide con  $X$ , e che quindi la corda  $AX$  e la poligonale relativa al punto  $X$  costituiscono un poligono  $P'_n$  inscritto nel cerchio  $C$ , i cui lati sono evidentemente proporzionali ad  $a_1 a_2 \dots a_n$ . Per dimostrare che il punto  $Q_X$  corrispondente di  $X$  coincide con  $X$  comincio col notare che se due punti  $P$  e  $P'$  distano di un arco  $\alpha$ , le



corde  $AP$  e  $A'P'$  differiscono per meno di  $\alpha$ , e quindi ciascun lato della poligonale relativa a  $P$ , che è minore od uguale ad  $AP$ , differisce per meno di  $\alpha$  dal lato omologo della poligonale relativa a  $P'$ : quindi, se indichiamo con  $\beta$  l'arco che sottende una corda di lunghezza  $\alpha$ , ogni arco che sottende un lato della prima poligonale differisce di meno di  $\beta$  dall'arco che sottende il lato omologo della seconda poligonale, e in definitiva i due archi

$$AQ \text{ e } A'Q'$$

i cui estremi sono gli omologhi di  $P$  e  $P'$  differiscono per meno di

$$(n - 1)\beta.$$

Ciò posto dimostriamo che  $X$  non può nè precedere nè seguire  $Q_X$ .

Supponiamo che  $X$  preceda  $Q_X$  (vedi Fig. 28).

Sia  $n\beta$  la lunghezza dell'arco  $AQ_X$  e sia  $\alpha$  la lunghezza della corda sottesa dall'arco di lunghezza  $\beta$ : è  $\alpha < \beta$ . Considero un punto  $X'$  compreso fra  $X$  e  $Q_X$  e tale che l'arco  $XX'$  abbia la lunghezza minore di  $\alpha$ . Il punto  $X'$  ha per omologo un punto  $Q_X'$  che deve distare da  $Q_X$  di un arco minore di  $(n - 1)\beta$  e che deve quindi seguire  $X'$ .

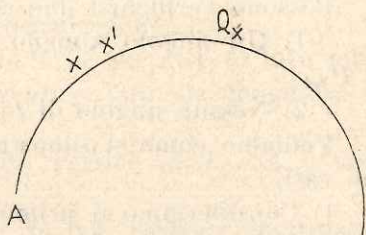


Fig. 28.

Si ha così che ogni punto  $P$  dell'arco  $XX'$  è seguito dal suo punto omologo  $Q$ ; quindi  $X'$  è un punto  $H$  mentre esso deve essere un punto  $K$  venendo dopo di  $X$  che, per ipotesi è il punto di separazione fra le due classi. È quindi assurdo ammettere che  $Q_X$  segua  $X$ .

In modo analogo si dimostra che  $Q_X$  non può neppure precedere  $X$ .

Resta così dimostrato che  $Q_X$  coincide con  $X$ , e che esiste un poligono  $P_n$  inscritto nel cerchio  $C$  i cui lati sono proporzionali ai segmenti  $a_1 a_2 \dots a_n$ .

Costruiamo ora il poligono  $P_n$  simile a  $P_n'$  e che abbia per lati  $a_1 a_2 \dots a_n$ : anche  $P_n$  sarà inscritto in un cerchio. Il nostro assunto resta così dimostrato.

§ 24. Il teorema di Cramer. — Fra tutti gli  $n$ -agoni con dati lati ha massima area quello inscrittibile in un cerchio.

Questo teorema è stato già dimostrato per il quadrangolo cioè per  $n = 4$ .

Dimostro ora che, supposto che esso sia vero per i poligoni di  $n$  lati, esso è vero anche per i poligoni di  $n + 1$  lati e così risulterà dimostrato in generale.

Sia l' $n + 1$ -agone  $P_{n+1}$  di vertici

$$A_1 A_2 \dots A_{n+1}$$

non inscrittibile in un cerchio.

Consideriamo anche l' $n + 1$ -agone  $P_{n+1}$  di vertici

$$A_1' A_2' \dots A_{n+1}'$$

i cui lati siano uguali agli omonimi del precedente, e sia  $P_{n+1}'$  inscrittibile in un cerchio che indico con  $C'$ .

Devo dimostrare che l'area di  $P_{n+1}'$  è maggiore di quella di  $P_{n+1}$ .

Possono verificarsi due casi

1) Un angolo almeno di  $P_{n+1}$  è uguale all'omonimo di  $P_{n+1}'$ .

2) Nessun angolo di  $P_{n+1}$  è uguale all'omonimo di  $P_{n+1}'$ .

Vediamo come si dimostri il teorema in ciascuno di questi due casi.

1) Consideriamo il primo caso e per fissare le idee supponiamo che sia

$$A_n A_{n+1} A_1 = A_n' A_{n+1}' A_1'$$

Noto che i due triangoli

$$A_n A_{n+1} A_1 \text{ e } A_n' A_{n+1}' A_1'$$

avendo due lati e l'angolo compreso uguali sono uguali, ed in particolare è

$$A_n A_1 = A_n' A_1'$$

Considero ora i due  $n$ -goni  $P_n$  di vertici  $A_1 A_2 \dots A_n$  e  $P_n'$  di vertici  $A_1' A_2' \dots A_n'$ . Essi hanno i lati omologhi uguali. Inoltre  $P_n'$  è inscritto in un cerchio e  $P_n$  non lo è. Infatti se lo fosse sarebbe uguale a  $P_n'$  e allora essendo uguali i triangoli

$A_n A_{n+1} A_1$  e  $A_n' A'_{n+1} A_1'$ ,  $P_{n+1}$  sarebbe uguale a  $P'_{n+1}$  contro l'ipotesi che  $P_{n+1}$  sia non iscrivibile. Da ciò deriva che  $P_n'$  ha area maggiore di  $P_n$ , in quanto ammettiamo che il teorema di CRAMER valga per i poligoni di  $n$  lati: siccome poi i due triangoli  $A_n' A'_{n+1} A_1'$  e  $A_n A_{n+1} A_1$  sono uguali, così risulta che anche l'area di  $P'_{n+1}$ , che è la somma dell' $n$ -gono  $P_n'$  e del triangolo  $A_n' A'_{n+1} A_1'$ , è maggiore dell'area di  $P_{n+1}$ , che è la somma dell' $n$ -gono  $P_n$  e del triangolo  $A_n A_{n+1} A_1$ .

2) Considero ora il secondo caso, cioè suppongo che  $P_{n+1}$  non abbia nessun angolo uguale all'omonimo di  $P'_{n+1}$ .

Per dimostrare il teorema in questo caso mi riduco al caso precedente, e ciò costruendo un poligono  $P''_{n+1}$ , avente gli stessi lati di  $P_{n+1}$ , la cui area sia maggiore di quella di  $P_{n+1}$ , e nel quale inoltre un angolo sia uguale all'omonimo di  $P'_{n+1}$ .

Allora avrò

$$P_{n+1} < P''_{n+1} < P'_{n+1}$$

e quindi

$$P_{n+1} < P'_{n+1}$$

che è quello che in fine si vuole dimostrare.

Vediamo adunque come si costruisce  $P''_{n+1}$ .

Supponiamo che nel poligono  $P_{n+1}$  sia  $A_1 A_2$  il lato massimo, o che per lo meno nessun altro lato sia maggiore di  $A_1 A_2$ .

Consideriamo l' $n$ -gono  $P_n$  di vertici  $A_1 A_2 \dots A_n$ . (vedi Fig. 29).

Se esso non è iscrivibile in un cerchio costruiamo l' $n$ -gono  $P_n$  i cui lati siano uguali a quelli di  $P_n$  e che sia iscrivibile: siano  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$  i suoi vertici e sia  $\Gamma$  il cerchio circoscritto a  $\bar{P}_n$ .

Se in  $P_{n+1}$  a  $P_n$  sostituiamo  $\bar{P}_n$  otteniamo un  $n+1$ -gono  $\bar{P}_{n+1}$  (somma di  $\bar{P}_n$  e del triangolo  $A_n A_{n+1} A_1$ ) di vertici

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n \bar{A}_{n+1}$$

di lati uguali agli omonimi di  $P_{n+1}$  e di area maggiore.

Naturalmente se  $P_n$  è iscrivibile prendo come poligono  $\bar{P}_{n+1}$  il poligono  $P_{n+1}$  stesso.

Costruisco ora il cerchio  $C$  passante per  $\bar{A}_1$  e  $\bar{A}_2$  uguale al centro  $C'$  circoscritto a  $P'_{n+1}$  e bado che l'arco  $\bar{A}_1 D \bar{A}_2$ , che è l'arco uguale a quello di  $C'$  che sottende il lato  $A_1' A_2'$

di  $P'_{n+1}$ , cada dalla banda di  $\bar{A}_1\bar{A}_2$  da cui non cade il poligono  $\bar{P}_n$ .

Dico ora che i due vertici  $\bar{A}_{n+1}$  e  $\bar{A}_3$  non possono essere entrambi esterni al cerchio  $C$ .

Infatti se  $\bar{A}_3$  è esterno, anche gli altri vertici  $\bar{A}_1\bar{A}_3\dots\bar{A}_n$  che si trovano sul cerchio  $\Gamma$  sarebbero esterni, e quindi sarebbero esterni tutti i vertici  $\bar{A}_3\dots\bar{A}_{n+1}$ .

Allora ciascun lato

$$\bar{A}_2\bar{A}_3, \bar{A}_3\bar{A}_4, \dots, \bar{A}_{n+1}\bar{A}_1$$

sarebbe veduto dal centro  $O$  del cerchio  $C$  sotto angolo minore di quello sotto il quale è visto il lato omologo di  $P'_{n+1}$  dal centro  $O'$  del cerchio  $C'$ , e quindi l'arco  $\bar{A}_2\bar{C}\bar{A}_1$  sarebbe minore dell'arco di  $C'$  in cui è inscritta la poligonale  $A_2'A_3'\dots A_1'$ , mentre l'abbiamo assunto uguale.

Restano quindi da considerarsi tre casi:  $\bar{A}_3$  e  $\bar{A}_{n+1}$  sono

a) ambedue interni al cerchio  $C$ .

b) uno almeno sul cerchio  $C$ .

c) uno interno e l'altro esterno al cerchio  $C$ .

Esaminiamo i singoli casi:

a) Supponiamo che  $\bar{A}_3$  e  $\bar{A}_{n+1}$  siano entrambi interni al cerchio  $C$ : in questo caso anche gli altri vertici  $\bar{A}_1\bar{A}_3\dots\bar{A}_n$  essendo come  $\bar{A}_3$  su  $\Gamma$  risultano interni. In quest'ipotesi si vede direttamente che  $P'_{n+1}$  ha area maggiore di  $\bar{P}_{n+1}$  e quindi anche di  $P_{n+1}$ .

Consideriamo infatti  $P'_{n+1}$  come somma <sup>(1)</sup> di  $n+1$  triangoli aventi per base i lati di  $P_{n+1}$  e per vertice il centro  $O'$  di  $C'$  e analogamente consideriamo  $\bar{P}_{n+1}$ . Vediamo allora che ogni triangolo in cui è scomposto  $P'_{n+1}$  ha base uguale e altezza maggiore (meno il triangolo  $\bar{A}_1OA_2$  che ha altezza uguale) dell'omologo di  $\bar{P}_{n+1}$ , quindi l'area di  $P'_{n+1}$  è maggiore di quella di  $P_{n+1}$ .

Tralasciamo adunque questo caso nel quale il teorema

(1) Effettiva se  $O'$  è interno a  $P'_{n+1}$ , algebrica se è esterno. In questo caso è il lato massimo  $A_1'A_2'$  che è inscritto in un arco maggiore di  $\pi$  e perciò in  $P'_{n+1}$  solo il triangolo  $A_1'O'A_2'$  va preso col segno negativo, e in  $\bar{P}_{n+1}$  va preso certamente col segno negativo il triangolo  $A_1OA_2$  ed eventualmente anche qualche altro triangolo. La nostra proposizione è quindi vera anche in questo caso.

di CRAMER sarebbe verificato direttamente, senza ricorrere alla costruzione del poligono  $P''_{n+1}$ .

b) Supponiamo ora che uno dei due vertici  $\bar{A}_3$  o  $\bar{A}_{n+1}$  cada nel cerchio  $C$ . Per fissare le idee ammettiamo che sia  $\bar{A}_3$  a cadere sul cerchio  $C$ . Allora evidentemente l'angolo  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$  risulta uguale all'angolo  $A'_1 A'_2 A'_3$ .

Si ha così che il poligono  $\bar{P}_{n+1}$  che ha area maggiore di  $P_{n+1}$  ha un angolo uguale all'omologo di  $P'_{n+1}$ ; quindi come poligono  $P''_{n+1}$  possiamo assumere il poligono  $\bar{P}_{n+1}$ .

c) Veniamo ora all'ultimo caso: noi supponiamo che  $\bar{A}_3$  e  $\bar{A}_{n+1}$  siano uno interno e l'altro esterno al cerchio  $C$ , e per fissare le idee supponiamo che  $A_{n+1}$  sia interno e  $A_3$  sia esterno.

