

ARTICOLO SETTIMO

« Problemi di 3° grado: Duplicazione del cubo - Trisezione dell'angolo » di ALBERTO CONTI a Roma

INTRODUZIONE

Il problema della duplicazione del cubo è provenuto a noi dalla più remota antichità. Ne fa fede un documento autentico, una lettera inviata al re Tolomeo III dal geometra greco ERATOSTENE, nato a Cirene nel 3° secolo av. Cristo.

Ivi si legge ⁽¹⁾,

« Eratostene a Tolomeo salute:

« Narrano che uno degli antichi poeti tragici ⁽²⁾ facesse
« apparire sulla scena Mino ⁽³⁾ nell'atto di far costruire una
« tomba a Glauco ⁽⁴⁾, e che Mino accorgendosi che questa
« era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse « piccolo spazio
« invero accordasti ad un sepolero di re; raddoppialo con-
« servandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti
« i lati del sepolero ». Or è chiaro che egli si ingannava.
« Infatti, duplicandone i lati una figura piana ⁽⁵⁾ si quadrupla
« mentre una solida ⁽⁶⁾ si ottuplica. Allora anche fra i geo-

⁽¹⁾ V. ARCHIMEDIS: *Opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg (Lipsiae, 1881). Vol. III, p. 102-106.

⁽²⁾ Secondo alcuni sarebbe Euripide (cfr. REINER: *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continuas proportionalibus inter duas datas*. Gottingae, 1798, p. 20).

Altri lo negano (cfr. HEIBERG, pag. 105 del volume citato nella nota precedente).

⁽³⁾ Antico re di Creta.

⁽⁴⁾ Suo figlio.

⁽⁵⁾ Il quadrato.

⁽⁶⁾ Il cubo.

« metri si pose la questione in qual modo si potesse dupli-
 « care una data figura solida qualunque conservandone la
 « specie. E questo problema fu chiamato *duplicazione del*
 « *cubo*.

« Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per
 « primo Ippocrate da Chio trovò che se fra due linee rette,
 « delle quali la maggiore sia doppia della minore, si inscri-
 « vono due medie in proporzione continua, il cubo sarà dupli-
 « cato, e così tramutò una difficoltà in altra non minore.

« Si narra poi che più tardi i Delli spinti dall'oracolo ⁽¹⁾
 « a duplicare una certa ara, caddero nello stesso imbarazzo ⁽²⁾.
 « E dei legati vennero spediti ai geometri che convenivano
 « con Platone nell'Accademia, per eccitarli a cercare quanto
 « era richiesto. Essi se ne occuparono con diligenza e si dice
 « che, avendo cercato d'inserire due medie fra due rette,
 « Archita Tarantino vi riuscisse col semicilindro ed Eudosso
 « invece mediante linee curve. Questi furono seguiti dagli
 « altri, nel rendere più perfette le dimostrazioni, ma non
 « poterono effettuare la costruzione ed accomodarla alla pra-
 « tica, eccettuato forse Menecmo e con gran fatica.... ».

Questa, nel suo esordio, la lettera con cui Eratostene riassumeva l'origine favolosa del problema e i primi tentativi fatti per risolverlo; ed insieme con tale lettera, Eratostene inviava al re Tolomeo una sua propria risoluzione del problema stesso, che in appresso riferiremo (§ 6).

A noi preme intanto soffermarci sull'idea attribuita ad Ippocrate da Chio (vissuto nella seconda metà del V secolo av. C.) per concorde parere degli Storici, di ridurre cioè il problema in questione, all'altro cosiddetto della « *inserzione fra due segmenti dati di due medie proporzionali* », problema che, con un linguaggio più moderno, possiamo così enunciare:

Dati due segmenti a, b, costruirne altri due x, y, che con a, b, presi come termini estremi, formino la progressione geometrica

$$\therefore a : x : y : b,$$

(1) È noto in che Delo, piccola isola del mare Egeo, Apollo aveva altare e culto speciale.

(2) Donde il nome di *problema di Delo*, sotto cui talvolta designasi la questione di cui è qui fatta parola.

diguisachè si abbia

$$(1) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Invero, da questa catena di rapporti uguali deriva:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x = \frac{ab}{y} \end{cases}$$

da cui

$$(2) \quad x^3 = a^2b$$

donde apparisce che il segmento x è il lato di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo assegnato, che ha come base il quadrato di lato a e come altezza b (1).

In particolare, se si prende $b = ma$, deriva dalla (2)

$$x^3 = ma^3$$

cioè l'equazione della moltiplicazione d'un cubo per un numero intero m qualsivoglia; e, più particolarmente ancora, se si prende $b = 2a$ si ricade appunto nel problema della duplicazione del cubo di lato a .

Colla scoperta attribuita ad Ippocrate la difficoltà era soltanto cambiata di forma e non si era conseguito altro vantaggio che quello di presentare la questione primitiva come un problema di geometria piana; e invano si facevano tentativi per risolverlo, col semplice uso della riga e del compasso. Nelle condizioni in cui era posto, il problema era impossibile a risolversi, ma l'evidenza di questa impossibilità dipende da considerazioni d'una natura completamente estranea alle investigazioni dei Greci.

È tuttavia presumibile che i Greci stessi sospettassero non esser possibile risolvere il problema coi soli mezzi della geometria elementare, attesochè i risultati di ARCHITA, PLATONE, MENECEO, ERATOSTENE, APOLLONIO, NICOMEDE, DIOCLE dimostrano, come vedremo, che, almeno provvisoriamente, questi geometri dovettero rinunciare alle condizioni che s'erano imposte dapprima ed escogitare delle risoluzioni fondate su

(1) Così è manifesto che alla inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti dati a , b è ricondotto pure il problema generale della costruzione di un cubo equivalente ad un dato parallelepipedo rettangolo

metodi essenzialmente diversi da quelli da essi medesimi adoperati per la risoluzione degli altri problemi geometrici.

*
* *

Del problema della trisezione dell'angolo, non si hanno positive testimonianze circa la sua antichità, ma l'ordine dei progressi dello spirito umano non permette di dubitarne ⁽¹⁾; dopo aver diviso l'angolo in due parti uguali, la prima questione che si sarà affacciata alla mente sarà stata la divisione dell'angolo in tre parti uguali, se pure non sia stata addirittura l'altra più generale della divisione dell'angolo in due parti aventi tra loro un dato rapporto, come parrebbe di dover desumere dall'invenzione della *quadratrice* di IPPIA (§ 11). Da Ippia ad ARCHIMEDE non troviamo da menzionare altro matematico per questo problema della trisezione; è da Archimede veniamo a PAPPO, che nel IV libro della *Collezione* riferisce due costruzioni, da ritenersi fra le più antiche, ma delle quali non si sa a chi, originariamente, siano dovute.

Anche per questo problema furono fatti innumerevoli tentativi infruttuosi, e possiamo ripetere col BOSSUT ⁽²⁾ che
 « cet acharnement devint une espèce de maladie épidémique,
 « qui s'est trasmise de siècle en siècle jusqu'à nos jours :
 « elle devait cesser et elle cessa en effet pour ceux qui suivirent
 « le progrès des Mathématiques, lorsque dans les temps modernes on commença d'appliquer l'Algèbre à la Géométrie.
 « Aujourd' hui le mal est incurable pour ceux qui attaquent
 « ces questions avec les armes des anciens parce que n'étant
 « pas au courant des sciences actuelles, il n'existe aucun
 « moyen de les guérir ».

Tutte pertanto le varie ricerche occasionate da questo problema e dall'altro della duplicazione del cubo, sono state assai utili, sia per diversi strumenti ingegnosi inventati per risolvere i detti problemi in modo approssimato e più che sufficiente per la pratica, sia soprattutto per le nuove teorie geometriche di cui esse furono seme fecondo.

⁽¹⁾ Cfr. J. F. MONTUCLA: *Histoire des Mathématiques*. Paris, 1792-1807. Parte I, libro III.

⁽²⁾ Cfr. CHARLES BOSSUT: *Histoire générale des Mathématiques*. Paris, 1810.

Ciò premesso, passiamo a parlare di questi due problemi classici, dimostrando anzitutto l'impossibilità di risolverli *elementarmente*, cioè col solo uso della riga e del compasso (cfr. art. art. 4 § 10), ed accennando ai più notevoli metodi adoperati dagli antichi e dai moderni per risolvere questi problemi o mediante le coniche, o mediante linee d'ordine superiore al secondo, o con apparecchi appositamente costruiti, o con metodi elementari d'approssimazione.

Terminiamo con un cenno dei metodi atti a risolvere i problemi più generali del 3° grado, mostrando in particolare come essi si possano ricondurre tutti o alla trisezione dell'angolo o all'inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti dati.

Sull'argomento di cui trattiamo, c'è tutta una estesa letteratura di tutti i tempi e di tutti i paesi, tanta è stata l'attrattiva esercitata da questi problemi! Per averne un'idea, basta consultare la *Bibliografia* del dott. WÖLFFING ⁽¹⁾, il quale, con grande diligenza, ha rintracciati e classificati cronologicamente, centinaia di lavori relativi alla divisione dell'angolo in tre o più parti uguali.

Più difficile quindi il nostro compito per mantenerci entro limiti proporzionati all'opera di cui fa parte quest'articolo, per segnalare tuttavia le più notevoli ricerche degli antichi e dei moderni, per riconoscere la somiglianza delle varie soluzioni, affine di evitare inutili ripetizioni e per scartare, senz'altro, tutti i tentativi pienamente infruttuosi.

Possa tale considerazione meritarcì una maggiore indulgenza dei lettori!

I.

§ 1. **Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della duplicazione del cubo.** — Se l è il lato di un dato cubo e perciò l^3 ne rappresenta il volume, il lato di un altro cubo che sia doppio del precedente, è evidentemente radice dell'equazione cubica binomia

$$(1) \quad x^3 - 2l^3 = 0.$$

⁽¹⁾ Cfr. *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftliche Vereins in Württemberg* - 1900 (Januar-Oktober) - 1912 (Juli).

Se poi supponiamo, come evidentemente può farsi senza diminuire la generalità delle nostre considerazioni, che il lato del cubo dato sia uguale a 1, l'equazione (1) si trasforma nell'altra

$$(2) \quad x^3 - 2 = 0.$$

Questa equazione è irriducibile.

Tale risultato rientra in un altro più generale.

Sia $a \left(= \frac{m}{n} \right)$ un numero razionale ed $\frac{m}{n}$ sia la frazione irriducibile che lo rappresenta; allora l'equazione $x^3 - \frac{m}{n} = 0$ da cui dipende la moltiplicazione del cubo per $\frac{m}{n}$, è irriducibile se m ed n non sono ambedue cubi di numeri interi.

Infatti se l'equazione suddetta è riducibile, si deve avere identicamente:

$$x^3 - a = (x - b)(x^2 + cx + d)$$

ove b, c, d sono numeri razionali. Quindi l'equazione $x^3 - a = 0$ ammette la radice razionale $x = b$ e, ponendo b sotto forma di frazione irriducibile $b = \frac{p}{q}$, si ha

$$\frac{p^3}{q^3} = \frac{m}{n}$$

e perciò

$$p^3 = m, \quad q^3 = n \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare l'equazione $x^3 - m = 0$ ove m è un numero intero, è irriducibile se m non è cubo di un altro numero intero; quindi sono irriducibili le equazioni

$$\begin{aligned} x^3 - 2 = 0, \quad x^3 - 3 = 0, \quad x^3 - 4 = 0, \quad x^3 - 5 = 0, \\ x^3 - 6 = 0, \quad x^3 - 7 = 0, \quad x^3 - 9 = 0, \quad \text{ecc.} \end{aligned}$$

mentre sono riducibili le equazioni

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 - 27 = 0, \quad \text{ecc.,}$$

ove 8, 27... sono rispettivi cubi dei numeri interi 2, 3,...

Ora nella teoria delle equazioni algebriche si dimostra che:

Un'equazione algebrica irriducibile il cui grado non è una potenza di 2, non è risolubile per radici quadrate (1).

(1) Cfr. art. 5.

