ARTICOLO SESTO

« **Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare** » di Ermenegildo Daniele a Pavia.

La questione della costruzione dei poligoni regolari, o, che fa lo stesso, della divisione della circonferenza in parti eguali, fu trattata in modo generale nell'articolo quinto di questo volume; ivi si pervenne a stabilire in via teorica il criterio per giudicare se il problema algebrico della divisione della circonferenza in un dato numero di parti eguali si possa ricondurre alla risoluzione di equazioni di 2° grado, e quindi (v. art. 4°, vol. II) le costruzioni grafiche relative non richiedano l'uso di altri strumenti all'infuori della riga e del compasso. Lo scopo essenziale di questo articolo è di far vedere sopra un caso particolare come si specializzi la teoria generale ivi esposta, come si scrivano, cioè, le equazioni di 2° grado da cui il problema dipende; e poi come si possa eseguire praticamente l'effettiva costruzione delle loro radici. Il poligono che noi sceglieremo come esempio sarà quello di 17 lati, alla cui costruibilità con riga e compasso già si accennò esplicitamente all'art. 5°, vol. II; è il poligono più semplice, dopo quelli studiati dagli antichi geometri, il quale si possa costruire con mezzi elementari, e noi esporremo alcune delle costruzioni conosciute, fra quelle che ci paiono più caratteristiche.

È ovvio tuttavia pensare che le equazioni di 2° grado, da cui dipende il problema della divisione della circonferenza in 17 parti eguali, si possano ottenere con procedimento diretto, senza passare per la teoria generale; non mancano difatti gli Autori che si sian proposti di raggiungere per vie diverse quello scopo, e fra gli altri citeremo:

A. PADOA [1], il quale parte da considerazioni geometriche, ed ha il merito di essere riuscito pel primo a svolgere la parte algebrica in modo che può considerarsi come elementare;

H. SCHUBERT [2], la cui esposizione è una specializzazione della teoria di GAUSS, e si distingue per una grande semplicità ed eleganza;

K. KOMMERELL [3], che tratta la questione, come PADOA, rimanendo nel campo elementare, e giovandosi di eleganti considerazioni geometriche, naturali estensioni di altre che si presentano nella costruzione del pentagono regolare;

C. H. CHEPMELL [4], che giunge ad un sistema di equazioni sostanzialmente identico a quello di KOMMERELL;

F. GIUDICE [5], il quale si giova vantaggiosamente della proprietà che l'equazione di 16° grado, da cui si può far dipendere il problema algebrico della divisione della circonferenza in 17 parti eguali, è a radici reciproche, e quindi riducibile immediatamente all'8° grado.

Quanto alle costruzioni dell'ettadecagono regolare, non se ne conosce, fino ad ora, alcuna che sia ottenuta con considerazioni di puro carattere geometrico, nella quale cioè non intervengano, all'infuori di un disegno geometrico, altro che computi aritmetici, sia numerici che letterali; gli Autori delle costruzioni note si riducono tutti, in una forma più o meno esplicita, a rappresentare geometricamente le radici delle equazioni di 2° grado che risolvono algebricamente la questione.

Per dare un'idea della varietà dei mezzi con cui si può trattare il problema geometrico che ci occupa, ne esporremo tre soluzioni, ben differenti tra di loro, che rispondono, ciascuna, ad un metodo speciale di risoluzione dei problemi elementari.

(1) *Poligoni regolari di 34 lati;* Boll. di Mat., 1903.

(2) *Auslese aus meiner Unterrichts und Vorlesungspraxis;* I B., II Abschnitt; Leipzig, Göschen, 1905.

(3) *Elementargeometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks;* Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss., XVI (1910). — *Ueber die Konstruktion der regulären Polygone;* Math. Ann., 72 B. (1912).

(4) *Note on the geometrical construction of certain Polygons;* Math. Ann., 71 B. (1912).

(5) *Sulla divisione del circolo;* Period. di Mat., 27 (1912).

