ARTICOLO NONO

« Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici » di
FEDERIGO ENRIQUES a Bologna.

Allo studio particolare delle varie questioni trattate nei precedenti articoli, facciamo seguire alcune osservazioni sintetiche intorno ai problemi geometrici accennando, in qualche punto a considerazioni di un ordine superiore. Ma anche dove le nostre osservazioni poco aggiungano a ciò che fu detto in occasione di questo o di quel gruppo di problemi, stimiamo non inutile di averle sott' occhio nel loro insieme, a fine di istituire più facilmente un giudizio comparativo delle accennate ricerche.

§ 1. **Scopo pratico delle ricerche geometriche.** — La risoluzione grafica dei problemi costruttivi costituisce un primo e fondamentale scopo della Geometria. Anche dove codesto scopo sembri quasi dimenticato nel procedere della ricerca teorica, è facile rintracciare la sua influenza direttrice su questa.

In primo luogo, ogni teorema geometrico, facendoci conoscere alcuni rapporti fra gli elementi di una figura, si può considerare come una *condizione* imposta alla costruzione di essa. Così per es. l'inverso del teorema di PITAGORA ci apprende che se il quadrato del segmento a, deve equivalere alla somma dei quadrati di b, c, il triangolo avente per lati a, b, c deve essere rettangolo, essendo retto l'angolo contenuto da b, c; questo insegnamento esprime una condizione a cui deve soddisfare chi voglia sommare o sottrarre due quadrati, la quale contiene anzi la risoluzione dello stesso problema costruttivo, trattandosi di condizione *sufficiente*.

In generale l'analisi delle proprietà di una figura geometrica riuscendo analogamente a stabilire delle condizioni costruttive di essa, potrà ritenersi esaurita solo quando le relazioni scoperte fra i suoi elementi, permettano di vedere come la figura stessa riesca determinata dall'assumere alcuni di questi in modo arbitrario.

Si tratti per es. di un poliedro regolare a dodici facce (dodecaedro). Anzitutto si riconoscerà che le sue facce sono pentagoni e i suoi angoli solidi sono triedri; ma la costruzione effettiva del poliedro potrà dirsi determinata solamente quando sia messo in luce che, nella proiezione ortogonale di esso sul piano di una faccia, le immagini dei vertici costituiscono due decagoni regolari concentrici, tali che il raggio del cerchio circoscritto al maggiore supera l'altro di un segmento uguale alla sezione aurea di questo [1].

2. **Problemi indeterminati.** — I problemi della Geometria possono concernere figure *piane* o *solide;* ma, in questo secondo caso, il metodo semplice e generale delle proiezioni ortogonali dovuto a Monge, permette di ridurci sempre a costruzioni nel piano, ed una tale riduzione può anche raggiungersi facilmente con apposite considerazioni dirette nei varii casi particolari, come ad es. per la duplicazione del cubo si è visto nell'art. VII.

Pertanto ci riferiremo sempre nel seguito a questioni di Geometria in un piano.

I problemi geometrici possono essere *determinati* o *indeterminati.*

Si considerano come determinati quei problemi in cui si tratta di costruire una figura, per mezzo di elementi e di relazioni date, quando la figura che risolve il problema non è suscettibile di movimento o di *variazione continua;* all'opposto si chiamano indeterminati quei problemi che ammettono infinite soluzioni, capaci di variare con continuità, per modo che sia possibile ancora di assegnare, entro certi limiti, qualche elemento o qualche relazione ulteriore, a cui la figura proposta debba soddisfare.

Appartengono in particolare alla prima categoria dei

[1] Cfr. per es. Enriques, *Lezioni di Geometria descrittiva.* Bologna, Zanichelli, 1902, (pag. 106).

problemi determinati, tutti i problemi che ammettono uno od un numero finito di soluzioni; ma è anche determinato per es. il problema di costruire sopra una retta, a partire da un'origine assegnata, un segmento avente la lunghezza di arco di raggio 1 di cui è data la tangente trigonometrica, giacchè le soluzioni che qui si ottengono, costituiscono una serie discreta (se y è uno dei segmenti che risolve il problema $\text{arc tg}\, x = y \pm n\pi$).

Sono invece, secondo la definizione, problemi indeterminati, quelli in cui è questione soltanto della grandezza degli elementi (segmenti, angoli,....) di una figura, poichè insieme ad una soluzione si hanno allora tutte quelle ottenute col movimento di essa. Si conviene però di ridurre sistematicamente questo genere di problemi, prescindendo da quella indeterminazione che tiene soltanto alla posizione della figura; ciò equivale ad aggiungere alle condizioni assegnate la posizione di un qualche elemento della figura stessa (per es. di un segmento di essa), in modo da rendere impossibile il suo movimento nel piano.

Con questa avvertenza i problemi geometrici possono generalmente trasformarsi in modo che i dati siano dei punti del piano, e gli elementi incogniti sieno ancora dei punti che hanno con quelli certe relazioni prestabilite (cfr. art. IV, § 7). Se allora i punti incogniti sono suscettibili di variare con continuità sopra linee o entro superficie, il problema sarà indeterminato; determinato nel caso opposto.

Il tipo più elementare dei problemi indeterminati è quello in cui si tratta di descrivere una *linea*, i cui punti soddisfino (rispetto a certi dati) ad una relazione prestabilita. Un tale problema è da riguardarsi praticamente come risoluto quando è dato un *istrumento* (costituito da un sistema meccanico dotato di un certo grado di libertà) atto a tracciare la linea proposta, e quando inoltre si riesca, mediante l'istrumento o mediante altri istrumenti dati, a determinare gli elementi da cui la linea dipende.