Dunque l'equazione della duplicazione del cubo

$$x^3 - 2 = 0$$

non è risolvibile per radici quadrate.

Perciò ⁽¹⁾ l'espressione che rappresenta una soluzione qualunque dell'equazione $x^3 - 2 = 0$ non è costruibile per mezzo di rette e di circoli, ossia è impossibile di risolvere il problema della duplicazione del cubo col solo uso della retta e del circolo.

E, più in generale, è impossibile di risolvere col solo uso della retta e del circolo il problema della moltiplicazione del cubo in tutti i casi nei quali il fattore di moltiplicazione non è cubo di un numero razionale, (cioè, in particolare, di un numero della serie naturale, se il fattore di moltiplicazione è un numero intero).

§ 2. Metodo di Archita per la costruzione delle due medie proporzionali. — Per concorde parere degli storici delle matematiche, la prima delle numerose soluzioni di questo problema, è dovuta ad ARCHITA di Taranto (n. verso l'a. 430 av. C.) soluzione notevolissima quantunque di dubbia utilità pratica. Il MONTUCLA stesso ⁽²⁾, che ne nega recisamente ogni vantaggio per la pratica, dicendo « quelque ingenieux que « soit ce procédé, il est tout pour l'esprit et la pratique n'en « saurait tirer aucun secours » aggiunge però che essa « est « fort satisfaisante pour l'esprit et peut faire concevoir une « idée avantageuse du genie de son inventeur ». Essa merita speciale menzione, perchè si discosta essenzialmente da tutte le altre soluzioni, escogitate dipoi per lo stesso problema. Ne è riportata una versione di EUDEMO nel commento d'EUTOCIO al libro II di ARCHIMEDE. *Su la sfera ed il cilindro*; ne è data una spiegazione dal LORIA e dal ZEUTHEN nelle loro opere « Le scienze esatte nell'antica Grecia » e « l'Histoire des Mathématiques » a cui più volte ci riferiremo in appresso. La spiegazione che segue è contenuta in un'opera italiana « Lezioni di Algebra elementare di G. BELLACCHI » (Firenze, 1884, vol. II, pagg. 134-135).

⁽¹⁾ Cfr. art. 4.

⁽²⁾ Cfr.: *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle avec une addition concernant les prob. de la duplication du cube et de la trisection.* Paris, 1831, pag. 223 e seg.

Descritta su un piano α una circonferenza col diametro OA eguale al segmento maggiore a , ed intercetta in essa la corda $OB = b$ Archita costruì la superficie cilindrica avente per direttrice la detta circonferenza OAB e le generatrici parallele ad OC normale al piano α , indi la superficie conica prodotta dalla rotazione di OB intorno ad OA , e la superficie torica generata dalla rotazione intorno ad OC di una semicirconferenza descritta con OA come diametro nel piano COA normale ad α ; le due linee intersezioni della superficie cilindrica con ciascuna delle altre due superficie hanno un punto comune M ; i due segmenti OM ed OM' , proiezione ortogonale di OM sul piano α , sono le due medie proporzionali fra OA ed OB . Infatti, giacendo M sulla superficie cilindrica, la sua

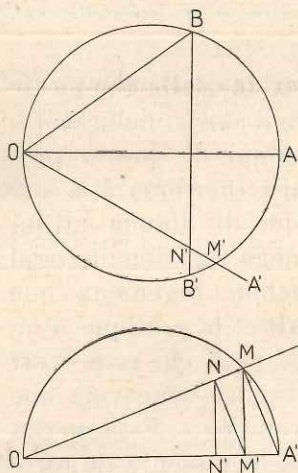


Fig. 1.

proiezione M' apparterrà alla circonferenza OAB e la semicirconferenza meridiana passante per M segnerà OM' in un punto A' tale che OA' suo diametro eguaglia OA . Si abbassi da B sopra la retta OA la normale BB' segante nel punto N' la OM' ed in B' la circonferenza OBA , il piano condotto per BB' normale ad OA interseca la superficie conica secondo un cerchio di diametro BB' e la sua generatrice OM nel punto N , onde si avranno le relazioni $ON = OB = b$; $NN'^2 = BN' \cdot N'B' = ON' \cdot N'M'$ dunque il triangolo ONM' è rettangolo in N e la retta NM' parallela ad MA' , tenendo pur conto del triangolo OMM' rettangolo in M' , conduce alla serie di rapporti eguali

$$ON : OM' = OM' : OM = OM : OA'$$

cioè

$$b : OM' = OM' : OM = OM : a$$

donde risulta, come avevamo asserito che OM' ed OM sono medie proporzionali fra a e b .

A questa soluzione di Archita possiamo connettere l'altra di EUDOSSO, di cui già facemmo parola nell'Introduzione; invero, a proposito di « *certe linee curve* » mercè le quali

Eudosso, *discepolo di Archita*, avrebbe risoluto il problema di Delo, il LORIA, il TANNERY e lo ZEUTHEN, in mancanza di notizie precise, presumono che esse fossero delle proiezioni delle curve d'intersezione delle tre superficie (conica, cilindrica e torica) realmente impiegate nella costruzione d'Archita. Interesserà notare ad ogni modo che, secondo l'osservazione fatta per la prima volta dal FLAUTI ⁽¹⁾, una semplice applicazione dei metodi della geometria descrittiva (doppia proiezione di Monge) trasforma effettivamente la costruzione di Archita in una costruzione piana *praticamente eseguibile*, e quest'applicazione riposa appunto sulla considerazione delle proiezioni sui piani coordinati delle intersezioni mutue delle tre superficie ausiliarie adoperate da Archita ⁽²⁾.

§ 3. **Duplicazione del cubo mediante coniche.** — *Metodi di MENECMO.* — Al geometro greco Menecmo (tra il 3° e il 4° sec. av. C.) devonsi le due seguenti risoluzioni del problema delle due medie proporzionali.

1°. Se a, b sono i due segmenti dati, costruiamo una prima parabola MAN (fig. 2) di parametro uguale ad a , e una

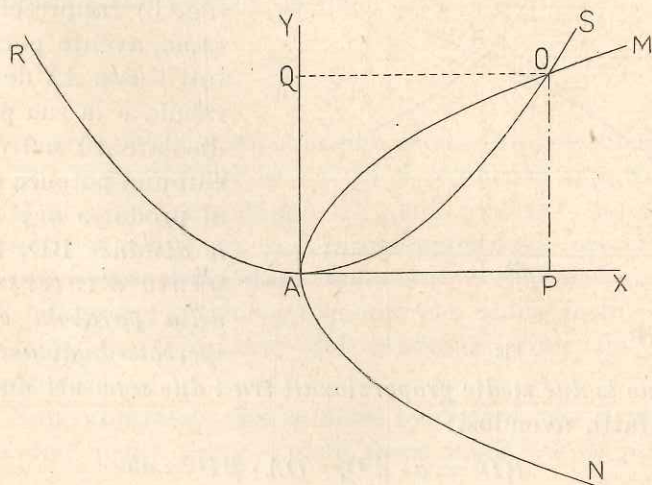


Fig. 2.

⁽¹⁾ Cfr. FLAUTI: *Geometria di sito sul piano e nello spazio*. Napoli, 1821 (2ª edizione).

⁽²⁾ Cfr. LORIA: *Le Scienze esatte nell'antica Grecia*. Libro I, pag. 97 e seg.

seconda parabola RAS avente lo stesso vertice della prima, il suo asse AY perpendicolare all'asse AX di quella, e di parametro uguale a b . Le distanze OP , OQ del punto d'intersezione di queste due parabole dai loro assi sono le due medie proporzionali tra i segmenti dati a , b . Infatti, poichè

$$AP = QO \quad \text{ed} \quad AQ = PO,$$

abbiamo

$$OP^2 = a \cdot AP; \quad \text{ed} \quad AP^2 = b \cdot OP$$

ossia:

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{AP} = \frac{AP}{b}$$

cioè:

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{b} \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare, se $b = 2a$, il segmento OP è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo.

2^a. Essendo ancora a , b i due segmenti dati, costruiamo

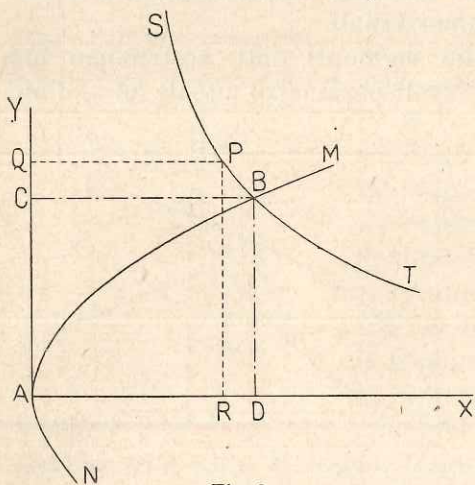


Fig. 3.

una parabola MAN di parametro eguale ad a , e l'iperbole equilatera ($xy = ab$), di cui SBT (fig. 3) rappresenta un ramo, avente per asintoti l'asse AX della parabola e la sua perpendicolare AY nel vertice, e di una potenza uguale al prodotto ab ; allora: le distanze BD , BC del punto d'intersezione della parabola e della iperbole dagli assi AX ,

AY sono le due medie proporzionali tra i due segmenti dati a , b .

Infatti, avendosi:

$$BD^2 = a \cdot AD, \quad DA \cdot BD = ab$$

ed essendo $DA = BC$, si ha:

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{b} \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare se $b = 2a$, il segmento BD è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo.

Nell'una o nell'altra delle due precedenti risoluzioni è fatto uso di due coniche, e precisamente di due parabole nella prima, e d'una parabola e d'un'iperbole nella seconda risoluzione; ma può facilmente vedersi che il problema delle due medie proporzionali può essere più semplicemente risoluto con un cerchio e una parabola o con un cerchio e un'ellisse o con un cerchio e un'iperbole.

Metodo di CARTESIO ⁽¹⁾ (n. nel 1596 - m. nel 1650). — Descritta la parabola (1) $x^2 = ay$, basta segarla con la circonferenza

$$(2) \quad \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

che passa pel vertice della parabola e il cui centro è situato nel punto di ascissa $\frac{b}{2}$ e di ordinata $\frac{a}{2}$. Dalla (2), eseguendo i quadrati e riducendo, deriva

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0$$

onde, per la (1), ne deduciamo

$$(3) \quad y^2 = bx.$$

E perciò, per la (1) e la (3),

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

donde risulta che x, y sono le due medie proporzionali fra a e b ; e che in particolare se $b = 2a$ il segmento rappresentato da x è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo.

Metodo di SLUSE ⁽²⁾. — È interessante a conoscersi pure il metodo adoperato dallo Sluse, soprattutto perchè non ci è accaduto di imbatterci in altro geometra che abbia fatto uso dell'ellisse per la risoluzione del problema delle due medie proporzionali.

« Non ignoriamo, dice lo Sluse medesimo, che il problema « delle due medie proporzionali possa risolversi in più breve

⁽¹⁾ Cfr. *La Géométrie* de René Descartes. Paris, 1886. Nouvelle édition di Hermann, pag. 75.

⁽²⁾ Cfr. RENATI FRANCISCI SLUSE: Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas vel ellipses et per quamlibet exhibitar ac problematum omnium solidorum effectio per easdem carvas - *Leodii*. Eburonum, 1668.

« maniera, ma è per dare varietà e per dare esempio di « estensione di metodo che si vuole darne l'esposizione ». Notevole è altresì la forma *puramente elementare* con cui lo Sluse spiega il suo metodo, il quale perciò riesce necessariamente *prolisso*, senza riuscire tuttavia meno interessante per questa nostra trattazione di questioni di geometria elementare.

Premettiamo tre lemmi, di cui il primo e il secondo sono manifestamente evidenti e del terzo dei quali diamo una breve spiegazione.

Lemma I. Se dal segmento ML si tolgono i due segmenti uguali NM , OL e fra N ed O si prende un punto qualsivoglia H , la differenza fra il rettangolo di MH ed HL e il rettangolo di MN ed NL è equivalente al rettangolo di NH ed HO .



Fig. 4.