La prima appartiene al tipo delle costruzioni di EUCLIDE, si compie, cioè, coll'uso della riga e del compasso: essa è, in fondo, dovuta a J. SERRET, che la espone nel 2° volume della sua « *Algèbre supérieure* », ma nella forma, sotto cui noi la presentiamo, è all'incirca quale si trova nel libro di BACHMANN: « *Die Lehre von der Kreistheilung* »; giova notare che in essa l'unico concetto uscente alquanto dal campo della geometria schiettamente elementare è quello di attribuire un segno ai segmenti di una stessa retta. La seconda soluzione è quella classica di STAUDT contenuta nel vol. 24° del *Giornale di Crelle* (1842), e condotta secondo i concetti di PONCELET e STEINER, vale a dire non valendosi che della riga e di un cerchio fisso nel piano della figura; STAUDT pubblicò la sua costruzione senza farla seguire neppur da un cenno di dimostrazione: soltanto parecchi anni dopo (1872) la costruzione di STAUDT fu spiegata da SCHRÖTER nel volume 75° dello stesso *Giornale di Crelle.* La dimostrazione di SCHRÖTER si trova riprodotta quasi letteralmente nel libro poco fa citato di BACHMANN, come pure nelle *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* di KLEIN, il quale la presenta, in alcuni punti, sotto forma più elegante. Di queste modificazioni noi terremo conto nella nostra esposizione. Infine, quasi per contrapposto della precedente, indicheremo una costruzione dell'17-gono regolare eseguita col solo compasso, secondo il metodo di L. MASCHERONI di cui si trattò nell'art. 2, vol. II; tale costruzione, dovuta al sig. GÉRARD, fu pubblicata nel 1897 nel vol. 48° dei *Math. Annalen*, e risponde in certo modo alla nota seguente che il KLEIN scriveva a piè della pag. 27 delle *Augewählte Fragen:* « Eine Construction des 17-Ecks nach Mascheroni « nur mit Zirkel ist noch nicht versucht, obgleich sie jedenfalls « möglich ist ».

Non è il caso di riprodurre tutte le altre costruzioni dell'ettadecagono regolare, pubblicate in gran parte nell'ultimo decennio; tanto più (e la cosa è comprensibile) che raramente riescono a distinguersi per una vera originalità. Ci limiteremo a far menzione delle più notevoli.

R. GÜNTSCHE [1], partendo dalle equazioni classiche, dà una prima soluzione con riga e compasso, nella quale si preoc-

[1] *Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises;* Sitzungsb. d. Berl Math. Ges. (26 Nov. 1902): Arch. d. Math. u. Ph., (3), IV (1903).

cupa di raggiungere la massima semplicità possibile, secondo le note idee esposte da LEMOINE nella sua « Géométrographie ». Da questa costruzione con un ovvio artificio se ne ottiene immediatamente una seconda, nella quale si fa uso del solo compasso, ed è più semplice, per quanto meno simmetrica, di quella di GÉRARD.

H. W. RICHMOND [1] costruisce l'ettadecagono con riga e compasso, distaccandosi però nettamente, nell'andamento generale delle operazioni, dalla soluzione di SERRET. Egli non dà, nel suo lavoro, la spiegazione delle costruzioni eseguite; queste si possono però trovare diffusamente dimostrate nella prima delle Note citate di KOMMERELL.

Al tipo della soluzione di SERRET appartiene quella che dà SCHUBERT nel volume citato, e che fa seguito alla teoria algebrica; come pure quelle esposte nelle Note di CHEPMELL e di GIUDICE.

§ 1. **Risoluzione dell'equazione binomia $z^{17}=1$.** — L'equazione, da cui dipende la divisione della circonferenza in 17 parti eguali, è del 16° grado; essa è

$$\frac{z^{17}-1}{z-1}=0,$$

ossia

$$z^{16}+z^{15}+\dots+z^2+z+1=0. \tag{1}$$

Riferendo il cerchio di raggio unità a due suoi diametri ortogonali come assi cartesiani, le radici di questa equazione avranno per imagini sulla circonferenza 16 punti, i quali, unitamente al punto $z=1$, costituiscono i vertici dell'ettadecagono regolare inscritto. Posto

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{17},$$

le radici della (1) si possono rappresentare mediante la formola

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{17}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{17},\quad (k=1,\ 2,\dots,\ 16).$$

(1) *To construct a regular polygon of 17 sides*; Math. Ann., 67 B. (1909).

Secondo il procedimento generale dobbiamo cominciare col fare la scelta di una *radice primitiva del modulo 17;* ora il minimo numero r per cui risulta $3^r - 1$ divisibile per 17 è, come si verifica facilmente, $r = 16$; il numero 3 è dunque una radice primitiva per il modulo 17, anzi è la più piccola, come si può riconoscere. Ordineremo allora le radici della (1) nel modo seguente:

$$\varepsilon, \ \varepsilon^{3}, \ \varepsilon^{3^2}, \ \varepsilon^{3^3}, \dots \ \varepsilon^{3^{15}};$$

ossia, poichè è $\varepsilon^{17} = 1$,

$$\varepsilon^{1}, \ \varepsilon^{3}, \ \varepsilon^{9}, \ \varepsilon^{10}, \ \varepsilon^{13}, \ \varepsilon^{5}, \ \varepsilon^{15}, \ \varepsilon^{11}, \ \varepsilon^{16}, \ \varepsilon^{14}, \ \varepsilon^{8}, \ \varepsilon^{7}, \ \varepsilon^{4}, \ \varepsilon^{12}, \ \varepsilon^{2}, \ \varepsilon^{6}.$$