Trattisi per es. di costruire il luogo dei punti da cui vedesi un dato segmento AB, secondo un angolo dato α: questo luogo è un arco di circolo, che può essere tracciato col *compasso*, dopo avere determinato il cerchio e il raggio, ciò che può farsi (come è noto) col compasso stesso (o col compasso e la riga).

Pertanto il problema della costruzione di una linea richiede generalmente:

1) una trasformazione delle proprietà geometriche a cui debbono soddisfare i punti della linea, che permetta di riconoscere una *generazione meccanica* di essa;

2) un *istrumento* capace di realizzarla;

3) la determinazione degli elementi della linea cui si collega la generazione suddetta.

In questo senso il problema della costruzione di una linea può riguardarsi sempre come *risolubile*, restando al ricercatore ampia facoltà d'immaginare istrumenti adatti allo scopo. Così per es. varie generazioni meccaniche dell'ellisse rendono possibile, in diversi modi, la costruzione di un istrumento descrittore (*compasso ellittico* di LEONARDO DA VINCI, (art. VII); così ancora la proprietà della parabola algebrica d'ordine n di essere curva integrale di una parabola d'ordine $n-1$, permette di tracciare la curva (a partire dalla retta), con $n-1$ applicazioni successive dell'*integrafo* (art. VIII) ecc.

La cosa si presenta sotto un aspetto diverso se si tratti di costruire una linea con *istrumenti assegnati*. Allora è subito facile di riconoscere se la linea proposta appartenga o no alla classe di quelle generabili cogli istrumenti dati; e, se non vi appartiene, il problema appare, nel senso anzidetto, *irrisolubile*. Così è per es. se si domandi di costruire colla riga e col compasso il luogo dei punti equidistanti da un centro e da una retta data; questo luogo è una *parabola*, e non appartiene quindi alla classe delle linee (rette e circoli) costruibili cogl'istrumenti dati.

In simili casi in luogo di una *costruzione immediata* della linea, può esserne richiesta una *costruzione per punti* assai vicini, la quale è da riguardarsi come una *risoluzione approssimata* del problema proposto.

Nell'esempio citato, la parabola si costruisce per punti intersecando un cerchio variabile che abbia il centro nel punto dato (fuoco) colla parallela alla retta (direttrice) distante da essa del raggio del cerchio, e giacente nella banda del punto suddetto. In un modo analogo si può costruire per punti, colla squadra, il circolo che ha un dato diametro AB; ed anzi lo stesso circolo può costruirsi per punti, colla sola riga, se è dato anche il diametro di esso perpendicolare ad AB (cfr. art. III).

La costruzione di una linea per punti riconduce in sostanza il problema indeterminato proposto ad una successione (teoricamente grande quanto si vuole) di problemi determinati, dipendenti da elementi in parte arbitrarii. Analiticamente si tratta della *rappresentazione parametrica* di una linea $f(xy)=0$, per mezzo di funzioni di un parametro t:

$$x=\varphi(t) \quad y=\psi(t);$$

per ogni valore arbitrariamente dato a t devonsi costruire i segmenti x ed y (1).

§ 3. **Problemi determinati.** — Abbiam visto che il tipico problema indeterminato della costruzione di una linea, dove non si tratti dell'invenzione meccanica di apposito istrumento, viene subordinato alla risoluzione di una serie di problemi determinati (costruzione delle linee per punti).

Viceversa « i punti che risolvono un problema determinato si ottengono generalmente (mercè il metodo dei luoghi) come *intersezioni di linee*, che i nostri istrumenti ci permettono di tracciare ». In questo senso si adoperano di continuo nella risoluzione dei problemi determinati gl'*istrumenti descrittori di linee*, per es. la riga, il compasso ecc.

Accanto a questo genere d'istrumenti, trovano anche impiego istrumenti di una natura diversa (costituiti da sistemi che realizzano una relazione geometrica data) i quali porgono in un modo più immediato certe costruzioni determinate.

(1) Appare di qui che non sempre può essere domandata la costruzione per punti di una linea per mezzo di costruzioni assegnate. Per es. la costruzione *lineare* per punti esige (art. IV) che le funzioni φ e ψ sieno razionali, e quindi che la curva $f(xy)=0$ sia algebrica *di genere* 0 (Clebsch).

Tuttavia queste osservazioni si riferiscono al caso in cui si voglia far dipendere la determinazione del punto generico della linea da una costruzione assegnata, sempre la stessa, che operi sopra un elemento arbitrario. Ben più ardua è la questione di decidere se una curva contenga una serie infinita di punti, vicini tra loro quanto si vuole, ciascuno dei quali sia costruibile con una costruzione propria, effettuabile con dati mezzi. Per es. la curva di 3° ordine, senza punti doppi, è di genere 1 e non può essere costruita linearmente per punti nel senso detto prima, perchè è impossibile esprimere le sue coordinate con funzioni razionali di un parametro; tuttavia essa può contenere infiniti punti di coordinate razionali, ed è stato recentemente dimostrato da B. Levi che — ove ciò accada — vicino a ciascun punto razionale ne cadono infiniti.

Tali sono per es. il *trasportatore di segmenti* costituito da un'asticella o da una striscia di carta di lunghezza fissa, la *squadra* e la *falsa squadra*, la *riga a due orli paralleli* (art. III, IV); istrumenti suscettibili di essere adoprati in vario modo, ad ottenere la costruzione immediata di punti o rette, che trovinsi in certe semplici relazioni con punti o rette dati.

Ma in un primo sguardo ai problemi è permesso di attribuire a questo genere d'istrumenti un'importanza secondaria; perciò nel seguito, riferendoci espressamente ai problemi determinati, riterremo il punto di vista dominante nella risoluzione di essi, che è la « ricerca dei punti incogniti come *intersezioni di linee* ». D'altronde alcune distinzioni e classificazioni che saremo condotti a sviluppare riesciranno indipendenti dalla restrizione così introdotta.