Considero il quadrangolo  $Q$  di vertici  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_{n+1}$ .

Nota che esiste un unico quadrangolo  $Q'$  di lati uguali a quelli di  $Q$  e inscrittibile in un cerchio; siano  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_{n+1}$  i suoi vertici e sia  $K'$  il cerchio circoscritto a  $Q'$ .

Costruisco (vedi Fig. 29) il cerchio  $K$  passante per  $\bar{A}_1$  e  $\bar{A}_2$

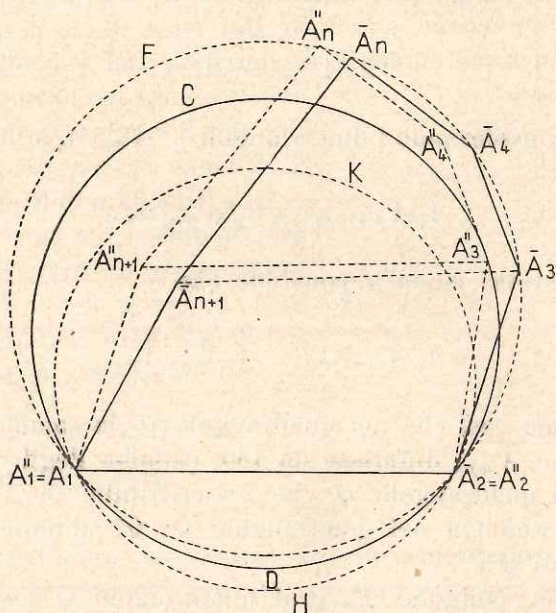


Fig. 29.



uguale al cerchio  $K'$  e bado che l'arco  $\bar{A}_1 H \bar{A}_2$ , che è l'arco uguale all'arco di  $K'$  che sottende al lato  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$  del quadran-

golo  $Q'$ , cada dalla banda di  $\bar{A}_1\bar{A}_2$  da cui non cade il quadrangolo  $Q$ .

Possono avverarsi due ipotesi:

- α) l'arco  $A_1\bar{K}\bar{A}_2$  del cerchio  $K$  è tutto interno a  $C$ .  
 β) l'arco  $\bar{A}_1\bar{K}\bar{A}_2$  del cerchio  $K$  è tutto esterno a  $C$ .

Vediamo come si operi in ciascuna di esse.

α) Consideriamo la prima ipotesi.

Costruisco il quadrangolo  $Q''$  di vertici  $A_1''A_2''A_3''A_{n+1}''$ , i cui lati siano uguali a quelli di  $Q$ , e nel quale il vertice  $A_3''$  sia sul cerchio  $C$ .

Ricordo che è  $A_1A_2 \geq A_2A_3$  quindi essendo  $A_3''$  esterno a  $K$  è certamente

$$A_1''A_2''A_3'' > \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

e anche, essendo  $\bar{A}_3$  esterno a  $C$ ,

$$A_1'A_2'A_3' > A_1''A_2''A_3''.$$

Ora dall'esame dei triangoli  $A_1'A_2'A_3'$  e  $A_1''A_2''A_3''$  si deduce facilmente

$$A_1'A_3' > A_1''A_3''$$

e quindi, considerando i due triangoli  $A_1'A_{n+1}'A_3'$  e  $A_1''A_{n+1}''A_3''$  si ricava

$$A_1'A_{n+1}'A_3' > A_1''A_{n+1}''A_3''.$$

Nello stesso modo si conclude che è

$$A_4''A_{n+1}''A_3'' > \bar{A}_1\bar{A}_{n+1}\bar{A}_3.$$

Abbiamo così che nel quadrangolo  $Q''$  la somma dei due angoli  $A_2''$  e  $A_{n+1}''$  differisce da  $180^\circ$  (somma degli angoli  $A_2'$  e  $A_{n+1}'$  del quadrangolo  $Q'$  che è iscrivibile) per meno che la somma analoga nel quadrangolo  $Q$ :  $Q''$  adunque ha area maggiore di  $Q$  <sup>(1)</sup>.

Ora nel poligono  $\bar{P}_{n+1}$  al quadrangolo  $Q$  sostituisco il quadrangolo  $Q''$ : ottengo così un  $n+1$ -agone  $P''_{n+1}$  che è il poligono cercato in quanto esso viene ad avere gli stessi lati

(1) Cfr. § 4. - Nota.

ed area maggiore di  $\bar{P}_{n+1}$  e per di più il suo angolo  $A_1''A_2''A_2''$  risulta uguale all'omonimo di  $P'_{n+1}$ .

b) In modo analogo procedo nell'ipotesi che l'arco  $\bar{A}_1\bar{K}\bar{A}_2$  sia tutto esterno a  $C$ , costruendo questa volta il quadrangolo  $Q''$  di lati uguali a quelli di  $Q$  in modo che sia il suo vertice  $A_{n+3}''$  a cadere sul cerchio  $C$ .

E così il teorema di CRAMER resta completamente stabilito.

§ 25. Il teorema di Zenodoro. — Ricordato il lemma che fra due triangoli di ugual perimetro e di ugual base ha area maggiore quello in cui è minore la differenza degli altri due lati <sup>(1)</sup>, dimostriamo il

*Teorema.* Dato un poligono  $P$  di  $n$  lati e di perimetro  $np$ , che non sia equilatero, si può costruire un poligono equilatero  $P'$ , avente gli  $n$  lati uguali a  $p$  ed area maggiore di  $P$ .

Siano  $A_1A_2\dots A_n$  i vertici di  $P$ . Notiamo dapprima che, dato un poligono  $P$ , è facile costruire un poligono  $Q$  che abbia la stessa area e gli stessi lati di  $P$  ma susseguentisi questi in modo che due lati prefissati di  $P$  siano consecutivi in  $Q$ . A tale oggetto costruiamo prima un poligono  $Q'$  avente l'area e i lati di  $P$ , susseguentisi come in  $P$  tutti tranne due prefissati  $A_1A_2$  e  $A_2A_3$  che vengono scambiati fra di loro: per ottenere questo (vedi Fig. 30) basta nel poligono  $P$  al triangolo  $A_1A_2A_3$  sostituire il triangolo  $A_1A_2'A_3$ , nel quale è

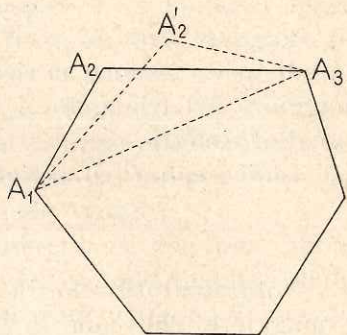


Fig. 30.

$$A_1A_2' = A_2A_3$$

$$A_2'A_3 = A_1A_2$$

È ora evidente che, ripetendo convenientemente questa costruzione, si possono portare a essere consecutivi due lati arbitrari di  $P$ , ottenendo così un poligono  $Q$  che ha ancora la stessa area di  $P$ .

<sup>(1)</sup> Per la dimostrazione vedi § 13.

Ciò premesso veniamo alla costruzione di  $P'$  (vedi Fig. 31).

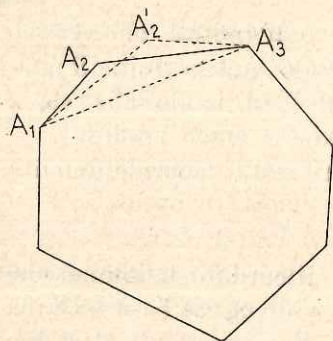


Fig. 31.

Non essendo  $P$  equilatero, esso avrà almeno un lato maggiore di  $p$  e uno minore di  $p$ . Possiamo supporre questi due lati consecutivi: se essi non lo fossero al poligono  $P$  sostituiremmo il poligono  $Q$  in cui questi due lati sono portati a esser consecutivi. Siano questi due lati i lati  $A_1A_2$  e  $A_2A_3$ .

Sulla diagonale  $A_1A_3$  assunta come base costruisco il triangolo  $A_1A_2A_3$  avente

$$A_1A_2' = p$$

$$A_2'A_3 = A_1A_2 + A_2A_3 - A_1A_2'.$$

La differenza fra i lati

$$A_1A_2' \quad \text{e} \quad A_2'A_3$$

risulta minore della differenza fra i lati

$$A_1A_2 \quad \text{e} \quad A_2A_3$$

quindi, per il lemma su ricordato, il triangolo  $A_1A_2'A_3$  ha area maggiore del triangolo  $A_1A_2A_3$  pur avendone ugual base e ugual perimetro.

Indico con  $P_1$  il poligono

$$A_1A_2'A_3 \dots A_n.$$

Noto anzitutto che in  $P_1$  il numero dei lati uguali a  $p$  è maggiore che non in  $P$ : inoltre  $P_1$  ha area maggiore di  $P$  pur avendone lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati.

Se  $P_1$  non è equilatero applico ad esso questo stesso procedimento: otterrò un poligono  $P_2$  che ha un numero di lati uguali a  $p$  maggiore che non  $P_1$  e che ha area maggiore di  $P_1$  pur avendone lo stesso perimetro.

Se  $P_2$  non è equilatero riapplico lo stesso procedimento, e così seguitando.

Siccome nei poligoni  $P_1P_2P_3 \dots$  così ottenuti il numero



dei lati uguali a  $p$  va crescendo, al più tardi dopo  $n - 1$  operazioni otterrò un poligono  $P'$  che ha tutti i lati uguali a  $p$  (il poligono che ha  $n - 1$  lati uguali a  $p$ , avendo perimetro  $np$  come tutti i precedenti ha uguale a  $p$  anche l'ennesimo lato).

Il poligono  $P'$  è il poligono che volevamo costruire: infatti esso è equilatero, ha perimetro  $np$ , e per di più ha area maggiore di  $P$  in quanto i poligoni  $PP_1P_2\dots$  hanno ciascuno area maggiore del precedente.

Ravviciniamo il fatto ora stabilito col teorema di CRAMER. Ne deduciamo il

*Teorema di ZENODORO.* — Il poligono regolare di  $n$  lati ha area maggiore di ogni altro poligono dello stesso perimetro e dello stesso numero di lati.

Infatti sia  $P$  un poligono qualsiasi di  $n$  lati.

Se esso è equilatero il teorema di CRAMER ci dice già che  $P$  ha area minore dell' $n$ -gono regolare di ugual perimetro che è precisamente l' $n$ -gono inscrittibile che ha gli stessi lati di  $P$ . Se  $P$  non è equilatero, per quanto abbiamo visto, si può costruire un  $n$ -gono  $P'$  equilatero avente lo stesso perimetro di  $P$  e area maggiore. Ora per il teorema di CRAMER l' $n$ -gono regolare isoperimetro a  $P$  ha area maggiore di quella di  $P'$ , quindi, *a fortiori*, ha area maggiore di quella di  $P$ .

#### § 26. Seconda dimostrazione del teorema di Zenodoro. —

La dimostrazione del teorema di ZENODORO indipendente dal teorema di CRAMER si ottiene facendo vedere:

1) che dato un  $n$ -gono equilatero  $P$ , che non abbia alcun angolo uguale ad  $\omega$ , angolo dell' $n$ -gono regolare dello stesso perimetro di  $P$ , si può costruire un poligono  $P'$  avente gli stessi lati e area maggiore di  $P$ , e nel quale un angolo sia divenuto uguale ad  $\omega$ ;

2) che dato un  $n$ -gono equilatero  $P$ , che abbia  $r - 1$  angoli consecutivi uguali ad  $\omega$ , si può costruire un poligono  $P'$  avente gli stessi lati e area maggiore di  $P$ , e nel quale vi siano  $r$  angoli consecutivi uguali ad  $\omega$ .

Queste due proposizioni permettono evidentemente di stabilire il teorema di ZENODORO indipendentemente dal teorema di CRAMER.

Per la loro dimostrazione dobbiamo premettere il  
*Lemma.* Dati due quadrangoli  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  aventi i  
 lati rispettivamente uguali e supposto che sia  $BC = AD$ ,  
 dico che se è

$$B < B' < A$$

la superficie  $S$ , del quadrangolo  $ABCD$  è minore di quella  $S'$ ,  
 del quadrangolo  $A'B'C'D'$ .

Questo teorema è anzitutto evidente nel caso in cui sia  
 anche  $AB = CD$ . In questa ipotesi, infatti, i due quadrangoli  
 $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  si riducono a due parallelogrammi ed è

$$S = AB \cdot BC \text{ sen } B$$

$$S' = A'B' \cdot B'C' \text{ sen } B'.$$

Essendo poi per ipotesi  $A$  e  $B$  supplementari ed essendo  $B'$   
 compreso fra  $A$  e  $B$  è  $\text{sen } B' > \text{sen } B$  e quindi anche  $S' > S$ .  
 Supponiamo ora che sia  $AB \neq CD$ .