Nella seguente tabella scriveremo poscia i periodi di Gauss a 8, a 4 e a 2 termini:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6, \\ \eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2; \\ \eta_{11} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}, \quad \eta_{12} = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6, \\ \eta_{21} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4, \quad \eta_{22} = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \eta_{211} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{16}, \quad \eta_{212} = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4, \ \dots\dots \end{array} \right.$$

La risoluzione algebrica del problema si potrà dire ottenuta quando si siano calcolati i periodi a due termini. Difatti le ε sono due a due immaginarie coniugate, per modo che si ha

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17},$$

e questi sono appunto i periodi a due termini; ciascuno di essi adunque ci fornisce due angoli a cui corrispondono due vertici dell'17-gono simmetrici rispetto all'asse x. Anche la parte geometrica del problema sarà risolta quando si sia riuscito a *costruire* i periodi a due termini, poichè allora tutto si ridurrà a segnare un arco di cui è noto il coseno. Il calcolo delle η con tre indici si compie risolvendo una dopo l'altra una successione di equazione di 2° grado che ora andremo a trovare, e che nascono da certe relazioni intercedenti fra i varii periodi della tabella (A).

Se si tien conto delle espressioni di η_1 e η_2 in funzione delle ε, e si ricorda che le ε sono le radici della (1), si ottiene:

$$\eta_1 + \eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} = -1,$$
$$\eta_1 \eta_2 = 4(\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{16}) = -4;$$

dunque η_1 e η_2 sono le radici dell'equazione di 2° grado

$$\eta^2 + \eta - 4 = 0. \tag{2}$$

Si ha pure:

$$\eta_{11} + \eta_{12} = \eta_1, \quad \eta_{11}\eta_{12} = -1,$$

e similmente

$$\eta_{21} + \eta_{22} = \eta_2, \quad \eta_{21}\eta_{22} = -1;$$

quindi si avranno η_{11} e η_{12} come radici dell'equazione

$$\eta^2 - \eta_1\eta - 1 = 0, \tag{3}$$

mentre η_{21} e η_{22} saranno le radici della

$$\eta^2 - \eta_2\eta - 1 = 0. \tag{4}$$

Finalmente notiamo le relazioni

$$\eta_{211} + \eta_{212} = \eta_{21}, \quad \eta_{211}\eta_{212} = \eta_{11};$$

le quali mostrano che η_{211} e η_{212} sono le radici dell'equazione

$$\eta^2 - \eta_{21}\eta + \eta_{11} = 0. \tag{5}$$

Le (2), (3), (4), (5) sono le equazioni di 2° grado a cui si voleva giungere. Risolvendo la (2) noi conosceremo i coefficienti delle (3) e (4); le radici di queste ci daranno i coefficienti della (5), la quale poi ammette per radici due fra i periodi a due termini. Siccome uno di questi è η_{211}, ed i punti da esso forniti costituiscono, insieme col punto $z = 1$, tre vertici consecutivi del 17-gono, così colla conoscenza di η_{211} il problema si può ritenere completamente risolto. In sostanza la risoluzione di quattro equazioni di 2° grado è sufficiente per la soluzione del nostro problema; e si può ancora aggiungere che, delle otto radici che si vengono ad ottenere, solo cinque hanno per noi interesse, e sono queste $\eta_1, \eta_2, \eta_{11}, \eta_{21}, \eta_{211}$: l'ultima è il vero scopo della nostra ricerca, mentre le prime quattro servono alla sua determinazione.

