ARTICOLO OTTAVO

« Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo » di BENEDETTO CALÒ a Napoli.

§ 1. **Problemi algebrici e trascendenti.** — Negli art. 4° e 5° sono state studiate, dal punto di vista della Geometria analitica e dell'Algebra, le questioni relative alla risolubilità dei problemi per via elementare, cioè colla riga e col compasso.

Quando sia proposto un problema costruttivo, si trasformi anzitutto in modo che i *dati* sieno punti (poniamo per es. in un piano), e gli elementi incogniti sieno anch'essi dei punti aventi coi dati relazioni assegnate.

Affinchè il problema proposto sia risolubile elementarmente, occorre e basta che

a) le relazioni assegnate si possano tradurre con equazioni algebriche (cioè il problema sia *algebrico*);

b) le equazioni algebriche in discorso sieno risolubili con operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate (a partire dalle coordinate dei punti dati).

Le questioni relative alla possibilità di risolvere nel modo anzidetto (con irrazionalità quadratiche) un'equazione algebrica hanno trovato posto negli art. 5°, 6° e 7°.

Noi ci rivolgiamo qui al primo gruppo di questioni tendenti a decidere dell'*algebricità*, o, per contrapposto, della *trascendenza* di un dato problema. Ed avvertiamo subito che i problemi trascendenti debbono riguardarsi come più elevati degli algebrici in questo senso, che la risoluzione loro non solo non è effettuabile colla retta e col circolo (riga e compasso), ma nemmeno col tracciamento di curve algebriche superiori (come quelle utilizzate nell'art. 7°), o cogli istrumenti atti a descrivere tali curve.

Per procedere nelle nostre considerazioni, prendiamo le mosse dal classico problema della quadratura del circolo.

Traduciamo anzitutto questo problema in forma analitica. Se indichiamo con r il raggio di un cerchio, con d il suo diametro, con c la circonferenza e con a la sua area, abbiamo

$$c = \pi d = 2\pi r \tag{1}$$

$$a = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2} r \cdot c; \tag{2}$$

ove π è il rapporto costante della circonferenza al diametro.

Dalla formola (2) risulta il noto fatto che l'area del cerchio equivale all'area di un triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio del cerchio. Se dunque siamo in grado di costruire colla riga e col compasso un segmento equivalente alla circonferenza, partendo dal raggio, se, cioè, sappiamo effettuare elementarmente la rettificazione del cerchio, potremo costruire il detto triangolo e trasformare poi facilmente questo, sempre facendo uso della riga e del compasso, in un quadrato equivalente. E inversamente, se mediante una costruzione elementare si potesse trasformare il cerchio in un quadrato equivalente, trasformando poi questo in un triangolo equivalente avente per altezza il raggio del cerchio, si otterrebbe mediante una costruzione elementare la rettificazione della circonferenza.

Il problema della quadratura del cerchio si trova così ricondotto a quello della rettificazione della circonferenza. E se, per semplicità, scegliamo come unità di misura il diametro, quest'ultimo problema si riduce all'altro di costruire un segmento di lunghezza π (o brevemente *costruire* π) a partire dal segmento unità.

È ovvio che al segmento stesso si può dare una posizione assegnata, in modo che il problema sia posto sotto la forma in cui abbiamo detto di considerare un problema costruttivo; in modo, cioè, che i dati sieno punti (il centro $[o, o]$ ed un punto del cerchio $[o, 1]$), e gli elementi incogniti siano anch'essi dei punti (per es. il punto $[o, \pi]$).

Ma, così essendo posto il problema, non appare se esso venga a dipendere o no dalla risoluzione di un'equazione algebrica, giacchè, invero, non viene posta in evidenza alcuna equazione da risolvere, di cui π sia radice.

Guardiamo di generalizzare il problema, da cui siamo partiti, considerando la questione della *rettificazione di un arco circolare qualsiasi.*

Dell'arco possiamo supporre *data* (oltre il raggio preso come unità) la *corda,* oppure il *seno,* ciò che è equivalente pel nostro scopo.

Il problema della rettificazione dell'arco viene quindi a dipendere dalla risoluzione dell'equazione

$$y = \text{arc sen}\, x.$$

E poichè questa equazione è trascendente, *il problema è in generale trascendente,* sicchè *non è possibile assegnare una determinata costruzione generale algebrica, e tanto meno elementare* (cioè *effettuabile colla riga e col compasso*), *mediante la quale, data la corda* (o *il seno*) *dell'arco, si ottenga la lunghezza dell'arco.*

Se, per es., una costruzione elementare determinata fosse in generale possibile, si troverebbe una determinata espressione di x, formata con operazioni razionali e radici quadrate, la quale per *tutti* i valori di x fornirebbe y. Quindi la y risulterebbe radice di un'equazione algebrica, i cui coefficienti sarebbero funzioni razionali di x (cfr. art. 5°), cioè la y sarebbe una funzione algebrica della x. Ora una funzione trascendente come la $y = \text{arc sen}\, x$ (che, nel piano complesso, ha infiniti rami) non può certo equivalere ad una funzione algebrica.

Ma se è impossibile dare algebricamente, e tanto meno in modo elementare, la risoluzione *generale* del problema della rettificazione dell'arco, non ne segue per questo *a priori* che la risoluzione stessa non possa ottenersi, sia trovando *per ogni corda* (o *seno*) assegnata una *particolare* costruzione algebrica o elementare la quale fornisca l'arco; sia trovando una costruzione siffatta *per archi particolari,* ad esempio, quando la corda (o il seno) dell'arco da rettificare è espressa pel raggio mediante operazioni razionali e radici quadrate, e quindi è essa stessa elementarmente costruibile; in particolare, nel caso corrispondente alla rettificazione dell'intero cerchio. Ed infatti, se la curva $y = \text{arc sen}\, x$ è trascendente e quindi non può coincidere intieramente con una curva algebrica, chi ci dice che le coordinate di *ogni* punto di essa non possano soddisfare ad una particolare equazione algebrica a coefficienti razionali (variabile da punto a punto), o almeno che essa non contenga punti *particolari,* le cui coordinate soddisfino ad una tale equazione, ed in special modo punti aventi come coordinate delle espressioni irrazionali quadratiche, a cui corrisponderebbero appunto degli archi rettificabili?

Chi ci assicura che il punto $[o, \pi]$ di essa non si trovi fra i punti particolari accennati?

Tale questione esce, come si vede, dal campo della teoria delle funzioni, per entrare nel dominio dell'aritmetica.

Dando forma più generale alle conclusioni che emergono dalla precedente discussione, possiamo dire:

La questione, di decidere se un problema assegnato sia algebrico o trascendente, si presenta diversamente a seconda che si considera un problema in cui i dati sono variabili o fissi. Nel primo caso, se le equazioni che legano le incognite ai dati sono trascendenti, il problema è trascendente, ed è impossibile una *generale risoluzione* algebrica valida indipendentemente dai valori dei dati.

Quando si tratta di un problema in cui i dati sono fissi, o (ciò che è lo stesso) quando i dati, pur capaci di variare, si considerino fissati in un modo particolare, occorre domandarsi se le equazioni trascendenti, che legano le incognite ai dati, in quanto servono alla determinazione delle incognite, non possano essere rimpiazzate con equazioni algebriche.

Guardando le cose sotto quest'ultimo aspetto, l'esistenza stessa di problemi (aritmeticamente) trascendenti può essere posta in dubbio. Il dubbio si riattacca alla domanda:

Esistono dei numeri (trascendenti) non soddisfacenti ad alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali?

Soltanto dopo avere risolto affermativamente la predetta questione (nel § 3), ci volgeremo a quella, da cui dipende la quadratura del circolo:

Il numero π deve porsi tra i numeri trascendenti?

Diciamo fin d'ora che anche per questa seconda questione la risposta è affermativa (§§ 4, 5, 6); essa chiude l'êra dei tentativi infruttuosi rivolti a cercare, per via elementare, *la quadratura del circolo,* mostrando che *il problema stesso non è risolubile nè elementarmente, cioè mediante rette e circoli, nè col tracciamento di curve algebriche più elevate.*

Nel § 6 si troverà ancora l'estensione di questi resultati relativa al problema generale della rettificazione dell'arco.

Abbiamo poi esposto nel § 7 una breve descrizione dell'integrafo di ABDANK-ABAKANOWICZ e della soluzione grafica ch'esso fornisce del problema di rettificazione e quadratura del cerchio; e nel § 8 si trovano citate alcune delle costruzioni elementari più comuni per la risoluzione approssimata del problema stesso. Il § 9 è dedicato alla considerazione di alcune superficie limitate da archi di cerchio e quadrabili elementarmente. Nel § 10 abbiamo riassunto brevemente in un quadro storico le principali ricerche relative al problema della quadratura del cerchio, e col § 11 terminiamo il presente lavoro esponendo la dimostrazione della trascendenza di e e π nella forma più semplice ed elementare a cui è stata portata dalle più recenti ricerche.

§ 2. **Prime proprietà dei numeri algebrici.** — Diciamo col KRONECKER *numero algebrico* ogni numero x che è radice di un'equazione algebrica della forma

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0,$$

a coefficienti razionali, la quale, moltiplicata per un conveniente numero intero, potrà sempre ridursi ad avere coefficienti interi.

Osserviamo subito che da questa definizione non restano esclusi i numeri radici di equazioni algebriche i cui coefficienti sono numeri algebrici, ossia la definizione data di numero algebrico è la più generale possibile; ciò resulta dal seguente teorema:

Ogni radice di un' equazione algebrica a coefficienti algebrici è ancora radice di un' equazione algebrica a coefficienti interi.

Ed invero, sia il numero ω radice dell'equazione

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \dots + \gamma = 0, \tag{1}$$

ove α, β,...., γ siano numeri algebrici, cioè rispettivamente radici di equazioni della forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \dots + A_a = 0, \\ x^b + B_1 x^{b-1} + B_2 x^{b-2} + \dots + B_b = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^c + C_1 x^{c-1} + C_2 x^{c-2} + \dots + C_c = 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

in cui i coefficienti sian tutti numeri razionali.

Indichiamo con p il prodotto $n \cdot a \cdot b \dots c$ e con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ tutti i prodotti della forma

$$\omega^{n'} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \dots \gamma^{c'} \left\{ \begin{array}{l} n' = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n-1, \\ a' = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ a-1, \\ b' = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ b-1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ c' = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ c-1, \end{array} \right.$$

che sono appunto in numero di p.

È facile vedere che i p prodotti $\omega\omega_1, \omega\omega_2, \dots, \omega\omega_p$ si possono esprimere nel modo seguente

$$\omega\omega_i = k_{i1}\omega_1 + k_{i2}\omega_2 + \dots + k_{ip}\omega_p$$
$$(i = 1,\ 2, \dots,\ p),$$

ove i numeri k_{rs} sono tutti razionali.

Ed infatti, abbiamo

$$\omega\omega_i = \omega^{n'+1} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \dots \gamma^{c'};$$

ora distinguiamo due casi:

1° sia $n' < n - 1$; allora $n' + 1 < n$, e perciò $\omega\omega_i$ equivale ad una delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$;

2° sia $n' = n - 1$; allora $n' + 1 = n$, e perciò $\omega^{n'+1} = \omega^n$; ma, essendo ω radice dell'equazione (1), varrà l'identità

$$\omega^n = -\alpha\omega^{n-1} - \beta\omega^{n-2} - \dots - \gamma,$$

quindi

$$\omega\omega_i = -\omega^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1}\beta^{b'} \dots \gamma^{c'} - \tag{3}$$
$$- \omega^{n-2}\alpha^{a'}\beta^{b'+1} \dots \gamma^{c'} - \dots - \alpha^{a'}\beta^{b'} \dots \gamma^{c'+1};$$

prendiamo ora a considerare il primo termine del secondo membro, cioè

$$\omega^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1} \cdot \beta^{b'} \dots \gamma^{c'}; \tag{t}$$

possiamo distinguere ancora due casi:

o si ha $a' < a - 1$, ed allora $a' + 1 < a$, e perciò il termine stesso equivale ad una delle p quantità

$$\omega_1,\ \ \omega_2, \dots,\ \ \omega_p;$$

ovvero è $a' = a - 1$, ed allora $a' + 1 = a$, e perciò

$\alpha^{a'+1}=\alpha^a$; ma, essendo α radice della prima delle equazioni (2), varrà l'identità

$$\alpha^a = -A_1\alpha^{a-1} - A_2\alpha^{a-2} - \dots - A_a.$$

Sostituendo dunque nel termine (t) in luogo di $\alpha^{a'+1}$ quest'ultima espressione, il termine stesso risulterà una funzione lineare ed omogenea delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ con coefficienti razionali. Lo stesso potendo ripetersi per ogni termine del secondo membro della (3), anche $\omega\omega_i$ risulterà una funzione lineare ed omogenea delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ con coefficienti razionali. Varranno dunque p equazioni della forma

$$\begin{aligned} \omega\omega_1 &= k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \dots + k_{1p}\omega_p, \\ \omega\omega_2 &= k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2 + \dots + k_{2p}\omega_p, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega\omega_p &= k_{p1}\omega_1 + k_{p2}\omega_2 + \dots + k_{pp}\omega_p, \end{aligned}$$

in cui i coefficienti k_{rs} sono tutti numeri razionali. Ora queste equazioni possono scriversi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (k_{11}-\omega)\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \dots + k_{1p}\omega_p &= 0, \\ k_{21}\omega_1 + (k_{22}-\omega)\omega_2 + \dots + k_{2p}\omega_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{p1}\omega_1 + k_{p2}\omega_2 + \dots + (k_{pp}-\omega)\omega_p &= 0. \end{aligned}$$

Ne segue che, non potendo essere le quantità $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ tutte nulle, il numero ω dovrà esser radice dell'equazione

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega & k_{12} & \dots & k_{1p} \\ k_{21} & k_{22}-\omega & \dots & k_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{p1} & k_{p2} & \dots & k_{pp}-\omega \end{vmatrix} = 0;$$

e questa è un'equazione algebrica di grado p in ω, a coefficienti razionali, che, moltiplicata per un conveniente numero intero, potrà esser ridotta a coefficienti interi. Così il teorema enunciato resta stabilito.

Un altro teorema, del quale faremo spesso uso, è il seguente: Se $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ *sono numeri algebrici, ogni numero, formato con essi mediante operazioni razionali, è ancora algebrico.*

Basterà dimostrare che, se α, β sono numeri algebrici, anche le espressioni $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ sono numeri algebrici.

Principiamo ad osservare che dalla definizione di numero algebrico discende immediatamente che, se α è un numero algebrico, anche $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha+1$, $\alpha-1$ saranno numeri algebrici.

Applicando ora il teorema, dimostrato precedentemente, all'equazione lineare

$$\beta x + \alpha = 0$$

a coefficienti α, β algebrici, avremo che $-\frac{\alpha}{\beta}$ e quindi anche $\frac{\alpha}{\beta}$ sarà algebrico; poi se β è algebrico, sarà tale anche $\frac{1}{\beta}$, e quindi anche $\alpha : \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta$. Così pure saranno algebrici $\frac{\alpha}{\beta}+1$, $\frac{\alpha}{\beta}-1$, e perciò anche

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)\cdot\beta = \alpha+\beta, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\cdot\beta = \alpha-\beta;$$

così il teorema resta dimostrato; esso poteva stabilirsi anche indipendentemente dal teorema precedente (1).