Facciamo anzitutto vedere (vedi Fig. 32) che è

$$|A - B| > |A' - B'| \quad \text{e} \quad |C - D| > |C' - D'|.$$

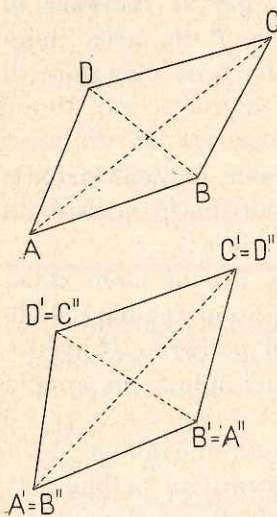


Fig. 32.

Per arrivare a questo, noto dap-  
 prima che se è

$$A > B$$

dal confronto dei triangoli

$$ABD \quad \text{e} \quad BAC$$

risulta

$$BD > AC$$

e quindi dal confronto dei triangoli  
 $DCB$  e  $CAB$

$$C > D.$$

Così pure se

$$B < B'$$

dal confronto dei triangoli

$$ABC \quad \text{e} \quad A'B'C'$$

e dei triangoli

$$DAC \text{ e } D'A'C'$$

risulta

$$D < D'.$$

Inoltre dovrà essere

$$A > A'$$

perchè se fosse

$$A \leq A'$$

si dedurrebbe con le considerazioni di sopra

$$C < C'$$

e quindi si giungerebbe all' assurdo

$$A + B + C + D < A' + B' + C' + D'.$$

Così pure è

$$C > C'.$$

Analogamente essendo

$$B' < A$$

sarà

$$A' > B$$

$$C' > D$$

$$D' < C.$$

Quindi in ogni caso, tanto che le differenze  $B' - A$  e  $D' - C$  siano positive come negative,

$$|A - B| > |A' - B'| \text{ e } |C - D| > |C' - D'|.$$

Supponiamo ora per fissare le idee che fra i due lati disuguali  $AB$  e  $CD$  sia  $AB$  il minore. Costruisco (vedi Fig. 33) il quadrangolo  $BAC_1D_1$  uguale al quadrangolo  $ABCD$  e disposto in modo che sia  $C_1\widehat{AB} = \widehat{ABC}$ . È evidente che i punti  $CDC_1D_1$  risultano i vertici di un parallelogramma di cui è centro il punto  $O$ , punto di mezzo del segmento  $AB$ . Sia  $M$  il punto medio di  $CD_1$ : il segmento  $OM$  è parallelo ad  $DC$  ed uguale alla metà di  $DC$ . Indichiamo con  $2\alpha$  la differenza fra gli angoli  $ABC$  e  $BAD$ . Ho evidentemente  $\widehat{OBM} = 180^\circ - \alpha$ . Ciò posto vediamo come si esprima l'area  $S$  del quadrangolo

$ABCD$  in funzione dell'angolo  $\alpha$  semidifferenza degli angoli  $A$  e  $B$ .

Chiamiamo  $k$  il segmento  $BM$  altezza del triangolo isoscele  $CBD_1$  e  $h$  l'altezza del parallelogramma  $CD_1C_1D$  rispetto il suo lato  $CD_1$  assunto come base.

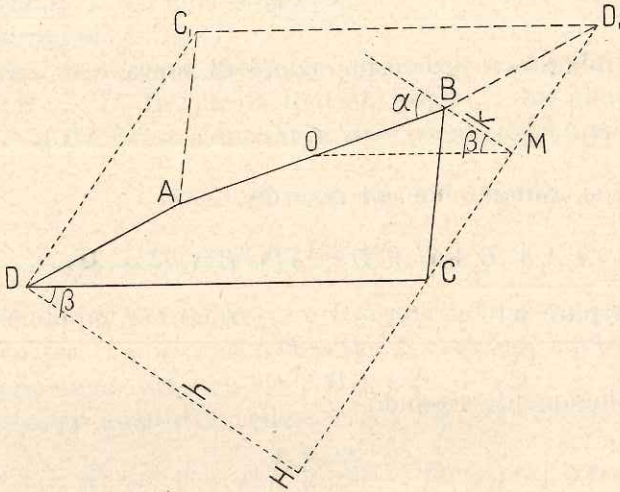


Fig. 93.

Abbiamo allora evidentemente

$$S = \frac{1}{2} CD_1(h - k) = CM(h - k).$$

Facciamo ora le analoghe costruzioni relativamente al quadrangolo  $A'B'C'D'$  usando delle stesse lettere con l'aggiunta dell'accento. Avremo così l'area  $S'$  del quadrangolo  $A'B'C'D'$  espressa da

$$S' = C'M'(h' - k').$$

Ricordiamo il teorema di geometria elementare che dice che fra due segmenti che congiungono un punto  $B$ , interno a un cerchio di centro  $O$ , l'uno con un punto  $M$  e l'altro con un punto  $M'$  della circonferenza, è minore quello che forma un angolo maggiore con la semiretta uscente da  $B$  e passante per il centro del cerchio. Immaginiamo ora di portare il triangolo  $O'B'M'$  sul triangolo  $OBM$  in modo che  $O'B'$  coincida con  $OB$ : allora  $M$  e  $M'$  si troveranno su uno stesso

cerchio che ha per centro  $O$  e nel cui interno si trova il punto  $B$ .

Essendo per ipotesi  $\alpha > \alpha'$  e quindi  $\widehat{OBM} < \widehat{O'B'M}$  sarà per il teorema ricordato  $BM > B'M'$ , cioè sarà  $k > k'$ .

Notiamo ora che è  $\overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 + k^2$  e così pure  $\overline{C'M'}^2 = \overline{C'B'}^2 + k'^2$ : essendo  $k > k'$  sarà anche  $CM > C'M'$ .

Confrontiamo in fine  $h$  e  $h'$ . A tale oggetto indichiamo con  $\beta$  l'angolo  $BMO$  e con  $\beta'$  l'angolo  $B'M'O'$ .

Dal triangolo  $OBM$  ricavo

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha \cdot \frac{OB}{OM}$$

e per la stessa ragione è anche  $\text{sen } \beta' = \text{sen } \alpha' \cdot \frac{O'B'}{O'M'}$ .

Ma  $2\alpha$ , come  $2\alpha'$ , essendo differenza di due angoli consecutivi di un quadrangolo non intrecciato è minore di  $180^\circ$ , quindi  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono acuti. Essendo per ipotesi  $\alpha > \alpha'$  è  $\text{sen } \alpha > \text{sen } \alpha'$ , e quindi anche  $\text{sen } \beta > \text{sen } \beta'$ ; essendo inoltre  $\beta$  e  $\beta'$  come angoli interni rispettivamente minori di  $\alpha$  e  $\alpha'$ , e quindi acuti, sarà  $\cos \beta < \cos \beta'$ .

Osserviamo in fine che è  $h = DC \cos \beta$  e  $h' = D'C' \cos \beta'$ .

È quindi  $h < h'$ .

Riassumendo essendo  $CM < C'M'$ ,  $k > k'$  e  $h < h'$  e  $S < S'$ . Che è quanto volevamo dimostrare (4).

*Osservazione.* Possiamo considerare i quadrangoli  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  come due diverse posizioni di un medesimo quadrangolo articolato variabile. Mettendoci da questo punto di vista si può enunciare il teorema ora dimostrato nel modo seguente:

Un quadrangolo articolato  $ABCD$ , nel quale siano uguali i due lati opposti  $BC$  e  $AD$ , aumenta di area col diminuire della differenza fra i due angoli adiacenti a uno dei lati non supposti uguali.

Questo stesso teorema si potrebbe dedurre dal teorema di CRAMER sul quadrangolo facendo vedere che  $A' + C' - 180^\circ < A + C - 180^\circ$ .

(4) In questa nostra dimostrazione ci siamo serviti di formule trigonometriche, solo per amore di brevità; ed è evidente come questa dimostrazione possa ridursi — e senza alcuna difficoltà — a tipo puramente euclideo.

Per questo sarebbe necessario che  $A' + C'$  fosse maggiore di  $180^\circ$ : se ciò non fosse ci si ridurrebbe a questo caso chiamando (vedi Fig. 32)  $A''B''C''D''$  il quadrangolo  $A'B'C'D'$ .

*Teorema.* 1) Se un poligono equilatero  $P$ , di  $n$  lati, non ha nessun angolo uguale a  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ , si può costruire un poligono  $P'$ , maggiore di  $P$ , e nel quale uno degli angoli sia uguale a  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ .

Siano  $A_1 A_2 \dots A_n$  i vertici di  $P$ . Indico con  $\omega$  l'angolo di ampiezza  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ .

Siccome la somma degli  $n$  angoli di  $P$  è  $(n-2)\pi$ , essi non possono essere nè tutti maggiori nè tutti minori di  $\omega$ : ve ne saranno quindi due consecutivi uno maggiore e l'altro minore di  $\omega$ . Siano essi  $A_1$  e  $A_2$  e supponiamo

$$A_1 > \omega$$

$$A_2 < \omega.$$

Consideriamo (vedi Fig. 34) il quadrangolo

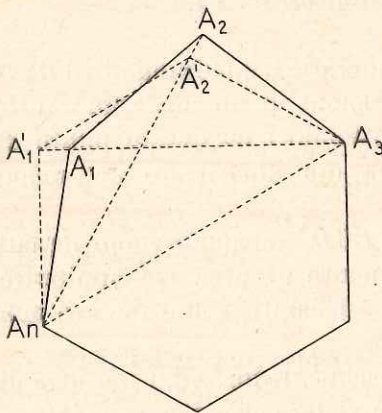


Fig. 34.

$$A_n A_1 A_2 A_3,$$

e costruiamo il quadrangolo

$$A_n A_1' A_2' A_3$$

il quale ha

$$A_n A_1' = A_n A_1$$

$$A_1' A_2' = A_1 A_2$$

$$A_2' A_3 = A_2 A_3$$

e per il quale è

$$\widehat{A_1} = \omega.$$

Questo quadrangolo si ottiene costruendo prima il triangolo  $A_n A_1' A_2'$  di cui son dati l'angolo  $A_1'$  e i lati che lo comprendono, e costruendo poi su  $A_n A_2'$ , preso come base, il triangolo  $A_n A_2' A_3$  di cui son dati gli altri due lati. Notiamo

inoltre che il quadrangolo  $A_n A_1' A_2' A_3$  è effettivamente costruibile ed è unico essendo tali i due triangoli  $A_n A_1' A_2'$  e  $A_n A_2' A_3$  come è facile verificarsi.

Ciò posto essendo

$$A_1 > A_1' > A_2$$

per il lemma precedente il quadrangolo  $A_n A_1' A_2' A_3$  ha superficie maggiore del quadrangolo  $A_n A_1 A_2 A_3$ , e quindi il poligono  $P'$  i cui vertici siano

$$A_1' A_2' A_3 \dots A_n$$

ha superficie maggiore del poligono  $P$ , pur avendone gli stessi lati e avendo un angolo  $A_1$  uguale a  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ .

*Teorema.* 2) Se un poligono equilatero  $P$ , di  $n$  lati, ha  $r-1 < n$  angoli consecutivi uguali a  $\frac{n-2}{n}\pi$ , si può costruire un poligono  $P'$  che abbia gli stessi lati e area maggiore di  $P$ , ed abbia inoltre  $r$  angoli consecutivi uguali a  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

Siano  $A_1 A_2 \dots A_n$  i vertici di  $P$ . Siano  $A_1 A_2 \dots A_{r-1}$  gli angoli uguali a  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

Nota che gli angoli

$$A_1 A_n A_r \quad \text{e} \quad A_{r-1} A_r A_n$$

sono uguali fra di loro: indico con  $\alpha$  il loro valore e indico con  $\varphi$  l'angolo

$$\frac{n-2}{n}\pi - \alpha.$$

Possono accadere tre casi

1)  $A_n$  e  $A_{r-1}$  sono uno maggiore e l'altro minore di  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

2)  $A_n$  e  $A_{r-1}$  sono ambedue maggiori di  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

3)  $A_n$  e  $A_{r-1}$  sono ambedue minori di  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

Vediamo come si operi nei singoli casi.

1) Consideriamo il primo caso (vedi Fig. 35) e per fissare le idee supponiamo che sia precisamente

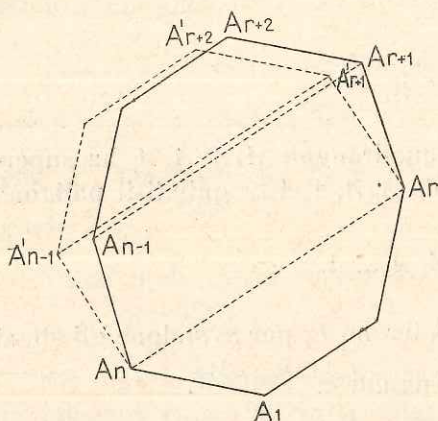


Fig. 35.

$$A_n < \frac{n-2}{n} \pi$$

$$A_r > \frac{n-2}{n} \pi.$$

Consideriamo il quadrangolo

$$A_n A_r A_{r+1} A_{n-1}.$$

In esso evidentemente è

$$A_n < \varphi$$

$$A_r > \varphi.$$

Costruiamo il quadrangolo

$$A_n A_r A'_{r+1} A'_{n-1}$$

che abbia i lati uguali agli omologhi del precedente e nel quale l'angolo  $A_{n-1} A_n A_r$  sia uguale a  $\varphi$ . Questo quadrangolo si costruisce come abbiamo fatto nel caso analogo del teorema precedente, e nello stesso modo si prova la sua unicità; esso inoltre per il lemma stabilito al principio di questo paragrafo ha area maggiore del quadrangolo  $A_n A_r A_{r+1} A_{n-1}$ .