Prima che la parte algebrica della questione si possa dire esaurita, occorre dare un criterio per distinguere l'una dall'altra le due radici di ciascuna delle quattro equazioni di 2° grado; non è difatti indifferente scegliere l'una piuttosto che l'altra, poichè ogni radice ricevette già, nella tabella (A), un'espressione determinata mediante una ε particolare. Poniamo perciò per brevità:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{17} = c_k,$$

onde sarà $c_k = c_{17-k}$; allora possiamo scrivere:

$$\eta_1 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7, \quad \eta_2 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8;$$

$$\eta_{11} = c_3 + c_5, \quad \eta_{12} = c_6 + c_7, \quad \eta_{21} = c_1 + c_4, \quad \eta_{22} = c_2 + c_8;$$

$$\eta_{211} = c_1, \quad \eta_{212} = c_4.$$

Osserviamo ora che, le c_k essendo quantità reali, sono pure reali tutte le η; si potrà quindi paragonare fra di loro le grandezze di queste, il che noi faremo nel modo seguente. Si immagini (fig. 1) la semicirconferenza di raggio 1 divisa in 17 parti eguali mediante i punti $R_0 R_1 R_2 .... R_{17}$, e si chiamino $s_1 s_2 ....$ le distanze $R_0 R_1$, $R_0 R_2, ...$; dal triangolo $R_0 R_k R_{17}$ si ha, notando che è $R_0 R_{17} = s_{17} = 2$,

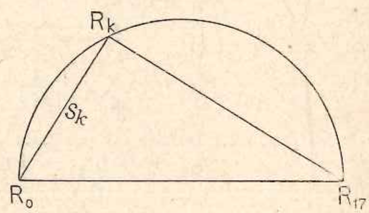

Fig. 1.

$$s_k = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{34}, \quad (k = 1, 2, .., 17)$$

e siccome è

$$\cos\frac{2k\pi}{17} = \mathrm{sen}\,\frac{(17-4k)\pi}{34},$$

si verificheranno facilmente le eguaglianze:

$$c_1 = s_{13}, \quad c_2 = s_9, \quad c_3 = s_5, \quad c_4 = s_1,$$

$$c_5 = -s_3, \quad c_6 = -s_7, \quad c_7 = -s_{11}, \quad c_8 = -s_{15};$$

si potrà dunque esprimere le η mediante le s_k, cioè:

$$(6)\quad \begin{cases} \eta_1 = s_5 - s_3 - s_7 - s_{11}, \quad \eta_2 = s_1 + s_9 + s_{13} - s_{15}; \\ \eta_{11} = s_5 - s_3, \quad \eta_{12} = - s_7 - s_{11}, \quad \eta_{21} = s_{13} + s_1, \quad \eta_{22} = s_9 - s_{15}; \\ \eta_{211} = s_{13}, \quad \eta_{212} = s_1. \end{cases}$$

Basterà ora notare che le s_k crescono col crescere dell'indice k, perchè risultino senz'altro le diseguaglianze seguenti:

$$(7)\quad \eta_{211} > \eta_{212}; \quad \eta_{11} > 0, \quad \eta_{12} < 0, \quad \eta_{21} > 0, \quad \eta_{22} < 0;$$

tenendo conto poi che dev'essere $\eta_1 \eta_2 = -1$, segue inoltre

$$(8)\quad \eta_1 < 0, \quad \eta_2 > 0.$$

Adesso non vi ha più dubbio sulla designazione delle radici delle nostre quattro equazioni di 2° grado, sicchè potremo scriverle immediatamente nel prospetto qui appresso, ove porremo, per maggior semplicità, $\eta_{211} = \zeta_1$, $\eta_{212} = \zeta_2$:

$$(B)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, & \eta_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, \\ \eta_{11} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{\eta^2_1 + 4}}{2}, & \eta_{12} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{\eta^2_1 + 4}}{2}, \\ \eta_{21} = \dfrac{\eta_2 + \sqrt{\eta^2_2 + 4}}{2}, & \eta_{22} = \dfrac{\eta_2 - \sqrt{\eta^2_2 + 4}}{2}, \\ \zeta_1 = \dfrac{\eta_{21} + \sqrt{\eta^2_{21} - 4\eta_{11}}}{2}, & \zeta_2 = \dfrac{\eta_{21} - \sqrt{\eta^2_{21} - 4\eta_{11}}}{2}. \end{cases}$$

§ 2. **Costruzione di J. Serret, modificata da Bachmann.** — Su una retta qualunque x (fig. 2) prendiamo ad arbitrio un