§ 4. **Principio di economia.** — Ogni problema *possibile* (che ammetta soluzioni) può essere *risoluto* coll'impiego di istrumenti adatti allo scopo; e la fantasia può moltiplicare all'infinito l'invenzione dei mezzi meccanici atti a fornire la risoluzione anzidetta. Ma (secondo le vedute generali del Mach) la scienza non chiede soltanto la risoluzione dei problemi proposti, bensì anche la risoluzione *più economica.* E qui si tratta non soltanto di *economia del pensiero,* ma anche di *risparmio di complicate fabbricazioni meccaniche,* o di *economia di lavoro* per ogni istrumento dato ecc.

Vediamo dunque quale influenza direttrice il criterio della economia abbia esercitato nel campo dei problemi geometrici costruttivi.

§ 5. **Classificazione dei problemi.** — La fantasia non disciplinata cerca per *ogni* costruzione particolare il mezzo *più semplice* di effettuarla. La scienza tende a *classificare e ordinare i problemi per gruppi,* in guisa che per ciascun gruppo occorra l'impiego dei medesimi istrumenti.

Questa è una prima esigenza economica relativa ad una veduta dei problemi nel loro insieme.

§ 6. **Criterii di classificazione.** — Si presentano tre aspetti principali sotto cui i problemi si lasciano naturalmente classificare.

Questi criterii di classificazione scaturiscono dalla ricerca sistematica (che abbiam detto dominante in quest'ordine di questioni) di ottenere la risoluzione dei problemi determinati per mezzo della intersezione di linee.

Pertanto i problemi stessi si lasciano classificare, in base

1) alla *semplicità meccanica* degli istrumenti atti a descrivere le linee risolutrici;

2) oppure alla *semplicità geometrica* di queste linee;

3) o infine alla *semplicità analitica* delle equazioni da cui il problema viene a dipendere, secondo il metodo cartesiano.

Secondo il primo criterio (tenuto in vista dal NEWTON) si potranno porre ad es., subito dopo i problemi risolubili col cerchio (compasso), quelli che vengono risolti dalla concoide di NICOMEDE (cfr. art. VII); mentre in ordine al secondo criterio appare più semplice la risoluzione dei problemi mediante coniche.

Il criterio geometrico, che si riferisce alla semplicità delle linee da cui può farsi dipendere la risoluzione di un problema, trova riscontro, almeno fino ad un certo punto, nel criterio analitico (di DESCARTES) che guarda alla natura delle equazioni da cui dipende la determinazione delle incognite.

In ordine a questo criterio i problemi si distinguono in *algebrici* e *trascendenti*, ed i problemi algebrici si lasciano classificare secondo il loro *grado*.

È da notarsi che i gruppi di problemi occupanti i primi posti nella classificazione analitico-geometrica (problemi di 1° e 2° grado) si trovano in pari tempo i più elementari anche sotto l'aspetto meccanico della costruzione risolutrice.

Quanto al valore comparativo dei citati punti di vista, sono da fare le osservazioni seguenti.

Il criterio meccanico risponde meglio allo scopo, quando (imponendoci una condizione teorica di esattezza) si vogliano adoprare soltanto linee che sappiansi meccanicamente tracciare; se invece si ammetta di usare linee costruite per punti, la facilità delle costruzione sarà generalmente in rapporto alla semplicità geometrica delle linee stesse, e quindi (ove si scelga un'adatta rappresentazione) alla semplicità analitica delle equazioni rappresentative.

È anche da avvertire che la questione di classificare i problemi costruttivi si presenta diversamente, secondo si tratta di *ordinare i problemi già risoluti,* oppure di misurare anticipatamente la difficoltà che possono presentare certe classi di *problemi da risolvere.* Se, al primo scopo, risponde meglio il criterio meccanico, appare invece più confacente al secondo, il criterio geometrico e soprattutto quello analitico; infatti, quando un problema sia soltanto enunciato, riesce in generale difficile di giudicare subito quali mezzi meccanici esso potrà richiedere, mentre si riconosceranno più facilmente certi caratteri geometrici delle linee che si presentano come atte a risolverlo secondo il metodo dei luoghi, e soprattutto riuscirà facile di formarne le equazioni colla Geometria analitica. D'altronde è opportuno che diversi aspetti dominino la classificazione dei problemi, poichè diverse possono essere le esigenze ad essi relative.

§ 7. **Come si misura la semplicità della risoluzione di un problema.** — Il principio generale della *risoluzione più economica* si può intendere:

1) in un *senso qualitativo,* ove si domandi di effettuare una certa costruzione con dati istrumenti piuttosto che con altri;

2) in un *senso quantitativo* ove si chieda la costruzione *più rapida,* per la quale occorra un *minimo numero di operazioni* effettuate coi medesimi istrumenti.

Naturalmente il criterio quantitativo è subordinato al criterio qualitativo. A priori non si può ritenere indifferente di tirare una retta oppure un cerchio, di usare la riga o il compasso o la squadra. Bisogna dunque *numerare separatamente le operazioni che si fanno con ciascun istrumento;* come appunto insegna la Geometrografia di Lémoine. Ma è permesso di stabilire un certo *rapporto di equivalenza* fra il numero delle operazioni effettuate con un dato istrumento e il numero delle operazioni effettuate con un altro, fissando per es. questo rapporto in base al tempo richiesto per effettuare serie di operazioni equivalenti.