Lemma II. Se nel segmento ER sono presi G , Q , F , in maniera che $RE:FE = QE:GE$, allora si ha pure che EG sta ad EQ come il rettangolo di EF ed FG sta al rettangolo di EF e QR .

(Infatti dall'ipotesi segue, *invertendo*, $FE:RE = EG:QE$ e sottraendo antecedenti e conseguenti $FE - EG:RE - QE = EG:EQ$; cioè $FG:RQ = EG:EQ$ ossia infine $EG:EQ = \text{rett}(EF, FG):\text{rett}(EF, RQ)$).

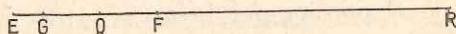


Fig. 5.

Lemma III. Se nel circolo $OAFB$ è inscritto un rettangolo $ACBD$ e dal punto F della circonferenza è condotta la normale FE ai lato AD in modo che il rettangolo di DA ed AE sia equivalente al quadrato di EF i quattro segmenti AC , AE , EF , AD sono, in quest'ordine, in progressione geometrica.

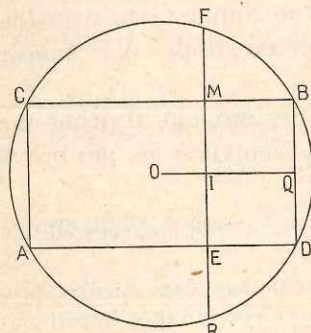


Fig. 6.

Infatti, si prolunghi FE fino ad incontrare ancora, in R , la circonferenza, e dal centro si conduca OQ perpendicolare a BD , che taglia EF in I , avremo $RE = MF$, e quindi il rettangolo (EF, FM) sarà equivalente al rettangolo (AE, ED) . Ma per ipotesi il rettangolo $(DA, AE) = \text{rett}(ED, EA) + (AE)^2$ è equivalente ad $(EF)^2 = (EF, FM) + (EF, ME)$.

Sottraendo i due rettangoli equivalenti (ED, EA) e (EF, FM) , rimarrà il quadrato di AE equivalente al rettangolo (FE, ME) ossia

$$EA : EF = EM : EA = AC : EA.$$

Inoltre per l'ipotesi fatta dell'equivalenza fra il quadrato di EF e il rettangolo di DA ed AE

$$EA : EF = EF : DA$$

dunque

$$AC : EA = EA : EF = EF : DA \quad \text{c. d. d.}$$

Ciò premesso, viene lo Sluse alla risoluzione del problema di trovare fra due segmenti dati, mediante il circolo e l'ellisse, e in innumerevoli maniere, due medie proporzionali.

Siano i due segmenti dati z, x e sia $z > x$. Si prenda $AD = z$ e perpendicolarmente ad essa $AC = x$; si compia il rettangolo $ACBD$ e si circoscriva ad esso il cerchio ADF . Sopra AC ovvero sul prolungamento, si prenda un punto qualunque P e si tracci per esso PK parallela ad AD prendendovi il segmento PK quarto proporzionale in ordine ad AP, AC, AD .

Compiuto il rettangolo $APKI$ si dividano per metà i due lati opposti PA e KI in N ed O e congiunto O con N si prolunghi ON fino in L in modo che il rettangolo di LN ed LO stia al quadrato di OK come CA sta ad AP . Si prolunghi

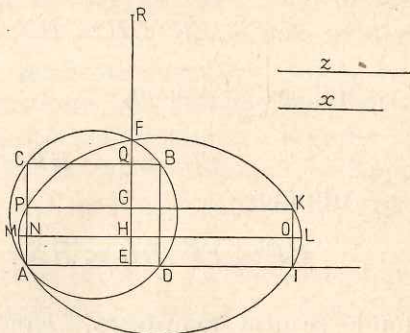


Fig. 7.

pure ON oltre il punto N di un segmento $NM = OL$ e sull'asse ML si descriva l'ellisse in cui il quadrato dell'ordinata sta al rettangolo delle due parti dell'asse maggiore (determinate dal piede dell'ordinata) nello stesso rapporto di AP ad AC . Quest'ellisse passerà, per costruzione, per P e per K e segnerà il circolo in un punto che chiameremo F , pel quale passerà la FE normale ad AD , intersecante le parallele CB, PK, NO nei punti Q, G, H . *I quattro segmenti AD, EF, EA, AC sono in progressione geometrica.*

Infatti, si prolunghi EF fino ad R in maniera che $EG : EQ = EF : ER$.

Si ha poi, dall'ellisse,

$$FH^2 : PN^2 = LH \times HM : LN \times NM$$

cioè anche

$$FH^2 : GH^2 = LH \times HM : LN \times NM$$

da cui

$$FH^2 - GH^2 : GH^2 = LH \times HM - LN \times NM : LN \times NM$$

ossia, avuto riguardo al *lemma I* e alla nota proprietà relativa alla differenza di due quadrati,

$$EF \times FG : GH^2 = NH \times HO : LN \times NM$$

oppure, permutando e sostituendo PN^2 a GH^2 ,

$$EF \times FG : OH \times HN = PN^2 : LN \times NM$$

ossia, riferendosi pure alla costruzione fatta,

$$EF \times EG : OH \times HN = AP : AC = EG : EQ.$$

Ma, pel 2° *lemma*,

$$EG : EQ = EF \times FG : EF \times QR.$$

Adunque

$$EF \times FG : OH \times HN = EF \times FG : EF \times QR$$

donde risulta manifesta l'equivalenza dei rettangoli di OH ed HN , di EF ed RQ .

Ma, a cagione del circolo, (come apparirebbe prolungando FE oltre E fino alla circonferenza)

$$\text{rett. } (EF, QF) = \text{rett. } (DE, EA)$$

e perciò

$$\text{rett. } (EF, QR) - \text{rett. } (EF, QF) \text{ ossia rett. } (RE, FE)$$

è equivalente al

$$\text{rett. } (IE, EA) - \text{rett. } (DE, EA) \text{ cioè al rett. } (ID, EA).$$

Dunque

(1)

$$RF : ID = AE : EF.$$

Inoltre per costruzione

$$(2) \quad RE:FE = QE:GE = CA:AP$$

e

$$CA:AP = KP:DA$$

cioè

$$(3) \quad CA:AP = IA:DA.$$

Dalle relazioni (2), (3) segue

$$RE:FE = IA:DA$$

da cui *dividendo*, e *permutando* i medi,

$$RF:ID = FE:DA$$

onde per la (1)

$$AE:EF = FE:DA.$$

Dunque il rett. $(DA, AE) = \text{quad. } (FE)$ e perciò, pel lemma III, DA, FA, AE , ed EQ , ovvero AC , sono in progressione geometrica. c. d. d.

Se il punto P fosse stato preso al disopra di C , sul prolungamento di AC , la dimostrazione non sarebbe stata dissimile. Per cui apparisce manifesto che potendosi prendere il punto P comunque, sulla retta AC , si avrebbero corrispondentemente altrettante ellissi che tutte servirebbero alla risoluzione del problema.

Metodo di GRÉGOIRE ⁽¹⁾ (1638-1675). — La costruzione del GRÉGOIRE fu espressa dal teorema seguente: « l'iperbola, « condotta per uno dei vertici di un rettangolo, in modo da « avere per assintoti i lati che non concorrono a questo « vertice, taglia il cerchio circoscritto al rettangolo in un « punto le cui distanze dagli assintoti sono le medie pro- « porzionali fra due lati consecutivi del rettangolo ». Il quale teorema non è che l'espressione geometrica di questa proprietà analitica, di manifesta evidenza, che cioè le curve rappresentate dalle equazioni $xy = ab$ ed $x^2 + y^2 = ay + bx$ si tagliano in un punto tale che

$$a : x = x : y = y : b.$$

⁽¹⁾ Cfr. *Opus Geometricum Quadraturae Circulis*. Anversa, 1668.

Generazione meccanica delle coniche. — Nelle soluzioni esposte nel presente paragrafo è fatto uso costantemente delle coniche. Interessa perciò, sotto l'aspetto pratico, di vedere come tali curve possono venire descritte con moto continuo. Riferiamo brevemente ciò che riguarda tale argomento, incominciando dalla notissima:

a) *Descrizione dell'Ellisse.* — Supponiamo dati i fuochi e la somma delle distanze di ciascun punto dell'ellisse dai fuochi (asse maggiore) ⁽¹⁾. Si prenda un filo flessibile ed inestendibile di lunghezza eguale all'asse maggiore; se ne fissino gli estremi nei fuochi ed applicando contro il filo una punta si faccia muovere questa sul piano per modo che i due segmenti del filo compresi fra la punta e i fuochi rimangano costantemente tesi. Se la punta mobile lascia traccia visibile sul piano, la linea descritta sarà un'ellisse.

Allo stesso scopo di descrivere l'ellisse con moto continuo si sono anche costruiti appositi strumenti detti *compassi ellittici*: uno di questi, attribuito a LEONARDO DA VINCI ⁽²⁾ è fondato sulla seguente proprietà: se un segmento striscia coi suoi estremi sopra due rette ortogonali, ogni punto del segmento (fatta eccezione del punto medio che descrive un circolo) percorre un'ellisse.

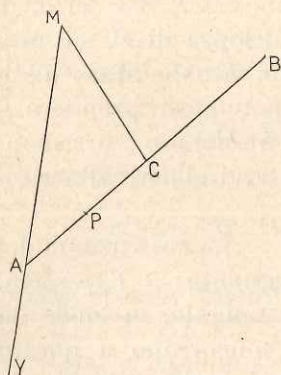


Fig. 8.

Un altro tipo molto semplice, di compasso ellittico è il seguente ⁽³⁾: abbiasi un sistema di tre segmenti uguali MC , AC , BC , articolati nel punto C e di cui MC sia girevole attorno ad M , e CA , per diritto a CB scorra col suo estremo A lungo la retta MY . Allora B si muoverà rettilinearmente essendo sempre retto l'angolo AMB , e ogni punto P della retta AB descriverà un'ellisse.

b) *Descrizione dell'iperbole.* — Supponiamo dati i fuochi

⁽¹⁾ Possiamo facilmente persuaderci che dalla determinazione dell'ellisse a cui si ricorre nel metodo di Sluse siamo ricondotti agevolmente a quest'altra determinazione secondo cui l'ellisse è fissata dati l'asse maggiore e i fuochi.

⁽²⁾ Cfr. per es. G. HOLZMÜLLER: *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik Dritter Teil*, (2ª ed.). Leipzig, 1903, pag. 97 e seg.

⁽³⁾ Cfr. HOLZMÜLLER: op. cit.

e la differenza delle distanze di ciascun punto dell'iperbole dai fuochi (asse trasverso) ⁽¹⁾. Abbiassi una riga $F'D$ (fig. 9) che possa farsi ruotare con un estremo nel fuoco F' , ed un filo flessibilissimo ed inestendibile, di cui la lunghezza differisca, in meno, da quella $F'D$ della riga per l'asse trasverso AA' . Si fissi un capo del filo all'altro estremo D della riga

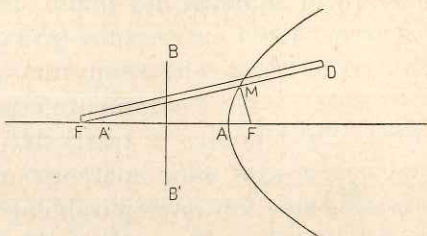


Fig. 9.

e l'altro capo nel fuoco F . Posta la riga in coincidenza col l'asse trasverso si appoggi una punta alla riga in modo da tendere il filo contro di essa e di poi facendo ruotare la riga attorno ad F' mantengasi sempre la punta appoggiata ad essa per guisa che i due tratti DM ed MF del filo sieno tesi. Se la punta così mobile lascia traccia visibile sul piano, la linea descritta sarà un ramo d'iperbole, poichè per ogni posizione M della punta si ha

$$F'M - FM = F'D - (MD + FM) = AA'.$$

Altre descrizioni meccaniche particolarmente semplici possono darsi per talune iperboli speciali; ad es. per l'iperbole equilatera in forza della sua generazione con due fasci di raggi inversamente uguali, ed anche per l'iperbole di eccentricità 2, in forza della proprietà che riferiamo nel § 13.

c) *Descrizione della parabola.* — Supponiamo dati il fuoco e la direttrice ⁽²⁾. Sia DE la direttrice ed F il fuoco della parabola: si fissi una riga in modo (fig. 10) che il suo orlo coincida colla direttrice DE e facciamo combaciare con essa una squadra SQR , lungo il suo cateto minore SQ , la

⁽¹⁾ Come per l'ellisse, possiamo qui pure osservare che a questa determinazione è facilmente riducibile ogni altra particolare determinazione dell'iperbole, ad es. quella in cui sono dati gli assintoti e un punto, come nei metodi suesposti di Menecmo e di Grégoire.