§ 3. **Dimostrazione dell'esistenza di numeri trascendenti.** — Nel presente paragrafo ci occuperemo della prima delle questioni poste nel § 1, se, cioè, esistono dei numeri che non siano radici di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Di tali numeri, detti *trascendenti,* il primo a dimostrare l'esistenza è stato il LIOUVILLE. La dimostrazione del LIOUVILLE, che ora riprodurremo un poco modificata, comparve per la prima volta in forma succinta nei *Comptes rendus* del 1844, vol. 18, pag. 883 e 910, e poi più diffusamente nel *Giornale di Liouville,* vol. 16, pag. 133 (1851), col titolo seguente: *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationelle algébriques.*

Principiamo dallo stabilire un carattere numerico che ogni numero algebrico reale e positivo presenta, quando sia sviluppato in frazione continua. Sia x_0 un numero algebrico qualunque, cioè radice di un'equazione della forma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \tag{1}$$

(1) I due teoremi dimostrati son dovuti al DEDEKIND: cfr. l'ultima appendice alle *Lezioni sulla teoria dei numeri* di LEJEUNE DIRICHLET. Trad. italiana del FAIFOFER, pag. 443-446.

a coefficienti interi (v. § 2). Senza alterare la generalità, potremo supporre che le radici di questa equazione sian tutte diseguali; ed infatti, se essa avesse delle radici fra loro uguali, dividendo il suo primo membro per il massimo comun divisore ch'esso ha colla sua derivata prima, potremmo far sì che la nostra ipotesi fosse realizzata.

Supponiamo che il numero x_0 sia reale e positivo e sia sviluppato in frazione continua nel modo seguente:

$$x_0 = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cdots + \cfrac{1}{p_{k-1} + \cdots}}},$$

ove $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, \ldots$ rappresentano numeri interi e positivi; e sia r_k il resto dello sviluppo stesso, quando si arresti al denominatore p_{k-1}; sarà r_k ancora un numero algebrico (v. § 2) reale e positivo e sarà p_k il massimo numero intero contenuto in $\frac{1}{r_k}$.

Se indichiamo in generale con

$$\frac{c_s}{c'_s} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

la ridotta che si ottiene limitando la frazione continua al denominatore p_{s-1}, avremo, per la nota legge di formazione delle ridotte,

$$\frac{c_k}{c'_k} = \frac{c_{k-1} p_{k-1} + c_{k-2}}{c'_{k-1} p_{k-1} + c'_{k-2}},$$

e se in questa espressione, in luogo di p_{k-1}, poniamo $p_{k-1} + r_k$, avremo

$$x_0 = \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}}.$$

Ciò posto, abbiamo

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 = \frac{c_k}{c'_k} - \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}} = \frac{r_k (c_k c'_{k-1} - c'_k c_{k-1})}{c'_k (c'_k + r_k c'_{k-1})}$$

ossia

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 = \frac{(-1)^k r_k}{c'_k (c'_k + r_k c'_{k-1})}. \tag{2}$$

D'altra parte, se $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sono le altre $n - 1$ radici dell'equazione (1), che per ipotesi son tutte diverse fra loro e da x_0, potremo scrivere

$$f(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Se in questa espressione per x poniamo $\frac{c_k}{c'_k}$, avremo

$$f\left(\frac{c_k}{c'_k}\right) = a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \dots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{a_0 c_k^n + a_1 c_k^{n-1} c'_k + \dots + a_{n-1} c_k c'^{n-1}_k + a_n c'^n_k}{c'^n_k}.$$

Ma le quantità a, c, c' sono tutte numeri interi, quindi potremo scrivere

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \dots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right) = \frac{C}{c'^n_k},$$

essendo C un numero intero.

Ora, col crescere indefinito di k, la quantità $\frac{c_k}{c'_k}$ tende al limite x_0; dunque da un certo valore di k in poi sarà sempre $\frac{c_k}{c'_k}$ diversa da $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ e minore in valore assoluto di una certa quantità positiva finita; perciò da un certo valore di k in poi sarà il numero intero C diverso da zero e quindi in valore assoluto maggiore o eguale ad 1, e sarà l'espressione

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \dots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right)$$

minore in valore assoluto di una certa quantità positiva finita l; sarà dunque in valore assoluto

$$\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right) l > \frac{1}{c'^n_k},$$

ossia

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 > \frac{1}{l c'^n_k}$$

in valore assoluto. Ed ora, tenendo conto della (2), avremo

$$\frac{r_k}{c'_k(c'_k + r_k c'_{k-1})} > \frac{1}{l c'^n_k},$$

ossia

$$\frac{c'_k + r_k c'_{k-1}}{r_k} < l c'^{\,n-1}_k;$$

e, poichè c'_k, c'_{k-1} sono quantità positive,

$$\frac{1}{r_k} < l c'^{\,n-2}_k;$$

ed essendo p_k il massimo numero intero contenuto in $\frac{1}{r_k}$, avremo infine

(3) $$p_k < l c'^{\,n-2}_k.$$

Questa diseguaglianza rappresenta il carattere aritmetico che volevamo stabilire riguardo al numero algebrico x_0; esso si può enunciare così:

Se si sviluppa in frazione continua una radice reale e positiva di un' equazione algebrica di grado n *a coefficienti interi ed a radici diseguali, ogni denominatore parziale di questa frazione continua non supera il prodotto di una certa quantità costante* l, *positiva e finita, per la potenza* (n — 2)$^{\text{esima}}$ *del denominatore della ridotta precedente.*

Ciò premesso, se riusciremo a costruire una frazione continua della forma

$$p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \dots}},$$

a denominatori parziali interi e positivi, per cui la condizione (3), da un certo valore di k in poi, non sia soddisfatta, qualunque sia il valore della costante l e del numero intero n, il numero rappresentato da questa frazione continua non potrà esser radice di alcuna equazione a coefficienti interi ed a radici diseguali, e quindi neppure potrà esser radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali (v. § 2); sarà dunque un numero trascendente.

Ora una frazione continua di tal natura si può nel fatto costruire; basta, per es., formare ogni denominatore parziale p_k in modo che stia coi precedenti in questa relazione

$$p_k = c'^{\,k}_k \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ed infatti, qualunque sia il valore che hanno n ed l, il numero k, crescendo, finirà per superare n; ma, crescendo k, il numero c'_k aumenta indefinitamente; dunque possiamo asserire che, da un certo valore di k in poi, sarà

$$k > n, \quad c'^2_k > l;$$

per la prima di queste diseguaglianze sarà

$$p_k > c'^2_k \cdot c'^{n-2}_k;$$

e per la seconda avremo, *a fortiori*,

$$p_k > l \cdot c'^{n-2}_k.$$

Dunque, poichè, qualunque sieno i valori di l e di n, si può trovare un valore di k tale che da quel valore in poi la diseguaglianza (3) non sia mai soddisfatta, il numero rappresentato dalla frazione continua così costruita sarà un numero trascendente.

Si noti che alla stessa conclusione si giungerebbe se si prendesse

$$p_k > c'^k_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

da questa arbitrarietà risulta la possibilità di costruire infiniti numeri trascendenti; e così il teorema di LIOUVILLE resta dimostrato.

Dalle classiche ricerche di G. CANTOR (1) sulle proprietà dell'aggregato dei numeri algebrici scaturisce una nuova dimostrazione dell'esistenza di numeri trascendenti, molto più semplice e naturale di quella data da LIOUVILLE.

Riporteremo qui la dimostrazione di CANTOR attenendoci alla facile esposizione che di essa ha dato F. KLEIN (2).

Un aggregato di infiniti elementi (per es. numeri) si dice numerabile quando gli elementi stessi possono esser posti in corrispondenza biunivoca coi numeri della serie naturale 1, 2, 3,....

Cioè, un aggregato di elementi si dice numerabile quando gli elementi stessi si possono ordinare, con una legge qual-

(1) *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* (Giorn. di Crelle, vol. 77, 1873).

(2) *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare.* Redatte da F. TÄGERT, e tradotte in italiano da F. GIUDICE, Torino, 1896.

siasi, in una successione nella quale ciascuno di essi abbia un determinato posto numerato.

Ciò premesso, dimostriamo che la totalità dei numeri algebrici reali è un aggregato numerabile, ossia che:

La totalità dei numeri algebrici reali e quella dei numeri interi positivi si possono porre tra loro in corrispondenza biunivoca.

Tutti i numeri algebrici reali si ottengono determinando tutte le radici reali di tutte le equazioni irriducibili della forma

$$a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

in cui può sempre supporsi che i coefficienti a_0, a_1,...., a_n siano numeri interi razionali, primi fra loro, ed a_0 diverso da zero e positivo.

Diremo *altezza* di un numero algebrico, radice dell'equazione precedente, la somma

$$N = (n-1) + a_0 + |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|, \tag{4}$$

ove $|a_\nu|$ rappresenta il valore assoluto di a_ν.

Ora è evidente che ad ogni valore assegnato ad N appartiene solo un numero finito di numeri algebrici. Ed infatti, per la (4), n non può superare N, e, fissati N, n, i numeri a_0, $|a_1|$, $|a_2|$,...., $|a_n|$, essendo interi positivi, non possono esser determinati che in un numero finito di modi; così ad un valore assegnato di N appartiene solo un numero finito di equazioni, fra le quali devono poi ritenersi solo le irreducibili; dunque ad un dato valore di N appartiene solo un numero finito di numeri algebrici.

I numeri algebrici reali potranno dunque ordinarsi per gruppi secondo la loro altezza crescente, e quelli (in numero finito) di uno stesso gruppo, ossia della stessa altezza, potranno ordinarsi secondo la loro grandezza; così tutti i numeri reali algebrici verranno ordinati in un'unica successione, in cui ciascuno di essi avrà un posto determinato; quindi i numeri algebrici reali costituiscono un aggregato numerabile. c. d. d.

Fissato comunque un aggregato numerabile di numeri reali, consideriamo tutti i numeri reali rappresentati dai punti di un segmento arbitrariamente piccolo dell'asse reale; dimostriamo che fra essi ve ne sono sempre infiniti che non appartengono al dato insieme numerabile.

Perciò immaginiamo ordinati i numeri di questo insieme e scritti sotto forma di frazioni decimali; se in una di queste tutte le cifre, da una di esse in poi, fossero eguali a 9, il numero corrispondente equivarrebbe ad un numero decimale terminato, e, per evitare questa doppia rappresentazione, conveniamo di escludere le successioni di infinite cifre eguali a 9.

Ora è facile formare un numero reale che non appartenga all' insieme considerato, per quanto sieno ristretti i limiti fra i quali il numero stesso dev' essere compreso.

Ed infatti, se del numero son date, per esempio, le prime cinque cifre decimali, basterà scegliere come sesta una cifra diversa da 9 e dalla sesta cifra decimale del primo numero dell' insieme, come settima una cifra diversa da 9 e dalla settima cifra decimale del secondo numero dell' insieme, ecc.

La frazione decimale così costruita rappresenta un numero che evidentemente non appartiene all' aggregato numerabile considerato; e poichè per determinare ciascuna cifra, oltre quelle date, si può scegliere fra 8 cifre, così abbiamo in ogni intervallo arbitrariamente piccolo dell' asse reale infiniti numeri che non appartengono al detto aggregato.

Se dunque per aggregato numerabile assumiamo quello dei numeri reali algebrici, resta dimostrato che in ogni intervallo reale arbitrariamente piccolo esistono infiniti numeri trascendenti.

§ 4. **Il lemma di Weierstrass.** — Dobbiamo ora prendere in considerazione l' altra domanda posta nel § 1, dalla quale abbiamo visto dipendere la questione della possibilità di risolvere elementarmente il problema della quadratura del cerchio; si tratta, cioè, di decidere se il numero π debba porsi tra i numeri algebrici o tra i numeri trascendenti. Tale questione è stata risoluta nel 1882 dal LINDEMANN (1), il quale, prendendo le mosse dalle ricerche con cui HERMITE (2) (1873) aveva stabilita la trascendenza del numero e (base dei logaritmi naturali), riuscì a dimostrare che anche il numero π è trascendente.

(1) *Über die Ludolph'sche Zahl*, Berichte der Berliner Akademie der W.
(2) *Sur la fonction exponentielle.* (Comptes rendus, vol. 77).

La dimostrazione del LINDEMANN fu poi notevolmente semplicizzata dal WEIERSTRASS [1], ed estesa a dimostrare un teorema generale già enunciato dal LINDEMANN. Da questo teorema discende non solo la trascendenza dei numeri e e π, ma anche, come il WEIERSTRASS ha rilevato, la trascendenza di ogni arco circolare la cui corda sia espressa algebricamente mediante il raggio, restando così risoluta la questione della possibilità di effettuare elementarmente la rettificazione del cerchio o di un arco circolare qualunque.

Principiamo dallo stabilire un lemma, dal quale il WEIERSTRASS mosse per dimostrare la trascendenza di π ed il teorema generale di LINDEMANN.

Siano $f(z)$, $h(z)$ due polinomii nella variabile z, di gradi rispettivamente $n+1$ ed n:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_n z + a_{n+1}, \\ h(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 ; \end{cases}$$

il polinomio $f(z)$ sia scelto in modo che l'equazione $f(z)=0$ abbia tutte le sue radici diseguali, mentre i coefficienti di $h(z)$ sono del tutto arbitrarii.

Formiamo con questi due polinomii la funzione

$$(2)\qquad F(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!}, \quad (m \text{ intero positivo})$$

che sarà di grado $\mu = n + m(n+1)$; e consideriamo la funzione

$$(3)\qquad \varphi(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \dots + F^{(\mu)}(z),$$

ove gli apici indicano le derivate successive di $F(z)$.

La funzione $\varphi(z)$ sarà dello stesso grado che $F(z)$, cioè di grado $\mu = n + m(n+1)$; inoltre, derivando ambo i membri della (3) rispetto a z e tenendo presente che $F^{(\mu+1)}(z) = 0$, abbiamo

$$\varphi'(z) = F'(z) + F''(z) + F'''(z) + \dots + F^{(\mu)}(z).$$

Sottraendo membro a membro questa relazione dalla precedente, risulterà

$$\varphi(z) - \varphi'(z) = F(z)$$

[1] Zu LINDEMANNS Abhandlung: *Über die Ludolph'sche Zahl.* Berliner Berichte, 1885.

e per la (2)

$$(4) \qquad \varphi(z) - \varphi'(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!}.$$

Supponiamo ora che i coefficienti c_i di $h(z)$ non siano tutti nulli, cioè che $h(z)$ non sia identicamente nulla; ne seguirà che anche $\varphi(z)$ non potrà essere identicamente nulla. Neppure potrà $\varphi(z)$ ammettere $f(z)$ come fattore; altrimenti potremmo porre

$$\varphi(z) = \theta(z) \cdot f(z)^\rho,$$

ove $\theta(z)$ indica un polinomio in z non divisibile per $f(z)$ e $\rho < m+1$. Ora ciò è impossibile, perchè l'equazione (4) assumerebbe la forma

$$\{\theta(z) - \theta'(z)\} f(z)^\rho - \rho\theta(z) \cdot f(z)^{\rho-1} \cdot f'(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!},$$

ossia

$$\{\theta(z) - \theta'(z)\} f(z) - \rho \cdot \theta(z) \cdot f'(z) = \frac{h(z) f(z)^{m-\rho+1}}{m!};$$

ed il termine $\rho \cdot \theta(z) \cdot f'(z)$ dovrebbe esser divisibile per $f(z)$; ma $\theta(z)$ si è supposta non divisibile per $f(z)$, ed $f'(z)$ non può avere alcun fattore comune con $f(z)$, perchè l'equazione $f(z) = 0$ ha per ipotesi radici tutte diseguali. Dunque $\rho \cdot \theta(z) \cdot f'(z)$ non può esser divisibile per $f(z)$ e neppure $\varphi(z)$ sarà divisibile per $f(z)$.