La possibilità di misurare — in base a criterii diversi — il suddetto rapporto d'equivalenza, riconduce anche nell'ambito di queste considerazioni quantitative il caso (nettamente qualitativo) in cui l'operazione che esige un certo istrumento si considera rimpiazzata utilmente da un numero — comunque grande — di operazioni effettuate con un altro. Se infatti questo istrumento non è a nostra disposizione o lo diviene soltanto a costo di gravi sacrifici, si può dire che l'anzidetto *rapporto d'equivalenza* fra operazioni eseguite col secondo istrumento e operazioni eseguite col primo, diventa grandissimo o addirittura *infinito.*

In tal caso nasce la ricerca sistematica di risolvere tutti i problemi col primo istrumento a preferenza del secondo; e — per quei problemi che non sieno risolubili in tal modo — sorge la domanda se *una sola operazione* fatta col secondo istrumento (o magari una costruzione per punti) possa fornirci una *linea* o *figura fondamentale, data la quale* i problemi di cui si tratta si risolvano facendo uso soltanto del primo istrumento.

Così appunto accade nella ricerca sistematica di STEINER di risolvere i problemi di 2° grado coll'uso della sola riga, quando sia *dato un cerchio fisso* (cfr. art. III, IV). Un secondo esempio è offerto dalla risoluzione dei problemi di 3° grado con *riga* e *compasso, data una parabola fissa* (art. VII).

§ 8. **Valore relativo degli istrumenti.** — La conclusione più importante che scaturisce dalle varie classificazioni dei problemi in ordine ad istrumenti diversi, è un giudizio comparativo sul valore degli istrumenti stessi.

Poichè ad ogni istrumento (di cui sia fissato il modo d'impiego) corrisponde un *corpo di problemi* con esso *risolubili,* il valore dell'istrumento può venire apprezzato in rapporto all'estensione di questo corpo.

Se due istrumenti, o gruppi d'istrumenti, corrispondono al medesimo corpo, essi sono da riguardarsi come *equivalenti;* così è per es., relativamente alle costruzioni determinate, del compasso e della riga a due orli ecc. (art. II, III, IV).

Allorchè invece il corpo dei problemi risolubili mediante un certo istrumento A, contiene quello dei problemi risolubili mediante un altro istrumento B, l'istrumento A ha un *valore maggiore* di B. Così per es. il compasso ha un valore maggiore della riga graduata presa come trasportatore dei segmenti (art. IV), e questa ha alla sua volta un valore maggiore della squadra adoprata soltanto come mezzo di trasporto di un angolo retto (cfr. art. III).

Così ancora l'integrafo (art. VIII) — aggiunto alla riga — permette di risolvere tutti i problemi risolubili col compasso, coi compassi conici, col trisettore degli angoli, cogl' istrumenti generatori della cissoide ecc.

Infatti i problemi di grado n potendosi far dipendere dalle intersezioni di rette e parabole d' ordine n, la loro risoluzione richiede di applicare successivamente $n-1$ volte l' istrumento integratore.

Ma due istrumenti possono anche avere un *valore diverso* e *non comparabile;* questo avviene se i corpi di problemi corrispondenti non sono contenuti l' uno nell' altro, sia che essi abbiano comune un sotto-corpo, sia che non esista alcun problema comune ai due corpi. Un esempio in proposito si avrebbe confrontando (in base ai criterii dell' art. IV) ciò che dà il compasso, e ciò che permette di ottenere un trisettore d' angoli preso unitamente alla riga.

§ 9. **Esattezza delle costruzioni.** — La semplicità delle costruzioni, e l' ampiezza del corpo dei problemi risolubili con un dato istrumento, non sono i soli criterii che debbano tenersi in vista nel giudicare della *utilità* di esso. Devesi tener conto per ciò anche dell' *esattezza* delle costruzioni medesime.

Sotto questo riguardo è ad es. pregevole la Geometria del compasso di MASCHERONI (art. VIII).

La questione dell' esattezza suggerisce alcune riflessioni: *Teoricamente si parla di costruzioni esatte e di costruzioni approssimate; praticamente tutte le costruzioni hanno soltanto un valore approssimato.*

Come si può valutare il *grado di esattezza* o l' approssimazione raggiunta da una costruzione teoricamente precisa?

È questo un problema che entra nell' ordine di vedute svolte dal KLEIN nella sua Vorlesung « Anwendung der differential und integralrechnung auf der Geometrie » (Lipsia, 1902).

Si può dargli una risposta matematica, quando si trasformino sistematicamente gli enunciati delle proposizioni geometriche, che si traducono analiticamente con *uguaglianze,* sostituendo a queste uguaglianze delle *disuguaglianze.* Così per es. il teorema « gli angoli alla base d' un triangolo isoscele sono uguali » si tradurrà in un teorema della forma seguente « se due lati a, b di un triangolo differiscono per meno di ε, gli angoli opposti α, β differiscono per meno di τ, ove τ è una funzione di ε (facilmente assegnabile) che diviene infinitesima con ε » [1]. Allora quando in una costruzione si applichi un teorema, come quello enunciato innanzi, si dovrà anzitutto assumere che i dati teoricamente uguali, sieno uguali solo sensibilmente, e differiscono fra loro per una quantità ε dipendente immediatamente dall' istrumento adoperato, e poi valutare in conseguenza il grado d' esattezza τ con cui gli elementi costruiti soddisfano alle condizioni proposte. Quando τ è dello stesso ordine di ε, non apprezzabile rispetto ai nostri istrumenti ed ai sensi, la risoluzione del problema è praticamente esatta.

Pertanto lo stesso grado pratico di esattezza può venire raggiunto anche dalla risoluzione di un problema più semplice di quello proposto, che sia *prossimo* ad esso. Appare quindi conforme al criterio di economia di preferire in questi casi la soluzione teoricamente approssimata del problema a quella esatta.