⁽²⁾ Se dovesse costruirsi una parabola, data la lunghezza del suo parametro, (come nei Metodi già svolti di Menecmo e di Cartesio), basterebbe prendere sopra una retta un segmento eguale alla metà del parametro: gli estremi di questo segmento sarebbero il fuoco e il piede della direttrice, e saremmo così ricondotti alla suindicata determinazione della parabola.

quale porti fissato nel vertice R il capo d'un filo lungo quanto il cateto QR e di cui l'altro capo sia fissato in F . Se facciamo scorrere la squadra nel piano della figura, mantenendone il lato QS combaciante colla riga, mentre con una punta appoggiata costantemente contro QR si tengono tesi i due tratti MF ed MR del filo, il cammino percorso dalla punta sarà un arco di parabola, poichè in qualunque posizione M della punta, si ha costantemente

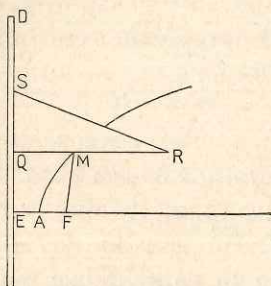


Fig. 10.

$$QM = QR - MR = MF.$$

A descrivere la parabola con moto continuo può altresì servire l'*integrafo* (cfr. art. 8), partendo da una retta presa come curva differenziale.

§ 4. **Duplicazione del cubo mediante la concoide.** — *Problemi d'inserzione.* — Per la migliore intelligenza di questo gruppo di soluzioni, giova intrattenerci un momento sopra una classe storicamente e scientificamente importante di problemi, incontrati dai geometri greci, i quali vengono oggi designati col nome di « *problemi d'inserzione* ».

Per « *inserzione* » in generale, s'intende, scrive lo ZEUTHEN ⁽¹⁾, « la costruzione d'un segmento di retta di cui « gli estremi siano situati sopra delle linee date e che passa, « esso stesso o il suo prolungamento per un punto dato. « Tale segmento può in ogni caso ottenersi *meccanicamente* « senza grande difficoltà, per mezzo d'una riga su cui si siano « fatti preliminarmente due segni a una distanza uguale « alla lunghezza del segmento dato; facendo girare questa « riga attorno al punto fissato e spostandola nello stesso « tempo in maniera che uno dei segni percorra costante- « mente una delle linee date, giungerà un momento in cui « l'altro segno si troverà sulla seconda linea data, e così « avremo effettuata l'inserzione proposta.

« Nella geometria dei Greci accade sovente di rintrac- « ciare che una costruzione è ricondotta ad un problema « *d'inserzione* » e vi si riscontra pure che, ricondotta una

(1) Cfr. l. c., pag. 64 e seg.

« costruzione proposta a un' inserzione, non è detto nemmeno
 « come poi si effettui quest' operazione ⁽¹⁾.

« Sarebbe questo un segno, dice lo Zeuthen, che vi fu
 « un tempo in cui si ammetteva l' *inserzione* come mezzo di
 « costruzione immediatamente applicabile alle costruzioni
 « geometriche, oltre la riga e il compasso ?

« Certo che, prosegue lo Zeuthen, a cagione dello scopo
 « teorico che i Greci avevano in vista nelle loro costruzioni,
 « essi non si contentarono per lungo tempo del procedimento
 « meccanico suesposto, e poichè inoltre, affine di ammettere
 « il minor numero possibile di ipotesi, bisognava ammettere
 « il minimo possibile dei mezzi di costruzione, si abbandonò
 « presto l' esecuzione diretta delle inserzioni in tutti i casi
 « in cui esse non si potevano effettuare mediante la riga e
 « il compasso, soli mezzi di costruzione postulati da Euclide
 « nei suoi Elementi.

« È quindi forse un uso più antico dell' *inserzione mecca-*
 « *nica*, che ha provocato i due Libri scritti su tale argomento
 « da Apollonio e nei quali, come è noto da Pappo, egli trat-
 « tava dell' esecuzione di (particolari) inserzioni con la riga
 « e col compasso ⁽²⁾: senza dubbio Apollonio volle così sup-

⁽¹⁾ Così, ad esempio, Ippocrate quando si serve di uno di tali problemi per costruire la terza delle sue lunule (LORIA: op. cit., I, n. 45); e così Archimede quando adopera i seguenti problemi:

1. Dato un diametro di un cerchio e l'estremo di un raggio ad esso perpendicolare, adattare una retta di data lunghezza fra il cerchio e il diametro prolungato per il modo che il prolungamento di essa passi pel detto estremo.

2. Data una corda di un cerchio ed un punto dell' arco sotteso adattare una retta di data lunghezza fra la corda e l' arco complementare per modo che il suo prolungamento passi pel punto dato. (LORIA: op. cit., II, n. 41).

⁽²⁾ I problemi trattati da Apollonio sono i seguenti:

1. Dati un semicerchio ed una retta perpendicolare al suo diametro, oppure due semicerchi coi diametri sulla stessa retta, collocare fra queste due linee una retta di grandezza data, diretta verso uno degli estremi del diametro del semicerchio.

2. Dati un parallelogrammo e un suo lato prolungato, inserire nell' angolo esterno una retta di data grandezza, il cui prolungamento passi per uno dei vertici appartenenti al lato opposto.

3. Dato di posizione un circolo, inserire in esso una corda di data grandezza che tenda ad un punto dato.

I quali problemi sono suddivisi in numerosi casi, che danno luogo a 125 teoremi e 28 lemmi. (LORIA: op. cit., II, n. 67).

« plire alla lacuna delle opere anteriori che riducevano dei « problemi alle inserzioni senza darne il modo d'esecuzione ».

« Quando le inserzioni non potevano effettuarsi nè mediante la riga e il compasso, nè mediante le sezioni coniche, un'investigazione teorica dell'inserzione stessa diveniva necessaria, ed il modo migliore era allora di stabilire una definizione e, basata sopra questa definizione, un'investigazione della curva percorsa da un'estremità del segmento da inserirsi, cioè l'estremità non appartenente a una delle linee date, risolvendosi allora il problema d'inserzione per mezzo dei punti d'intersezione di questa curva con la seconda linea data.

« Una simile investigazione fu intrapresa da NICOMEDE pel caso in cui una delle linee date è una retta ».

Metodo di NICOMEDE. — La curva del 4° grado inventata da Nicomede (250-150 av. C.) fu da lui chiamata *concoide* per la sua somiglianza con una conchiglia. La generazione di questa curva è semplicissima: prendasi una retta AB (fig. 11)

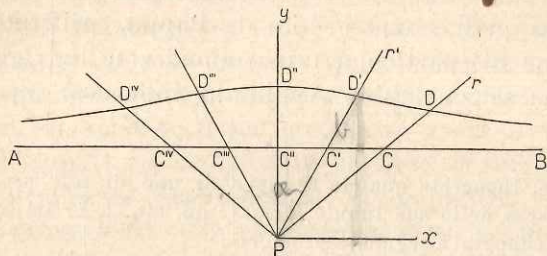


Fig. 11.

ed un punto P esterno ad essa (*retta e punto che rispettivamente diconsi base e polo della concoide*); poi, condotta pel polo una retta qualunque r , se ne stacchi al di là

della sua intersezione colla base un determinato segmento CD (che dicesi *intervallo* della concoide). Rimanendo fissi la base e il polo, e variando in un modo qualunque la retta r nelle posizioni r' , r'' , r''', ma rimanendo costante l'intervallo via via staccato da questa retta variabile, il luogo geometrico dei punti D , D' , D'' è la curva di 4° grado detta *concoide*. La sua equazione, prendendo per origine il polo (P) e per assi x , y rispettivamente la parallela alla base e la perpendicolare alla base stessa, è precisamente:

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = y^2 b^2$$

ove a rappresenta la distanza del polo dalla base e b l'intervallo della concoide.

Nicomede immaginò anche, per rendere più pratica la sua scoperta, lo strumento seguente, che permette di descrivere la concoide con moto continuo :

Abbiassi una riga MN (fig. 12) non molto spessa, in mezzo

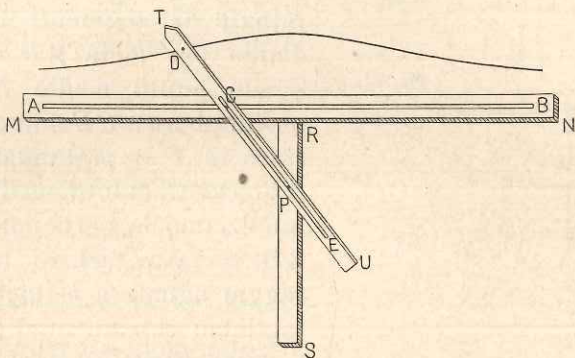


Fig. 12.

alla quale sia praticata una scanalatura AB , e perpendicolarmente alla riga MN in un suo punto (per esempio nel suo punto medio) sia rigidamente congiunta un'altra riga RS sulla quale è infissa una punta P . Sia poi TU un'altra riga mobile con una scanalatura tale che possa penetrarvi la punta P , dal principio alla fine, e senza oscillarvi. All'estremità C di questa scanalatura CE è fissata una seconda punta tale da potere scorrere entro la scanalatura AB della prima riga MN . La riga TU ha poi verso il suo termine un foro D nel quale è situata una matita.

Ciò posto, per descrivere la concoide precedentemente considerata avente AB per base, P per polo e CD per intervallo, si dispone lo strumento precedente in guisa che la scanalatura AB della riga MN si trovi in corrispondenza colla base fissata, e la punta P (che dovrà dunque esser distante dalla scanalatura AB di tanto quanto il polo P è distante dalla base AB) coincida col polo P ; allora fatta scorrere la punta C entro la scanalatura AB , è chiaro che la TU ruoterà attorno a P e la matita situata in D disegnerà sulla carta la detta concoide.

La concoide permette di risolvere subito il problema d'inserire fra due linee un segmento dato, il cui prolungamento passi per un punto dato, quando una delle due linee suddette sia una retta.

In forza di ciò vediamo come mediante la concoide di NICOMEDE sia risoluto il problema delle due medie proporzionali.

Siano AB , AD (fig. 13) i segmenti dati, e sia $AD > AB$ e per maggiore semplicità della dimostrazione supponiamo $AB = 2a$, $AD = 2b$. Costruiamo il rettangolo $ABCD$ deter-

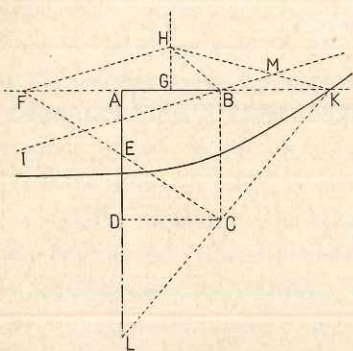


Fig. 13.

minato dai segmenti dati, dividiamo per metà AD e uniamo il suo punto medio E con C ; prolunghiamo CE fino ad incontrare in F il prolungamento di AB . Da G , punto medio di AB innalziamo la perpendicolare ad AB e fatto centro in B con raggio uguale a b (metà di AD) tagliamo con un arco di circolo la detta perpendicolare nel punto H , dalla parte di AB da cui non

è situato il rettangolo $ABCD$. Uniamo H con F e da B conduciamo la BI parallela ad HF . Descriviamo allora (per es. collo strumento precedentemente descritto) la concoide avente H per polo, BI per base e un intervallo uguale a b . La concoide così descritta incontrerà la retta AB in un punto K tale che le due rette AB , BI segheranno sulla HK un segmento $MK = b$, risolvendo dunque il problema elementare d'inserzione relativo alle due rette suddette e al punto H .