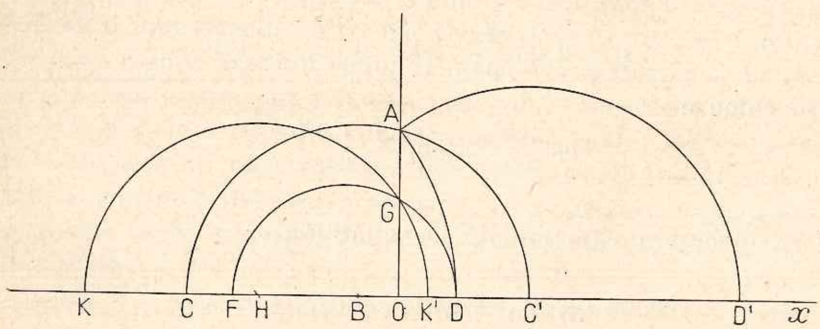

Fig 2

punto O, dal quale converremo di contare i segmenti positivamente in un senso scelto a piacer nostro. Per O conduciamo la perpendicolare ad x, e su di essa prendiamo un punto A tale che sia $OA = 1$, supposto che l'17-gono si voglia iscrivere in una circonferenza di raggio 1. Sulla x costruiamo poi il segmento

$$OB = -\frac{1}{4},$$

e descriviamo la circonferenza $B(BA)$: questa taglierà x in due punti C e C', e dalle costruzioni fatte si avrà, in valore assoluto:

$$BA = BC = BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

e, col dovuto segno:

$$OC = OB + BC = \frac{-1-\sqrt{17}}{4},$$

$$OC = OB + BC' = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

ovvero, osservando la tab. (B):

$$OC = \frac{\eta_1}{2}, \quad OC' = \frac{\eta_2}{2}.$$

Così si sono costruite le radici della (2).

Inoltre la circonferenza $C(CA)$ taglia x, dalla parte positiva, in un punto D per cui si ha:

$$OD = OC + CD = OC + \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2} =$$

$$= \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1},$$

ossia, per la tab. (B):

$$OD = \eta_{11}.$$

Analogamente la circonferenza $C'(C'A)$ taglia x, dalla parte positiva, in un punto D' tale che è

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta_2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_2^2}{4} + 1} = \eta_{21}.$$

Portiamo poscia su x il segmento $OF = -1$, su DF come diametro descriviamo una semicirconferenza, e diciamo G il suo punto d'incontro colla retta OA. Sia H uno dei punti d'incontro di x colla circonferenza

$$G\left(\frac{1}{2}OD'\right),$$

e si chiamino K, K' i punti comuni a x e ad $H(HG)$; si ha dalla figura:

$$-OK + OK' = KK' = 2 \cdot HG = OD' = \eta_{21},$$
$$-OK \cdot OK' = \overline{OG}^2 = -OF \cdot OD = \eta_{11}.$$

Dunque $-OK$ e OK' sono le radici della (5), e sono entrambe positive, come dev'essere secondo le (6); posto che sia: $-OK > OK'$, sarà, per le diseguaglianze (7):

$$-OK = \zeta_1, \quad OK' = \zeta_2.$$

Se ora si divide OK per metà, si ha il segmento che rappresenta $\cos\frac{2\pi}{17}$, e di qui si può avere senz'altro la corda dell'arco $\frac{2\pi}{17}$, la quale sarà il lato dell'17-gono regolare inscritto nel cerchio di raggio OA.

Oppure: se in luogo di OK si prende OK', si ha dalle (6): $OK' = s_1$, cioè OK' rappresenta il lato del 34-gono regolare inscritto; segnati tre suoi vertici consecutivi, avremo il lato dell'17-gono.

§ 3. **Costruzione di Staudt.** — Prima di esporre la costruzione dell'17-gono regolare trovata da STAUDT faremo vedere come si costruiscono, secondo il metodo di STEINER, le radici di un'equazione qualunque di 2° grado

$$x^2 - px + q = 0.$$

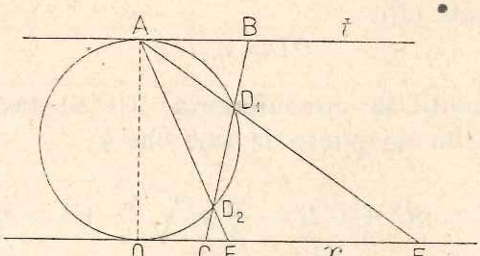

Fig. 3.