Però non bisogna disconoscere il vantaggio delle soluzioni teoricamente esatte, poichè in esse a differenza che nelle approssimate, non s' introduce alcuna causa d' *errore sistematico,* la cui ripetizione tenda a rendersi sempre più sensibile in un gran numero di casi.

Nonostante questo si può ben dire che nella maggior parte dei casi dobbiamo o ci conviene di contentarci della ricerca di soluzioni approssimate.

Ma a proposito di queste il KLEIN distingue opportunamente l' approssimazione che trascura un errore dato a priori e l' *approssimazione sistematica* nella quale, pur di compiere un numero d' operazioni sufficientemente grande, si ottiene un grado di precisione grande quanto occorre.

Tutto il procedimento della misura, in base al quale si risolvono i problemi per via analitica, è in sostanza un metodo di approssimazione sistematica applicato su larga scala; con espedienti particolari si ottengono poi vantaggiose costruzioni dei segmenti (o di altri elementi) di cui sia data la misura (cfr. per es. art. VI). Di costruzioni approssimate a meno di un errore dato si sono visti notevoli esempii negli art. II, VI, VII.

[1] Precisamente è in valore assoluto $\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}\alpha}{a}$.

§ 10. **Metodi di risoluzione.** — A proposito della classificazione dei problemi abbiamo già accennato al diverso aspetto sotto cui si presentano i problemi risoluti e i problemi da risolvere. Ora quando si considerano più da vicino i problemi, come domande a cui non sia ancor data una risposta, assume fondamentale importanza la veduta del *metodo di risoluzione*.

Il principio d'economia interviene qui come criterio comparativo dei metodi, in quanto essi ci permettono di raggiungere più *facilmente* (cioè col minimo sforzo di pensiero) la risoluzione dei problemi proposti.

Ora quali metodi dovranno ritenersi più economici?

Se si guarda alla *preparazione scientifica* richiesta nel ricercatore, un metodo dovrebbe dirsi tanto più economico quanto più *elementare*. Ma i metodi più elementari, largamente accessibili a chi possegga uno scarso numero di cognizioni, non porgono nei varii casi criterii direttivi d'ordine generale, onde l'applicazione loro esige ogni volta un piccolo sforzo di genio.

La risoluzione per vie elementari riesce dunque la più economica soltanto per riguardo al caso singolo; *rispetto all'insieme* vale la pena di affrontare la fatica di una maggiore preparazione scientifica per ottenere qualche guida d'ordine generale e non incontrare ad ogni passo una nuova difficoltà.

Il progresso della scienza rappresenta appunto un perfezionamento dei metodi nel senso economico, quando si guardi ai problemi da risolvere nel loro insieme; così come la macchina da tessere rappresenta un'economia per l'industria che deve fabbricare una grande quantità di stoffe.

11. **Evoluzione dei metodi.** — È interessante di notare come i metodi più elevati, che la Geometria moderna usa nella trattazione dei problemi, sieno sorti dallo sviluppo degli elementari, sotto la spinta dell'esigenza economica.

Consideriamo il metodo dei luoghi che si presenta primo a risolvere numerosi problemi. La Geometria elementare lo usa entro i limiti ristretti segnati dalla conoscenza di poche linee particolari. Se ci s'impone di non uscire dalla considerazione della retta e del circolo, si è arrestati nell'applicazione del metodo, appenachè una delle condizioni del problema porti come luogo una conica.

La necessità di allargare questi confini si presentò già agli antichi; ma l'estensione veramente generale fu compiuta da DESCARTES, allorchè la rappresentazione analitica delle curve permise di riguardare, in un certo senso, come trattabile, ogni curva di cui sia scritta l'equazione.

Il metodo analitico, sorto per questa via, offre un punto di vista sistematico per la risoluzione dei problemi e realizza quindi la *maggior economia nell' insieme.*

Vero è che esso non riesce altrettanto luminoso in ogni singolo caso, e non conduce sempre alla risoluzione più rapida e semplice. Vero è ancora che esso non scioglie pienamente la difficoltà quando si oltrepassino quei tipi di equazioni, la cui risoluzione si effettua con istrumenti dei quali si è bene analizzato l'uso. Ma questo difetto è compensato (come già accennammo) dalla circostanza che le radici di un'equazione possono almeno costruirsi in modo approssimato, avvicinandosi ad esse quanto si vuole; ed i teoremi dell'analisi sugli sviluppi in serie di potenze o in frazioni continue servono meravigliosamente allo scopo.

Il secondo metodo generale per la risoluzione dei problemi si appoggia al concetto della trasformazione. E nell'art. I si è già mostrato come questo concetto sia suscettibile di utili applicazioni anche nel campo più ristretto della Geometria elementare.

Ma proseguendo la ricerca dei vantaggi per cui le trasformazioni sono poste in opera, si viene naturalmente ad allargarne il campo: ad ogni gruppo di proprietà delle figure corrisponde un gruppo di trasformazioni che le lascia invariate e viceversa. Così le proiettività, le trasformazioni per raggi vettori reciproci, le trasformazioni cremoniane ecc. divengono successivamente oggetto di studio, e danno origine allo sviluppo sistematico della Geometria sotto un particolare punto di vista [1].

L'apprezzamento di questi sviluppi ci condurrebbe troppo lontano dallo scopo segnato a questo articolo. Ci limiteremo pertanto a poche considerazioni intorno al valore delle trasformazioni rispetto alla risoluzione dei problemi costruttivi, tenendoci generalmente vicini agli oggetti di studio della Geometria elementare.

[1] Cfr. il *Programma di Erlangen* di F. KLEIN, trad. it. di G. FANO, *Annali di Matematica.* Serie II - Vol. XVII - 1889.