Designato con L il punto d'incontro della retta CK colla AD , proviamo che i due segmenti BK , DL sono le due medie proporzionali cercate.

Per dimostrarlo, poniamo, per maggiore semplicità,

$$BK = x, \quad DL = y.$$

In conseguenza delle costruzioni fatte,

$$HG = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$GK = a + x$$

e perciò unendo H con K ,

$$HK = \sqrt{HG^2 + GK^2} = \sqrt{b^2 - a^2 + (a + x)^2} = \sqrt{x^2 + b^2 + 2ax}.$$

Ma dai triangoli simili BMK, FHK .

$$(z) \quad \frac{FK}{BK} = \frac{HK}{MK},$$

ed osservando che $MK = b$, $FK = 4a + x$, abbiamo, sostituendo nella proporzione (z).

$$\frac{4a + x}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2 + 2ax}}{b}$$

donde, elevando a quadrato,

$$\frac{16a^2 + x^2 + 8ax}{x^2} = \frac{x^2 + b^2 + 2ax}{b^2}$$

ed eliminando i denominatori

$$16a^2b^2 + b^2x^2 + 8ab^2x = x^4 + b^2x^2 + 2ax^3$$

da cui riducendo e trasportando risulta:

$$x^4 + 2ax^3 - 8ab^2x - 16a^2b^2 = 0$$

ossia

$$x^3(x + 2a) - 8ab^2(x + 2a) = 0$$

donde

$$(x^3 - 8ab^2)(x + 2a) = 0$$

ed essendo $(x + 2a)$ differente da zero, necessariamente

$$x^3 - 8ab^2 = 0$$

ossia

$$(1) \quad x^3 = 2a(2b)^2.$$

Ora, dai triangoli simili LDC, BCK , risulta

$$\frac{2a}{y} = \frac{x}{2b}$$

donde

$$xy = 4ab$$

ed inoltre

$$y = \frac{4ba}{x}$$

e perciò

$$y^3 = \frac{4^3b^3a^3}{x^3};$$

si ha dunque per la (1)

$$y^3 = \frac{4^3 b^3 a^3}{2^3 a b^2} = 8a^2 b$$

onde

$$(2) \quad y^3 = (2a)^2 2b.$$

Dunque abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = 4ab \\ x^3 = 2a \cdot (2b)^2 \\ y^3 = (2a)^2 \cdot 2b \end{array} \right.$$

La prima e la terza uguaglianza, divise membro a membro, dànno:

$$(3) \quad \frac{y^2}{x} = 2a \quad \text{ossia} \quad y^2 = 2ax$$

e la prima e la seconda pure divise membro a membro dànno:

$$(4) \quad \frac{x^2}{y} = 2b \quad \text{ossia} \quad x^2 = 2by$$

Dalle quali (3), (4) risulta infine evidentemente:

$$\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{2b} \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare se $2a = l$, e $2b = 2l$; sarà y il lato del cubo doppio di quello avente l per lato.

Varietà di criterî sulla semplicità delle curve risolutrici. — Circa l'apprezzamento della risoluzione testè esposta e circa le semplificazioni ad essa relative si collegano le osservazioni seguenti: il CARTESIO⁽¹⁾, occupandosi delle linee che possono essere adoperate in geometria per la risoluzione dei problemi, considera come più semplice quella curva che è rappresentata da una equazione di grado o di composizione più semplice; per il NEWTON⁽²⁾ invece è più semplice la curva di

(1) Cfr. op. cit., pag. 18 e pag. 54 ove il CARTESIO si esprime precisamente così: « il est à remarquer que par les plus simples on ne doit « pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, « ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du problème « proposé plus facile, mais principalement celles qui sont du plus simple « genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée ».

(2) Cfr. *Appendix de Aequationum Constructione lineari.*

cui è più facile la descrizione meccanica. Approva anche il Newton la distinzione dei generi delle curve del Cartesio secondo le dimensioni delle rispettive equazioni; ma, secondo il Newton, ciò che deve determinare a scegliere una curva piuttosto che un'altra per la soluzione d'un problema non deve essere il *genere* della curva cioè il grado di composizione dell'equazione ma il grado di facilità per descriverla, e così si esprime: *At aequatio non est, sed descriptio quae curvam geometricam efficit..... Aequationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quae lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat.*

« Così confrontando ad es. la parabola col circolo, apparisce che la parabola ha un'equazione più semplice di quella del cerchio, ma il cerchio come più semplice a descriversi geometricamente si premette alla parabola. Il circolo e le sezioni coniche rispetto alle dimensioni delle equazioni sono dello stesso ordine, tuttavia il circolo nella costruzione dei problemi non viene con quelle annoverato; ma per la semplicità della sua descrizione, si abbassa all'ordine inferiore della retta, onde è permesso costruire mediante il circolo tutto quello che si può colla retta ».

Il Newton avendo posto a fondamento che l'aritmetica e la geometria sono due scienze da non confondersi, e che non le equazioni, come espressioni appartenenti all'aritmetica ma la descrizione delle figure, come cosa propria della geometria, debba formare il criterio di ciò che sia più o meno semplice in Geometria, viene a concludere che non gli si debba cagionare a vizio se egli preferisce per la soluzione di un problema di scegliere quella curva che è più semplice di descrizione. Ed in base a tale criterio, il Newton, fatto molto elogio della conoide di Nicomede, dicendone che essa « *simplicitate descriptionis nulli curvae praeter circulum cedit* », ne fa largo uso egli stesso per la risoluzione di molti problemi di 3° e 4° grado.

Metodo di NEWTON. — Ancora al medesimo problema innanzi risoluto colla conoide di « inserire tra due rette un segmento di lunghezza data il cui prolungamento passi per un punto dato » viene, in altro modo, ricondotta da NEWTON ⁽¹⁾ la costruzione delle due medie proporzionali.

(1) Cfr. op. cit.

Siano a, b i segmenti tra cui devono inserirsi due medie proporzionali. Preso (fig. 14) $AB = a$, dividiamo AB per metà nel punto C , si faccia centro in A e con un raggio $AC = \frac{1}{2}a$ si descriva il circolo CDO nel quale si prende una corda

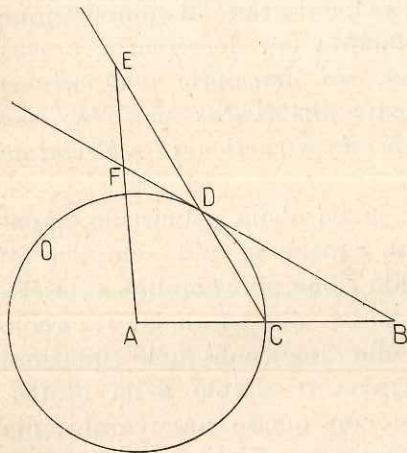


Fig. 14.

nel quale si prende una corda $CD = b$. Se ora nell'angolo EDF formato dal prolungamento dei lati CD, BD si inserisce il segmento EF uguale al raggio $\frac{1}{2}a$, e il cui prolungamento vada a passare per il punto A , i quattro segmenti AB, ED, FA, CD sono in progressione geometrica.

Il Newton non dà alcuna dimostrazione di questo suo asserto: la dimostrazione che segue è tratta da una monografia del sig. B. CARRARA: *Sui tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della Scienza* (¹).

Pel noto teorema di Ceva

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{ED} \cdot \frac{EF}{AF} = 1$$

da cui, essendo $CB = EF$, segue

$$(1) \quad AB \cdot CD = ED \cdot AF.$$

Ora, per la nota proprietà della *potenza* di un punto rispetto ad un cerchio:

$$DE \cdot CE = EA^2 - CA^2 = (AC + FA)^2 - CA^2 = AB \cdot FA + FA^2$$

(¹) Cfr. « Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali ». (Pavia) 1902-1903. A proposito di questa monografia, non per fare meschina questione di priorità ma per amore di giustizia non possiamo fare a meno di notare che, sia pel metodo d'indagine, sia, sovente, anche per la forma, vi fu fatto largo uso di questo articolo, quale comparve nella prima edizione italiana, senza che il nostro articolo apparisse minimamente citato.

dunque

$$DE(CD + DE) = FA(AB + FA)$$

ovvero

$$DE^2 \left(\frac{CD}{DE} + 1 \right) = FA \cdot AB \left(1 + \frac{FA}{AB} \right).$$

Ma dalla (1) segue

$$\frac{CD}{DE} = \frac{FA}{AB}$$

e perciò

$$DE^2 = FA \cdot AB.$$

Dalla (1) stessa si ha pure

$$\frac{AB}{DE} = \frac{FA}{CD}$$

dunque

$$AB : DE = DE : FA = FA : CD$$

ossia

$$a : DE = DE : FA = FA : b \qquad \text{c. d. d.}$$

§ 5. **Duplicazione del cubo mediante la cissoide.** — Un'altra curva notevole la cui invenzione ebbe origine dal problema delle due medie proporzionali è la *cissoide* che **DIOCLE** trovò e adoperò per la risoluzione del problema stesso.

Considerata una circonferenza qualsivoglia di centro O e raggio OA (fig. 15) siano AE , MN due suoi diametri perpendicolari, e B , F due punti del diametro AE equidistanti dal centro O ; conduciamo per B e per F , le BC , FG perpendicolari ad AE ; il punto D d'intersezione della AG colla BC , al variare della distanza $OB = OF$, descrive la curva detta *cissoide*. Ora è chiaro che se consideriamo la retta ET tangente in E alla circonferenza data e prolunghiamo AG fino ad incontrare in K questa tangente, se L è il punto d'intersezione di ON e AK , sarà evidentemente

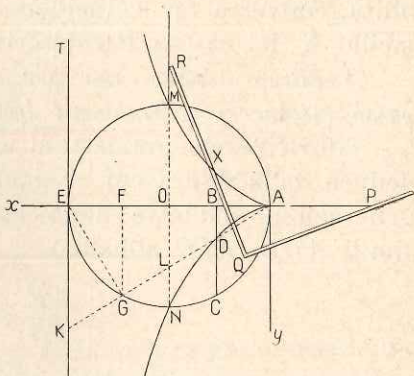


Fig. 15.

$$KL = LA, \quad GL = LD$$

e perciò anche $KG = DA$. Ed inversamente è ovvio dimostrare che se $KG = DA$ anche $OB = OF$. Onde la cissoide può anche immaginarsi generata conducendo per A (*origine*) una trasversale qualunque e staccando da questa, a partire da A , un segmento uguale alla porzione della trasversale stessa, compresa tra la circonferenza e la sua tangente nel punto diametralmente opposto ad A .

Questa curva è di terzo grado, e prendendo A per origine e per assi x, y rispettivamente il diametro AE e la perpendicolare ad esso, dalla similitudine dei triangoli AEK, ABD , e dei triangoli KEG, ABD , risulta facilmente la sua equazione

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

ove r indica il raggio della circonferenza data.

NEWTON poi insegnò come si potesse avere anche della cissoide una facile generazione meccanica per moto continuo ⁽¹⁾.

È sufficiente avere una semplice squadra: preso per polo il punto P dell'asse x (fig. 15), tale che $AP = OA$ si prenda una squadra di cui il lato minore $QR = AE$ (diametro del circolo) e con l'altro cateto comunque esteso; se si fa muovere la squadra in maniera che il lato QP passi costantemente pel punto P mentre l'estremità R del cateto uguale al diametro, scorre lungo la retta NR (con cui, per maggiore stabilità, converrà far coincidere l'orlo di una riga) il punto medio X del cateto RQ descriverà la cissoide.

Vediamo adesso come per mezzo della cissoide di Diocle possa risolversi il problema delle due medie proporzionali.