Ora osserviamo che derivando $F(z)$ successivamente rispetto a z, la prima derivata non divisibile per $f(z)$ sarà la m^{esima}, la quale conterrà termini divisibili per $f(z)$ e l'unico termine $h(z) f'(z)^m$ non divisibile per $f(z)$. Questo termine è una funzione razionale intera in

$$z, \quad a_0, \quad a_1, \ldots, \quad a_{n+1}, \quad c_0, \quad c_1, \ldots, \quad c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea rispetto alle quantità c e di grado $(m+1)n$ in z. Analogamente in tutte le derivate successive di $F(z)$, fino alla μ^{esima}, i termini non divisibili per $f(z)$ saranno funzioni razionali intere in

$$z, \quad a_0, \quad a_1, \ldots, \quad a_{n+1}, \quad c_0, \quad c_1, \ldots, \quad c_n,$$

a coefficienti interi, lineari ed omogenee rispetto alle quantità c

e di grado non superiore ad $(m+1)n$ rispetto a z. Dunque, se nell'espressione di $\varphi(z)$, data dalla (3), raccogliamo in uno tutti i termini contenenti il fattore $f(z)$, potremo scrivere

$$\varphi(z) = K(z) \cdot f(z) + H(z), \tag{5}$$

ove $K(z)$ è un polinomio in z, ed $H(z)$ una funzione razionale intera di

$$z, \quad a_0, \quad a_1, \dots, \quad a_{n+1}, \quad c_0, \quad c_1, \dots, \quad c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea rispetto alle quantità c e di grado $(m+1)n$ in z; e non potrà $H(z)$ essere identicamente nulla, perchè $\varphi(z)$ non è divisibile per $f(z)$.

Moltiplichiamo ora $H(z)$ per a_0^{mn} e poi dividiamo per $f(z)$, proseguendo la divisione algebrica finchè è possibile; otterremo per quoziente un polinomio in z e per resto una funzione $g(z)$ razionale intera in

$$z, \quad a_0, \quad a_1, \dots, \quad a_{n+1}, \quad c_0, \quad c_1, \dots, \quad c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea nelle quantità c e di grado non superiore ad n rispetto a z; per modo che la relazione (5) si potrà scrivere nella forma seguente

$$a_0^{mn}\varphi(z) = G(z) \cdot f(z) + g(z), \tag{6}$$

essendo $G(z)$ un polinomio in z, mentre $g(z)$ ha le proprietà già dette e di più non può essere identicamente nulla, come non lo era $H(z)$.

Infine, poichè $g(z)$ è lineare ed omogenea rispetto alle quantità $c_0, c_1, \dots, c_n$, potremo rappresentarla come una somma di $n+1$ termini nel modo seguente

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z),$$

ove le $n+1$ funzioni $g_i(z)$ saranno funzioni razionali intere di z, a_0, $a_1, \dots, a_{n+1}$, a coefficienti interi e di grado non superiore ad n rispetto a z; ed avremo per la (6)

$$a_0^{mn}\varphi(z) = G(z) \cdot f(z) + \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z). \tag{7}$$

Ciò premesso, consideriamo l'integrale indefinito

$$\int e^{-z} F(z) dz;$$

applicando successivamente $\mu + 1$ volte l'integrazione per parti e ricordando che $F^{(\mu+1)}(z) = 0$, avremo

$$\int e^{-z} F(z) dz = -e^{-z}(F(z) + F'(z) + ... + F^{(\mu)}(z)),$$

e per la (3)

$$\int e^{-z} F(z) dz = -e^{-z}\varphi(z).$$

Moltiplicando ambo i membri di questa eguaglianza per a_0^{mn} e tenendo presente la (2) e la (7), abbiamo

$$\int \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} h(z) e^{-z} dz = -e^{-z} G(z) \cdot f(z) - e^{-z} \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z).$$

Siano ora z', z'' due radici dell'equazione $f(z) = 0$, che, per ipotesi, ha tutte radici diseguali. Integrando nell'ultima formola lungo un cammino qualunque, nel piano della variabile complessa z, fra i due punti di indici z', z'', e tenendo presente che

$$f(z') = f(z'') = 0.$$

avremo

$$e^{-z''} \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z'') - e^{-z'} \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} h(z) e^{-z} dz.$$

Ora ricordando che

$$h(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i,$$

la precedente relazione risulta lineare ed omogenea rispetto alle c_i e quindi, poichè queste sono arbitrarie, si scinderà nelle $n + 1$ equazioni seguenti

$$e^{-z''} g_i(z'') - e^{-z'} g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} z^i e^{-z} dz \tag{8}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, ...,\ n).$$

Il numero m fin'ora è rimasto indeterminato, e le funzioni $g_i(z)$, sebbene non lo abbiamo esplicitamente indicato, dipendono pure da esso.

Ora mostriamo che, crescendo m indefinitamente, il modulo degli integrali che compariscono nel secondo membro delle equazioni precedenti tende al limite zero. Ed infatti, lungo il cammino d'integrazione, la cui lunghezza indicheremo con l, sia M il massimo modulo di $z^i e^{-z}$ ed M' il massimo modulo di $a_0{}^n f(z)$. Il modulo dell'integrale rimarrà sempre minore di $\frac{M \cdot M'^m}{m!} \cdot l$; ma, col crescere indefinito di m, la quantità $\frac{M'^m}{m!}$ tende al limite zero, mentre M ed l rimangono costanti; dunque anche il modulo dell'integrale tenderà al limite zero, e lo stesso accadrà dei primi membri delle equazioni (8), quand'anche si moltiplichino per $e^{z'+z''}$.

Concludendo, possiamo dire che al crescere indefinito di m le espressioni

$$e^{z'} \cdot g_i(z'') - e^{z''} \cdot g_i(z') \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

tendono al limite zero.

Perciò si può supporre di aver scelto il numero m tanto grande che i moduli di tutte le espressioni precedenti siano minori di un numero positivo σ scelto piccolo a piacere.

Se ora indichiamo con $z_0, z_1, \ldots, z_n$ tutte le radici dell'equazione $f(z) = 0$, che per ipotesi son fra loro diseguali, e supponiamo che i coefficienti dell'equazione stessa sian tutti numeri interi, ne seguirà che anche le $n+1$ funzioni $g_i(z)$ risulteranno funzioni razionali intere di z a coefficienti interi; e, per ciò che precede, si potrà scegliere per m un valore così grande che i moduli delle espressioni

$$e^{z_k} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_k) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

risultino tutti inferiori ad un numero positivo σ, scelto piccolo a piacere.

Mostriamo ora che le $n+1$ funzioni $g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$, oltre alle proprietà già stabilite, godono anche della seguente: il determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_1(z_0) \ldots & g_n(z_0) \\ g_0(z_1) & g_1(z_1) \ldots & g_n(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_0(z_n) & g_1(z_n) \ldots & g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero.

Ed infatti, se fosse eguale a zero, sussisterebbero le $n+1$ relazioni

$$\sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z_k) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

per valori non tutti nulli delle quantità $c_0, c_1, \ldots, c_n$; quindi la funzione

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z),$$

il cui grado in z non supera n, dovrebbe annullarsi per $n+1$ valori di z e perciò dovrebbe essere identicamente nulla, mentre, per quanto abbiamo sopra dimostrato, ciò non può essere.

Riassumendo quanto abbiamo stabilito in questo paragrafo, si può enunciare il *Lemma di* WEIERSTRASS nel modo seguente:

Se f(z) *è una funzione razionale intera di* z *di grado* $n+1$, *a coefficienti interi ed a radici* $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ *tutte diseguali, si può costruire un sistema di* $n+1$ *funzioni*

$$g_0(z), \quad g_1(z), \ldots, \quad g_n(z),$$

razionali intere in z, *di grado non superiore ad* n *ed a coefficienti interi, tali che il determinante delle quantità* $g_i(z_k)$ *sia diverso da zero, ed ognuna delle differenze*

$$e^{z_k} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} g_i(z_k) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

abbia un modulo inferiore ad un numero positivo σ, *scelto piccolo a piacere.*

§ 5. **Dimostrazione del teorema generale di Lindemann.** — Appoggiandosi sul lemma del paragrafo precedente, il WEIERSTRASS ha dato la dimostrazione del teorema generale di LINDEMANN, che ora esporremo, attenendoci alla Memoria originale già citata.

Principieremo dallo stabilire il seguente teorema, dal quale poi, per via di successiva estensione, arriveremo facilmente a stabilire il teorema generale di LINDEMANN.

A) *Se* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *sono le* r *radici di un' equazione algebrica*

(1) $$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = 0,$$

di grado r *a coefficienti razionali ed a radici tutte diseguali, e se* $N_1, N_2, \ldots, N_r$ *sono* r *numeri interi, dei quali uno almeno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ *è diversa da zero.*

Supponiamo ordinati i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_r$ in modo che la parte reale di uno qualunque di essi non superi la parte reale dei precedenti; in tal modo potrà darsi che nella serie dei numeri $x_1, x_2, \ldots, x_r$ si presenti un gruppo di numeri successivi aventi parti reali uguali; supporremo allora ordinati i numeri del gruppo stesso in modo che i coefficienti della parte immaginaria vadano decrescendo.

Con queste ipotesi, le differenze $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3, \ldots$, $x_{r-1} - x_r$, che si ottengono togliendo da uno qualunque dei numeri stessi uno qualunque dei successivi, avranno per parte reale un numero positivo, oppure avranno la parte reale nulla e positivo il coefficiente della parte immaginaria.

Ne segue che se $a, b, \ldots, l$ sono dei numeri comunque scelti fra gli r numeri $1, 2, \ldots, r$ e se $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sono altrettanti numeri scelti pure fra $1, 2, \ldots, r$, ma tali che sia

$$a \geq \alpha, \quad b \geq \beta, \ldots, \quad l \geq \lambda,$$

la quantità

$$\begin{aligned}(x_a + x_b + \ldots + x_l) - (x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda) &= \\ = (x_a - x_\alpha) + (x_b - x_\beta) + \ldots + (x_l - x_\lambda)&\end{aligned}$$

non potrà esser nulla; cioè $x_a + x_b + \ldots + x_l$ non potrà essere uguale ad $x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda$.

Ciò premesso, indichiamo con X' la somma

$$\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$$

e con $X'', X''', \ldots, X^{(k)}$ tutte le altre somme che resultano da quella permutando i numeri $N_1, N_2, \ldots, N_r$ in tutti i modi possibili.

Sarà $k = r!$, ed una qualunque $X^{(s)}$ potrà scriversi nel modo seguente

$$X^{(s)} = \sum_{i=1}^{r} N_i^{(s)} e^{x_i} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

ove $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}, \ldots, N_r^{(s)}$ rappresenta una delle k permutazioni degli r numeri $N_1, N_2, \ldots, N_r$.

Costruiamo ora il prodotto

$$P = X' \cdot X'' \dots X^{(k)};$$

se dimostriamo ch'esso è diverso da zero, anche la somma $X' = \sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, dovrà esser diversa da zero e così resulterà dimostrato il teorema *A*).

Possiamo scrivere

$$P = \sum_{a=1}^{r} N_a' e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{x_b} \dots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{x_l},$$

ossia, più brevemente,

$$(2) \qquad P = \sum_{a,\, b, \dots l} N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \dots + x_l}$$
$$(a,\ b, \dots,\ l = 1,\ 2, \dots,\ r).$$

Fra tutti i valori che può assumere la somma

$$x_a + x_b + \dots + x_l,$$

per tutti i possibili sistemi di valori degli indici, i valori diversi fra loro siano in numero di $n+1$ e indichiamoli con $z_0,\ z_1, \dots,\ z_n$; potremo allora scrivere più semplicemente

$$(3) \qquad P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu},$$

ove, per ogni valore di μ, è

$$(4) \qquad C_\mu = \sum_{a,b,\dots l} N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)},$$

essendo la somma estesa a tutti quei sistemi di valori di $a,\ b, \dots,\ l$, per cui $x_a + x_b + \dots + x_l = z_\mu$.

Ora è facile vedere che delle $n+1$ quantità C_μ una almeno è diversa da zero; ed infatti, siccome nel gruppo degli r numeri $N_1,\ N_2, \dots,\ N_r$ uno almeno è diverso da zero, in ognuna delle k permutazioni

$$\begin{matrix} N_1', & N_2', \dots, & N_r' \\ \dots & \dots & \dots \\ N_1^{(k)}, & N_2^{(k)}, \dots, & N_r^{(k)} \end{matrix}$$

del gruppo stesso vi sarà un primo numero diverso da zero:

sia questo N_α' per la prima permutazione, N_β' per la seconda,...., $N_\lambda^{(k)}$ per la k^{esima}; secondo la formola (2), sarà

$$N_\alpha' N_\beta'' \dots N_\lambda^{(k)} e^{x_\alpha + x_\beta + \dots + x_\lambda}$$

uno dei termini che compongono P.

Se

$$N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \dots + x_l}$$

è un altro termine qualunque di P, il cui coefficiente sia diverso da zero, sarà

$$a \geq \alpha, \quad b \geq \beta, \dots, \quad l \geq \lambda;$$

quindi, per il modo con cui fin da principio abbiamo supposto ordinati i numeri $x_1, x_2, \dots x_r$, non potrà essere $x_a + x_b + \dots + x_l$ eguale ad $x_\alpha + x_\beta + \dots + x_\lambda$. Il coefficiente $N_\alpha' N_\beta'' \dots N_\lambda^{(k)}$ sarà dunque una delle quantità C_μ, fra le quali se ne trova dunque almeno una diversa da zero.

Ciò premesso, si può costruire una funzione $f(z)$, razionale intera in z, di grado $n+1$ a coefficienti interi, che abbia per radici le $n+1$ quantità $z_0, z_1, \dots, z_n$.

Infatti, si consideri il prodotto di tutte le quantità

$$z - (x_a + x_a + \dots + x_l) \quad (a, b, \dots, l = 1, 2, \dots, r);$$

esso sarà una funzione razionale intera di z, i cui coefficienti saranno funzioni simmetriche intere a coefficienti interi delle r radici $x_1, x_2, \dots, x_r$ dell'equazione (1); perciò saranno espressi razionalmente per i coefficienti di questa e quindi saranno numeri razionali. Il prodotto considerato resulterà dunque una funzione intera di z a coefficienti razionali; essa poi si annulla solo per $z = z_0, z_1, \dots, z_n$, quindi, dividendo questa funzione per il massimo comun divisore ch'essa ha colla sua derivata prima, il quoziente resulterà una funzione intera in z di grado $n+1$, che, moltiplicata per un conveniente numero intero, darà una funzione

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_{n+1}$$

razionale intera di grado $n+1$ in z, a coefficienti interi, e che si annulla solo per $z = z_0, z_1, \dots, z_n$.