Se ora nel poligono  $A_1 A_2 \dots A_n$  al quadrangolo  $A_n A_r A'_{r+1} A'_{n-1}$  sostituiamo il quadrangolo  $A_n A_r A_{r+1} A_{n-1}$ , e ciò lasciandone invariate le altre parti, otteniamo un poligono  $P'$  che ha area maggiore di  $P$  avendone gli stessi lati: inoltre nel poligono  $P'$

l'angolo  $A_{r-1} \widehat{A_r} A_{r+1}$  ha l'ampiezza  $\alpha + \varphi = \frac{n-2}{n} \pi$  mentre gli angoli  $A_1 A_2 \dots A_{r-1}$  sono ancora uguali a  $\frac{n-2}{n} \pi$ .

Il poligono  $P'$  è quindi il poligono cercato.

2) Consideriamo ora il secondo caso cioè supponiamo che  $A_n$  e  $A_{r-1}$  siano ambedue maggiori di  $\frac{n-2}{n} \pi$ .

In questa ipotesi ci riduciamo al caso precedente sostituendo al nostro poligono un altro poligono  $\bar{P}$  che se abbia



la stessa area e gli stessi lati, in cui gli angoli  $A_1 A_2 \dots A_{r-1}$  siano ancora uguali a  $\frac{n-2}{n} \pi$ ,  $A_r$  sia ancora maggiore di  $\frac{n-2}{n} \pi$ , e per di più  $A_n$  sia divenuto minore di  $\frac{n-2}{n} \pi$ . Operando poi su  $\bar{P}$  come abbiamo operato su  $P$  nel caso precedente otteniamo un poligono  $P'$  che soddisfa evidentemente alle condizioni volute.

Per ottenere  $\bar{P}$  trasformiamo il nostro poligono in un altro avente la medesima area e i medesimi lati nel quale sia ogni angolo

$$A_{n-1} A_n A_i \leq A_{i+1} A_i A_n$$

e ciò per

$$i = r, r + 1 \dots n - 2.$$

È questo l'otteniamo nel modo seguente. (Vedi Fig. 36).

Congiungiamo  $A_n$  con  $A_r$ . Notiamo che il poligono  $Q$  il quale ha per vertice  $A_n A_r A_{r+1} \dots A_{n+1}$ , può sempre essere supposto convesso, perchè qualora non lo fosse lo si renderebbe tale (1) — lasciandone invariati i lati — con aumento della sua area e quindi anche dell'area di  $P$ . Ciò posto siamo sicuri che, nel poligono  $P$ , la diagonale  $A_n A_r$  sia interna.

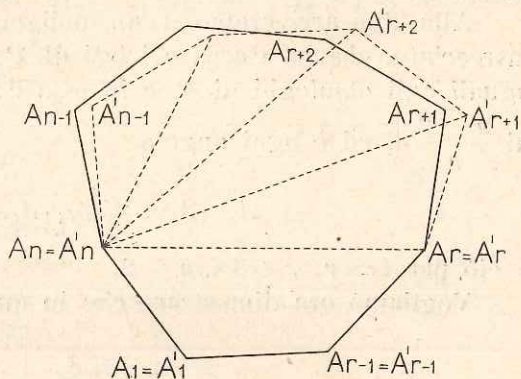


Fig. 36.

Se è

$$A_{n-1} A_n A_r > A_{r+1} A_r A_n$$

sostituiamo al poligono  $A_n A_r A_{r+1} \dots A_{n-1}$  il suo simmetrico rispetto l'asse del suo lato  $A_n A_r$ . Così il nostro poligono  $A_1 A_2 \dots A_n$  viene trasformato in un altro poligono  $A_1 A_2 \dots A_n'$  certamente non intrecciato, avente uguali al precedente i

(1) Cf. § 21.

lati e gli angoli  $A_1' A_2' \dots A_{r-1}'$ : l'angolo  $A_r'$  in esso è ancora maggiore di  $\frac{n-2}{n}\pi$  e inoltre è

$$A_{n-1} A_n A_r < A_{r+1} A_r A_n.$$

Fatto ciò congiungiamo  $A_n'$  con  $A_{r+1}'$ : questa diagonale è tutta interna al poligono in quanto il poligono  $Q$  è convesso quindi anche è convesso il poligono  $A_n' A_r' A_{r+1}' \dots A_{n-1}'$  che ne è una parte.

Nell'ipotesi che sia

$$A'_{n-1} A_n' A'_{r+1} > A'_{r+2} A'_{r+1} A_n'$$

ripetiamo la costruzione fatta prima, lasciando naturalmente invariato il poligono nell'ipotesi contraria.

Otteniamo così un nuovo poligono  $A_1'' A_2'' \dots A_n''$ .

Congiungiamo  $A_n''$  con  $A_{r+2}''$  e ripetiamo il procedimento di prima; e così via.

Alla fine arriveremo a un poligono  $\bar{P}$ , certamente non intrecciato, che ha l'area e i lati di  $P$  e gli angoli  $\bar{A}_1 \bar{A}_n \bar{A}_{r-1}$  uguali agli omologhi di  $P$ , e in esso l'angolo  $\bar{A}_r$  è maggiore di  $\frac{n-2}{n}\pi$ , ed è ogni angolo

$$\bar{A}_{n-1} \bar{A}_n \bar{A}_i \leq \bar{A}_{i+1} \bar{A}_i \bar{A}_n$$

e ciò per  $i = r, r+1 \dots n-2$ .

Vogliamo ora dimostrare che in questo poligono l'angolo

$$\bar{A}_{n-1} \bar{A}_n \bar{A}_r$$

è minore od uguale a  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

A tale oggetto costruisco il cerchio passante per i vertici  $\bar{A}_n \bar{A}_1 \dots \bar{A}_2$ : in questo cerchio l'angolo formato da due corde uguali ai lati di  $P$  è di  $\frac{n-2}{n}\pi$ : esso è dunque il cerchio circoscritto all'ennagono regolare che abbia i lati di  $P$ .

Essendo  $A_{r-1} > \frac{n-2}{n}$  il vertice  $A_{r+1}$  sarà fuori di questo cerchio. Tutti gli altri vertici  $\bar{A}_{r+2} \bar{A}_{r+3} \dots \bar{A}_{n-1}$  non possono cadere sul cerchio o fuori, perchè in quest'ipotesi ogni lato del poligono  $\bar{P}$  sarebbe veduto dal centro  $O$  del cerchio sotto un

angolo minore od uguale di  $\frac{2\pi}{n}$  e siccome il lato  $\bar{A}_r \bar{A}_{r+1}$  è veduto secondo un angolo minore di  $\frac{2\pi}{n}$  (essendo  $A_{r+1}$  esterno) la somma degli  $n$  angoli sotto i quali dal centro si vedono gli  $n$  lati di  $\bar{P}$  sarebbe minore di  $2\pi$ , contro l'ipotesi che questi lati costituiscano un poligono.

A partire da  $\bar{A}_r$ , nel senso degli indici crescenti, troveremo un primo vertice intorno al cerchio: sia esso  $\bar{A}_s$ .

Il vertice precedente  $\bar{A}_{s-1}$  può essere tanto sul cerchio quanto fuori.

Distinguiamo due casi

a)  $O$  e  $\bar{A}_{n-1}$  sono dalla stessa parte della diagonale  $\bar{A}_n \bar{A}_{s-1}$  oppure su di essa

b)  $O$  e  $\bar{A}_{n-1}$  sono da banda opposta di  $\bar{A}_n \bar{A}_{s-1}$ .

Esaminiamo questi casi.

a) Cominciamo col primo (vedi Fig. 37).

Congiungo  $O$  con  $\bar{A}_{s-1}$ . L'angolo  $O\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$  è evidentemente minore di  $\frac{1}{2} \frac{n-2}{n} \pi$ .

Noto che

$$O\bar{A}_n \bar{A}_{s-1} \geq O\bar{A}_{s-1} \bar{A}_n$$

(l'uguale vale nell'ipotesi che  $A_{s-1}$  sia sul cerchio oppure che  $O$  sia sulla  $\bar{A}_n \bar{A}_{s-1}$ ) ma per ipotesi

$$\bar{A}_{n-1} \bar{A}_n \bar{A}_{s-1} \leq \bar{A}_s \bar{A}_{s-1} \bar{A}_n$$

quindi

$$\bar{A}_{n-1} \bar{A}_n O \leq \bar{A}_s \bar{A}_{s-1} O < \frac{1}{2} \frac{n-2}{n} \pi$$

essendo l'angolo

$$O\bar{A}_n \bar{A}_1 = \frac{1}{2} \frac{n-2}{n} \pi$$

risulta

$$A_{n-1} A_n A_1 < \frac{n-2}{n} \pi.$$

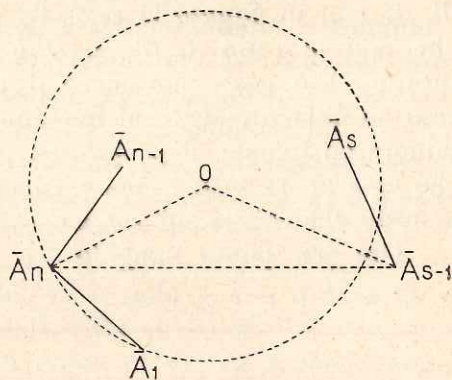


Fig. 37.

b) Consideriamo ora il secondo caso (vedi Fig. 38).

Sia  $Q$  l'intersezione di  $\bar{A}_n \bar{A}_{s-1}$  col cerchio. Costruisco il segmento  $Q\bar{A}'_s$  uguale e parallelo al segmento  $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$  e diretto nello stesso senso.

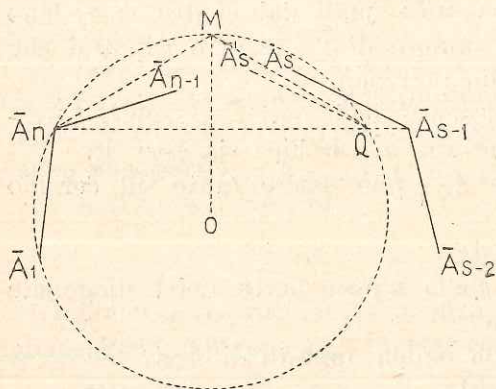


Fig. 38.

Dico che  $\bar{A}'_s$  è interno al cerchio.

Per dimostrare questo costruisco il raggio  $OM$  perpendicolare ad  $AnQ$ : noto che la  $\bar{A}_s \bar{A}'_s$  è parallela alla  $\bar{A}_n \bar{A}_{s-1}$ , quindi, essendo  $\bar{A}_s$  interno, se  $\bar{A}'_s$  fosse esterno o sul cerchio dovrebbe essere dalla parte di  $OM$  dalla quale si trova  $\bar{A}_n$ , quindi  $Q\bar{A}'_s$

sarebbe maggiore di  $QM$ . Noto inoltre che  $\bar{A}_{s-1}Q$  è minore di  $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$ , in quanto la retta  $\bar{A}_{s-1}Q$  è più vicina al centro che non la retta  $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$ , e  $Q$  è sul cerchio, mentre  $\bar{A}_s$  è interno. Ciò posto considero il poligono  $M\bar{A}_n\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{s-1}Q$ : esso ha evidentemente al massimo  $n$  lati, ciascuno dei quali è minore od uguale di  $p$ , lato del poligono  $P$ : è quindi assurdo che esso abbia tutti i suoi vertici sul cerchio o fuori: è quindi assurdo che  $\bar{A}'_s$  sia sul cerchio o fuori.

Ora per ipotesi l'angolo

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{s-1} \leq \bar{A}_s\bar{A}_{s-1}\bar{A}_n = \bar{A}'_sQ\bar{A}_n$$

quindi  $\bar{A}_{n-1}$  è interno al cerchio e quindi l'angolo

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_1 < \frac{n-2}{n}\pi.$$

3) Consideriamo ora l'ultimo caso, cioè supponiamo che  $\bar{A}_n$  e  $\bar{A}_s$  siano ambedue minori di  $\frac{n-2}{n}\pi$ .

Anche in quest'ipotesi mi riduco al caso 1).