Giova perciò premettere una relazione che facilmente si deduce dalla figura cui ci siamo riferiti per spiegare le due generazioni suddette della cissoide (fig. 15). Dai triangoli simili ADB, AFG abbiamo

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AB}{BD}$$

e dal triangolo rettangolo AEG ,

$$\frac{AF}{FG} = \frac{FG}{FE}$$

(1) Cfr. NEWTON: op. cit.

onde

$$\frac{AF}{FG} = \frac{FG}{FE} = \frac{AB}{BD}$$

e poichè evidentemente:

$$FG = BC, \quad FE = AB, \quad AF = BE,$$

si ha la catena di rapporti uguali:

$$(1) \quad \frac{EB}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}$$

dalla quale apparisce che BC , BA sono medie proporzionali fra EB , BD ,

Ciò premesso, supponiamo che a , b , siano due segmenti qualunque di cui devonsi costruire le due medie proporzionali. Sia già tracciata la cissoide rispetto a un cerchio qualunque (fig. 16); determiniamo (colla nota costruzione indicata nella parte β della figura 16), la quarta proporzionale in ordine ai

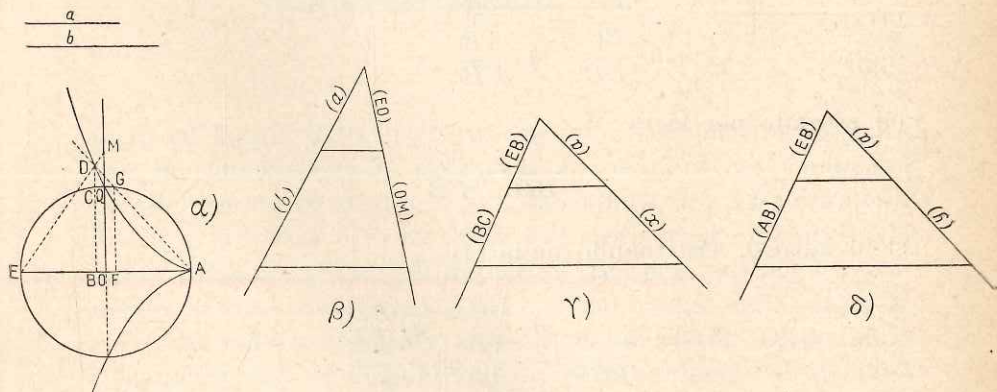


Fig. 16.

segmenti dati a , b e al raggio OE , e riportiamo questa quarta proporzionale da O verso Q , sulla retta cui appartiene il raggio OQ , di guisa che si abbia

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{EO}{OM}$$

Sia D l'intersezione della EM colla cissoide; avremo dalla similitudine dei triangoli EBD , EOM ,

$$\frac{EO}{OM} = \frac{EB}{BD}$$

e quindi, per la (2),

$$\frac{EB}{BD} = \frac{a}{b}$$

ossia

$$(3) \quad \frac{EB}{a} = \frac{BD}{b}.$$

Ora è evidente che dalla catena di rapporti uguali (1) stabilita nell'osservazione premessa, si deduce anche la seguente:

$$\frac{a \cdot EB}{a \cdot BC} = \frac{BC \cdot \frac{a}{EB}}{AB \cdot \frac{a}{EB}} = \frac{AB \cdot b}{BD \cdot b}$$

che può anche scriversi:

$$(4) \quad \frac{a}{a \cdot \frac{BC}{EB}} = \frac{a \cdot \frac{BC}{EB}}{a \cdot \frac{AB}{EB}} = \frac{AB \cdot \frac{b}{BD}}{b}$$

ed essendo per la (3)

$$\frac{b}{BD} = \frac{a}{EB}$$

si ha altresì, sostituendo nella (4)

$$\frac{a}{a \cdot \frac{BC}{EB}} = \frac{a \cdot \frac{BC}{EB}}{a \cdot \frac{AB}{EB}} = \frac{a \cdot \frac{AB}{EB}}{b}.$$

Onde le due medie proporzionali fra i segmenti dati a , b , sono

$$a \cdot \frac{BC}{EB} \quad \text{ed} \quad a \cdot \frac{AB}{EB}$$

ossia i segmenti x , y che rispettivamente rappresentano le quarte proporzionali in ordine ad EB , BC , a ed EB , AB , a ,

come è indicato dalle parti γ , δ), della figura 16 che colle altre due α), β) rappresentano il complesso delle costruzioni colle quali si risolve il problema delle due medie proporzionali coll'uso della riga, del compasso e della cissoide di Diocle.

§ 6. **Duplicazione del cubo mediante strumenti appositi.** — *Metodo di PLATONE* (429-347 av. C.). — Abbiansi tre regoli MN , PQ , NQ (fig. 17) di cui i due primi sono perpendicolari al

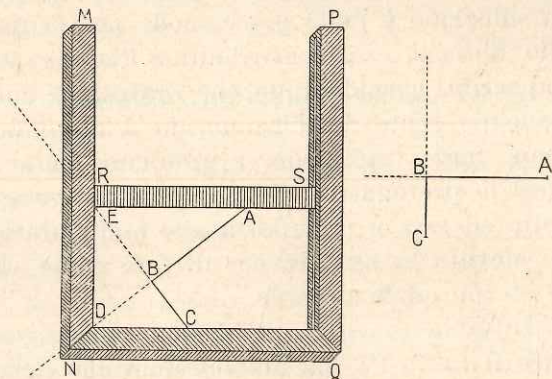


Fig. 17.

terzo ed hanno dalla parte interna una scanalatura in guisa che un quarto regolo RS possa scorrervi e così muoversi parallelamente al regolo NQ . Siano allora BC , AB i segmenti di cui è proposto di costruire *le due medie proporzionali* (nella figura abbiamo preso AB doppio di BC per indicare direttamente la risoluzione meccanica del problema della duplicazione del cubo con questo metodo di PLATONE). Disponiamo i segmenti dati ad angolo retto e prolunghiamoli al di là del vertice B ; ciò fatto disponiamo lo strumento precedentemente descritto in guisa che i punti A , C si trovino rispettivamente sui regoli RS , NQ e contemporaneamente i prolungamenti di AB e BC passino rispettivamente pei vertici D , E degli angoli formati dai regoli NQ , RS col regolo MN . Saranno allora BD , BE *le due medie proporzionali cercate fra CB e BA* . Infatti dai triangoli rettangoli CDE , DEA , per la nota proprietà che l'altezza di un triangolo rettangolo relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti che essa deter-

mina sulla ipotenusa stessa, risulta

$$\frac{CB}{BD} = \frac{BD}{BE}; \quad \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BA}$$

onde si ha la catena di rapporti uguali

$$\frac{CB}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BA} \qquad \text{c. d. d.}$$

E se (come nel caso della figura) $BA = 2BC$, sarà precisamente BD il lato del cubo doppio di quello che ha per lato BC .

Questa soluzione è delle più comode per la pratica.

Secondo Eutocio, essa è attribuita a Platone; taluno però la ritiene apocrifa, considerando che Eratostene non ne parla affatto e tenendo conto del biasimo che Platone faceva a chi risolveva con mezzi meccanici i problemi della geometria « perchè così le prerogative della geometria vengono oscurate e tolte ed essa è ricondotta allo stato pratico, invece di venire elevata in alto, invece di fare come suoi oggetti « le figure eterne ed incorporee ».

Si può tuttavia conciliare il biasimo con la soluzione di Platone, dice il Loria ⁽¹⁾, sia ammettendo che egli, per screditare le soluzioni meccaniche abbia dimostrato, col fatto, quanto fosse facile immaginarne, vuoi supponendo che Platone siasi limitato a ridurre il problema della costruzione delle due medie proporzionali fra due segmenti AB , BC , all'inserzione, fra i loro prolungamenti di un segmento DE che riuscisse perpendicolare alle rette AE , CD , mentre qualche commentatore, svisando il concetto del filosofo, abbia aggiunto di suo quel semplicissimo strumento che permette di effettuarla.

Secondo CANTOR l'apparecchio ideato da Platone sarebbe il primo strumento conosciuto per risolvere una questione geometrica; mentre ammesso apocrifo detto apparecchio, il più antico strumento geometrico conosciuto sarebbe quello che Eratostene stesso descrive nella sua lettera al re Tolomeo (cfr. Introduzione).

Metodo di ERATOSTENE. — L'apparecchio di Eratostene, che fu chiamato *mesolabio* da Pappo (donde poi prese il nome

(1) Cfr. op. cit., libro I, pag. 116.

di mesolabio ogni altro apparecchio atto a risolvere il problema delle due medie proporzionali) è fondato sul seguente ragionamento ⁽¹⁾:

Abbiansi due segmenti disuguali AE , DF (fig. 18) fra cui bisogna inserire due medie proporzionali. Sia AE disposto perpendicolarmente ad EF e su EF si costruiscano tre rettangoli eguali AG , LH , MF dei quali si traccino le diagonali AG , LH , NF : queste saranno fra loro parallele, come è ovvio persuadersene.

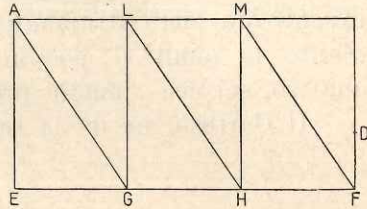


Fig. 18.

Allora, si supponga che mentre rimane fermo il rettangolo intermedio, si accostino ad esso gli altri due e precisamente AG venga sulla pagina superiore e MF sulla pagina inferiore, come è indicato

dalla figura 19, per modo che i punti A , B , C , D si dispongano in linea retta; condotta questa retta $ABCD$ prolunghiamola fino all'incontro in K della retta EF pure convenientemente prolungata. Essendo parallele le rette AE , BG , CH come pure le rette AG , BH , CF ne risulterà

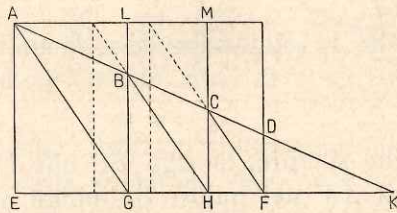


Fig. 19.

$$EK:KG = AE:BG; \quad GK:KH = BG:CH; \quad HK:KF = CH:DF.$$

Ma

$$EK:KG = GK:KH = KH:KF$$

dunque

$$AE:BG = BG:CH = CH:DF$$

ossia BG , CH sono medie proporzionali fra i segmenti dati AE , DF .

Fondandosi su tale ragionamento, Eratostene costruì uno strumento, composto di tre tavolette rettangolari, fra loro eguali e collegate in maniera da poter far scorrere le due estreme e disporle rispetto alla tavoletta rimasta immobile, nel modo suindicato.

(1) LORIA: op. cit., libro II, pag. 144 e seg.

È ovvio comprendere che tale soluzione è generalizzabile al problema dell'inserzione di quantesivogliano medie fra due segmenti dati.

Metodo di CARTESIO. — Ad un medesimo intento generale mira il metodo insegnato da Cartesio ⁽¹⁾, il quale alla sua volta inventò un altro strumento, atto a costruire delle curve mediante le quali si possono trovare non due soltanto, ma quattro, sei ecc.... medie proporzionali fra due segmenti dati.

Il Cartesio ne dà la seguente descrizione (fig. 20):

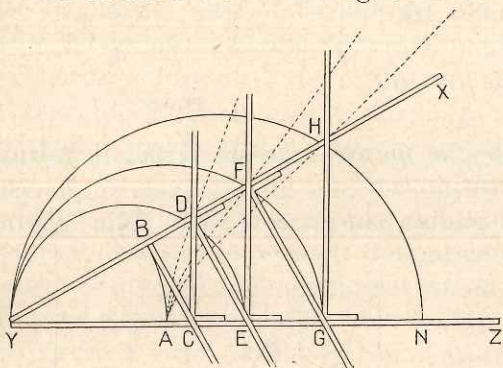


Fig. 20.

È composto di più righe congiunte fra loro in maniera che quella che è segnata x essendo fissa sulla linea AN si può aprire e chiudere l'angolo XYZ e quando è tuttochiuso, i punti B, C, D, E, F, G, H sono tutti uniti nel punto A ; ma a misura

che si apre, la riga BC che è congiunta perpendicolarmente ad XY nel punto B , spinge verso Z la riga CD che scorre sopra YZ perpendicolarmente ad essa; e CD spinge DE che scorre parimenti sopra YX rimanendo parallela a BC (cioè perpendicolare ad XY).