È adesso il momento di applicare il lemma stabilito nel paragrafo precedente. Partendo dall'equazione

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_{n+1} = 0,$$

colle radici diseguali $z_0, z_1, \dots, z_n$, si potrà costruire un sistema di $n+1$ funzioni $g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)$ razionali intere in z di grado non superiore ad n ed a coefficienti interi, tali che il determinante delle quantità $g_i(z_\mu)$ sia diverso da zero ed ognuna delle differenze

$$e^{z_\mu} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_\mu) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

abbia un modulo inferiore ad un numero positivo σ scelto piccolo a piacere, ossia si abbia

$$(5) \qquad e^{z_\mu} g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_\mu) = \varepsilon_{i\mu}\sigma \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \dots, n \end{pmatrix},$$

ove tutte le quantità $\varepsilon_{i\mu}$ hanno un modulo minore dell'unità.

Ciò posto, moltiplichiamo ambedue i membri della formola (3) per $e^{-z_0} \cdot g_i(z_0)$; avremo le $n+1$ equazioni

$$e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu - z_0} \cdot g_i(z_0)$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots, n);$$

ma dalle relazioni (5) si ricava

$$e^{z_\mu - z_0} \cdot g_i(z_0) = g_i(z_\mu) + e^{-z_0} \cdot \varepsilon_{i\mu} \cdot \sigma$$
$$(i, \mu = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Sostituendo nelle precedenti, si ottiene

$$(6) \qquad e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) + e^{-z_0} \cdot \sigma \cdot \sum_{\mu=0}^{n} \varepsilon_{i\mu} C_\mu$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Dimostriamo ora che le $n+1$ somme

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

sono numeri razionali, dei quali almeno uno diverso da zero.

Basterà perciò dimostrare che le dette somme sono funzioni simmetriche intere delle radici $x_1, x_2, \dots, x_r$ dell'equazione (1); ed infatti se indichiamo con $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ delle variabili fra loro indipendenti, il prodotto

$$\sum_{a=1}^{r} N_a' e^{\xi_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{\xi_b} \dots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{\xi_l}$$

e quindi anche la somma

$$\sum_{a,b,\dots l} N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)} e^{\xi_a + \xi_b + \dots + \xi_l}$$

sarà una funzione simmetrica di $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$; lo stesso dunque sarà anche della somma:

$$\sum_{a,b,\dots l} N'_a N''_b \dots N_l^{(k)} (\xi_a + \xi_b + \dots + \xi_l)^m$$
$$(a, b, \dots, l = 1, 2, \dots, r)$$

ove m è un numero intero qualunque. Ponendo allora $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_r = x_r$, avremo che tutte le quantità $\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu z_\mu^m$ saranno numeri razionali, e perciò anche tutte le espressioni

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu \cdot g_i(z_\mu) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

saranno numeri razionali. Inoltre almeno una di esse sarà diversa da zero; ed infatti, se fosse

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

poichè tutte le C_μ non sono zero, dovrebbe essere nullo il determinante delle quantità $g_i(z_\mu)$, ciò che non è, per il modo con cui si son costruite le funzioni $g_i(z)$. Potremo infine moltiplicare tutti i numeri razionali

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

per un conveniente intero M, in modo che essi si mutino in $n+1$ numeri interi

$$Q_0, \quad Q_1, \dots, \quad Q_n,$$

dei quali almeno uno diverso da zero. Per il lemma del paragrafo precedente potremo inoltre supporre scelta la quantità σ tanto piccola che ognuna delle quantità

$$M \cdot e^{-z_0} \cdot \sigma \cdot \sum_{\mu=0}^{n} \varepsilon_{i\mu} C_\mu \qquad (i = 0, 1, ..., n)$$

risulti uguale ad una quantità η_i di modulo minore dell'unità. Le relazioni (6) assumeranno allora la forma seguente:

$$M \cdot e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = Q_i + \eta_i \quad (i = 0, 1, 2, ..., n);$$

e poichè dei numeri interi Q_i, uno almeno è diverso da zero, mentre tutte le quantità η_i hanno un modulo minore dell'unità, una almeno delle quantità

$$Me^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

sarà diversa da zero. Dunque il prodotto P e perciò anche la somma $\sum_{i=1}^{n} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, sarà diversa da zero; e così il teorema A) resta dimostrato.

Da questo teorema ne dedurremo ora altri più generali, fino ad arrivare al teorema di LINDEMANN.

B) *Se* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_r$ *sono le* r *radici (fra loro diseguali) di un' equazione algebrica*

$$x^r + c_1 x^{r-1} + ... + c_r = 0$$

di grado r *a coefficienti razionali, e se* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, ..., \mathrm{N}_r$ *sono* r *numeri razionali, dei quali uno almeno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{N}_i e^{\mathrm{x}_i}$ *è diversa da zero.*

Ed infatti, basta moltiplicare $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ per un conveniente numero intero, per ricondurci nelle condizioni del teorema A).

Dal teorema B), facendo

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, ..., \quad x_r = r - 1,$$

segue in particolare il teorema di HERMITE, cioè: *Il numero* e *non può esser radice di alcuna equazione algebrica*

$$N_r e^{r-1} + N_{r-1} e^{r-2} + ... + N_1 = 0$$

a coefficienti razionali.

Passiamo ora a dimostrare il teorema:

C) *Se* x_1, x_2,...., x_r *sono* r *numeri algebrici tra loro indipendenti, cioè non radici di una stessa equazione algebrica di grado* r *a coefficienti razionali, e diversi l'uno dall'altro; e se* N_1, N_2,...., N_r *sono* r *numeri razionali, dei quali almeno uno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{n} N_i e^{x_i}$ *è diversa da zero.*

Ed infatti, potremo supporre che $x_1, x_2, ..., x_r$ siano radici di una stessa equazione algebrica di grado $s > r$ a radici diseguali ed a coefficienti razionali; questa, oltre le radici $x_1, x_2, ..., x_r$, ammetterà le altre $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_s$. Allora, se $N_1, N_2, ..., N_r$, $N_{r+1}, ..., N_s$ sono s numeri razionali, tali che uno almeno dei primi r sia diverso da zero e che $N_{r+1} = N_{r+2} = ... = N_s = 0$, avremo, per il teorema B), che la somma $\sum_{i=1}^{s} N_i e^{x_i}$ di s termini dovrà essere diversa da zero; ma, poichè i suoi ultimi $s - r$ termini sono nulli, anche la somma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ di r termini dovrà essere diversa da zero; e così resta dimostrato il teorema C).

Ed ora resta facile la dimostrazione del teorema generale di Lindemann, che contrassegneremo colla lettera D).

D) *Se* x_1, x_2, x_3,...., x_r *sono* r *numeri algebrici qualunque diversi fra loro ed* N_1, N_2,...., N_r *sono* r *numeri algebrici, dei quali almeno uno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ *è sempre diversa da zero.*

Ed infatti, $N_1, N_2, ..., N_r$ si potranno considerare come radici di un'equazione algebrica di grado $s \geq r$ a coefficienti razionali. Siano $N_1, N_2, ..., N_r, N_{r+1}, ..., N_s$ tutte le radici di questa equazione, delle quali potremo supporre che non ve ne siano più di $r - 1$ eguali a zero; riguardandoli come disuguali, formiamo tutte le disposizioni degli s elementi $N_1, N_2, ..., N_s$ presi r ad r; esse saranno in numero di

$$k = s(s-1)(s-2)....(s-r+1),$$

e potranno indicarsi nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} N_1', \; N_2', \; ...., \; N_r', \\ N_1'', \; N_2'', \; ...., \; N_r'', \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ N_1^{(k)}, \; N_2^{(k)}, ..., \; N_r^{(k)}. \end{array}$$

Per ipotesi in ciascuna di queste disposizioni vi sarà almeno un numero diverso da zero. Formiamo ora tutte le somme

$$\sum_{i=1}^{r} N_i^{(\mu)} e^{x_i} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k);$$

una di queste sarà la somma

$$\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$$

che vogliamo dimostrare diversa da zero. Facciamo poi il prodotto

$$P = \sum_{a=1}^{r} N_a' e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{x_b} \ldots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{x_l};$$

esso si potrà scrivere, più brevemente, così:

$$P = \sum_{a,b,\ldots,l} N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \ldots + x_l}$$
$$a, b, \ldots, l = 1, 2, \ldots, r).$$

Ora, indicando con $z_0, z_1, \ldots, z_n$, i valori diversi che assume la somma $x_a + x_b + \ldots + x_l$ per tutti i sistemi di valori che si possono attribuire ad $a, b, \ldots, l$, potremo scrivere

$$P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu},$$

avendo posto

$$C_\mu = \sum_{a,b,\ldots,l}' N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)},$$

ove la somma deve intendersi estesa a tutti quei sistemi di valori di $a, b, \ldots, l$, per cui $x_a + x_b + \ldots + x_l = z_\mu$.

Le quantità C_μ sono evidentemente simmetriche intere nelle quantità $N_1, N_2, \ldots, N_s$ ed a coefficienti interi, quindi saranno tutti numeri razionali. Di più una almeno delle C_μ sarà diversa da zero, ciò che può dedursi ragionando come nella dimostrazione del teorema A).

Ora, essendo $z_0, z_1, \ldots, z_n$ numeri algebrici fra loro diversi e $C_0, C_1, \ldots, C_n$ numeri razionali, di cui uno almeno diverso da zero, per il teorema C) la somma $\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu e^{z_\mu}$ non potrà esser nulla. Dunque P e quindi anche la somma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, non potrà essere uguale a zero. E così il teorema generale di LINDEMANN resta dimostrato.

§ 6. **Trascendenza dei numeri *e* e π. Impossibilità di rettificare con riga e compasso una circonferenza di dato raggio o un arco di cerchio di cui è data la corda.** — Dal teorema generale D), dimostrato nel paragrafo precedente, si possono dedurre molti importanti teoremi, dei quali ora andiamo a rilevare i più notevoli, ed in special modo la trascendenza dei numeri e e π.

1°. Si ponga

$$r=2;\quad N_1=1,\ N_2=-X;\quad x_1=x,\ x_2=0$$

nell'espressione $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$; essa diverrà $e^x - X$ e non potrà mai esser nulla se x è un numero algebrico diverso da zero ed X un numero algebrico qualunque; dunque:

L'esponenziale e^x *è un numero trascendente tutte le volte che* x *è un numero algebrico diverso da zero.*

Come caso particolare, facendo $x=1$, si ha che *il numero* e *è un numero trascendente.*

Il logaritmo naturale di un numero algebrico X *diverso da* 1 *è sempre un numero trascendente.*

In particolare, poichè sussiste l'identità $e^{\pi i}=-1$, *il numero* πi *e quindi anche* π *sarà un numero trascendente.*

Segue da questo teorema (cfr. § 1) che partendo da un segmento, scelto come unità di misura, non si può, con una costruzione in cui intervengano solo curve algebriche, costruire un segmento che abbia per misura π. E poichè la rettificazione e quadratura di un cerchio si riduce alla costruzione di un segmento eguale a π, partendo dal diametro preso come segmento unità (cfr. § 1), così:

Non si può effettuare la rettificazione e la quadratura di un cerchio, di cui è dato il diametro, mediante costruzioni geometriche in cui intervengano solo curve algebriche.

Ne segue *a fortiori* che *non si può effettuare la rettificazione e la quadratura di un cerchio, di cui è dato il diametro, mediante costruzioni geometriche in cui non vengano impiegati altri strumenti che riga e compasso.*

2°. Si faccia nell'espressione $\sum_{s=1}^{r} N_s e^{x_s}$

$$r=3;\quad N_1=\frac{1}{i},\ N_2=-\frac{1}{i},\ N_3=-X;$$

$$x_1=-x_2=\frac{ix}{2},\ x_3=0;$$

ne segue che l'espressione

$$\frac{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}{i}-X=2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}-X$$

non potrà esser nulla, finchè x ed X sono ambedue numeri algebrici diversi da zero; ma, se scegliamo come unità di misura il raggio del cerchio, $2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$ rappresenta la corda sottesa dall'arco di lunghezza x, dunque:

Un arco di cerchio, la cui corda, rispetto al raggio come unità lineare, abbia per misura un numero algebrico, è espresso da un numero trascendente; e lo stesso sarà del settore circolare corrispondente al detto arco.

Da questo teorema potremo concludere (cfr. § 1), che:

Se la corda di un arco di cerchio di raggio unità è espressa da un numero algebrico, non si potrà rettificare l'arco, nè quadrare il settore circolare corrispondente, mediante costruzioni geometriche in cui intervengano solo curve algebriche.

A maggior ragione (cfr. § 1) potremo concludere che:

Non si può rettificare un arco di cerchio nè quadrare il settore circolare corrispondente, mediante costruzioni geometriche di sole rette e circoli, quando la corda sottesa dall'arco è espressa pel raggio mediante operazioni razionali e radici quadrate e quindi è essa stessa elementarmente costruibile.

3°. *Inversamente, per ogni arco circolare che sta al raggio in un rapporto* x *esprimibile algebricamente, eccettuato* $\mathrm{x}=0$, *sarà* $\mathrm{X}=\mathrm{sen}\,\mathrm{x}$ *un numero trascendente.*

Ciò segue dal teorema di Lindemann essendo $2iX=e^{ix}-e^{-ix}$.

Lo stesso si può dire per tutte le altre linee trigonometriche $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, ecc.

§ 7. **Risoluzione grafica del problema di rettificazione e quadratura del cerchio mediante l'integrafo.** — La questione, intorno alla quale si affaticarono i matematici per tanto tempo, se si possa rettificare o quadrare un cerchio di dato raggio con costruzioni di sole rette e circoli, ossia mediante il solo uso della riga e del compasso, rimane dunque, per i risultati esposti nel paragrafo precedente, risoluta negativamente ed in un senso anche molto più ampio di quello in cui è stata posta.

Nella impossibilità di rettificare il cerchio mediante il solo impiego di rette e circoli, si può cercare di ottenere la rettificazione stessa mediante curve di natura più complicata; appunto come, per risolvere i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, non bastando rette e circoli, si ricorre alle sezioni coniche od a curve algebriche superiori.

Per costruire π, a partire dal segmento scelto come unità di misura, basterebbe, per esempio, poter tracciare una curva, che, riferita ad un determinato sistema di assi cartesiani ortogonali, avesse un punto di cui una delle coordinate fosse esprimibile per π mediante operazioni razionali e radici quadrate, e l'altra coordinata fosse costruibile elementarmente, ossia rappresentata da un'espressione contenente solo numeri razionali ed irrazionalità quadratiche (cfr. § 1).

A causa della trascendenza del numero π, la prima coordinata del punto stesso risulterebbe pure trascendente; ne segue che una curva dotata di questa proprietà non potrebbe essere che una curva trascendente.