Supposto tracciato un cerchio (fig. 3) il cui raggio assumeremo come unità, si conducano nei punti diametralmente opposti O, A le tangenti x, t, e si riferiscano i punti del piano a due assi cartesiani, di cui l'asse x sia la tangente in O e l'asse y il diametro OA. Dette x_1 e x_2 le radici dell'equazione proposta, si segnino sull'asse x i punti E_1, E_2 di ascisse x_1, x_2 rispettivamente; si hanno subito le equazioni delle rette AE_1 e AE_2 cioè:

$$2x + x_1(y-2) = 0, \quad 2x + x_2(y-2) = 0;$$

moltiplicandole membro a membro avremo come equazione complessiva delle due rette:

$$4x^2 + 2(x_1 + x_2)(y-2)x + x_1x_2(y-2)^2 = 0,$$

ossia

$$4x^2 + 2px(y-2) + q(y-2)^2 = 0.$$

Se da questa sottraggo l'equazione del cerchio, che è

$$x^2 + y(y-2) = 0,$$

dopo averla moltiplicata per 4, ottengo:

$$2px(y-2) + q(y-2)^2 - 4y(y-2) = 0,$$

e questa è l'equazione di una conica passante per i punti d'incontro della circonferenza colle rette AE_1, AE_2. Ora questa conica si spezza nella retta $y - 2 = 0$, che non è altro se non la t, e nell'altra retta

$$2px + q(y-2) - 4y = 0,$$

che sarà la congiungente i punti D_1, D_2 in cui la circonferenza taglia ulteriormente le rette AE_1 ed AE_2. Chiamando B e C i punti in cui la D_1D_2 taglia rispettivamente t e x, si avranno le loro ascisse ponendo nell'ultima equazione successivamente $y = 2$ e $y = 0$; con ciò si ottiene:

$$AB = \frac{4}{p}, \quad OC = \frac{q}{p}.$$

Di qui si deduce la seguente costruzione delle radici dell'equazione $x^2 - px + q = 0$. Ad un cerchio si conducano due tangenti t e x in due punti A ed O diametralmente opposti, e si fissi su di esse un medesimo senso positivo; si segnino sopra t e x rispettivamente i punti B e C per modo che sia, anche in segno, e assumendo il raggio del cerchio come unità,

$$AB = \frac{4}{p}, \quad OC = \frac{q}{p};$$

condotta poi la retta BC, si proiettino i suoi punti d'incontro colla circonferenza da A su x: le distanze da O di quelle proiezioni rappresentano le radici della data equazione. Dall'analisi precedente risulta poi che la retta BC taglia la circonferenza in punti reali ogniqualvolta sono reali le radici. Si vede inoltre che all'infuori dei segmenti AB e OC, tutto il rimanente della costruzione si può in ogni caso eseguire linearmente, supposto dato il cerchio col suo centro.

Noi applicheremo ora questa costruzione per trovare le radici delle equazioni (2), (3), (4), (5).

Quanto alla (2) abbiamo: $p = -1$, $q = -4$; porteremo allora (fig. 5) sulla tangente x il segmento $OC = 4$, cioè eguale

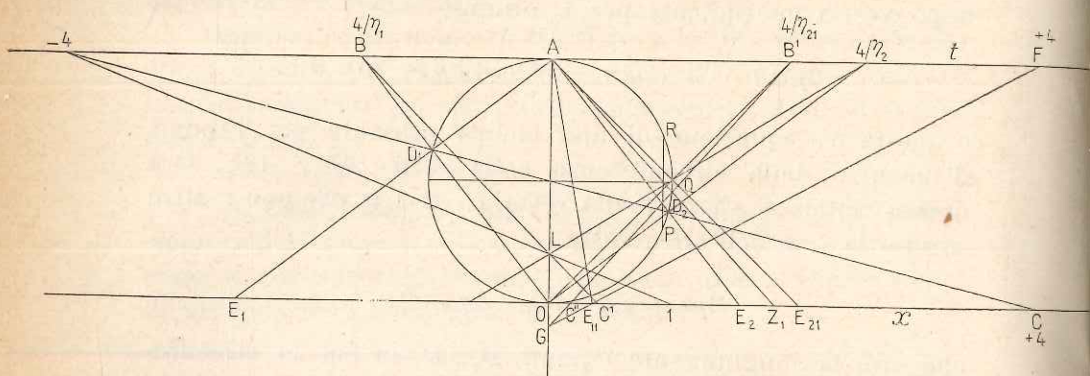

Fig. 5.

al doppio del diametro (il che si potrebbe fare senza impiegare il compasso): la retta che unisce C col centro del cerchio incontra t nel punto di ascissa -4, sicchè chiamando D_1, D_2 i punti comuni a questa retta e alla circonferenza, le rette AD_1, AD_2 incontrano x in due punti E_1, E_2 le cui ascisse rappresentano le radici η_1, η_2 della (2); se dei punti E_1, E_2 il primo è quello che ha ascissa negativa, sarà per le (8):