12. Metodi di trasformazione: Vantaggi di posizione. — Come si vede nell'art. I, il primo uso della trasformazione risponde allo scopo di *portare la figura* su cui si opera, o alcune parti di essa, *in una posizione più opportuna.* Un tale scopo può venire raggiunto sia con un movimento del piano, sia con una trasformazione la quale alteri qualcuno degli elementi della figura, ma lasci invariato ciò che è essenziale per la costruzione.

Notiamo in modo speciale due applicazioni di questo principio:

1) *La riduzione delle costruzioni entro i limiti di un foglio assegnato,* la quale si può effettuare vantaggiosamente secondo i casi, coll'omotetia, coll'omologia, ed anche coll'inversione rispetto ad un circolo.

L'omotetia presenta il vantaggio di conservare gli angoli e i rapporti segmentarii, ed in particolate quindi di sostituire un cerchio ad un cerchio; ma essa non ci porta a distanza finita gli elementi all'infinito e non riesce quindi a ridurre nei limiti prefissati tutte le costruzioni lineari, segnatamente, quelle ove si tratta di parallele. Si ricorre per ciò utilmente ad un'omologia generale. La riduzione delle costruzioni lineari entro i limiti del foglio, ottenuta nell'art. III si fonda in sostanza sopra una trasformazione omologica.

2) *La sostituzione di una linea ad un'altra nel problema d'intersezione,* è ancora una brillante applicazione delle trasformazioni, riguardate sotto l'aspetto che stiamo considerando.

Un semplice esempio si è visto nell'art. III, dove si è adoperata l'omotetia per trasformare un cerchio qualsiasi (individuato ma non descritto) in un cerchio fondamentale tracciato, deducendone la possibilità di sostituire in generale l'uso del compasso con quello di un cerchio fisso (si suppone data la riga).

Più in generale un'omografia ci permette di ridurre la ricerca delle intersezioni di una conica con una retta a quella delle intersezioni di un'altra conica arbitrariamente fissata, ciò che costituisce anche più di un semplice vantaggio di posizione, potendosi trasformare la conica data in una conica particolare, per es. in un cerchio. E basta a tale scopo una trasformazione omologica; mediante la quale si apprende dunque a risolvere col compasso il problema d'intersecare una conica qualsiasi, individuata ma non tracciata, con una retta [1] (cfr. n. 13).

Un altro esempio notevole concerne la possibilità di *determinare linearmente le intersezioni di una conica o di un cerchio* k *con una retta, quando di* k *sia tracciato un arco, comunque piccolo.*

Basta per ciò assegnare una trasformazione omografica di k in sè stessa, per modo che un suo arco contenente i punti incogniti (arco determinabile linearmente) si muti nell'arco dato [2].

§ 13. **Riduzione a casi particolari.** — Dalle considerazioni che precedono scaturisce già un uso ulteriore delle trasformazioni.

Oltre ai vantaggi di posizione, esse ci permettono anche di raggiungerne altri, particolarizzando e semplificando le figure in modi diversi. Sebbene applicazioni siffatte si presentino fino nei casi più elementari (art. I), un'enorme estensione di quest'ordine d'idee viene ottenuta coll'uscire dal campo delle similitudini.

Le trasformazioni più semplici, che nascono dalla estensione delle elementari, sono in generale quelle che si ottengono con *proiezioni* ripetute del piano (PONCELET).

Queste trasformazioni proiettive possono effettuarsi entro un piano dato, senza uscirne, stante la proprietà di conservare le rette, che le caratterizza, e per la quale esse prendono il nome di *omografie* (MÖBIUS).

Quando sono dati tre punti ABC sopra una retta, la costruzione del punto (*quarto armonico*) D per cui

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC},$$

non riesce subito visibile. Una proiezione ce la rende manifesta

(1) Una risoluzione elementare del problema si è vista nell'art. VII.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso*. Circolo Matematico di Palermo, 1904. Sussiste anche un teorema analogo per la determinazione delle intersezioni di una conica con rette e cerchi; esso fu enunciato da DESCARTES e dimostrato da SMITH, « *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*. « Annali di Matematica », t. 3, 1869, (pag. 112-218).

quando si abbia presente l'invarianza proiettiva del birapporto, dalla quale si deduce appunto la nota proprietà del quadrangolo (art. III, § 5).

La convenienza di sostituire le proiezioni colle costruzioni dell'omografia, entro il piano, si presenta quando devesi operare sulla figura in relazione alla sua trasformata. Così appunto abbiamo già accennato come il problema d'intersecare una conica con una retta si riconduca alla determinazione delle intersezioni di una retta e d'un cerchio, mediante un'omografia che può supporsi omologica.

Affinchè una conica C si trasformi omograficamente in un cerchio, basta infatti prendere come retta limite (a cui corrisponda la retta all'infinito) una retta a esterna a C, e fare in modo che l'involuzione dei punti coniugati subordinata su a da C si muti nell'involuzione assoluta; ciò si effettua per es. con un'omologia, il cui centro sia comune ai cerchi che hanno per diametri i segmenti compresi fra i punti coniugati dell'involuzione.

Ora appare che la trasformazione indicata permette ancora di ridurre la ricerca delle intersezioni di due coniche, a quella delle intersezioni di una conica (che a volontà può supporsi ellisse, iperbole o parabola) con un cerchio. Si può anche ottenere un resultato più espressivo. Si abbiano due coniche C_1, C_2, definite ma non tracciate; e si abbia d'altra parte una parabola K_1 completamente tracciata. Si può determinare una retta p tangente alla conica C_1, che sia esterna a C_2; allora si può porre nel piano un'omografia la quale abbia per retta limite p, e muti la conica C_1 in K_1, e l'involuzione dei punti coniugati rispetto a C_2 — data su p — nell'involuzione assoluta; quindi la trasformata di C_2 in quest'omografia sarà un cerchio K_2. In questo modo il problema di determinare le intersezioni di C_1, C_2 si riduce a quello d'intersecare la parabola K_1 (fissata a priori) con un cerchio K_2.