Una curva che potrebbe essere impiegata per il nostro scopo è la sinusoide

$$y = \operatorname{arc\,sen} x\,;$$

ed infatti i punti d'intersezione di questa curva coll'asse y ci darebbero, colle loro ordinate, π e tutti i suoi multipli. Si potrebbero moltiplicare gli esempi di curve trascendenti che, una volta descritte con un tratto continuo, fornirebbero la soluzione grafica del problema di rettificazione del cerchio.

Mostriamo ora come alcune di esse si possano effettivamente disegnare in modo continuo mediante degli strumenti detti *integrafi*.

Chiamando *curva differenziale* una curva qualunque

$$y = f(x),$$

si dice *curva integrale* la curva che ha per equazione

$$Y = F(x),$$

essendo

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Data la curva differenziale, la curva integrale resta dunque definita a meno di una traslazione parallelamente all'asse y. Così, per es., la sinusoide

$$y = \text{arc sen } x$$

è la curva integrale della curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

che è algebrica del quart' ordine. Analogamente, se partiamo dal cerchio di raggio 1, col centro nell'origine delle coordinate,

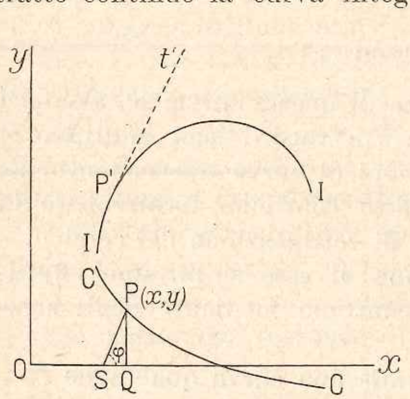
$$x^2 + y^2 = 1,$$

come curva differenziale, la sua curva integrale sarà

$$y = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \text{arc sen } x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2}\,;$$

e le ordinate dei punti d'intersezione di questa curva coll'asse y ci daranno π ed i suoi multipli.

Uno strumento, che ci permetta di descrivere con un tratto continuo la curva integrale, una volta che sia disegnata la curva differenziale, potrà dunque essere impiegato per la costruzione grafica di π.



Un tale strumento, detto *integrafo*, è stato effettivamente inventato or sono pochi anni dal russo Abdank-Abakanowicz e poi perfezionato dal Coradi di Zurigo. Accenneremo qui brevemente al principio fondamentale su cui è basato e descriveremo le parti essenziali di cui l'apparecchio si compone, rimandando per la descrizione particolareggiata dell'apparecchio e delle sue svariate applicazioni all'opera dello stesso inventore tradotta in tedesco dal BITTERLI col titolo *Die Integraphen*, Lipsia 1889 ([1]).

Immaginiamo tracciati i due assi ortogonali Ox, Oy e la curva C di equazione

$$y = f(x).$$

Considerando un punto qualunque P, di coordinate x, y, appartenente alla curva C, formiamo il triangolo che ha per vertici: il punto P, il piede Q dell'ordinata abbassata da P, ed il punto S, dell'asse Ox, distante da Q di un segmento eguale all'unità di misura. La tangente dell'angolo φ che l'ipotenusa del triangolo forma coll'asse delle ascisse sarà data da

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PQ}{QS} = y.$$

D'altra parte, essendo

$$Y = \int f(x) dx$$

l'equazione della curva integrale I, avremo che la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente t' alla curva stessa nel punto P' corrispondente a P (cioè avente la medesima ascissa x) forma coll'asse delle ascisse, sarà data da

$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y.$$

Ne segue che *per ogni punto della curva differenziale l'ipotenusa del triangolo considerato è costantemente parallela alla tangente della curva integrale cercata nel punto corrispondente.*

È questa osservazione che ha guidato ABDANK-ABAKANOWICZ nella costruzione dell'integrafo, che ora descriveremo, tenendo conto delle modificazioni portatevi dal costruttore CORADI.

Nelle due figure (fig. 1 e 2), qui tracciate, sono rappresentate schematicamente le sezioni orizzontale e verticale dell'apparecchio.

([1]) Se ne può vedere una descrizione sommaria anche nel *Repertorio di Matematiche Superiori* di E. PASCAL. Milano, 1898, vol. I, p. 634 e segg.

Tre guide orizzontali e parallele fra loro L, L_1, L_2, son collegate da due sbarre trasverse T, T' in modo da formare un telaio solido rettangolare; questo riposa su quattro ruote R per le quali può assumere sul foglio del disegno un moto rettilineo in direzione parallela all'asse delle ascisse. Le guide L ed L_1 portano nella loro superficie superiore una scanalatura, lungo la quale possono scorrere le due rotelle r, r_1, che rendono mobile il carrello A lungo la guida L, e le due rotelle r_2, r_3, che rendono mobile il carrello B lungo la guida L_1. A mantenere i due carrelli perfettamente orizzontali servono la ruota r_4, fissata nel carrello A e mobile lungo una scanalatura della guida L_2, e la ruota r_5, fissata nel carrello B e mobile lungo la scanalatura di una guida L_3 sottoposta ad L_1 e parallela ad L_1 (invisibile nella fig. 1).

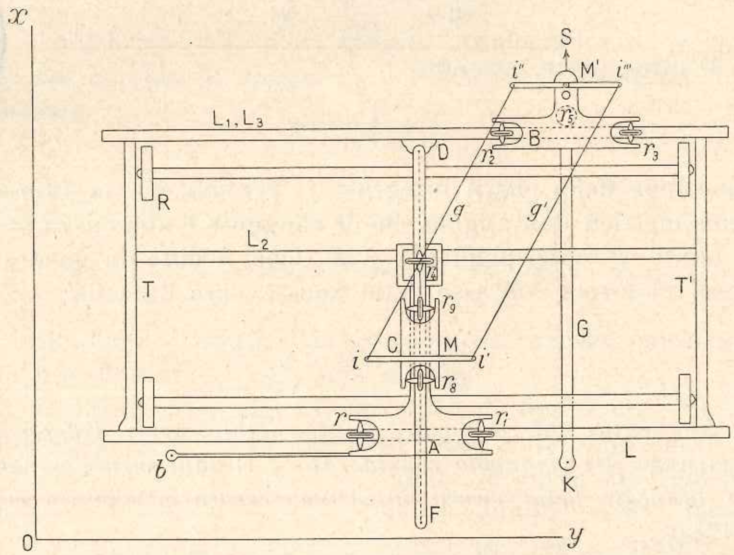


Fig. 1.

Nel carrello A è fissato un asse verticale a (invisibile nella fig. 1), intorno al quale è libero di girare un carrello portante due piccole rotelle r_6, r_7. Il braccio F, orizzontale e girevole intorno ad un asse verticale fissato in D, porta nella sua superficie inferiore una scanalatura nella quale sono impegnate e possono scorrere le due rotelle r_6, r_7. Con questa disposizione, se immaginiamo tracciate nel foglio del disegno due assi rettangolari, ox perpendicolare ed oy parallelo alla guida L, ad una punta b invariabilmente collegata al carrello A potrà esser impresso un movimento nel senso ox e un movimento nel senso oy; e perciò essa potrà descrivere

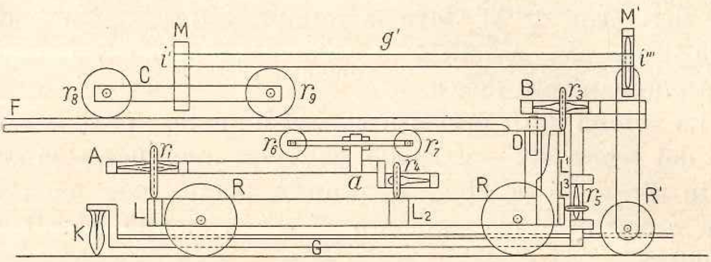


Fig. 2.

una linea qualunque $y = f(x)$. Il punto in cui l'asse a incontrerebbe il piano xy, essendo legato invariabilmente al punto b e partecipando dello stesso movimento, descriverà l'identica curva, ed il segmento, che lo congiunge colla proiezione ortogonale del punto D sul piano xy, manterrà sempre durante il movimento una proiezione costante sull'asse delle ascisse; è questa proiezione, variabile nello strumento che stiamo descrivendo fra 10 cm. e 20 cm., che rappresenta l'unità lineare dell'apparecchio ed è la base di quel triangolo rettangolo di cui sopra abbiamo parlato; per modo che la direzione variabile dell'ipotenusa del detto triangolo sarà in ogni istante rappresentata dal braccio F girevole intorno a D.

Le parti dell'apparecchio che andremo ora a descrivere hanno l'ufficio di guidare sul foglio del disegno una punta K scrivente, in modo che la direzione del suo movimento sia in ogni istante parallela alla direzione variabile del braccio F, per modo che K venga a descrivere la curva integrale della curva $y = f(x)$. Il braccio F porta anche nella sua superficie superiore una scanalatura; in questa possono scorrere le rotelle r_8, r_9 di un carrello orizzontale C, sul quale è fissata una sbarra orizzontale M perpendicolare al piano delle due rotelle cioè perpendicolare al braccio F.

Alle due estremità della sbarra M son fissati due assi i, i' verticali.

Nel carrello B si trova un asse verticale cilindrico o, intorno al quale è girevole un telaio M'; su questo telaio sono fissati superiormente i due assi verticali i'', i''' tali che il segmento che li congiunge è eguale al segmento che congiunge gli assi i, i' fissati nella sbarra M; gli assi i, i' son legati agli assi i'', i''' mediante due asticelle gg' eguali fra loro in modo da formare un parallelogramma articolato. Nella parte inferiore del telaio M' si trova la rotella R' disposta in modo da avere il suo asse parallelo al segmento i'' i''' ed il suo centro sul prolungamento dell'asse o.

La rotella R' è premuta contro il foglio del disegno dal peso del telaio M', per modo che essa non possa muoversi che in direzione parallela al proprio piano, cioè nella direzione s normale al segmento i'' i''' e perciò parallela al braccio F.

Per tale disposizione, mentre il carrello A scorre lungo la guida L, il braccio F ruoterà intorno a D in modo da obbligare il carrello C a scorrere lungo il braccio stesso; e, poichè l'asta i i' riman sempre perpendicolare al braccio F, mediante il parallelogramma snodato anche il segmento i'' i''' e quindi anche la rotella R parteciperà dello stesso movimento angolare del braccio F. Al telaio M è fissato un braccio G che, passando al disotto dell'apparecchio, termina con un tiralinee o punta scrivente K; mentre la punta b disegna la curva differenziale, la punta K disegnerà la curva integrale. I punti corrispondenti delle due curve stanno sulla medesima ordinata.

Per la determinazione di π si può ricorrere anche ai *planimetri*, cioè a quegli strumenti che servono per la misura delle aree delle curve piane, che dànno cioè il valore dell'integrale *definito* di una funzione tracciata graficamente. Con un tale strumento si può infatti determinare l'area di un cerchio di dato raggio e se ne ricava quindi il valore di π.

Citiamo fra i planimetri, come il meglio conosciuto, il cosidetto *planimetro polare* di AMSLER-LAFFON.

§ 8. **Costruzioni geometriche per rettificare e quadrare il cerchio in modo approssimato.** — Quando si voglia far uso soltanto della riga e del compasso senza ricorrere a strumenti trascendenti, quali sarebbero, per es., gli integrafi, la risoluzione del problema, del quale ci occupiamo, non si potrà ottenere in modo esatto; sono state proposte, per altro, e sono in uso nella pratica, delle costruzioni, mediante le quali, con sole rette e circoli si può effettuare la rettificazione e quadratura del cerchio in via approssimativa, cioè commettendo un errore per gli usi comuni trascurabile.

Ecco una costruzione ideata dallo SPECHT ([1]), mediante la quale si può rettificare il cerchio con grande approssimazione.

Sopra una tangente al cerchio di raggio r (fig. 3) si stacchi, a partire dal punto di contatto A, il segmento AB uguale al

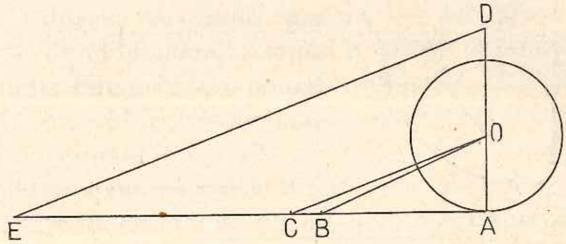


Fig. 3.

diametro più un quinto del raggio, e di seguito si porti il segmento BC eguale ai due quinti del raggio; si unisca O con B e con C; sul diametro che passa per A si stacchi AD eguale ad OB e per D si conduca ad OC la parallela che incontri la tangente in E. Il segmento AE sarà con grande approssimazione eguale alla circonferenza.

Ed infatti si ha

$$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AO}=\frac{13}{5},$$

da cui

$$AE=\frac{13}{5}\cdot OB=r\cdot\frac{13}{5}\sqrt{1+\left(\frac{11}{5}\right)^2}=r\cdot\frac{13}{25}\sqrt{146}.$$

Eseguendo le operazioni, si trova

$$AE=r\cdot 6,2831839....;$$

e poichè si ha

$$2\pi=6,2831853....,$$

risulta che AE differisce per difetto dalla circonferenza per meno di due milionesimi del raggio.

Il rettangolo che ha per lati AE e la metà del raggio r, o il quadrato equivalente, darà con grande approssimazione la quadratura del cerchio.

([1]) *Giornale di Crelle*, vol. 3, pag. 83.

Quando si abbia in mira soltanto la quadratura del cerchio, si può far uso di quest'altra costruzione [1].

Sul diametro AB del cerchio dato (fig. 4) si porti il segmento OD eguale a tre quinti del raggio e dalla parte opposta il segmento OF eguale a tre volte la metà del raggio; si divida poi il raggio OB per metà nel punto E e sopra DE, AF, come diametri, si descrivano da bande opposte del diametro due semicerchi.

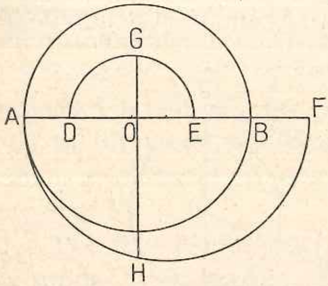


Fig. 4.

Per O si conduca al diametro AB la perpendicolare che incontri le due semicirconferenze in G, H; dico che il quadrato avente per lato GH equivale con grande approssimazione al cerchio dato.

Ed infatti si ha per costruzione

$$OD = r \cdot \frac{3}{5}, \quad OE = r \cdot \frac{1}{2},$$

$$OA = r, \qquad OF = r \cdot \frac{3}{2}.$$

Ma OG è medio proporzionale fra OD, OE ed OH è medio proporzionale fra OA, OF; quindi

$$OG = r \cdot \sqrt{\frac{3}{10}}, \quad OH = r \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

e perciò

$$GH = r \cdot \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} = r \cdot 1{,}77246....;$$

e poichè si ha

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245....,$$

GH differisce per eccesso dal lato del quadrato equivalente al cerchio dato, per meno di due centomillesimi del raggio.

(1) Vedi *Geometria elementare* di SANNIA e D'OVIDIO, ove son riportate anche altre costruzioni per la rettificazione e quadratura approssimata del cerchio.