Alla sua volta DE spinge EF , EF spinge FG ; questa spinge GH ecc.... e se ne può concepire un'infinità di altre che consecutivamente si spingano alla stessa maniera, e di cui le une siano perpendicolari ad YX e le altre perpendicolari ad YZ .

Ora, mentre che si apre così l'angolo XYZ , il punto B descrive la linea AB che è circolare; e gli altri punti D, F, H , in cui scambievolmente si intersecano le altre righe descrivono delle linee curve di cui la figura ha designati i rami AD, AF, AH , curve di cui le ultime sono ordinatamente più composte ⁽²⁾ della prima, come questa lo è più della circonferenza.

⁽¹⁾ Cfr. op. cit., fig. 17.

⁽²⁾ Nel senso precedentemente spiegato, a proposito del criterio di semplicità delle curve assunto dal CARTESIO (§ 4).

Tale strumento può agevolmente servire alla determinazione delle due medie proporzionali fra due segmenti dati. Per es. riferendoci alla figura (fig. 20), se YA , YE sono i due segmenti dati, si descriva un cerchio il cui diametro sia YE , e se questo cerchio taglia la curva AD nel punto D , saranno YD , YC le medie proporzionali cercate. Infatti, per note proprietà

$$YB:YC = YC:YD$$

ossia, essendo $YB = YA$

$$YA:YC = YC:YD.$$

Così pure

$$YC:YD = YD:YE$$

dunque

$$YA:YC = YC:YD = YD:YE$$

ciò che prova il nostro asserto.

Manifestamente tale soluzione è generalizzabile al caso in cui siano richieste anzichè due soltanto, quattro o sei ecc. medie proporzionali.

In conformità al suo particolare criterio sulla semplicità delle linee risoltrici di qualsivoglia problema (cfr. nota 1 a pag. 24) il Cartesio stesso così parla di questa sua invenzione (1). « je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile
« pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on
« veut, ni dont la démonstration soit plus évidente que d'y
« employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument
« ci-dessus expliqué.... Mais parce que la ligne courbe AD est
« du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes pro-
« portionnelles par les sections coniques qui sont du premier;
« et aussi parce qu'on peut trouver quatre ou six moyennes
« proportionnelles par des lignes qui ne sont pas de genres
« si composés que sont AF et AH , ce serait une faute en
« géométrie que de les y employer.... ».

§ 7. **Duplicazione del cubo mediante l'integrafo.** — Recentemente ci è stato fornito un metodo per la risoluzione grafica del problema della duplicazione del cubo, dallo strumento

(1) Op. cit., pagg. 54, 55.

detto *integrato* o *integratore*, il cui ufficio principale è di tracciare la curva integrale, ossia di dare la rappresentazione grafica dell'integrale di una funzione rappresentata graficamente (cfr. art. 8°).

Questo strumento serve per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo, poichè integrando due volte la funzione $y = 6x$ che si può immaginare rappresentata dalla retta di equazione $y = 6x$, si ottiene la funzione e quindi la curva $y = x^3$, e perciò l'ascissa corrispondente all'ordinata uguale a 2 (nell'unità di misura scelta, che è indipendente da quella dello strumento) rappresenterà la $\sqrt[3]{2}$.

§ 8. Generalità relative alle costruzioni approssimate. —

All'esposizione dei metodi particolari più notevoli per risolvere approssimativamente, col solo uso della riga e del compasso, il problema della duplicazione del cubo, premettiamo alcune considerazioni generali circa un metodo grafico d'approssimazione per la costruzione d'un segmento rappresentato da un numero irrazionale qualunque μ ⁽¹⁾.

È noto che ogni numero irrazionale positivo è rappresentato da una frazione continua illimitata a denominatori interi e positivi; sia dunque:

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

la frazione continua illimitata, a denominatori interi e positivi, che rappresenta l'irrazionale μ e

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots$$

(1) Questo metodo dovuto al SYLVESTER si trova esposto dal NOVI: *Algebra Superiore*. Firenze, 1863, pag. 406. - Cfr. anche KLEIN: *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*. I. Göttingen, 1896, pag. 17.

rappresentino le successive *ridotte*, prima, seconda.... n^{esima} ,... di questa frazione continua, ossia i valori ottenuti arrestandosi rispettivamente al primo, secondo,.... n^{esimo} denominatore. È noto anche che tre ridotte consecutive qualunque sono legate da una relazione del tipo seguente:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Ciò premesso, prendansi due assi ortogonali Ox , Oy e formisi un reticolo di quadrati aventi per vertici tutti punti di coordinate $x = a$, $y = b$, ove a , b rappresentano due numeri interi positivi qualunque, variabili l'uno e l'altro da 1 a ∞ . È chiaro che le ridotte

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots$$

sono rappresentate dalle tangenti trigonometriche degli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ che i raggi vettori $OM_1, OM_2, \dots, OM_n, \dots$ condotti ai punti $M_1 \equiv (p_1, q_1), M_2 \equiv (p_2, q_2), \dots, M_n \equiv (p_n, q_n)$, formano coll'asse Ox .

Ora dalla teoria delle frazioni continue sappiamo che le ridotte sono valori via via più approssimati del numero rappresentato dalla frazione continua, e che precisamente le ridotte di posto pari sono valori via via più approssimati per eccesso, mentre quelle di posto dispari sono via via più approssimati per difetto; onde, posto

$$\text{tang } \alpha = \mu,$$

possiamo dire che gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}, \dots$ vanno successivamente crescendo sempre restando tutti minori di α , e gli angoli $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{2n}, \dots$ vanno successivamente decrescendo sempre restando tutti maggiori di α . Così costruendo le rette $OM_1, OM_2, \dots, OM_{2n-1}, \dots$ e le rette $OM_2, OM_4, \dots, OM_{2p}, \dots$ ci si può approssimare quanto vogliamo a quella retta OM che forma con Ox l'angolo α ; e corrispondentemente si può determinare colla approssimazione che più piace la tangente trigonometrica di α , cioè il segmento rappresentato da μ .

Applicando il metodo generale suesposto al caso dell'irrazionale $\sqrt[3]{2}$ che è svolgibile nella frazione continua

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

potremo determinare, elementarmente e con quanta approssimazione vogliamo, il corrispondente segmento, ossia il lato del cubo doppio d'un altro cubo il cui spigolo sia preso per unità di misura.

In casi particolari poi può essere conveniente d'adoperare qualche altro metodo speciale indicato dalla natura stessa della questione da trattarsi. Teoricamente sarà sempre preferibile un metodo in cui l'approssimazione dipenda dal numero dei tentativi che si fanno, potendosi in tal caso spingere l'approssimazione ad un grado fortissimo col semplice aumentare del numero dei tentativi stessi. Praticamente poi sarà da preferirsi un metodo che con una determinata costruzione semplice, conduca ad un risultato abbastanza approssimato a quello cercato, sì da commettere un errore minore di quanto è apprezzabile dagli istrumenti adoperati e dai nostri sensi.

§ 9. **Duplicazione del cubo mediante costruzioni elementari approssimate.** — *Metodo di APOLLONIO* (270-186 av. C.). — Siano AC , AB (fig. 21) i due segmenti dati, tra cui è proposto di costruire le due medie proporzionali. Disposti ad angolo retto i segmenti dati, costruiamo il rettangolo $ABDC$ da essi determinato; conduciamo le diagonali di questo rettangolo e, fatto centro nel punto E d'intersezione di queste diagonali, descriviamo una circonferenza, di raggio tale che la retta determinata dai suoi punti d'intersezione F , G coi prolungamenti di AB ed AC (al di là degli estremi B , C) passi pel punto D . I segmenti BF , CG sono le due medie proporzio-

nali cercate. Infatti conducendo pel punto E i raggi EF , EG e le rette EH , EK parallele rispettivamente ad AC , AB , i punti H , K saranno evidentemente i punti medi di AB , AC , e perciò avremo (Prop. VI del 2° libro d'EUCLIDE, traduzione di Betti e Brioschi):

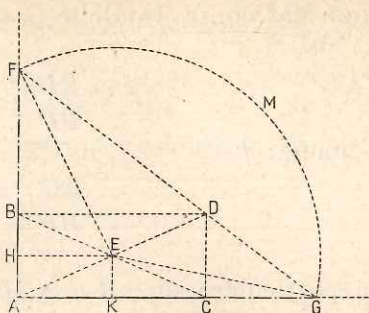


Fig. 21.

$$(1) \quad AF \cdot BF + HB^2 = FH^2$$

da cui:

$$AF \cdot BF + HB^2 + HE^2 = FH^2 + HE^2$$

ossia, pei triangoli rettangoli HBE , FHE ,

$$(2) \quad AF \cdot BF + BE^2 = FE^2.$$

Per ragione di simmetria, si ha anche la relazione

$$(2') \quad AG \cdot CG + EC^2 = EG^2$$

analoga alla (2), e che può evidentemente dedursi, come la (2) dalla (1), dalla relazione analoga alla (1) che, per la stessa proposizione d'EUCLIDE testè richiamata, può stabilirsi riferendosi al lato AC , anzichè al lato AB .

Allora essendo $EF = EG$ si ha dalle (2), (2')

$$AF \cdot BF + BE^2 = AG \cdot CG + EC^2$$

ed essendo anche $BE = EC$,

$$AF \cdot BF = AG \cdot CG$$

ossia:

$$(3) \quad \frac{AG}{AF} = \frac{BF}{CG}.$$

Dalla similitudine dei triangoli FAG , DCG si ha inoltre:

$$(4) \quad \frac{AG}{AF} = \frac{CG}{CD}$$

e dai triangoli simili DCG , FBD ,

$$(5) \quad \frac{CG}{CD} = \frac{BD}{BF}$$

onde dal confronto delle proporzioni (3), (4), (5), deriva infine:

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{CD}$$

o anche:

$$\frac{AC}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{AB} \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare se $AB = 2(AC)$, è BF il lato del cubo doppio di quello avente AC per spigolo.

Questo procedimento d'Apollonio fornisce un metodo di approssimazione per la risoluzione del nostro problema, inquantochè il raggio EF della circonferenza FMG , la cui corda FG passa pel punto D , non è ottenibile con una *determinata* costruzione mediante la riga e il compasso, ma ci si può bensì approssimare ad esso quanto vogliamo, procedendo di tentativo in tentativo, sempre avvicinando tra loro i limiti, tra cui esso viene via via contenuto.

Del tutto analoghi al metodo testè esposto sono quelli attribuiti ad ERONE d'Alessandria (2° o 3° sec. av. C.) e a FILONE da Gardara (1° secolo av. C.).

Metodo del VARGIÙ. — Tralasciando di parlare dei metodi d'approssimazione del MASCHERONI che sono già stati esposti al lettore nell'articolo 2°, passiamo ad occuparci dei più moderni metodi d'approssimazione per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo, dei quali meritano speciale menzione quelli del VARGIÙ, del BUONAFALCE e del BOCCAILE.

Il metodo del VARGIÙ ⁽¹⁾ può brevemente esporsi così: Se l è il lato del cubo da duplicare e d rappresenta la diagonale di una faccia del cubo, si costruisca la media proporzionale m_1 tra l e d poi si costruisca la media proporzionale m_2 tra d e la prima media proporzionale trovata m_1 ; e così si costruisca la media proporzionale m_3 tra la prima e la seconda media proporzionale trovate, cioè tra m_1 ed m_2 ; e così si prosegua costruendo m_4 media proporzionale tra m_2 ed m_3 ecc. ecc.: *la settima delle medie proporzionali così successivamente costruite rappresenta con molta approssimazione*

(1) SAC. GIUSEPPE IGNAZIO VARGIÙ: *Sulla duplicazione del cubo e sulla moltiplicazione di esso*. Oristano, 1877.