Risulta dunque qui che i *problemi* (di 4° grado o riducibili a successivi problemi di 4° grado) *risolubili mediante coniche, si possono risolvere col compasso ed una parabola fissa* [1].

Questo resultato equivale d'altronde a quello stabilito, per altra via, nell'art. VII, giacchè i problemi di 4° grado si

[1] Pel teorema di Descartes-Smith enunciato innanzi, basta dare un arco della parabola.

riducono a problemi di 2° e 3° grado in virtù della nota risoluzione dell'equazione di 4° grado.

Fra le omografie notevoli citeremo le *affinità* (di Möbius), cioè le omografie che lasciano ferma la retta all'infinito, le quali si applicano con vantaggio ai problemi ove è questione di *aree*, stante la loro proprietà caratteristica di mutare le aree in un rapporto costante (¹).

Si tratti per es. di « iscrivere in un'ellisse un parallelogramma di area data, del quale può anche essere assegnato un vertice ». Il problema si lascia ridurre a quello di « iscrivere in un cerchio un rettangolo di area data », mercè una trasformazione omografica affine dell'ellisse nel cerchio, la quale viene data semplicemente da un'omologia col centro all'infinito. L'ultimo problema si risolve facilmente, dipendendo dalle equazioni

$$xy = a^2 \quad x^2 + y^2 = 4r^2$$

(ove a^2 è l'area data, r il raggio del cerchio); si trova quindi

$$x + y = \pm 2\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{2}}$$

$$x - y = \pm 2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}},$$

dove x e y sono i lati del rettangolo che deve essere costruito.

§ 14. **Equivalenza di mezzi costruttivi.** — Le trasformazioni non porgono solo un aiuto per la risoluzione effettiva di problemi proposti, ma illuminano anche la questione della risolubilità dei problemi stessi mediante istrumenti assegnati.

Si abbia un istrumento a il quale permetta di effettuare certe costruzioni fondamentali $A_1 A_2 \ldots$; queste definiranno un corpo (A) di problemi risolubili per mezzo di a (cf. § 8).

Si effettui ora una trasformazione, la quale muti $A_1 A_2 \ldots$ in certe nuove costruzioni $A_1' A_2' \ldots$. Il valore di un istrumento a', capace di effettuare le operazioni fondamentali $A_1' A_2' \ldots$, si potrà senz'altro misurare, in base alla supposta conoscenza del valore di a; infatti il corpo dei problemi risolubili con a', sarà il corpo (A') trasformato di (A).

(¹) Cfr. per es. Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*, § 50.

In particolare *se il corpo* (A′) *contiene le operazioni* $A_1 A_2 ....$, esso conterrà l'intiero corpo (A), e perciò *l'istrumento* a′ *sarà capace di surrogare* a.

Si perviene appunto a questa conclusione, *quando l'istrumento* a′ *permette di effettuare la trasformazione indicata,* poichè allora esso c' insegna a ridurre le costruzioni $A_1 A_2 ....$, alle $A_1' A_2' .....$ La trasformazione porge così un criterio per giudicare dell'*equivalenza di dati mezzi costruttivi.*

Un semplice esempio in proposito si è visto nell'art. II; poichè una trasformazione per raggi vettori reciproci è effettuabile col solo compasso, e poichè essa trasforma la figura costituita da un cerchio e dalle rette d'un piano in un insieme di cerchi, si deduce che il compasso è capace da solo di effettuare quelle costruzioni che si ottengono colla riga e con un cerchio fisso, cioè (secondo il risultato di Poncelet-Steiner, art. III) tutte quelle effettuabili colla riga e col compasso.

Similmente la figura costituita da una parabola fissa e dai cerchi del piano pel suo vertice, si trasforma — con un'inversione — in quella costituita da una cubica razionale e dalle rette; e, poichè la trasformazione si può eseguire colla sola riga, dati gli enti metrici del piano (per es. mediante un quadrato), si conclude che i problemi di 3° grado, i quali sono risolubili mediante le intersezioni di una parabola coi cerchi pel suo vertice, possono anche risolversi colla sola riga, quando è data nel piano una cubica razionale fissa ed un quadrato, oppure una cissoide ed il centro del suo cerchio generatore, potendosi in tal caso costruire un quadrato (cfr. art. VII, § 19).

Un altro esempio istruttivo, di un genere un pò diverso, è il seguente.

Si consideri, nel piano, la polarità rispetto ad un cerchio, la quale porge una trasformazione di punti in rette e di rette in punti. Mediante questa polarità, che si costruisce linearmente, l'operazione del « segare il cerchio con una retta » si trasforma in quella di « condurre per un punto le tangenti al cerchio ». E poichè la prima operazione, insieme a quelle di « segnare un punto » e « tracciare una retta » vale a risolvere tutti i problemi di 2° grado, ed in particolare quello di condurre per un punto le tangenti ad un cerchio, se ne dedurrà che gli stessi problemi sono risolubili colla seconda operazione, la quale può essere effettuata con una riga a due orli (1). Questo resultato è stato stabilito in altro modo nell'art. III.

§ 15. **Risoluzione di problemi mediante gli elementi uniti d'una corrispondenza.** — Le trasformazioni o corrispondenze fra i punti di un piano o di una retta, trovano anche una particolare applicazione nella risoluzione di problemi, ove i punti incogniti si presentano come *punti uniti di una corrispondenza.*

Il più semplice esempio di ciò è stato offerto nell'art. III sotto il nome di *metodo dei tentativi.* Nei problemi ivi considerati, i punti incogniti si presentavano come uniti per una proiettività sopra la retta, la quale veniva individuata da tre tentativi non riusciti.