§ 9. **Lunule quadrabili.** — L'insuccesso dei tentativi per quadrare l'intero cerchio coll'uso esclusivo della riga e del compasso, prima che avesse avuto la sua naturale spiegazione nella dimostrazione del carattere trascendente del numero π, doveva apparire tanto più notevole, in quanto che molte superfici piane limitate da archi circolari erano state oggetto, fin dall'antichità, di fruttuosi studii: alcune di esse, gli arbeli, ricche di curiose ed eleganti proprietà stabilite col semplice soccorso delle teorie geometriche più elementari (1); altre, le lunule d'Ippocrate, trovate suscettibili di esser quadrate in modo semplicissimo mediante riga e compasso.

È noto il teorema che la somma dei due menischi (o lunule) determinati dalle tre semicirconferenze aventi per diametri i lati di un triangolo rettangolo e situate con esso da una stessa banda dell'ipotenusa, è equivalente al triangolo.

In particolare, se il triangolo rettangolo è isoscele, ciascuno dei due menischi è equivalente al triangolo rettangolo isoscele metà del precedente, ed è quindi quadrabile elementarmente, quando sia nota la sua corda.

Questa lunula, considerata da Ippocrate, rappresenta una prima soluzione del problema: *se si possano costruire colla riga e compasso lunule quadrabili elementarmente.* Altre quattro soluzioni furono indicate nel 1840 da Th. Clausen (2), il quale, ritenendole tutte nuove, esprimeva nello stesso tempo l'opinione che non esistessero, oltre i cinque noti, altri casi di lunule quadrabili.

(1) Molte di queste proprietà, di cui rileviamo quelle relative alla serie di circoli, inscritti in un arbelo e tangenti ciascuno al successivo, si trovano esposte e dimostrate in Pappi Alexandrini *Collectiones* (ed. da Fr. Hultsch. Vol. I, pag. 219 e segg. Prop. 15, 16, 17, 18).

Steiner (in Crelles Journal. Bd. I., zweites Heft, S. 260) ha dato nuove, più semplici ed eleganti dimostrazioni dei medesimi teoremi, e di alcuni di essi anche notevoli estensioni.

Si può consultare su questo argomento anche — I. S. Mackay, *The Shoemaker's Knife* — (nei *Proceedings of the Edimburg math. soc.* — Vol. III, pag. 2-11, 1885), nel quale scritto son riunite e dimostrate in modo uniforme le principali e più semplici proprietà degli arbeli.

(2) *Vier neue mondformige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist.* Giorn. di Crelle, 1840, Bd. 21, pag. 375.

Recentemente E. LANDAU ([1]), ritornando sulla questione, ha posto in modo più generale l'equazioni e le condizioni aritmetiche del problema, e ha dimostrato che esse sono incompatibili fra loro in una certa serie infinita di casi, la quale, peraltro, è ben lungi dal comprendere tutti i casi possibili; cosicchè nulla ci autorizza finora a ritenere che le sole soluzioni del problema siano le cinque sopra indicate.

Siano AEB, $AE'B$ (fig. 5) due archi circolari aventi in comune la corda AB e situati dalla stessa banda della corda; siano C, C' i loro rispettivi centri ed r, r' i raggi; indichiamo poi con 2φ, $2\varphi'$ gli angoli al centro dei due settori $CAEB$, $C'AE'B$.

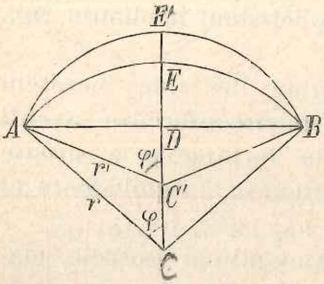


Fig. 5.

Presa come unità la corda AB, è intanto evidente la relazione

$$(1) \qquad r \operatorname{sen} \varphi = r' \operatorname{sen} \varphi' = \frac{1}{2},$$

per modo che, nota la corda AB, si potrà costruire con riga e compasso il menisco $AEBE'$, quando le linee trigonometriche degli angoli φ, φ' (e quindi per la (1) anche r, r') siano esprimibili per soli radicali quadratici.

Inoltre il menisco $AEBE'$ sarà quadrabile elementarmente quando la differenza dei due settori $CAEB$, $C'AE'B$ sia espressa da un numero algebrico contenente solo irrazionalità quadratiche; quindi, se con a, b, c indichiamo numeri contenenti sole irrazionalità quadratiche, e se a, b sono $\leqq 1$, l'equazioni del problema saranno

$$\operatorname{sen} \varphi = a, \quad \operatorname{sen} \varphi' = b$$

$$r^2 \varphi - r'^2 \varphi' = \frac{c}{4}$$

ossia, per la (1),

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \varphi = a, \quad \operatorname{sen} \varphi' = b \\ \dfrac{\varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} - \dfrac{\varphi'}{\operatorname{sen}^2 \varphi'} = c. \end{array} \right.$$

([1]) *Sitzungsberichte der Berl. Mathem. Gesellschaft.* 10 Sitzung am 29 October 1902, (inserito in *Archiv der Mathem. und Physik.* Leipzig und Berlin, 1903, Serie 3ª, Bd. 4).

Ora, posto $\frac{\varphi'}{\varphi} = p$, LANDAU osserva che, se p indica un numero algebrico, dev'essere $c = 0$; ed infatti, dalle (2) segue che

$$\frac{\varphi}{a^2} - \frac{p\varphi}{b^2} = c$$

ossia

(3) $$\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} = \frac{c}{\varphi};$$

e, se c non fosse nullo, neppure $\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}$ sarebbe nullo e resulterebbe

$$\varphi = \frac{c}{\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}},$$

quindi φ sarebbe un numero algebrico diverso da zero, e, per il teorema di LINDEMANN, sarebbe sen φ trascendente [1], contro la prima delle (2).

Limitando la generalità della questione, supporremo p algebrico e quindi $c = 0$; allora la (3) ci dà $p = \frac{b^2}{a^2}$, quindi p dovrà contenere solo radicali quadratici; e l'equazioni (2) assumeranno la forma

$$\operatorname{sen} \varphi = a, \quad \operatorname{sen} \varphi' = b$$
$$\sqrt{p} \cdot \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} p\varphi.$$

Così la questione è ridotta a cercare per quali valori di p, contenenti solo radicali quadratici, l'equazione

(4) $$\sqrt{p} \cdot \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} p\varphi$$

è soddisfatta da valori di sen φ, o di cos φ, espressi per soli radicali quadratici.

I casi segnalati da CLAUSEN, in cui ciò ha luogo effettivamente, sono i seguenti:

1° $p = 2$. L'equazione (4) diviene

$$\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} 2\varphi$$

[1] Cfr. § 6-3°.

e ci dà

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

2° $p = 3$. L'equazione (4) diviene

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} 3\varphi$$

e ci dà

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}.$$

3° $p = \frac{3}{2}$. L'equazione (4) diviene

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{3}{2}\varphi,$$

che si riduce all'equazione di 2° grado

$$4\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2 = 0,$$

da cui ricaviamo

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}-1}{8}.$$

4° $p = 5$. L'equazione (4) assume la forma

$$\sqrt{5} \cdot \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} 5\varphi$$

che si riduce all'altra

$$16 \operatorname{sen}^4\varphi - 20 \operatorname{sen}^2\varphi + 5 - \sqrt{5} = 0,$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{5 - \sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}{8}$$

e quindi

$$\cos 2\varphi = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1}{4} \qquad \left(2\varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

5° $p = \frac{5}{3}$. L'equazione (4) diviene

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{5}{3}\varphi,$$

che si riduce all'altra

$$16\cos^4\frac{\varphi}{3}-\left(12+4\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\cos^2\frac{\varphi}{3}+1+\sqrt{\frac{5}{3}}=0;$$

da questa si ricava

$$\cos^2\frac{\varphi}{3}=\frac{3+\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}}{8}$$

e quindi

$$\cos\frac{2\varphi}{3}=\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}-1+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}}{4}\quad\left(\frac{2\varphi}{3}<\frac{\pi}{2}\right).$$

Di questi cinque casi il primo corrisponde alla lunula d'Ippocrate precedentemente considerata; gli altri furon ritenuti da Clausen tutti nuovi, mentre Landau osserva che i due corrispondenti a $p=3$, $p=\frac{3}{2}$ erano già noti dal Ippocrate.

Per ciò che riguarda la ricerca di altre soluzioni del problema, il Landau, appoggiandosi sopra una proposizione di Eisenstein, relativa alla irreducibilità di certe equazioni algebriche, dimostra il seguente teorema di cui ci limiteremo a riportare il solo enunciato:

Se il rapporto p *dei due angoli al centro* 2φ, $2\varphi'$ *è un numero primo che non appartiene ai numeri primi di* Gauss $2^m+1=2^{2^k}+1$, *il menisco non è quadrabile.*

§ 10. **Cenno storico sulle ricerche relative al problema della quadratura del cerchio.** — Le ricerche relative al problema della quadratura del cerchio si possono distribuire in tre periodi di tempo (1):

Il primo si estende dai principii della speculazione matematica fino alla scoperta del calcolo differenziale e integrale, cioè fino alla metà del secolo 17°; scopo dei lavori in esso compresi è la determinazione numerica approssimata del

(1) Per tracciare questo breve quadro storico abbiamo preso a guida l'accuratissima opera del Rudio: *Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre.* Lipsia, 1892.

rapporto della circonferenza al diametro, ottenuta mediante costruzioni geometriche.

Nel secondo periodo, che dalla scoperta del calcolo differenziale e integrale va sino alla metà del secolo 18°, al posto dei metodi geometrici degli antichi subentrano i nuovi metodi analitici; le ricerche di questo periodo hanno un carattere essenzialmente teorico, avendo in mira la rappresentazione del numero π mediante espressioni analitiche contenenti un numero infinito di operazioni, cioè mediante sviluppi in serie, in prodotto infinito, in frazione continua.

Infine il terzo periodo, dalla metà del secolo passato fino ai nostri giorni, contiene memorie d'indole critica, nelle quali non si tratta più di determinare la grandezza o l'espressione analitica del numero π, ma di ricercare qual sia la natura di questo numero, se razionale o irrazionale, se algebrico o trascendente.

Periodo 1°. Il problema di costruire un quadrato equivalente ad un dato cerchio si trova enunciato per la prima volta nel più antico documento matematico che si conosca, cioè nel *Papyrus Rhind,* di cui fu autore lo scrittore egiziano AHMES circa 2000 anni av. Cr., e che si trova ora conservato nel Museo britannico. In esso si trova enunciata senza dimostrazione la seguente regola per risolvere il problema: L'area del cerchio equivale a quella di un quadrato, il cui lato è il diametro del cerchio diminuito di $\frac{1}{9}$ della sua lunghezza. Secondo questa regola, si trova per area del cerchio,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2,$$

che, confrontato con $\frac{1}{4}\pi d^2$, dà per π il valore

$$\frac{256}{81} = 3,1604\ \ldots,$$

cioè un valore già discretamente approssimato.

Il primo accenno al problema della rettificazione della circonferenza si trova nella Bibbia, in cui si attribuisce alla circonferenza una lunghezza tripla di quella del diametro; se ne deduce per π il valore 3, molto più inesatto di quello assegnatogli dagli Egiziani.

Soltanto presso i Greci hanno principio le ricerche scientifiche sull'argomento, raggiungendo un alto grado di sviluppo nell'opera di ARCHIMEDE di Siracusa (287-212 a. C.). Fra i matematici greci, che prima di ARCHIMEDE si occuparono della quadratura del cerchio, meritano speciale menzione IPPOCRATE di Chio (circa 450 anni a. C.) e DINOSTRATO (circa 550 a. C.). Si deve ad IPPOCRATE la prima dimostrazione del teorema che le superficie dei cerchi sono proporzionali ai quadrati dei diametri, ed il primo esempio di un'effettiva quadratura di superficie limitate da linee curve, cioè della cosidetta *lunula* di IPPOCRATE, della quale già abbiamo fatto parola nel § 9.

Profittando di questi resultati, egli sperava di giungere mediante costruzioni elementari alla quadratura del cerchio, ma i suoi tentativi dovevano necessariamente riuscire inutili.

DINOSTRATO mostrò come si potesse impiegare per la rettificazione e quadratura del cerchio una curva già costruita ed utilizzata da IPPIA di Elide (circa 450 a. C.) per la trisezione dell'angolo. È questa una curva trascendente nota appunto sotto il nome di τετραγωνίζουσα o *quadratrice;* dalla sua definizione geometrica si può ricavare la seguente equazione in coordinate cartesiane ortogonali x, y,

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)}.$$

Il punto, in cui essa incontra l'asse delle x, ha per ascissa $\frac{2}{\pi}$. Dunque, disegnata la curva e trovato questo punto, con sole rette e circoli si può rettificare il cerchio; ma la costruzione della curva si può effettuare solo per punti, e quindi può dare soltanto una soluzione approssimata del problema.

Risultati di gran lunga più importanti son quelli dovuti ad ARCHIMEDE, il quale, nel suo scritto intitolato κύκλου μέτρησις, dimostrò l'equivalenza dei due problemi della quadratura e della rettificazione del cerchio ed espose con rigore scientifico il noto metodo dei poligoni inscritti e circoscritti. Egli applicò questo metodo alla rettificazione approssimata del cerchio: partendo dallo esagono regolare inscritto e circoscritto, calcolò i perimetri dei poligoni successivi ottenuti raddoppiando il numero dei lati; e spingendosi fino al poligono di $6 \cdot 2^4 = 96$ lati, trovò per il rapporto della circonferenza al diametro i limiti $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$, dei quali il secondo, approssimato per eccesso a meno di $\frac{2}{1000}$, è ancora spesso utilizzato in pratica a causa della sua grande semplicità.

Il problema della quadratura approssimata del cerchio con un grado qualunque di approssimazione poteva considerarsi come completamente risoluto dal metodo di ARCHIMEDE, e, malgrado la lunghezza dei calcoli ch'esso richiede per ottenere una risoluzione discretamente approssimata, questo metodo rimase in uso, quasi senza alcuna modificazione, per un lungo tratto di tempo, cioè fino a che, per opera dello SNELLIO e del HUYGHENS, non fu portato a quel grado di perfezione e di semplicità che ancora si potesse raggiungere con mezzi elementari. Fra i molti matematici, che in questo intervallo di tempo si occuparono del calcolo approssimato del rapporto della circonferenza al diametro, il primo a trovare un valore, molto più prossimo al vero di quelli trovati anteriormente, è stato il matematico olandese ADRIANO MEZIO (seconda metà del sec. 16°), che assegnò per π il valore $\frac{355}{113} = 3{,}1415029....$ diverso dal vero solo dalla 7ª cifra decimale in poi e di particolare interesse per essere una delle ridotte dello sviluppo di π in frazione continua. In seguito il matematico francese FRANCESCO VIETA (1540-1603), sempre col metodo di ARCHIMEDE, spingendo il calcolo fino al poligono di $6 \cdot 2^{16}$ lati, dètte il valore di π con 9 cifre decimali esatte; questo grado di approssimazione fu sorpassato in seguito dall'olandese ADRIANO ROMANO (morto nel 1616), che, giungendo al poligono di 2^{30} lati, calcolò π con 15 cifre decimali; ed infine da LUDOLPH van CEULEN (1539-1610), che, con una pazienza e costanza ammirabili, spinse il calcolo fino a 35 decimali esatte.