$$OE_1 = \eta_1, \quad OE_2 = \eta_2.$$

Per avere le radici della (3) bisogna segnare su t il punto di ascissa $\frac{4}{\eta_1}$, e su x quello di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$. Il primo non è che l'intersezione di t colla retta OD_1; difatti chiamando B quel punto, osservando che l'angolo AD_1O è retto, si ha che i triangoli AOB, AOE_1 sono simili, e fra i loro lati passa la relazione

$$AB : AO = AO : OE_1,$$

ossia

$$AB = \frac{\overline{AO}^2}{OE_1} = \frac{4}{\eta_1}.$$

Riguardo al punto di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$ sull'asse x, si osservi che la congiungente il punto di ascissa -4 della t col punto di ascissa 1 della x incontra il diametro OA in un punto L per cui si ha

$$LO : LA = 1 : -4 = -\frac{1}{4};$$

allora la retta BL incontra x in un punto C' tale che è

$$OC' : AB = LO : LA = -\frac{1}{4},$$

quindi

$$OC' = -\frac{AB}{4} = -\frac{1}{\eta_1}.$$

Pertanto la retta che unisce il punto di ascissa $\frac{4}{\eta_1}$ sulla t col punto di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$ sulla x è la stessa BC'; quindi proiettando da A su x i punti comuni alla circonferenza e alla retta BC' si avranno le radici della (3). Noi ci limiteremo a segnare la η_1 (che è quella positiva) rappresentata dal segmento OE_{11}.

In modo del tutto analogo, partendo da D_2 invece che da D_1, si trovano le radici della (4): si proietterà dunque D_2 da O su t, ed il nuovo punto lo si congiungerà con L; questa congiungente taglia la circonferenza in due punti, che, proiettati da A su x, danno le radici cercate. Anche qui noi costruiamo soltanto la radice η_1, rappresentata dal segmento OE_{21}.

Venendo finalmente all'equazione (5), per la quale si ha $p = \eta_{21}$, $q = \eta_{11}$, comincieremo a costruire su t il punto B' di ascissa $\frac{4}{\eta_{21}}$, che si ottiene proiettando da O su t l'ulteriore intersezione della circonferenza colla retta AE_{21}. Si dovrà poi costruire su x il punto di ascissa $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$; perciò, chiamando F il punto della t di ascissa $+4$, si tiri FE_{11} e sia G la sua intersezione colla retta OA, allora la GB' incontra x nel punto C'' di ascissa $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$. Difatti si ha

$$AF : AB' = OE_{11} : OC'',$$

ossia

$$4 : \frac{4}{\eta_{21}} = \eta_{11} : OC'';$$

da cui:

$$OC'' = \frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}.$$

Le radici ζ_1 e ζ_2 della (5) si avranno dunque proiettando da A su x i punti comuni alla circonferenza ed alla retta $B'C''$. Se Z_1 è il punto che corrisponde alla radice ζ_1, la retta AZ_1 incontra il diametro della circonferenza parallelo a x in un punto la cui ascissa è $\cos\frac{2\pi}{17}$; siano allora P, R i punti comuni alla corda condotta per questo punto perpendicolarmente a x, e alla circonferenza, e sia Q il punto, di ascissa positiva, in cui la circonferenza stessa è tagliata dal diametro anzidetto: saranno P, Q, R tre vertici consecutivi dell'17-gono regolare inscritto ([1]).

§ 4. **Costruzione di Gérard.** — Facciamo nella (2) la trasformazione $\eta = 2\xi$, e diciamo ξ_1 e ξ_2 le radici dell'equazione trasformata; introduciamo poi le ξ in luogo delle η nelle

([1]) In una Nota pubblicata nei *Math. Annalen* (VI, 1873) l'Affolter dimostra che la costruzione di Staudt ora indicata per l' 17-gono si può estendere a tutti i poligoni regolari costruibili con riga e compasso, ed espone dettagliatamente le costruzioni che si riferiscono al poligono di 257 lati.

formole della tabella (B): esse si muteranno in queste altre:

$$\xi_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \qquad \xi_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

$$\eta_{11} = \xi_1 + \sqrt{\xi^2_1+1}, \quad \eta_{2} = \xi_{12} + \sqrt{\xi^2_2+1},$$

$$\zeta_1 = \frac{\eta_{21} + \sqrt{\eta^2_{21} - 4\eta_{11}}}{2},$$

ove abbiamo scritto solo le cinque radici che ci occorrono.