Con costruzione analoga a quella impiegata nel secondo caso costruisco un poligono  $\bar{P}$  non intrecciato che ha uguali a  $P$  l'area, i lati, e gli angoli  $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_{r-1}$ , nel quale l'angolo

$A_r$  è ancora minore di  $\frac{n-2}{n}\pi$ , e che di più è tale che sia ogni angolo

$$A_{n-1}A_nA_i \geq A_{i+1}A_iA_n$$

e ciò per  $i = r, r+1 \dots n-2$ .

Ora dovrò dimostrare che in  $\bar{P}$  l'angolo  $\bar{A}_n$  è  $> \frac{n-2}{n}\pi$ ; dimostrato questo potrò operare su  $\bar{P}$  come ho operato su  $P$  nel caso 1); otterrò così un poligono  $P'$  che soddisfa evidentemente alle condizioni volute.

Per dimostrare adunque che  $\bar{A}_n > \frac{n-2}{n}\pi$  costruisco anche qui il cerchio  $C$  passante per  $\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_r$ . Essendo  $\bar{A}_r < \frac{n-2}{n}\pi$  il vertice  $\bar{A}_{r+1}$  cade internamente al cerchio. Supponiamo che qualche vertice cada fuori dal cerchio: si potrebbe dimostrare che se  $\bar{P}$  è convesso questo accade effettivamente, ma per il nostro scopo (costruzione del poligono  $P'$ ) basta notare che se ogni altro vertice fosse sul cerchio o interno, il poligono  $P$  avrebbe area minore dello ennagono regolare  $R$  di lati uguali a quelli di  $P$  e quindi inscritto nel cerchio  $C$  <sup>(1)</sup>: possiamo quindi assumere come poligono  $P'$  e il poligono  $R$ .

Supposto adunque che non tutti i vertici siano sul cerchio o dentro, sia  $\bar{A}_s$  il primo vertice, a partire da  $\bar{A}_r$  nel senso degli indici crescenti, che cade fuori dal cerchio  $C$ .

Congiungo  $\bar{A}_n$  con  $\bar{A}_{s-1}$ .

Se  $O$ , centro del cerchio  $C$ , è sulla  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  o dalla stessa banda di  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  dalla quale cade  $\bar{A}_{n-1}$ , si dimostra, come abbiamo fatto nella analoga ipotesi per il caso 2) che è l'angolo

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_1 > \frac{n-1}{n}\pi.$$

Analisi particolare invece richiede il caso che  $O$  e  $\bar{A}_{n-1}$  siano da bande opposte di  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$ . Consideriamo adunque questo caso.

Anzitutto se  $\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{s-1} \geq \frac{\pi}{2}$  il vertice  $\bar{A}_{n-1}$  è evidente-

(1) Ciò si vede facilmente scomponendo  $R$  in tanti triangoli aventi per base i lati di  $R$  e per vertice il centro di  $C$  e così pure operando su  $\bar{P}$ : si ha allora che ogni triangolo di  $R$  ha base uguale e altezza maggiore dell'omologo di  $P$ , quindi  $R$  ha area maggiore di  $P$ .

mente esterno a  $C$  e quindi:

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_1 > \frac{n-2}{n}\pi.$$

Possiamo quindi supporre:

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{s-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Costruisco  $OM$  raggio perpendicolare ad  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$ .  
Sia  $G$  l'intersezione di  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  col cerchio  $C$ .

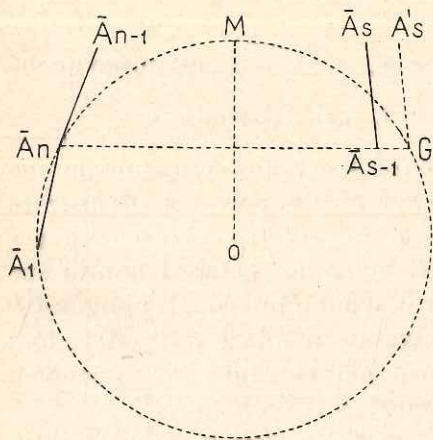


Fig. 39.

Distinguo due casi:

a)  $A_s$  e  $G$  sono dalla stessa parte di  $OM$  o  $A_s$  si trova su  $OM$ ;

b)  $A_s$  e  $G$  sono da banda opposte di  $OM$ .

Vediamo come si operi in ciascuno di essi.

a) Supponiamo che  $A_s$  e  $G$  siano dalla stessa parte di  $OM$ . Costruisco (Fig. 39) il segmento  $GA_s'$  uguale e parallelo al segmento  $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$  e diretto nello stesso senso. Allora  $A_s'$  risulta evidente-

mente esterno a  $C$ , e quindi essendo

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{s-1} \leq \bar{A}_n\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s = \bar{A}_n G \bar{A}_s,$$

anche  $\bar{A}_{n-1}$  esterno è al cerchio, e quindi è

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_s > \frac{n-2}{n}\pi;$$

b) Supponiamo ora che  $A_s$  sia dalla banda di  $OM$  opposta a quella in cui si trova  $G$ . (Fig. 40).

Dimostrerò essere assurdo che  $\bar{A}_{n-1}$  sia nel cerchio o dentro e quindi risulterà che  $\bar{A}_{n-1}$  è

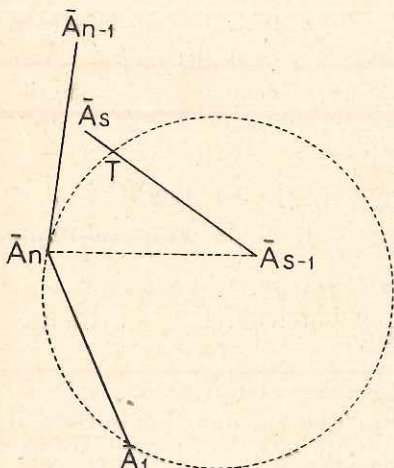


Fig. 40.

esterno e quindi:

$$\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_1 > \frac{n-2}{n}\pi.$$

Sia  $T$  l'intersezione di  $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$  col cerchio. Se  $\bar{A}_{n-1}$  fosse interno al cerchio o sul cerchio, non dovendo il poligono essere intrecciato,  $\bar{A}_{n-1}$  dovrebbe essere interno al triangolo mistilineo  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}T$ . Ma i punti di questo triangolo hanno distanza da  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  minore che non  $\bar{A}_s$  (questo perchè  $\bar{A}_s$  è dalla parte di  $OM$  da cui si trova  $\bar{A}_n$ ). Quindi  $\bar{A}_{n-1}$  dovrebbe distare da  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  meno di quel che dista  $\bar{A}_s$ . Ma per ipotesi l'angolo  $\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  è acuto ed è maggiore od uguale dell'angolo  $\bar{A}_s\bar{A}_{s-1}\bar{A}_n$ , ed essendo inoltre  $\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n = \bar{A}_s\bar{A}_{s-1}$ , la distanza di  $\bar{A}_{n-1}$  da  $\bar{A}_n\bar{A}_{s-1}$  è maggiore od uguale a quella di  $\bar{A}_s$ .

È quindi assurdo che  $\bar{A}_{n-1}$  sia interno o sul cerchio.

E così il nostro *Teorema 2)* è completamente stabilito.

Da esso, tenuto conto del *Teorema 1)* deriva, come primo ed evidente corollario che

Se  $P$  è un poligono equilatero e non equiangolo esso ha area minore del poligono equiangolo che ne abbia gli stessi lati, cioè del poligono regolare.

Confrontando poi questo risultato con quello stabilito al principio del § 25 otteniamo il

*Teorema di ZENODORO*: l'ennagono regolare è massimo fra tutti gli ennagoni isoperimetri

la cui dimostrazione risulta così stabilita indipendentemente dal postulato del massimo e anche dal *teorema di CRAMER*.

## CAPITOLO VIII.

### Isoperimetria solida.

§ 27. Dei prismi e dei cilindri <sup>(1)</sup>. — Cominciamo col dimostrare il

*Teorema 1)*. Fra tutti i prismi di data base e data altezza il prisma retto è quello che ha la minima superficie laterale, e quindi anche la minima superficie totale.

<sup>(1)</sup> Cfr. nel « Journal di Crelle » del 1842, la prima Memoria di STEINER, *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan sur la sphere et dans l'espace en général.*

Infatti sia  $P$  un prisma qualunque, e  $P'$  il prisma retto di ugual base e ugual altezza. Allora le faccie laterali omologhe di  $P$  e  $P'$  hanno ugual base, ma l'altezza di una faccia di  $P$  è maggiore od uguale, e in qualcuna certamente maggiore, all'altezza dell'omologa faccia di  $P'$ , quindi la superficie laterale di  $P$  è maggiore di quella di  $P'$ .

Da questo teorema, tenuto conto della definizione di superficie laterale di cilindro, segue facilmente il

*Corollario.* Fra tutti i cilindri di ugual base e ugual altezza, il retto è quello che ha la minima superficie laterale.

Tenendo poi conto del fatto che l'ennagono regolare ha perimetro minore di ogni ennagono non regolare di ugual base, si deduce il

*Teorema 2).* Fra tutti i prismi retti di cui è dato il numero dei lati, l'altezza e l'area della base, quello a base regolare ha la superficie laterale minima.

E, per la legge di reciprocità, abbiamo anche che fra tutti i prismi retti di cui è dato il numero dei lati, l'area della base e la superficie laterale, quello a base regolare ha la massima altezza, e quindi il massimo volume.

Nello stesso modo si stabilisce il

*Teorema 3).* Fra due prismi retti e a basi regolari aventi uguale l'area della base e l'altezza, quello che ha maggior numero di lati ha la superficie laterale minore. E reciprocamente: fra due prismi a basi regolari aventi uguali l'area della base e la superficie laterale quello che ha maggior numero di lati ha maggior altezza e quindi maggior volume.

E infine:

Il cilindro retto ha minor superficie laterale di ogni prisma che abbia la stessa altezza e basi equivalenti; e ancora: il cilindro retto ha maggior altezza, e quindi maggior volume, di ogni prisma che abbia basi equivalenti e ugual superficie laterale.

Ammesso ora che esista un prisma di volume massimo fra i poligoni quadrangolari racchiusi da una medesima superficie, dimostriamo il

*Teorema 4).* Il cubo è il prisma quadrangolare di volume massimo fra quelli di data superficie.

Infatti il prisma quadrangolare di volume massimo deve avere le basi regolari, quindi quadrate: ma ogni faccia di un



prisma quadrangolare può essere assunta come base, quindi tutte le faccie del prisma che realizza il massimo devono essere quadrate e quindi questo prisma è il cubo.

Per chiarire considerazioni ulteriori è bene notare qui che il parallelepipedo di massimo volume fra quelli di data superficie totale gode delle due proprietà

1) la somma delle sue basi è la metà della superficie laterale

2) esso è circoscritto a una sfera che tocca ciascuna faccia nel suo baricentro.

Per stabilire ora, quale fra i prismi di data superficie totale, abbia il massimo volume premettiamo il

*Lemma.* Fra tutti i prismi triangolari retti aventi la base  $ABC$  simile a un triangolo dato e aventi costante la somma  $S$  delle aree delle due basi e della faccia laterale relativa al lato  $AB$ , ha il massimo volume quello in cui la base  $ABC$  ha per area  $\frac{1}{6} S$ .

Infatti sia  $P_3$  un prisma generico soddisfacente alle condizioni volute, e sia  $ABC$  la sua base.

Costruisco (vedi Fig. 41) il quadrato  $DEFG$  di centro  $C$  e nel quale il lato  $DG$  si trovi sulla retta  $AB$ . Noto che  $DG$  è eguale al doppio di  $CH$  altezza del triangolo  $ABC$ .

Considero il prisma quadrangolare  $P_4$  di base  $DEFG$  e di altezza uguale all'altezza di  $P_3$ . Sia  $\Sigma$  la sua superficie totale.

Noto che l'area di  $ABC$  sta all'area  $DEFG$  come  $AB$  sta a  $4 \cdot DG$ . Inoltre la superficie della faccia laterale di  $P_3$ , relativa al lato  $AB$ , sta alla superficie laterale di  $P_4$  nello stesso rapporto. Si ha quindi

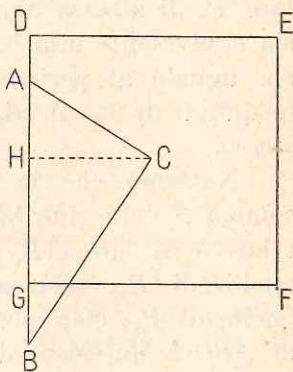


Fig. 41.

$$2) \quad \frac{S}{\Sigma} = \frac{AB}{4DG} = \frac{\text{area } ABC}{\text{area } DEFG} = \frac{\text{vol. } P_3}{\text{vol. } P_4}.$$

Essendo  $ABC$  variabile in una serie di triangoli simili,

il rapporto  $\frac{AB}{CH}$  è costante; quindi è costante anche  $\frac{AB}{DG}$  essendo  $DG = 2CH$ . Essendo inoltre costante  $S$  ho che  $\Sigma$  è costante.