Sopra tutte queste ricerche si elevarono di gran lunga, per originalità e per valore scientifico, i classici lavori dei due grandi matematici e fisici olandesi, SNELLIUS (1580-1626) ed HUYGHENS (1629-1695). Specialmente per opera del HUYGHENS, nella sua memoria *De circuli magnitudine inventa,* risultò che dal confronto delle aree e dei perimetri di due poligoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto al cerchio, si possono ricavare per il rapporto π due limiti assai più ristretti che non coll'ordinario procedimento di ARCHIMEDE; per modo che il calcolo di π viene molto semplicizzato. Così, per esempio, dall'impiego del poligono di 60 lati, il HUYGHENS ottenne il numero π con 9 decimali esatte, mentre secondo ARCHIMEDE occorre il poligono di 96 lati per avere appena due cifre decimali.

Periodo 2°. Appartiene alla seconda metà del secolo 17° il primo sorgere dell'analisi moderna per opera principalmente del NEWTON, LEIBNIZ e dei due fratelli BERNOULLI. Nuove idee e nuovi metodi si sostituiscono agli antichi e le grandi scoperte di cui sono fecondi cambiano fino dalle fondamenta l'edifizio delle scienze matematiche. In particolare, nella teoria della misura del cerchio si abbandonano i metodi geometrici di ARCHIMEDE e del HUYGHENS per rivolgersi a ricerche di un carattere essenzialmente diverso, tendenti cioè a trovare per il rapporto della circonferenza al diametro delle rappresentazioni analitiche contenenti una serie infinita di operazioni.

In ordine a questo nuovo indirizzo di studii, il WALLIS (1616-1703) dètte il seguente sviluppo di π in prodotto infinito

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

e dimostrò esatto lo sviluppo in frazione continua

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}},$$

enunciato dal BROUNCKER (1620-1684) senza dimostrazione.

Per gli sviluppi del numero π in serie infinita, trovati in questo torno di tempo, il punto di partenza è costituito dal seguente sviluppo di arc tg x trovato prima dal GREGORY (1670) e poi indipendentemente dal LEIBNIZ (1673)

$$\operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

al quale si può giungere facilmente applicando la nota formula del MAC-LAURIN. Facendo $x=1$, si ottiene la cosiddetta serie del LEIBNIZ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots..$$

Ma questa serie, come i precedenti sviluppi in prodotto infinito ed in frazione continua, è lentamente convergente.

Molti altri sviluppi più appropriati al calcolo di π sono stati dedotti dalla serie che dà $\operatorname{arc\,tg} x$, tenendo conto della relazione

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$$

e delle altre che ne conseguono. Fra tutti citiamo come ottimo, per il calcolo di π, il seguente, dato dal matematico inglese MACHIN (1680-1752),

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\dots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\dots\right).$$

Utilizzando questa serie ed altre consimili fu continuato il calcolo di π e spinto, ai nostri giorni, fino alla 707$^{\text{ma}}$ cifra decimale.

Tutti questi studii, sebbene abbiano per sè una grande importanza scientifica, non svelano tuttavia niente riguardo alla natura del numero π; ed all'epoca di cui ci occupiamo non ancora si sapeva se questo numero fosse razionale o irrazionale; così la questione della possibilità della quadratura del cerchio mediante circoli e rette rimaneva insoluta, ed anzi neppure era stata ancora enunciata in un modo tanto preciso (cfr. § 1) da permettere una risposta decisiva.

La chiave per la soluzione della questione doveva esser fornita da ricerche aventi un indirizzo essenzialmente diverso, le cui basi fondamentali furon poste da EULERO nei suoi studii sulle funzioni trigonometriche e sulla funzione esponenziale e^x.

L'inglese NAPIER (1614) fu il primo a prendere in considerazione il numero e e la funzione esponenziale e^x, avendo scelto il numero e come base di un sistema di logaritmi, detti logaritmi naturali o neperiani.

EULERO (1707-1783), applicando i metodi dell'analisi infinitesimale allo studio delle funzioni, ed estendendo la variabilità delle grandezze a valori complessi, scoprì la intima relazione che passa fra la funzione esponenziale e^x e le funzioni circolari sen x, cos x,..... Partendo dagli sviluppi delle espressioni e^x, sen x, cos x in serie di potenze

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots,$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots,$$

che valgono, secondo la formola del MAC-LAURIN, per valori reali della variabile x, EULERO, assicuratosi della loro convergenza in tutto il piano, cioè per qualsiasi valore anche complesso della variabile, li prese a definizione delle funzioni corrispondenti, e ne dedusse l'identità

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

che stabilisce appunto la dipendenza fra la funzione esponenziale e le funzioni circolari. Se in questa identità si pone $x = \pi$, si ottiene la relazione

$$e^{i\pi} = -1,$$

sulla quale più tardi (cfr. § 6) doveva esser basata la dimostrazione della trascendenza del numero π, e quindi la risposta alla questione della quadratura del cerchio. Ad EULERO si devono inoltre innumerevoli sviluppi dei numeri e e π in serie ed in frazione continua, fra i quali rileviamo il seguente

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}},$$

che doveva poi servire al LAMBERT per dimostrare che i due numeri e e π sono irrazionali.

Periodo 3°. Dopochè EULERO ebbe scoperta l'intima relazione esistente fra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, fra il numero e ed il numero π, nuove vie di ricerca venivano aperte per rendersi conto della natura di questi numeri, che, malgrado tutti gli studii di cui finora erano stati oggetto, rimaneva completamente ignota, ed in cui si riconosceva doversi trovare la chiave della questione della quadratura del cerchio. I primi risultati di importanza fondamentale in quest'ordine di ricerche si devono al LAMBERT (1728-1777), il quale, nella sua memoria *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen* (1766), dimostrò che i due numeri e e π sono irrazionali. Partendo dallo sviluppo di $\frac{e-1}{2}$ in frazione continua dato dall'EULERO e di sopra citato, ne dedusse i due seguenti

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\dotsb}}}},$$

$$\operatorname{tg} x=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cfrac{1}{\frac{9}{x}-\dotsb}}}}},$$

basandosi sui quali egli stabilì i due seguenti teoremi:

1°. *Se* x *è un numero razionale diverso da zero, non potrà mai essere* e^x *un numero razionale.*

Per $x=1$ resulta come caso particolare l'irrazionalità del numero e.

2°. *Se* x *è un numero razionale diverso da zero, non potrà mai essere* $\operatorname{tg} x$ *un numero razionale.*

Per $x=\frac{\pi}{4}$ è $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, e resulta come caso particolare l'irrazionalità del numero π.

La dimostrazione di questi teoremi fu poi resa rigorosa e completa dal LEGENDRE (1752-1833), il quale dimostrò collo stesso metodo che anche *il quadrato di π è un numero irrazionale.*

In seguito (1840) il LIOUVILLE (1809-1882) dimostrò che il numero e non può esser radice di alcuna equazione quadratica a coefficienti razionali.

Da questi resultati sorgevano spontaneamente le domande:

Di quali equazioni algebriche a coefficienti razionali possono esser radici i numeri e e π?

Non ci troveremmo per caso di fronte a dei numeri che non sono radici di alcuna equazione algebrica di questa specie?

Il dubbio contenuto in quest'ultima domanda fu dapprima esplicitamente espresso dal LEGENDRE e poi confortato dalle ricerche del LIOUVILLE, le quali, per la prima volta (1844), stabilivano l'esistenza di numeri non algebrici e rendevano giusta la distinzione dei numeri in algebrici e trascendenti (cfr. i §§ 1, 2, 3).

In seguito ad una minuta analisi delle proprietà della funzione esponenziale, come abbiamo già detto nel § 4, HERMITE riuscì a dimostrare nel 1873 la trascendenza del numero e e il LINDEMANN, appoggiandosi sulle ricerche di HERMITE e traendo profitto dalla relazione $e^{i\pi} = -1$, scoperta da EULERO, dimostrò nel 1882 che anche π è un numero trascendente, provando in tal modo l'impossibilità di rettificare e quadrare il cerchio mediante costruzioni elementari (cfr. § 1). Delle semplicizzazioni apportate dal WEIERSTRASS alla dimostrazione di LINDEMANN già abbiamo fatto parola nel § 4 ed abbiamo esposto nei §§ 4, 5, 6 la dimostrazione data dal WEIERSTRASS del teorema generale del LINDEMANN, pel quale resta risoluta anche la questione più generale della rettificazione di un arco circolare qualunque.

Dalle recenti ricerche la dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π fu ancora notevolmente semplicizzata: alludiamo alle dimostrazioni date successivamente dal HILBERT, HURWITZ e GORDAN e raccolte nel vol. 43 dei *Mathematische Annalen* (1893).

Supponendo che il numero e verifichi l'equazione algebrica a coefficienti razionali interi

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0, \tag{1}$$

il HILBERT moltiplica ambedue i membri di questa equazione per l'integrale definito

$$\int_0^\infty z^\rho \{(z-1)(z-2)\ldots.(z-n)\}^{\rho+1} e^{-z}\,dz \quad (\rho \text{ int. pos.})$$

e poi decompone il primo membro nelle due parti

$$P_1 = a\int_0^\infty + a_1 e\int_1^\infty + a_2 e^2\int_1^\infty + \ldots. + a_n e^n\int_1^\infty$$

$$P_2 = a_1 e\int_0^1 + a_2 e^2\int_0^1 + \ldots. + a_n e^n\int_0^1 .$$

Per modo che, dividendo ambo i membri dell'equazione risultante per $\rho!$, verrebbe l'equazione

(2) $$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = 0 .$$

Ora, tenendo conto dell'identità

$$\int_0^\infty z^\rho e^{-z}\,dz = \rho!,$$

il HILBERT dimostra che, qualunque sia ρ, il numero $\frac{P_1}{\rho!}$ è sempre intero e diverso da zero, mentre si può scegliere ρ in modo che $\frac{P_2}{\rho!}$ risulti in valore assoluto minore di 1; per modo che l'equazione (2) e quindi anche la (1) è impossibile; così resta stabilita la trascendenza del numero e.

Per passare da e a π si utilizza la relazione di EULERO $e^{i\pi} = -1$: supposto che $\alpha_1 = i\pi$ sia radice di un'equazione algebrica a coefficienti interi, che abbia le radici $\alpha_2, \ldots., \alpha_n$, il prodotto

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\ldots.(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots. + e^{\beta_n}$$

dovrebbe esser nullo; ciò che il HILBERT dimostra impossibile, tenendo un procedimento analogo a quello già usato per il numero e.

Il HURWITZ mostrò come si potesse evitare, per dimostrare la trascendenza del numero e, la considerazione dell'integrale

$$\int_0^\infty z^\rho e^{-z}\,dz .$$

Egli parte dalla formola degli incrementi finiti

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x \cdot \varphi'(\vartheta x) \qquad (0 < \vartheta < 1);$$

ed applica questa formola alla funzione

$$e^{-x} F(x) = \{ f(x) + f'(x) + \dots + f^{(r)}(x) \} \, e^{-x},$$

ove $f(x)$ è una funzione razionale intera di grado r della forma seguente

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \{ (1-x)(2-x) \dots (n-x) \}^p$$

essendo p un numero *primo*; così trova

$$F(x) - e^x F(0) = - x \cdot e^{(1-\vartheta)x} \cdot f(\vartheta x).$$

E ponendo in questa formola successivamente

$$x = 1, \quad 2, \dots, \quad n,$$

deduce le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} F(1) - e F(0) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2 F(0) = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F(n) - e^n F(0) = \varepsilon_n, \end{array} \right.$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sono quantità che col crescere di p tendono al limite zero, mentre $F(1), F(2), \dots, F(n)$ son sempre numeri interi divisibili per p, ed $F(0)$ è un numero intero non divisibile per p.

Supposto ora che e soddisfi all'equazione algebrica a coefficienti interi

$$C_0 + C_1 e + \dots + C_n e^n = 0,$$

se ne dedurrebbe per le relazioni precedenti che l'espressione

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \dots + C_n F(n) + C_0 F(0)$$

dovrebbe, per un valore conveniente di p, essere identicamente nulla, ciò che è impossibile, perchè essa rappresenta un numero intero non divisivile per p.

Infine il Gordan riuscì a stabilire la trascendenza di e e π togliendo a prestito dalla teoria delle funzioni solo lo sviluppo in serie di e^x e la nozione di derivata di una funzione razionale intera.

La dimostrazione del Gordan è stata poi esposta in modo più semplice e chiaro da H. Weber nell'opera « *Lehrbuch* *der Algebra* » [1], e poi ancora più elementarmente nel primo volume dell'*Encyklopädie der Elementar-Mathematik* [2].

Termineremo riportando questa dimostrazione divenuta ormai tanto semplice da essere accessibile a tutti.

§ 11. **Dimostrazioni della trascendenza di e e π secondo la più recente esposizione di H. Weber.** — Partiamo dallo sviluppo in serie di e^x

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

che vale per x qualunque, reale o complesso. Indicando con n un numero intero positivo qualunque, moltiplichiamo ambo i membri dell'eguaglianza precedente per $n!$, così avremo

$$(2) \qquad n!e^x = n! + \frac{n!}{1!}x + \frac{n!}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + U_n,$$

avendo posto

$$(3) \quad U_n = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

Osserviamo ora che, se s è un numero intero positivo non superiore ad n, la derivata s^{esima} di x^n, che potremo indicare così $D_s x^n$, è uguale a $\frac{n!}{(n-s)!}x^{n-s}$, mentre per s superiore ad n si ha $D_s x^n = 0$.

Quindi, se nella (2) sostituiamo ad n successivamente i valori $n-1, n-2, \dots, 2, 1$, otterremo le seguenti eguaglianze

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} n!\,e^x &= U_n + \sum_{s=1}^{n} D_s x^n \quad, \\ (n-1)!\,e^x &= U_{n-1} + \sum_{s=1}^{n} D_s x^{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 2!\,e^x &= U_2 + \sum_{s=1}^{n} D_s x^2 \quad, \\ 1!\,e^x &= U_1 + \sum_{s=1}^{n} D_s x \quad. \end{aligned} \right.$$

[1] BRAUNSCHWEIG, 1898, Bd. II, 25° Abschnitt.

[2] H. WEBER und J. WELLSTEIN. *Encykl. der Elementar-Mathem.* Bd. I, S. 418-432.

Consideriamo ora una funzione razionale intera $f(x)$ di grado n scelta arbitrariamente, ma tale che sia $f(0) = 0$; essa potrà rappresentarsi così

$$f(x) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \dots + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x; \tag{5}$$

indichiamo con $f'(x)$, $f''(x)$,...., $f^{(n)}(x)$ le sue prime n derivate e poniamo

$$F(x) = f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n)}(x). \tag{6}$$

Sarà evidentemente

$$F(0) = \gamma_n{}^{n!} + \gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \dots + \gamma_1{}^{1!}. \tag{7}$$

Moltiplichiamo le eguaglianze (4) ordinatamente per $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_2, \gamma_1$ e sommiamo; posto

$$U(x) = \gamma_n U_n + \gamma_{n-1} U_{n-1} + \dots + \gamma_1 U_1 \tag{8}$$

e, avendo riguardo alle (4), (5), (6), (7), otterremo

$$F(0) \cdot e^x = F(x) + U(x). \tag{9}$$

Questa relazione sarà il punto di partenza per dimostrare la trascendenza di e e π.