In generale quando dei punti incogniti (sopra una retta o nel piano) si presentano come uniti per una corrispondenza, della quale sia nota la costruzione, si ha almeno il modo di avvicinarsi alle soluzioni per via di approssimazioni successive, ripetendo la costruzione della corrispondenza stessa (2).

Ecco ora un esempio di applicazione del metodo, ove interviene una corrispondenza superiore alla proiettività.

Si tratti di inserire fra due rette date a, b un segmento di lunghezza data, il cui prolungamento debba passare per un punto O (art. VII).

I tentativi di risolvere il problema, con riga e compasso, conducono come è manifesto ad una corrispondenza [2, 2] in cui ad ogni punto di a ne corrispondono due di b e viceversa.

(1) Cfr. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, § 74.

La possibilità di eseguire praticamente l'operazione con una *riga a due orli di lunghezza finita* discende da ciò che si è detto nel § 12. (Cfr. SEVERI, l. c.).

(2) Da questo procedimento di approssimazione, pei punti uniti di una proiettività sulla retta, scaturisce il noto sviluppo di un irrazionale quadratico in frazione continua periodica. L'analogo procedimento relativo ai punti uniti di un'omografia piana, corrisponde alla generalizzazione del suddetto algoritmo per gl'irrazionali cubici ecc. (JACOBI, MINKOWSKI).

Poichè n punti della retta rappresentati da un'equazione di grado n, possono riguardarsi come uniti per una corrispondenza [1, $n-1$], si potrà ottenere una rappresentazione dell'irrazionale di grado n, mercè un procedimento iterativo continuo consistente nella ripetizione di un'operazione razionale di grado $n-1$.

Proiettando da O la retta b sulla a, si ottiene su questa una corrispondenza [2, 2], che ha 4 punti uniti, i quali risolvono il problema.

Faremo un' altra applicazione del metodo stesso alla costruzione delle radici di un' equazione cubica

$$f_3(x) = 0,$$

costruzione di cui già si è trattato nell' art. VII.

Una semplice costruzione geometrica del GRASSMANN (generalizzazione della teoria dei quarti armonici (1)) permette di riguardare i tre punti di una retta che hanno per ascisse le radici suddette, come punti uniti di una corrispondenza [1, 2] (*polarità* rispetto alla terna), la quale scaturisce dal riferire proiettivamente i punti della retta alle *coppie* di un' involuzione I (o ai raggi d' un fascio che sono tangenti, in un punto base, ai cerchi, per due punti fissi, seganti sulla retta le coppie dell' involuzione).

Ora se si proietta la suddetta corrispondenza sopra una conica, (per es. su un cerchio) C, scegliendo il centro di proiezione O sulla curva, l' involuzione verrà segata su C dalle rette di un fascio P, che risulterà proiettivo ad O. I due fasci proiettivi O e P genereranno una *conica le cui intersezioni col cerchio* C *forniscono le soluzioni dell' equazione cubica data.*

Si supponga invece data, nel piano, una cubica C dotata di un punto doppio O. Le tangenti in O a C segheranno la nostra retta in due punti AB. Possiamo operare sulla retta una trasformazione proiettiva in guisa che l' involuzione (trasformata di I) venga a contenere la coppia AB, e che il punto P, corrispondente alla coppia nella corrispondenza data, occupi una posizione arbitraria che ci riserviamo d' indicare.

Ora si proietti da O sulla cubica C la retta AB; le proiezioni delle coppie di I formeranno su C un' involuzione I', e si dimostra facilmente che le coppie di I' trovansi allineate con un punto fisso P' della cubica. Possiamo ritenere che il punto P' sia la proiezione di P. Allora la corrispondenza [1, 2] data sulla nostra retta, si traduce in una prospettività tra i fasci di raggi O e P'. L' asse di prospettività incontra la curva nei punti uniti.

(1) Cfr. CREMONA, *Introduzione ad una teorica geometrica delle curve piane*, Bologna, Gamberini e Parmeggiani, 1862.

Si ottiene così una nuova dimostrazione della possibilità di *costruire le radici di un' equazione del 3° grado, mediante le intersezioni di una cubica razionale fissa con una retta* (cfr. art. VII, § 19).

§ 16. **Conclusione.** — Noi abbiamo messo in luce, sotto molteplici aspetti, i progressi portati dall' Algebra e dalla Geometria moderna, ed abbiamo riconosciuto l' economia che ne risulta nelle costruzioni e nei metodi di risoluzione, per riguardo ai problemi stessi considerati nel loro insieme.

In particolare abbiamo imparato a classificare i problemi, decidendo della loro risolubilità con istrumenti assegnati; si eliminano così i vani tentativi volti a raggiungere uno scopo impossibile, in ordine ai mezzi di cui si dispone.

Ora se i concetti della Scienza moderna ci appaiono più generali e potenti degli antichi, e se perciò siamo tratti a farne valere la superiorità, dobbiamo pure tener presente che essi ci presentano a prima vista come più astratti e quindi più lontani dalla forma immediata in cui sono posti d' ordinario i problemi pratici.

Per cogliere in quell' astrattezza il contenuto concreto, ottima via è di rifare la strada che la mente umana ha percorso per giungervi, ripigliando dunque i metodi ed i principii elementari dei Greci.

Pertanto noi non vogliamo mettere da banda nulla di ciò che i geometri antichi ci hanno insegnato; e domandiamo soltanto ad una più larga ed alta coltura scientifica, di renderci chiari i rapporti di quella Geometria elementare, i cui mirabili particolari meglio risplendono al lume dei generali concetti moderni!