Sia O il centro della circonferenza (fig. 4) nella quale si

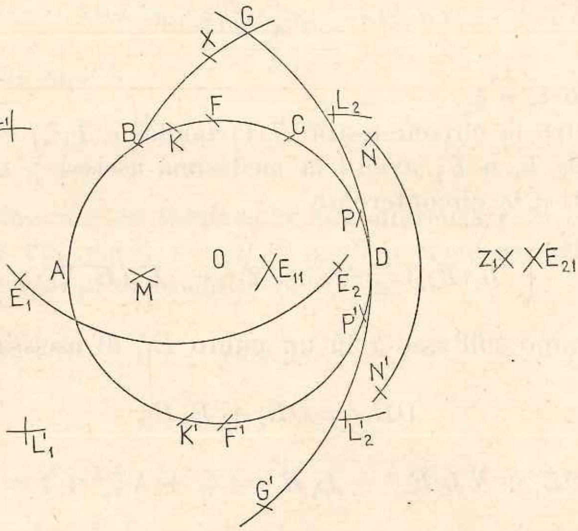

Fig. 4.

vuole inscrivere l'17-gono regolare; su di essa si segnino i punti A, B, C, D vertici di un esagono regolare, indi si costruisca il punto medio M del segmento OA (secondo l'art. 2, § 4) intanto si determini anche il punto X intersezione delle circonferenze $A(AC)$ e $D(AC)$. Essendo $OX = \sqrt{2}$ (art. 2, § 4), la circonferenza $A(OX)$ taglia la data in due punti F, F' tali che il quadrilatero $AFDF'$ è un quadrato. Assumiamo le rette OD e OF rispettivamente come assi x e y, e vediamo di costruire sull'asse x, come s'è fatto nei metodi precedenti, i punti le cui ascisse sono ξ_1, ξ_2, η_{11}, η_{21}, ζ_1. I punti K e K' intersezioni delle circonferenze $O(1)$ e $M(1)$, hanno entrambi per ascissa $-\frac{1}{4}$, e per ordinate

$$\pm\sqrt{1-\frac{1}{16}};$$

le $K(OX)$ e $K'(OX)$ si tagliano allora in due punti E_1, E_2 dell'asse x, le cui ascisse sono rispettivamente

$$-\frac{1}{4}-\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

e

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

cioè sono ξ_1 e ξ_2.

Inoltre la circonferenza $E_1(1)$ taglia le $F(\xi_1)$ e $F'(\xi_1)$ nei due punti L_1 e L'_1 aventi la medesima ascissa ξ_1 e per ordinate ± 1, e le circonferenze

$$L_1(E_1X=\sqrt{\xi_1^2+2}) \quad \text{e} \quad L'_1(E_1X)$$

s'incontrano sull'asse x in un punto E_{11} di ascissa

$$OE_{11}=OE_1+E_1E_{11}$$

$$=OE_1+\sqrt{\overline{L_1E_{11}}^2-\overline{L_1E_1}^2}=\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+1}=\eta_{11}.$$

Analogamente la $E_2(1)$ taglia $F(\xi_2)$ e $F'(\xi_2)$ nei due punti L_2 e L'_2 di ascissa ξ_2 e di ordinate ± 1, e le circonferenze $L_2(E_2X)$ e $L'_2(E_2X)$ determinano sull'asse x un punto E_{21} di ascissa η_{21}.

Infine si costruiscano i punti N, N' intersezioni delle $O(AE_{11})$ e $E_{21}(AE_{11})$: essi hanno per ascissa $\frac{1}{2}\eta_{21}$ e per ordinate

$$\pm\sqrt{\overline{ON}^2-\frac{1}{4}\eta^2_{21}}=\pm\sqrt{(\eta_{11}+1)^2-\frac{1}{4}\eta^2_{21}};$$

allora le circonferenze $N(E_{11}B)$ e $N'(E_{11}B)$ determinano sopra l'asse x un punto Z_1 di ascissa ζ_1. Difatti abbiamo:

$$NZ_1 = N'Z_1 = E_{11}B =$$

$$= \sqrt{\overline{ME}^2_{11} + \overline{MB}^2} = \sqrt{\left(\eta_{11} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\eta^2_{11} + \eta_{11} + 1};$$

quindi

$$OZ_1 = \frac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\overline{NZ}^2_1 - \left(\frac{NN'}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\eta_{11}{}^2 + \eta_{11} + 1 - (\eta_{11} + 1)^2 + \frac{1}{4}\eta^2_{21}} =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\frac{1}{4}\eta_{21}{}^2 - \eta_{11}} = \zeta_1.$$

Ed ora, siccome è

$$\zeta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

non avremo che da tagliare la circonferenza $O(1)$ colla $Z_1(1)$ per avere due punti P e P', i quali insieme con D costituiscono tre vertici consecutivi dell'17-gono.