Inoltre siccome il volume di  $P_3$  sta al volume di  $P_4$  come le loro basi, il cui rapporto  $\frac{AB}{4DG}$  è costante, ho che  $P_3$  avrà il massimo volume, quando lo avrà anche  $P_4$ .

Ma  $P_4$ , di cui è costante la superficie laterale  $\Sigma$ , raggiunge il massimo volume, quando è un cubo, cioè quando l'area della sua base è  $\frac{1}{6}$  di  $\Sigma$ , quindi per la 2)  $P_3$  avrà il massimo volume quando l'area di  $ABC$  è un sesto di  $S$ .

Ed ora veniamo al

*Teorema 5).* Fra tutti i prismi aventi la base simile a un  $n$ -gono prefissato, e dei quali è data superficie totale, è massimo quello in cui l'area della base è un sesto dell'area totale.

Sia  $P_n$  un prisma generico soddisfacente alle condizioni volute. Sia  $\beta$  la sua base. Costruiamo un prisma triangolare  $P_3$  di altezza uguale a quella di  $P_n$ , la cui base  $ABC$  sia equivalente alla base di  $P_n$ , e tale che il lato  $AB$  di essa sia uguale al perimetro della base di  $P_n$ . Al variare di  $\beta$  (e quindi di  $P_n$ ) il triangolo  $ABC$  varia restando simile a se stesso.

Notiamo che la superficie totale di  $P_n$  è uguale alla somma  $S$  delle due basi di  $P_3$  e della faccia (sempre di  $P_3$ ) relativa al lato  $AB$ . Siccome il volume di  $P_n$  è uguale a quello di  $P_3$ , così esso sarà massimo quando è massimo quello di  $P_3$ , cioè per il lemma precedente, quando l'area di  $ABC$  è un sesto di  $S$  e quindi quando l'area di  $\beta$  è un sesto della area totale.

Da questo teorema deduciamo immediatamente

*Corollario 1).* Fra tutti i prismi di cui è fissato il numero delle faccie e la superficie totale, ha volume massimo quello che è con la base regolare e in cui l'area della base è  $\frac{1}{6}$  della superficie totale.

*Corollario 2).* Fra tutti i prismi e cilindri di data superficie totale, ha volume massimo quel cilindro circolare retto in cui la base è un sesto della superficie totale.

§ 28. Sulle piramidi e sul cono (1).

*Lemma 1).* Cominciamo col notare che se di due triangoli rettangoli sono dati i due cateti  $h_1$  e  $h_2$  (uno per triangolo) e la somma degli altri due  $p_1 + p_2$ , la somma delle ipotenuse  $l_1 + l_2$  è minima, come risulta evidentemente dalla figura 42, quando gli angoli opposti a  $h_1$  e  $h_2$  sono uguali cioè quando i triangoli sono simili, cioè quando si ha

$$\frac{h_1}{p_1} = \frac{h_2}{p_2}.$$

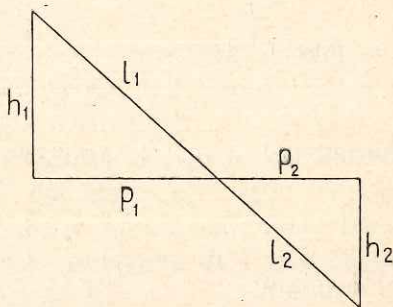


Fig. 42.

*Lemma 2).* Di due triangoli rettangoli siano dati i cateti  $h_1$  e  $h_2$  e la somma dei rettangoli compresi tra ciascuno degli altri e i due segmenti prefissati  $a_1$ , e  $a_2$  vale a dire la somma  $p_1 a_1 + p_2 a_2$  dico che la somma dei rettangoli compresi tra le ipotenuse  $l_1$  e  $l_2$ , e i segmenti  $a_1$  e  $a_2$  cioè la somma  $l_1 a_1 + l_2 a_2$ , è minima quando i triangoli sono simili cioè quando

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2}.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} l_1 a_1 &= l_1' & l_2 a_2 &= l_2' \\ p_1 a_1 &= p_1' & p_2 a_2 &= p_2' \\ h_1 a_1 &= h_1' & h_2 a_2 &= h_2'. \end{aligned}$$

Abbiamo allora che  $l_1'$ ,  $p_1'$  e  $h_1'$  sono i lati di un triangolo rettangolo simile al triangolo rettangolo di lati  $l_1$ ,  $p_1$ ,  $h_1$ , e così pure  $l_2'$ ,  $p_2'$ ,  $h_2'$  sono i lati di un triangolo rettangolo simile al triangolo rettangolo di lati  $l_2$ ,  $p_2$ ,  $h_2$ .

Di questi due triangoli sono dati i cateti

$$h_1' \text{ e } h_2'$$

e la somma degli altri due

$$p_1' + p_2':$$

(1) Cfr. STEINER, loc. cit.

la somma delle ipotenuse  $l'_1 + l'_2$  è minima, per quanto abbiamo visto, quando essi sono simili, cioè quando

$$\frac{h'_1}{l'_1} = \frac{h'_2}{l'_2}.$$

Ma

$$l' + l'_2 = a_1 l_1 + a_2 l_2$$

quindi  $a_1 l_1 + a_2 l_2$  è minimo quando

$$\frac{h'_1}{l'_1} = \frac{h'_2}{l'_2}$$

cioè quando

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2}.$$

*Lemma 3)*

Dati di più triangoli rettangoli i cateti

$$h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_n$$

e la somma

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 \quad \dots \quad + p_n a_n,$$

somma dei rettangoli compresi fra gli altri cateti e dei segmenti prefissati  $a_1 a_2 \dots a_n$ , dico che

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 \quad \dots \quad + l_n a_n,$$

somma dei rettangoli compresi fra le ipotenuse  $l_1 l_2 \dots l_n$  e i segmenti  $a_1 a_2 \dots a_n$ , è minima quando i triangoli sono simili, cioè quando

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \dots = \frac{h_n}{l_n}.$$

Questo fatto, ammessa l'esistenza del massimo, si deduce immediatamente dal *Lemma* precedente notando che i nostri triangoli devon essere a coppie tutti simili.

*Teorema 1).* Date due piramidi  $P$  e  $P'$  aventi  $n$  faccie laterali di basi equivalenti e di ugual altezza, delle quali una, la  $P$ , sia circoscritta a un cono retto e l'altra,  $P'$ , no, dico che ha superficie laterale minore quella che è circoscritta al cono circolare retto.

Siano, infatti,

$$a_1 a_2 \dots a_n$$

i lati della base di  $P$ , e

$$a'_1 a'_2 \dots a'_n$$

quelli della base di  $P'$ .

Sia  $O$  il piede della perpendicolare abbassata dal vertice di  $P$  sulla sua base,  $O'$  il punto omologo in  $P'$ , punto che per il momento suppongo interno alla base di  $P'$ .

Siano  $p_1 p_2 \dots p_n$  le distanze di  $O$  dai lati  $a_1 a_2 \dots a_n$ , e così pure  $p'_1 p'_2 \dots p'_n$  le distanze di  $O'$  dai lati  $a'_1 a'_2 \dots a'_n$ .

Indichiamo inoltre con  $l_1 l_2 \dots l_n$  le altezze delle facce laterali di  $P$ , e con  $l'_1 l'_2 \dots l'_n$  le altezze omologhe di  $P'$ . Indicata con  $h$  l'altezza comune di  $P$  e  $P'$  pongo

$$h_1 = h'_1 = h_2 = h'_2 = \dots = h_n = h'_n = h.$$

Noto che  $p_i$  e  $h_i$  sono i lati di un triangolo rettangolo di cui  $l_i$  è l'ipotenusa e ciò per  $i=1, 2, \dots, n$ , e la stessa cosa sia detta anche per  $p'_i, h'_i$  ed  $l'_i$ .

Per ipotesi ho

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 \dots + a_n p_n = a'_1 p'_1 + a'_2 p'_2 \dots + a'_n p'_n.$$

Inoltre, essendo  $P$  circoscritto a un cono retto, è

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n.$$

Quindi ho

$$\frac{h_1}{p_1} = \frac{h_2}{p_2} = \dots = \frac{h_n}{p_n}.$$

Ma non è

$$\frac{h'_1}{p'_1} = \frac{h'_2}{p'_2} = \dots = \frac{h'_n}{p'_n}$$

perchè  $P'$  non è circoscritto a un cono retto: quindi, per il lemma precedente

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 \dots + l_n a_n < l'_1 a'_1 + l'_2 a'_2 \dots + l'_n a'_n$$

cioè la superficie laterale di  $P$  è minore di quella di  $P'$ .

Il nostro teorema è così dimostrato nell'ipotesi che  $O'$  sia interno alla base di  $P'$

Se  $O'$  fosse esterno, allora sarebbe

$$a_1'p_1' + a_2'p_2' \dots + a_n'p_n' > a_1p_1 + a_2p_2 \dots + a_np_n.$$

Consideriamo ora la piramide  $P''$  circoscritta a un cono circolare retto che abbia altezza  $h$ , base simile a quella di  $P$  e area uguale a

$$a_1'p_1' + a_2'p_2' \dots + a_n'p_n'.$$

La superficie laterale di  $P''$  è allora evidentemente maggiore di quella di  $P$  mentre, sempre per il *lemma 3*, è minore di quella di  $P'$ . In definitiva quindi, anche se  $O'$  esterno, la superficie laterale di  $P'$  è maggiore di quella di  $P$ .

*Teorema 2*). Tutte le piramidi che hanno uguale altezza, basi equivalenti e sono circoscritte allo stesso cono retto, hanno superficie laterale uguale.

Consideriamo due piramidi siffatte  $P$  e  $P'$  siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i lati della base di  $P$ ,  $a_1', a_2', \dots, a_n'$  quelli della base di  $P'$ .

Indico con  $\rho$  il raggio del cerchio base del cono, e con  $l$  la lunghezza della generatrice.

Per ipotesi è

$$\rho(a_1 + a_2 \dots + a_n) = \rho(a_1' + a_2' \dots + a_n')$$

quindi è anche

$$l(a_1 + a_2 \dots + a_n) = l(a_1' + a_2' \dots + a_n')$$

cioè

$$la_1 + la_2 \dots + la_n = la_1' + la_2' \dots + la_n'$$

onde le due superficie laterali sono uguali.

*Teorema 3*). Fra due piramidi  $P$  e  $P'$  circoscritte a coni diversi aventi ugual altezza e basi equivalenti ha superficie laterale minore quella la cui base è circoscritta al cerchio di raggio maggiore.

Siano  $\rho$  e  $\rho'$  i raggi delle basi,  $l$  e  $l'$  le lunghezze delle generatrici dei due coni inscritti alle piramidi di  $P$  e  $P'$ .

Supponiamo  $\rho > \rho'$ : essendo uguali le altezze risulta che l'angolo d'apertura del primo cono è maggiore dell'angolo

d'apertura del secondo, e quindi

$$\frac{l}{\rho} < \frac{l'}{\rho'}$$

Ma per ipotesi è

$$\rho(a_1 + a_n + \dots + a_n) = \rho'(a_1' + a_2' + \dots + a_{n_2}')$$

quindi

$$l(a_1 + a_n + \dots + a_n) < l'(a_1' + a_2' + \dots + a_{n_2}')$$

cioè

$$la_1 + la_2 + \dots + la_n < l'a_1' + l'a_2' + \dots + l'a_n'$$

il che mostra che la superficie laterale della piramide circoscritta al primo cono è minore di quella della piramide circoscritta al secondo.

Da questo teorema si deduce immediatamente il

*Corollario.* Se  $P_n$  e  $P_m$  sono due piramidi a basi regolari di ugual altezza e di basi equivalenti e la prima ha un numero maggiore di faccie laterali, la sua superficie laterale è minore di quella della seconda; e inoltre, come limite, il cono circolare retto ha superficie laterale minore di ogni piramide a base regolare di ugual altezza e di base equivalente.

*Teorema 4).* Fra tutte le piramidi con  $n$  faccie laterali aventi ugual altezza e basi equivalenti, la piramide a base regolare è quella che ha minor superficie laterale.

Questo fatto si deduce subito dai teoremi 1) e 3) e dalla proprietà dell' $n$ -gono regolare di aver perimetro minore di ogni  $n$ -gono di ugual area, tenendo conto che se due  $n$ -goni  $E$  e  $E'$ , circoscritti a due cerchi  $C$  e  $C'$ , hanno ugual area, quello di perimetro minore è circoscritto al cerchio di raggio maggiore.

E reciprocamente si ha

*Teorema 5).* Fra tutte le piramidi aventi un medesimo numero di faccie laterali, basi equivalenti e ugual superficie totale, la piramide a base regolare è quella che ha il massimo volume. E infine, come caso limite: il cono circolare retto ha superficie laterale minore di ogni piramide di ugual altezza e di base equivalente, ed ha volume maggiore di ogni piramide di base equivalente e di ugual superficie laterale.

Ammettiamo ora che tra tutti i tetraedri racchiusi da una medesima superficie ve ne sia uno di volume massimo.