Riguardo alla funzione $U(x)$, ci basterà di stabilire un limite superiore per il suo valore assoluto.

Indichiamo perciò con r il valore assoluto di x; dalla (3) avremo allora per il valore assoluto di U_n la seguente diseguaglianza

$$|U_n| < r^n \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \dots\right)$$

cioè

$$|U_n| < r^n e^r.$$

Tenendo conto allora dell'espressione (8) di $U(x)$ e indicando con $c_n, c_{n-1}, \dots, c_2, c_1$ i valori assoluti di $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_2, \gamma_1$, avremo

$$|U(x)| < (c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r) \cdot e^r$$

ossia

$$|U(x)| < \Phi(r) \cdot e^r, \tag{10}$$

ove $\Phi(r)$ indica l'espressione $c_n r^n + c_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + c_1 r$, ossia ciò che diviene $f(x)$ sostituendovi per $x, \gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_1$ i loro valori assoluti $r, c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$.

Trascendenza di e. — Supponiamo che il numero e sia algebrico, cioè radice di un'equazione algebrica di grado m a coefficienti interi razionali

$$(11) \qquad C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + ... + C_m e^m = 0,$$

ove i coefficienti $C_0, ..., C_m$ potranno sempre esser supposti diversi da zero.

Sostituiamo nella (9) per x successivamente $0, 1, 2, ..., m$, moltiplichiamo per $C_0, C_1, C_2, ..., C_m$ e sommiamo; avremo, per la (11),

$$(12) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu) + \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu) = 0.$$

Ora dimostriamo come, scegliendo opportunamente la funzione intera $f(x)$, che, all'infuori della condizione $f(0) = 0$, è del tutto arbitraria, l'equazione (12) risulta impossibile; da ciò seguirà che non può sussistere un'equazione come la (11), e quindi che il numero e è trascendente.

Scegliamo un numero primo p che sia maggiore di m e prendiamo per $f(x)$ la funzione intera

$$(13) \qquad f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p....(x-m)^p}{(p-1)!},$$

che si annulla per $x = 0$ ed è di grado

$$n = (m+1)p - 1.$$

Sarà resa evidente l'impossibilità dell'equazione (12), quando avremo dimostrato che con una scelta conveniente del numero primo p,

1° la somma $\sum\limits_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu)$ è un numero intero diverso da zero, e quindi in valore assoluto non minore di 1;

2° la somma $\sum\limits_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu)$ è in valore assoluto minore di 1.

Se ordiniamo la $f(x)$ per le potenze crescenti di x, avremo

$$(14) \qquad f(x) = \frac{A_{p-1}x^{p-1} + A_p x^p + A_{p+1}x^{p+1} + ... + A_n x^n}{(p-1)!},$$

ove i coefficienti $A_{p-1}, A_p, A_{p+1}, ...$ sono numeri interi; sarà

$A_{p-1} = \pm (m!)^p$, quindi, poichè p è primo e maggiore di m, A_{p-1} non sarà divisibile per p.

Formando dalla (14) le prime n derivate di $f(x)$ e ponendo in esse $x = 0$, si ha

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \ldots, \quad f^{(p-2)}(0) = 0$$
$$f^{(p-1)}(0) = A_{p-1}, \quad f^{(p)}(0) = p \cdot A_p, \quad f^{(p+1)}(0) = p(p+1)A_{p+1},$$
$$f^{(n)}(0) = p(p+1)\ldots n \cdot A_n,$$

quindi, ricordando la (6), avremo

$$F(0) = A_{p-1} + pA_p + p(p+1)A_{p+1} + \ldots,$$

dunque sarà $F(0)$ un numero intero non divisibile per p, e, se scegliamo per p un numero primo tanto grande, che il numero C_0 (diverso da zero) non sia divisibile per p, anche *$C_0 F(0)$ sarà un numero intero non divisibile per* p.

Ordiniamo poi $f(x)$ per le potenze crescenti di $(x - \nu)$, avremo

$$f(x) = \frac{B_p(x-\nu)^p + B_{p+1}(x-\nu)^{p+1} + \ldots + B_n(x-\nu)^n}{(p-1)!},$$

ove i coefficienti $B_p, B_{p+1}, \ldots$ sono numeri interi. Derivando successivamente e ponendo $x = \nu$, si ha

$$f(\nu) = 0, \quad f'(\nu) = 0, \ldots, \quad f^{(p-1)}(\nu) = 0$$
$$f^{(p)}(\nu) = p \cdot B_p, \quad f^{(p+1)}(\nu) = p(p+1)B_{p+1}, \ldots$$
$$f^{(n)}(\nu) = p(p+1)\ldots n \cdot B_n,$$

quindi, ricordando la (6), avremo

$$F(\nu) = pB_p + p(p+1)B_{p+1} + \ldots.$$

Dunque $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ sono numeri interi divisibili per p.

La somma $\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu)$ *risulterà allora un numero intero non divisibile per* p, *e quindi, in valore assoluto, non minore di* 1.

Così è compiuta la prima parte della nostra dimostrazione.

Passiamo ora alla seconda parte.

Perciò utilizzeremo la diseguaglianza (10). Indicando ancora con r il valore assoluto di x, principiamo ad osservare che l'espressione che si ottiene dalla funzione $f(x)$, sostituendovi ad x ed ai coefficienti i rispettivi valori assoluti, è

$$\varphi(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p(r+2)^p \ldots . (r+m)^p}{(p-1)!};$$

ma per la (10) si ha

$$|U(x)| < \varphi(r) \cdot e^r;$$

ponendo quindi per brevità

$$\nu(\nu+1)(\nu+2) \ldots . (\nu+m) = \rho_\nu,$$

sarà

$$|U(\nu)| < \frac{\rho_\nu{}^p}{\nu(p-1)!} e^\nu$$

ossia

$$|U(\nu)| < \frac{\rho_\nu e^\nu}{\nu} \frac{\rho_\nu{}^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Ma poichè la serie (1) è convergente per ogni valore di x, il suo termine generale $\frac{x^n}{n!}$, crescendo n all'infinito, tende al limite zero. Quindi si può scegliere il numero primo p tanto grande che $\frac{\rho_\nu{}^{p-1}}{(p-1)!}$, e quindi anche $|U(\nu)|$, sia piccolo a piacere; perciò anche $\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu)$ potrà rendersi in valore assoluto piccola quanto si vuole e in particolare anche < 1 c. d. d.

Quindi il *numero e è trascendente.*

Trascendenza di π. — La dimostrazione della trascendenza di π si basa ancora sulle due relazioni (9), (10) e sulla relazione

$$1 + e^{i\pi} = 0, \tag{15}$$

che lega i due numeri e e π.

Se supponiamo che π sia un numero algebrico, anche $i\pi$ sarà algebrico e quindi radice d'un'equazione algebrica

$$\psi(x) = 0,$$

a coefficienti razionali interi.

Se ν è il grado di ψ, indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ tutte le radici dell'equazione stessa, fra le quali figurerà anche $i\pi$;

avremo quindi a causa della (15)

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})\ldots.(1+e^{y_\nu})=0;$$

ed effettuando le moltiplicazioni,

$$1+\Sigma e^{y_i}+\Sigma e^{y_i+y_k}+\Sigma e^{y_i+y_k+y_l}+\ldots.=0. \tag{16}$$

Le $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ somme y_i+y_k saranno radici di una seconda equazione algebrica

$$\psi_1(x)=0,$$

giacchè ogni funzione simmetrica di esse è anche funzione simmetrica delle y_i e perciò è un numero razionale. Analogamente si prova che le $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\cdot 3}$ somme $y_i+y_k+y_l$ sono radici di una terza equazione algebrica $\psi_2(x)=0$, ecc.

Cosicchè il prodotto

$$\psi(x)\cdot\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)\ldots. \tag{17}$$

sarà una funzione intera che si annulla per x eguale ad uno dei numeri

$$y_i,\quad y_i+y_k,\quad y_i+y_k+y_l,\ldots.; \tag{18}$$

di questi alcuni potranno esser nulli; indichiamo con $C-1$ il numero di quelli eguali a zero, sarà C un numero intero positivo $\geqq 1$; eguagliando a zero il prodotto (17) e sopprimendo il fattore x^{C-1}, avremo un'equazione $\chi(x)=0$, che si potrà sempre immaginare ridotta a coefficienti interi. Le sue radici,

$$x_1,\quad x_2,\ldots.,\quad x_m,$$

saranno quelli fra i numeri (18) che sono diversi da zero, e soddisfaranno, per la (16), all'equazione

$$C+e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots.+e^{x_m}=0; \tag{19}$$

è evidente che $\chi(o)$ è diverso da zero e che $\chi(x)$ può scriversi così

$$\chi(x)=ax^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots.+a_m,$$

ove a, $a_1,\ldots.$, a_m sono numeri razionali interi, a, a_m possono supporsi diversi da zero ed a positivo.

Moltiplicando allora $\chi(x)$ per a^{m-1} e ponendo

$$ax = z, \quad a^{m-1}\chi(x) = \theta(z); \quad ax_1 = z_1, \quad ax_2 = z_2, \ldots, \quad ax_m = z_m,$$
$$a_1 = b_1, \quad aa_2 = b_2, \quad a^2 a_3 = b_3, \ldots, \quad a^{m-1}a_m = b_m,$$

avremo che $z_1, z_2, \ldots, z_m$ saranno le radici dell'equazione a coefficienti interi

$$\theta(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m = 0. \tag{20}$$

Ciò premesso, applichiamo l'equazione fondamentale (9). Sostituendo in essa successivamente per x i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_m$, poi sommando e aggiungendo ad ambo i membri $C \cdot F(0)$, avremo per la (19)

$$C \cdot F(0) + \sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu) = 0. \tag{21}$$

Ora dimostriamo come, scegliendo opportunamente la funzione intera $f(x)$, che, all'infuori della condizione $f(0) = 0$, è del tutto arbitraria, l'equazione (21) risulta impossibile; così resterà dimostrato che π non può essere un numero algebrico.

Indichiamo con p un numero primo e scegliamo per $f(x)$ la funzione intera

$$f(x) = \frac{z^{p-1}(\theta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{mp-1}x^{p-1}(\chi(x))^p}{(p-1)!}, \tag{22}$$

che si annulla per $x = 0$ ed è di grado

$$n = (m+1)p - 1.$$

Sarà resa evidente l'impossibilità dell'equazione (21) quando avremo dimostrato che con una scelta conveniente del numero primo p,

1° la somma $C \cdot F(0) + \sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu)$ è un numero intero diverso da zero;

2° la somma $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ è in valore assoluto minore di 1.

Ordinando secondo le potenze crescenti di z, avremo

$$(\theta(z))^p = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$
$$= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \ldots,$$

ove i coefficienti A_0, A_1, A_2,...., sono numeri interi; sarà $A_0 = b_m^{\ p}$ e quindi diverso da zero.

Avremo inoltre

$$f(x) = \frac{A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \ldots.}{(p-1)!}.$$

Derivando successivamente e ponendo $x = 0$, si ottiene

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \ldots., \quad f^{(p-2)}(0) = 0;$$
$$f^{(p-1)}(0) = A_0 a^{p-1} = b_m^{\ p} a^{p-1}, \quad f^{(p)}(0) = p \cdot A_1 a^p,$$
$$f^{(p+1)}(0) = p(p+1) \cdot A_2 a^{p+1}, \ldots..$$

Scegliamo il numero primo p maggiore del maggiore dei numeri a, b_m, C; risulterà allora $f^{(p-1)}(0)$ non divisibile per p, mentre tutte le altre $f^{(\mu)}(0)$ sono o nulle o divisibili per p; e sarà $F(0) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f^{(\nu)}(0)$ un numero intero non divisibile per p, e quindi *anche* $\mathrm{C} \cdot \mathrm{F}(0)$ *sarà un numero intero non divisibile per* p.

Ordinando poi per potenze crescenti di $z - z_\nu$, avremo

$$f(x) = \frac{(z - z_\nu)^p B_1(z_\nu) + (z - z_\nu)^{p+1} B_2(z_\nu) + \ldots.}{(p-1)!}$$
$$= \frac{a^p (x - x_\nu)^p B_1(z_\nu) + a^{p+1}(x - x_\nu)^{p+1} B_2(z_\nu) + \ldots.}{(p-1)!};$$

ove $B_1(z_\nu)$, $B_2(z_\nu)$,.... sono funzioni intere di z_ν a coefficienti interi.

Segue allora, come precedentemente,

$$f'(x_\nu) = 0, \quad f''(x_\nu) = 0, \ldots., \quad f^{(p-1)}(x_\nu) = 0;$$
$$f^{(p)}(x_\nu) = p a_p B_1(z_\nu), \quad f^{(p+1)}(x_\nu) = p(p+1) a^{p+1} B_2(z_\nu), \ldots..$$

e ponendo

$$Q(z_\nu) = a^p B_1(z_\nu) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_\nu) + \ldots.,$$

avremo per la (6)

$$F(x_\nu) = p \cdot Q(z_\nu),$$

e quindi

$$\sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{m} Q(z_\nu).$$

Ma $\sum_{\nu=1}^{m} Q(z_\nu)$ è una funzione intera simmetrica delle m radici dell'equazione (20), quindi sarà un numero intero, e perciò *la somma* $\sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu)$ *sarà un numero intero divisibile per* p.

Ne segue infine che $C \cdot F(o) + \sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu)$ *risulterà un numero intero non divisibile per* p *e quindi diverso da zero.*

Così è compiuta la prima parte della nostra dimostrazione.

Passiamo ora alla seconda parte.

Perciò utilizzeremo la diseguaglianza (10).

Possiamo scrivere

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots.(x - x_m)$$

e per la (22) avremo

$$f(x) = \frac{a^{(m+1)p-1} x^{p-1}(x - x_1)^p (x - x_2)^p \ldots.(x - x_m)^p}{(p-1)!}.$$

Indichiamo con r, r_1, $r_2, \ldots.$, r_m i valori assoluti di x, x_1, $x_2, \ldots.$, x_m e ricordiamo che a è positivo; allora è evidente che i coefficienti della $f(x)$ non sono maggiori dei coefficienti della funzione

$$\frac{a^{(m+1)p-1} x^{p-1}(x + r_1)^p (x + r_2)^p \ldots.(x + r_m)^p}{(p-1)!}.$$

Se dunque poniamo

$$\rho(r) = a^{m+1} r(r + r_1)(r + r_2)\ldots.(r + r_m),$$

sarà, per ogni numero positivo r,

$$\varphi(r) < \frac{(\rho(r))^p}{ar(p-1)!},$$

ossia

$$\varphi(r) < \frac{\rho(r)}{ar} \cdot \frac{(\rho(r))^{p-1}}{(p-1)!};$$

scegliendo dunque p abbastanza grande, $\varphi(r)$ e, per la (10), anche $|U(x_\nu)|$ potrà rendersi piccolo a piacere, perciò anche $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ potrà rendersi, in valore assoluto, piccola quanto si vuole, e in particolare anche <1, c. d. d.

Quindi *il numero* π *è trascendente.*