Amnesso questo postulato dimostriamo il  
*Teorema 6).* Fra tutti i tetraedri di ugual superficie quello che ha il massimo volume è il regolare.

Infatti il tetraedro è una piramide triangolare rispetto una qualunque sua faccia assunta come base: il tetraedro di volume massimo deve quindi avere per faccie tutti triangoli equilateri.

Notato che nel tetraedro regolare l'area della base è  $\frac{1}{4}$  della superficie totale, si dimostra in modo perfettamente uguale a quello usato per dimostrare analoga proposizione per i prismi il

*Teorema 7).* Di tutte le piramidi di data superficie totale, e aventi ciascuna la base simile a un poligono dato ha volume massimo quella in cui l'area della base è  $\frac{1}{4}$  dell'area totale.

Da queste proposizioni si deduce immediatamente.

*Corollario 1).* Fra tutte le piramidi aventi un medesimo numero di faccie laterali e ugual superficie totale, ha volume massimo la piramide a base regolare in cui la base sia  $\frac{1}{4}$  della superficie totale.

*Corollario 2).* Fra tutte le piramidi e i coni di data superficie totale ha il massimo volume il cono circolare retto in cui la base è  $\frac{1}{4}$  della superficie totale.

§ 29. *Proprietà isoperimetrica della sfera* <sup>(1)</sup>. — *Teorema.* Fra tutti i solidi di ugual superficie la sfera è quello che ha volume massimo.

Per dimostrare questo teorema dobbiamo premettere i 3 lemmi seguenti.

*Lemma 1).* Una piramide triangolare qualunque  $ABCD$  è divisa in due parti di ugual volume dal piano  $\alpha$  che passa per lo spigolo  $CD$  e per il punto  $M$ , punto di mezzo dello

(1) Cfr. STEINER. Loc. cit.



spigolo  $AB$ ; inoltre l'area della figura d'intersezione  $CDM$  è minore della semisomma delle due faccie  $ACD$  e  $BCD$  che non sono intersecate dal piano  $\alpha$ .

Per dimostrarlo proiettiamo i triangoli  $ACD$  e  $BCD$  sul piano  $\alpha$ .

Siano  $A_1$  e  $B_1$  le proiezioni di  $A$  e  $B$ .

I punti  $A_1MB_1$  si troveranno in linea retta, e sarà evidentemente

$$MA_1 = MB_1.$$

Allora il triangolo  $CDM$  è uguale alla semisomma dei triangoli  $A_1CD$  e  $B_1CD$

Ma il triangolo  $A_1CD$  è minore del triangolo  $ACD$  e così pure il triangolo  $B_1CD$  è minore del triangolo  $BCD$ : risulta quindi

$$\text{area } CDM < \frac{1}{2} (\text{area } ADC + \text{area } BCD).$$

*Lemma 2).* Una piramide quadrangolare  $ABFED$ , di cui la base è un trapezio  $ABFE$ , è divisa in due parti di ugual volume dal piano  $\alpha$  che passa per il vertice  $D$  e i punti  $M$  e  $N$ , punti di mezzo dei lati paralleli  $AB$  e  $EF$  della base; inoltre la figura di intersezione  $DMN$  è minore della semisomma delle faccie  $AED$  e  $BFD$  che non sono intersecate dal piano  $\alpha$ .

La dimostrazione deriva immediatamente dal *lemma* precedente notando che è

$$\frac{\text{triangolo } AED}{\text{triangolo } ACD} = \frac{\text{triangolo } MND}{\text{triangolo } MCD} = \frac{\text{triangolo } BFD}{\text{triangolo } BCD}.$$

*Lemma 3).* Un prisma triangolare tronco  $AEGBFH$  è diviso in due parti di ugual volume dal piano  $\alpha$  che passa per i punti  $MNO$ , punti di mezzo degli spigoli  $AB$ ,  $EF$ ,  $GH$ ; inoltre la figura d'intersezione  $MNO$  è in generale più piccola

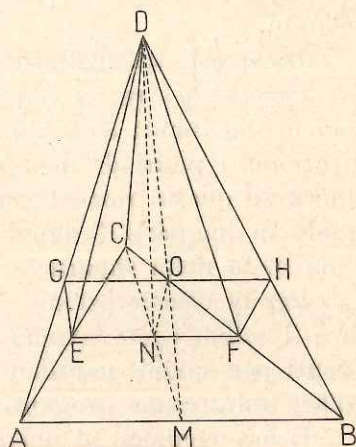


Fig. 43.

della semisomma delle basi  $AEG$ ,  $BFH$  (essa è uguale a questa semisomma quando le basi sono parallele).

Questo *lemma* deriva immediatamente dal *lemma* precedente.

Da questi tre lemmi discende il

*Corollario*: se la superficie di un solido è incontrata solo in due punti soltanto dalle rette  $r$  parallele a una data direzione, i punti di mezzo dei segmenti che la superficie stacca su queste rette formano una superficie  $\gamma$  che divide il solido in due parti di ugual volume ed è essa stessa più piccola della metà della superficie totale.

Per la dimostrazione di questo corollario basta considerare il solido come somma di tanti prismi triangolari tronchi aventi per spigoli paralleli le rette  $r$ , e aventi le basi triangolari infinitesime tangenti alla superficie.

E ora veniamo al nostro

*Teorema*. Fra tutti i solidi convessi di ugual superficie la sfera ha il volume massimo.

Sia  $S$  il solido che realizza il massimo volume.

Facciamo vedere che  $S$  ammette  $\infty^2$  piani di simmetria e che quindi è una sfera.

Preso nello spazio una retta qualsiasi  $r$  esiste evidentemente un piano  $\alpha$  perpendicolare alla  $r$  che divide la superficie di  $S$  in due parti equivalenti  $S_1$  e  $S_2$ .

Anzitutto il solido compreso tra  $S_1$  e  $\alpha$  (solido che indico con  $S_1\alpha$ ) deve essere uguale al solido compreso tra  $S_2$  e  $\alpha$ . Supponiamo infatti che sia  $S_1\alpha > S_2\alpha$ . Consideriamo la superficie  $S_1'$  simmetrica di  $S_1$  rispetto ad  $\alpha$ : allora la superficie  $S_1 + S_1'$  è uguale alla superficie  $S$  e racchiude volume maggiore, e ciò contro l'ipotesi.

Dico inoltre che  $S_1$  e  $S_2$  sono simmetriche. Supponiamo che non lo siano. Costruisco allora  $S_1'$  simmetrico di  $S_1$ : sia  $K$  la curva intersezione di  $S$  con  $\alpha$ . Noto che le superficie  $S_2$  e  $S_1$  avendo lo stesso contorno  $K$  costituiscono insieme una superficie chiusa  $\Sigma$ .

Le rette parallele a  $r$  segano  $\Sigma$  in due punti. Sia  $\gamma$  la superficie luogo dei punti di mezzo dei segmenti che  $\Sigma$  taglia in queste rette. Si ha che  $\gamma$  ha superficie minore della semisomma  $S_1' + S_2$  quindi minore di  $S_1$  e di  $S_2$ .

Occorre ora dimostrare che  $\gamma$  e  $\alpha$  racchiudono un solido equivalente a quello racchiuso da  $\alpha$  e  $S_1$ .

Sia  $\Phi$  la parte comune ai due solidi  $\alpha S_1$  e  $\alpha S_1'$

Le superfici  $S_1'$  e  $S_2$  possono essere una interna all'altra: esse intersecandosi determineranno un certo numero di solidi

tali che è

$$\Sigma_{11}' \Sigma_{12} \dots \Sigma_{1r}, \quad \Sigma_{21} \Sigma_{22} \dots \Sigma_{2s}$$

$$\alpha S_1' = \Phi + \Sigma_{11} + \Sigma_{12} \dots + \Sigma_{1r}$$

$$\alpha S_2' = \Phi + \Sigma_{21} + \Sigma_{22} \dots + \Sigma_{2s}$$

Sarà quindi

$$\Sigma_{11} + \Sigma_{12} \dots + \Sigma_{1r} = \Sigma_{21} + \Sigma_{22} \dots + \Sigma_{2s}$$

Inoltre la superficie  $\gamma$  dividerà in parti uguali tutte le superfici

e sarà quindi

$$\Sigma_{11} \Sigma_{12} \dots \Sigma_{12}, \quad \Sigma_{21} \dots \Sigma_{2s}$$

$$\alpha \gamma = \Phi + \frac{1}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{12} \dots + \Sigma_{2s})$$

cioè

$$\alpha \gamma = \alpha S_1' = \alpha S_2$$

La superficie quindi formata da  $S_1$  e  $\gamma$  ha area minore della  $S$  e racchiude volume uguale alla  $S_1$ , contro l'ipotesi che la  $S$  sia la superficie che racchiude il volume massimo.

È quindi assurdo che  $S_1'$  e  $S_1''$  non sian simmetriche e quindi il piano  $\alpha$  è un piano di simmetria.

Ma essendo del piano  $\alpha$  arbitraria la giacitura, si ha che la  $S$  ammette  $\infty^2$  piani di simmetria, ed è quindi una sfera.

Così, ammesso anche il postulato del massimo, il teorema che la sfera ha volume maggiore di ogni solido che ne abbia la medesima superficie, resta stabilito solo per i solidi che siano convessi.

La dimostrazione che abbiamo riportato si può facilmente estendere alle superfici concave per le quali esiste una direzione  $d$  tale che le rette facenti con essa un angolo minore di un  $\epsilon$  piccolo a piacere, ma maggiore di zero, incontrino la superficie in due soli punti.

Sia infatti  $S$  la superficie che realizza il massimo fra le superfici ora considerate. Non è detto che  $S$  sia convessa, ciò nonostante si dimostra subito, come si è fatto precedentemente, che esiste un piano  $\alpha$ , perpendicolare alla  $d$ , il quale è un piano di simmetria per la superficie  $S$ .

Così pure si prova che, presa una retta  $r$  che faccia con  $d$  un angolo  $\gamma$  minore di  $\varepsilon$ , e non commensurabile con  $\pi$ , esiste un piano  $\alpha$  perpendicolare ad  $r$ , il quale sia anch'esso piano di simmetria per la  $S$ .

Risultando  $\alpha$  e  $\alpha'$  inclinati dell'angolo  $\gamma$  che non è commensurabile con  $\pi$ , la  $S$  risulta di rotazione intorno alla retta intersezione dei piani  $\alpha$  e  $\alpha'$ .

Nello stesso modo si trova che  $S$  è anche di rotazione intorno a un'altra retta.

La superficie  $S$ , ammettendo adunque due assi di rotazione è una sfera.

In questo modo si arriva a dimostrare che la sfera è il solido di volume massimo in una classe molto ampia di corpi di ugual superficie, ma non si arriva ancora a stabilire che la sfera abbia volume maggiore di ogni altro solido racchiuso da una superficie equivalente.

Per arrivare a questo, rimanendo nell'ambito dei nostri metodi elementari, occorrerebbe dimostrare che la superficie di volume massimo non può avere delle concavità. A prima vista si è indotti credere che questa dimostrazione si possa ottenere estendendo senz'altro l'analogia dimostrazione data per le curve. Ciò sarebbe effettivamente possibile se le concavità delle superfici fossero costituite tutte da punti ellittici.

Infatti consideriamo una regione concava di una superficie  $S$ , regione che supponiamo composta di tutti punti ellittici. Sia  $P$  un punto di essa (non sul contorno). Sia  $\pi$  il piano tangente in  $P$ .

Spostiamo  $\pi$  parallelamente a se stesso, verso l'esterno della superficie  $S$ . Se abbiamo spostato  $\pi$  sufficientemente poco, esso taglierà la superficie  $S$  (nell'intorno di  $P$ ) secondo una curva chiusa  $C$ . La  $C$  spezza così la  $S$  in due parti:  $S_1$  e  $S_2$ , di cui una ( $S_1$ ) contiene il punto  $P$ . Se ora alla parte  $S_1$  sostituiamo la regione di piano limitata dalla  $C$ , otteniamo una superficie  $S''$  che ha area minore e volume maggiore di  $S$ .

Possiamo quindi dire che la superficie di volume massimo non ha certamente concavità costituite da punti ellittici.

Ma con questa e con simili costruzioni non si possono escludere le concavità costituite da punti iperbolici.

Infatti esistono superfici concave che non possono esser contenute da nessuna superficie convessa d'area minore:

per esempio la superficie che si ottiene tagliando un iperboloido di rotazione con due piani perpendicolari all'asse di rotazione <sup>(1)</sup>.

Queste difficoltà che presentano le concavità formate da punti iperbolici non sembrano sormontabili coi mezzi elementari, e la necessità di ammettere o la convessità o per lo meno delle restrizioni sulla natura delle concavità, è stata riscontrata anche da autori <sup>(2)</sup> che hanno trattato la proprietà isoperimetrica della sfera, anche con altri mezzi.

La difficoltà però è stata sormontata in questi ultimi tempi dal Prof. L. TONELLI, che è riuscito a dare la dimostrazione completa del nostro teorema, dimostrazione che è anche *indipendente dal postulato del massimo*.

Il lavoro del TONELLI, *Sulla proprietà di minimo della sfera*, che verrà pubblicato fra poco nel « Circolo Matematico di Palermo » mi fu dall' A. gentilmente comunicato, così che posso qui riassumere il suo procedimento.

Sia data una superficie  $S$  qualunque: faremo vedere che la  $S$  ha area maggiore di una sfera  $\Sigma$  che ha ugual volume di  $S$  e quindi risulterà che  $S$  ha volume minore della sfera che ne ha la stessa superficie.

Vediamo adunque come si ottenga  $\Sigma$ .

Fissiamo nello spazio una retta  $r$ . Seghiamo  $S$  con un piano generico perpendicolare alla  $r$ . Sia  $a$  la curva sezione di  $S$  con  $\alpha$ , e sia  $O$  l'intersezione di  $r$  con  $\alpha$ .

Costruisco, nel piano  $\alpha$ , il cerchio  $C$  di centro  $O$  che abbia area uguale all'area di  $a$ . Al variare di  $\alpha$ ,  $c$  varia descrivendo una superficie che è di rotazione intorno all'asse  $r$ .

Chiamo  $S_1$  questa superficie.

Siccome ogni cerchio  $C$  ha area uguale a quella della curva corrispondente  $a$ , così il volume di  $S_1$  sarà uguale a

<sup>(1)</sup> Questa superficie si ottiene elementarmente facendo ruotare un segmento  $AB$  intorno a una retta  $r$  non complanare con esso, e completando la superficie così ottenuta con i due cerchi determinati da  $A$  e da  $B$ .

<sup>(2)</sup> Cfr. A. SCHWARZ. *Beweis des Satzes das di Kugel kleinere Oberfläch besetz, als jeder andere Körper gleichens Volumens*. (Sesumelte Math. Abhand., pag. 327-360). — H. MINKOWSKI. *Volumen und Oberfläche*. (Math. Ann. Bd 57. — I. O. MÜLLER. *Ueber die Minimu leigenschaft der Kugel. Inaugural Dissertation*. Göttingen, 1903. Per maggiori particolari vedi la memoria del TONELLI citata più avanti.

quello di  $S$ . Possiamo poi verificare abbastanza facilmente che la superficie di  $S_1$  è minore di quelle di  $S$ .

Prendiamo ora una retta  $r'$  perpendicolare alla  $r$ , e operiamo su  $S_1$  come abbiamo operato su  $S$ , costruendo una superficie  $S_2$ , di rotazione intorno a  $r'$ , la quale ha volume uguale e area minore che non la  $S_1$ . Ora, sempre con lo stesso metodo, torniamo a trasformare  $S_2$  riducendola ad una superficie  $S_3$  di rotazione intorno a  $r$  e così via.

Otteniamo così una successione di superfici,

$$1) \quad S \ S_1 \ S_2 \ S_3 \dots$$

che tendono a una sfera  $\Sigma$ .

Siccome nella successione 1) i volumi non variano e le superfici vanno diminuendo così la sfera  $\Sigma$ , ottenuto in questo modo, avrà volume uguale e area minore della superficie  $S$ , che è ciò che si voleva stabilire.

§ 30. Dei poliedri in generale. — È facile verificare come tanto fra i prismi che fra le piramidi di dato numero di faccie il prisma e la piramide che racchiudono il massimo volume sotto data superficie totale risultano circoscritti a una sfera che tocca le singole facce nel loro centro di gravità.

STEINER fu indotto da ciò a credere che questa proprietà fosse generale, cioè che fra tutti i poliedri di data specie, quello che sotto data superficie totale racchiude il volume massimo, sia circoscritto a una sfera che tocca ciascuna faccia nel suo baricentro: questa proprietà fu poi riconosciuta vera, e dimostrata dal LINDELÒF.

Crediamo utile riassumere la dimostrazione di LINDELÒF quantunque essa si scosti completamente dai procedimenti geometrici, rimandando ad essa il lettore che ne volesse i particolari (<sup>1</sup>).

LINDELÒF comincia col dimostrare che fra tutti i poliedri, di cui è data la superficie, il numero delle faccie, e la dire-

(<sup>1</sup>) *Math. Annalen*, Bd 2, pag. 150, LINDELÒF. Propriété générale des polyèdres qui sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume.

zione delle loro normali quello circoscritto a una sfera ha il massimo volume.

Sia  $U$  la superficie e  $V$  il volume del poliedro. Siano  $pqr \dots$  le perpendicolari abbassate da un punto fisso  $O$  sulle faccie  $ABC \dots$

Siano  $a_1 a_2 a_3 \dots$  gli spigoli che costituiscono il contorno della faccia  $A$ , e  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  gli angoli diedri corrispondenti:

Per la faccia  $B$  questi stessi elementi li indichiamo con  $b_1 b_2 b_3 \dots$ ,  $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ , per la  $C$  con  $b_1 b_2 b_3 \dots$ ,  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$

Spostando la faccia  $A$  parallelamente a se stessa di una lunghezza  $dp$ , l'incremento di volume del poliedro è

$$Adp,$$

è quello della superficie

$$(a_1 \cotg \frac{\alpha_1}{2} + a_2 \cotg \frac{\alpha_2}{2} + a_3 \cotg \frac{\alpha_3}{2} \dots) dp = dp \Sigma a \cotg \frac{\alpha}{2}.$$

Assumiamo  $pqr \dots$  come variabili principali.

Ciò posto i differenziali totali di  $U$  e  $V$  sono

$$dV = Aap + Bdq + Cdr + \dots$$

$$dU = dp \Sigma a \cotg \frac{\alpha}{2} + dq \Sigma b \cotg \frac{\gamma}{2} + dr \Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2} + \dots$$

Supponendo di spostare le faccie in modo che le perpendicolari  $pqr \dots$  crescano nella stessa proporzione si ha

$$\frac{dV}{3V} = \frac{dU}{2U} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dr}{r} \dots$$

Di qui deduciamo

$$3V = A \cdot p + B \cdot q + C \cdot r \dots$$

$$2U = p \Sigma a \cotg \frac{\alpha}{2} + q \Sigma b \cotg \frac{\beta}{2} + r \Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2} \dots$$

Se  $V$  è un massimo,  $U$  essendo costante, deve essere

$$dU = 0$$

$$dV = 0$$

cioè

$$A dp + B dq + C dr \dots = 0$$

e

$$dp \left( + \Sigma a \cos \frac{\alpha}{2} \right) + dq \left( \Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2} \right) + dr \left( \Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2} \right) \dots = 0.$$

e siccome la prima equazione deve esser soddisfatta per tutti i valori di  $dp \ dq \ dr \dots$  che soddisfano la seconda, sarà

$$\frac{A}{\Sigma a \cotg \frac{\alpha}{2}} = \frac{B}{\Sigma l \cotg \frac{\alpha}{2}} = \frac{C}{\Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2}} \dots = \frac{3V}{2U} = R$$

dove  $R$  è una certa costante, cioè

$$2A = R \Sigma a \cotg \frac{\alpha}{2}$$

1)

$$2B = R \Sigma b \cotg \frac{\gamma}{2}$$

$$2C = R \Sigma c \cotg \frac{\gamma}{2}$$

.....

Trasformiamo questa condizione.

Consideriamo la faccia  $A_1$ , e di essa particolarmente lo spigolo  $a_1$  e i tre diedri consecutivi  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ : sia  $\rho_1$  il raggio della sfera inscritta contemporaneamente nei tre diedri: abbiamo così che a ciascun spigolo  $a_1 a_2 a_3 \dots$  corrisponde un determinato raggio  $\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots$

Sia  $P$  un punto qualunque della faccia  $A$ , e siano

$$h_1 h_2 h_3 \dots$$

le distanze di  $P$  dai lati  $a_1 a_2 a_3 \dots$

Si ha così

2) 
$$2A = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots$$

Supponiamo di spostare la retta  $a_2$  parallelamente a se stessa in modo che  $h_2$  riceva l'incremento infinitesimo  $dh_2$ : in questo modo varieranno gli spigoli  $a_1, a_2, a_3$  mentre gli altri spigoli e le distanze  $h_1 h_3 \dots$  resteranno invariate. Diffe-



renziando la 2) si ha

$$2dA = a_2 dh_2 + h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Ma poichè è evidentemente  $dA = a_2 dh_2$ , la nostra formula diviene

$$dA = h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Assumiamo come punto  $P$  il punto in cui la faccia  $A$  tocca la sfera inscritta relativa a lo spigolo  $a_2$ . Si ha allora

$$h_1 = \rho_2 \cot \frac{\alpha_1}{2}, \quad h_2 = \rho_2 \cot \frac{\alpha_2}{2}, \quad h_3 = \rho_2 \cot \frac{\alpha_3}{2}$$

e quindi

$$dA = \rho_2 \left( \cot \frac{\alpha_1}{2} da_1 + \cot \frac{\alpha_2}{2} da_2 + \cot \frac{\alpha_3}{2} da_3 \right).$$

Di qui, ponendo per  $dA$  il valore  $a_2 dh_2$  e supponendo che gli angoli  $\alpha$  restino costanti, si ha

$$d\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{a_2}{\rho_2} dh_2.$$

Questo è il differenziale della  $\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2}$  quando si prenda  $h_2$  come variabile indipendente: invece se tutte le perpendicolari  $h_1 h_2 h_3 \dots$  variano contemporaneamente, l'espressione precedente assumerebbe altri termini analoghi, e il differenziale totale della  $\Sigma$  sarebbe

$$\cot \frac{\alpha_1}{2} da_1 + \cot \frac{\alpha_2}{2} da_2 + \dots = \frac{a_1}{\rho_1} dh_1 + \frac{a_2}{\rho_2} dh_2 + \dots$$

Supponiamo ora di dilatare il poligono  $A$  uniformemente in modo che sia

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \dots = \frac{dh_1}{h_1} = \frac{dh_2}{a_2} = \dots;$$

arriviamo così alla relazione

$$a_1 \cot \frac{\alpha_1}{2} + a_2 \cot \frac{\alpha_2}{2} + \dots = \frac{a_1}{\rho_1} h_1 + \frac{a_2}{\rho_2} h_2 + \dots$$

che scriviamo più semplicemente

$$3) \quad \Sigma ah = R \Sigma \frac{ah}{\rho}.$$

Ora, tenuto conto della prima delle relazioni 1) e delle relazioni 2), dalla 3 ricaviamo

$$\Sigma ah = R \Sigma \frac{ah}{\rho}$$

che si può scrivere anche

$$\Sigma \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) ah = 0.$$

Questa è evidentemente soddisfatta se  $\rho = R$ , cioè se le faccie del poliedro sono tutte circoscritte alla sfera di raggio  $R$ .

Con un'analisi un po' minuziosa si arriva a vedere che la condizione  $\rho = R$  è non solo sufficiente ma anche necessaria perchè sia

$$\Sigma \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) ah = 0.$$

Così è stabilito che di tutti i poliedri di ugual superficie di cui è dato il numero delle faccie e la loro giacitura, quello di volume massimo è circoscritto a una sfera.

Lasciamo ora andare la condizione che le faccie abbiano una data giacitura: dico che in questo caso nel poliedro di volume massimo ciascuna faccia deve toccare la sfera nel suo centro di gravità.

Per dimostrarlo si consideri il poliedro  $P$  circoscritto alla sfera: supponiamo che il centro di gravità di una sua faccia non coincida col punto di contatto con la sfera. Facciamo ruotar questa faccia di un angolo infinitesimo intorno ad una sua retta passante per il baricentro, in modo da allontanarla dalla sfera. Notiamo che per un *teorema* di GULDINO l'incremento che così subisce il volume è di second'ordine, mentre quello della faccia è del prim'ordine. Spostiamo poi la faccia parallelamente a sè stessa fino a ritornare tangente: il volume diminuirà di un infinitesimo del primo ordine. Con questa doppia trasformazione riduciamo il poliedro  $P$  a un poliedro  $P'$  circoscritto alla stessa sfera e avente un

volume  $V' < V$ . Inoltre la superficie totale sarà diminuita nella stessa proporzione, perchè la superficie  $U$  e  $U'$  dei due poliedri sono proporzionali ai volumi  $V$  e  $V'$ .

Riduciamo il poliedro  $P'$  ad avere la superficie  $U$  mediante una similitudine: il volume  $V'$  crescerà ma crescerà più che la superficie perchè si ha

$$\frac{dV'}{3V'} = \frac{dU'}{2U'}$$

cioè

$$\frac{dV'}{V'} = \frac{3}{2} \frac{dU'}{U'}$$

Quindi il nuovo poliedro avrà volume maggiore del poliedro  $P$ , contro l'ipotesi che esso fosse il massimo.

Concludendo resta così dimostrato che fra tutti i poliedri convessi di dato numero di faccie quello che sotto una data superficie racchiude il volume massimo, è circoscritto a una sfera che è tangente a ciascuna faccia nel suo centro di gravità.