(con un difetto minore di $\frac{2}{1000}$) il lato del cubo doppio di quello dato. Infatti, se per semplicità supponiamo $l = 1$, è di conseguenza $d = 2^{\frac{1}{2}}$ ed abbiamo, per le costruzioni di sopra indicate,

$$\frac{1}{m_1} = \frac{m_1}{2^{\frac{1}{2}}} \text{ donde } m_1 = 2^{\frac{1}{4}};$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{m_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ donde } m_2 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot m_1^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{8}};$$

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{m_3}{m_2} \text{ donde } m_3 = m_1^{\frac{1}{2}} \cdot m_2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{16}};$$

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{m_4}{m_3} \text{ donde } m_4 = m_2^{\frac{1}{2}} \cdot m_3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{32}};$$

$$\frac{m_3}{m_5} = \frac{m_5}{m_4} \text{ donde } m_5 = m_3^{\frac{1}{2}} \cdot m_4^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{21}{64}};$$

$$\frac{m_4}{m_6} = \frac{m_6}{m_5} \text{ donde } m_6 = m_4^{\frac{1}{2}} \cdot m_5^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{43}{128}};$$

$$\frac{m_5}{m_7} = \frac{m_7}{m_6} \text{ donde } m_7 = m_5^{\frac{1}{2}} \cdot m_6^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{85}{256}}.$$

Ora, dal calcolo logaritmico risulta

$$2^{\frac{85}{256}} = 1,25878....$$

Sappiamo che la

$$\sqrt[3]{2} = 1,25992....$$

Dunque m_7 rappresenta il lato del cubo doppio di quello avente 1 per lato, con un errore minore di $\frac{1}{1000}$ in difetto.

Metodi del BUONAFALCE. — Il BUONAFALCE (1) si è occupato in tre successivi lavori del problema della duplicazione

(1) Dott. GAETANO BUONAFALCE: *Sulla scoperta di un nuovo rapporto geometrico che serve alla soluzione del problema della duplicazione del cubo.* Pisa, 1876. - 2ª edizione del predetto lavoro, emendata e con aggiunte. Pisa, 1876. — *Duplicazione del cubo e quadratura del circolo*, con aggiunte del dott. PIERACCINI. Pisa, 1878.

del cubo, e nel terzo lavoro, che è il più completo, ha dato quattro risoluzioni grafiche approssimate di questo problema. Ci limitiamo ad esporre la prima e la terza delle risoluzioni del BUONAFALCE, notevoli l'una per la semplicità della costruzione e l'altra per l'approssimazione conseguivati.

La 1^a risoluzione del Buonafalce (fig. 22). Se AB è il lato del cubo dato, costruiamo il quadrato $ABCD$ che ha per lato AB (ossia, in altri termini, consideriamo una faccia del cubo dato); conduciamo la diagonale BD di questo quadrato, dividiamola in sei parti uguali, e stacciamo dal lato DA , da D verso A , il segmento DE uguale alla sesta parte della diagonale; uniamo infine E con B . Il segmento BE rappresenta con

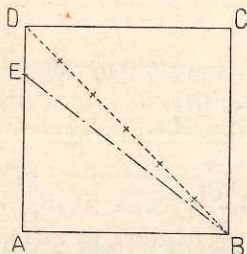


Fig. 22.

un difetto minore di $\frac{2}{1000}$ il lato del cubo doppio di quello dato. Ciò è provato dalla seguente dimostrazione analitica del Padre ANGELO SECCHI, unita, nel primo lavoro del BUONAFALCE, alla risoluzione precedentemente esposta:

Supponendo, per semplicità $AB = 1$, è $BD = \sqrt{2}$ e perciò $DE = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ora dalla figura risulta manifesto che

$$EB = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + (AD - DE)^2}$$

ossia, sostituendo,

$$EB = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{37 - 6\sqrt{2}}{18}}$$

cioè

$$EB = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{37 - 6\sqrt{2}}$$

donde, fatti i calcoli, prendendo cinque decimali della $\sqrt{2}$, troviamo

$$EB = 1,25992....$$

e questo valore di EB differisce appunto dalla

$$\sqrt[3]{2} = 1,25863....$$

di meno di $\frac{2}{1000}$.

La 3ª risoluzione del Buonafalce (fig. 23). Se il quadrato $ABCD$ rappresenta una faccia del cubo dato, si costruisca il quadrante \widehat{DKB} col centro in C e col raggio CD ; si tolga dal lato AB (da B verso A) il segmento BE uguale alla metà della differenza AK della diagonale e del lato del quadrato; e dalla diagonale AC si tolga il segmento CF uguale alla quarta parte del lato del quadrato; infine si conduca la FE e questa incontri il quadrante DKB nel punto G : il segmento DG rappresenta con un difetto minore di $\frac{2}{109000}$ il lato del cubo

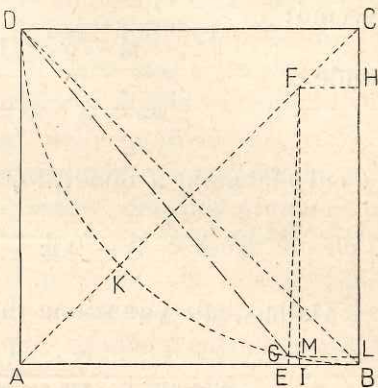


Fig. 23.

doppio di quello dato. Per dimostrarlo si conducano FH , GL perpendicolari a BC e la FI perpendicolare ad AB . Supposto uguale a 1 il lato del cubo dato, dalle costruzioni dette risulta:

$$EB = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0,2071067\dots, \quad FC = \frac{1}{4}, \quad \widehat{FCH} = 45^\circ$$

e perciò

$$FH = CH = FC \text{ sen } 45^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,1767767\dots$$

Ora:

$$EI = EB - FH; \quad IF = BC - FH$$

ed essendo

$$EI = IF \text{ cotg } \widehat{FEI}$$

ne ricaviamo:

$$\text{cotg } FEI = \frac{EB - FH}{BC - FH} = \frac{0,0303300\dots}{0,8232233\dots} = 0,0368430\dots$$

Per brevità, indichiamo rispettivamente con m , n i valori trovati di EB e della cotang \widehat{FEI} , e con x chiamiamo il valore di \overline{GL} ossia del $\cos \widehat{DKG}$, e perciò con

$$\sqrt{1 - x^2}$$

rappresentiamo

$$LC = \text{sen } \widehat{DKG}.$$

Se dal punto G si abbassa la perpendicolare alla AB (omettiamo questa costruzione nella figura, per maggiore

chiarezza) si formerà un piccolo triangolo rettangolo con un cateto rappresentato sia dalla differenza ($EB - GL$) sia da $LB \cotang FFI$; e perciò, per le notazioni stabilite, avremo:

$$m - x = (1 - \sqrt{1 - x^2})n$$

donde

$$m - n - x = -n\sqrt{1 - x^2}$$

da cui elevando a quadrato, trasportando e raccogliendo:

$$x^2(n^2 + 1) - 2(m - n)x + m(m - 2n) = 0.$$

Dalla quale equazione di secondo grado in x , ricaviamo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m - n \pm \sqrt{(m - n)^2 - (n^2 + 1)(m - 2n)m}}{n^2 + 1} = \\ &= \frac{m - n \pm n\sqrt{1 - m(m - 2n)}}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Sostituendo in questa formula ad m e ad n i loro valori 0, 2071067....; 0,0368430...., preso il segno superiore,

$$x = \cos \widehat{DKG} = \frac{0,2065941....}{1,0013574....}$$

donde, col calcolo logaritmico, ricaviamo

$$\widehat{DKG} = 78^\circ 5' 36'', 83....$$

Infine

$$\overline{DG} = 2 \operatorname{sen} \frac{\widehat{DKG}}{2} = 2 \operatorname{sen} 39^\circ 2' 48'', 41....$$

e fatto il calcolo logaritmico troviamo

$$\overline{DG} = 1,2599093....,$$

mentre la

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599209....,$$

onde, come avevamo affermato, \overline{DG} differisce meno ancora di $\frac{2}{100000}$ dal lato del cubo doppio di quello dato.

Metodo di BOCCALI ⁽¹⁾. — È altresì notevole l'approssimazione conseguita nella soluzione che il BOCCALI ha dato del problema della duplicazione del cubo; trovo però conveniente di stabilire questa soluzione seguendo una via diversa da quella percorsa dal BOCCALI. Questi, nell'introduzione del suo lavoro, così si esprime: « È vero che il BUONAFALCE « ha fatto quattro risoluzioni compresa quella encomiata dal « Padre SECCHI, (che è la *prima*), delle quali le sole terze e « quarta oltrepassano in approssimazione i limiti della mia « risoluzione, ma deve riflettersi ancora che per giungere ad « un risultato geometrico qualunque, conviene tener conto « anche della via che all'uopo si percorre; la via pertanto « da me percorsa è quella di *vere nuove scoperte geometriche*; « per conseguenza sarà sempre più soddisfacente l'incontro « della duplicazione del cubo per siffatta *deliziosa via* piuttosto che per altre vie scabrose di noiose e complicate costruzioni benchè portino a maggiore approssimazione, la quale « poi può essere anche incerta, attesa la complicata costruzione difficilmente eseguibile con precisione ed esattezza ». Ma da una lettura attenta del lavoro del BOCCALI risulta abbastanza artificiosa la via da esso pure percorsa e non appare nemmeno ben spiegata la costruzione che egli propone per una risoluzione abbastanza approssimata del problema di DELO. Perciò preferisco di ritrovare la soluzione del BOCCALI con una via del tutto diversa da quella da lui seguita.

Se AB è il lato del cubo dato, costruiamo il lato del decagono regolare stellato inscritto nel cerchio di raggio uguale ad AB , (ciò che può farsi agevolmente colle note costruzioni indicate nella parte *a*) della fig. 24. Ciò fatto, prendiamo su una retta r qualunque (fig. 24, *b*)

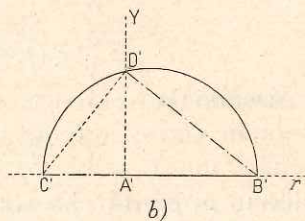
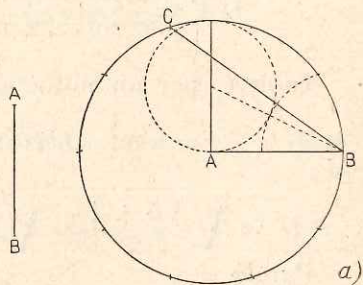


Fig. 24.

⁽¹⁾ GAETANO BOCCALI: *Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona*. Camerino, 1884.

un segmento $A'B'$ uguale al lato del cubo dato e sulla medesima retta partendo da B' (o da A') stacciamo un segmento $B'C'$ uguale al lato del decagono regolare stellato precedentemente costruito. Conduciamo dal punto A' la perpendicolare $A'Y$ alla retta r , e descritta la semicirconferenza che ha per diametro $B'C'$, congiungiamo il punto D' , comune ad essa e alla $A'Y$ con B' e con C' .

Il lato del cubo doppio di quello dato è, coll' approssimazione di $\frac{1}{10000}$ per eccesso, uguale a

$$\frac{2}{3}(\overline{A'C'} + \overline{D'B'}).$$

Infatti, posto $\overline{AB} = 1$, risulta dalle costruzioni dette:

$$BC = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} = C'B,$$

$$C'A' = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} - 1 = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2};$$

ossia:

$$C'A' = \frac{2,23606797\dots - 1}{2} = 0,6180339887\dots$$

Inoltre, per un noto teorema di geometria,

$$B'D'^2 = C'B' \cdot A'B'$$

cioè:

$$B'D' = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{3,23606797\dots}{2}} = 1,2720196495\dots$$

Perciò

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(\overline{A'C'} + \overline{B'D'}) &= \frac{2}{3}(0,6180339887\dots + 1,2720196495\dots) = \\ &= \frac{2}{3} \times (1,8900536382\dots) = 1,2600357588\dots \end{aligned}$$

ed essendo la

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599209\dots$$

vediamo appunto che tra il valore dei

$$\frac{2}{3}(\overline{A'C'} + \overline{B'D'})$$

a $\sqrt[3]{2}$ c'è una differenza minore di $\frac{2}{10000}$.

Onde, secondo questa soluzione, se per esempio il lato del cubo dato avesse dieci metri di lunghezza, si avrebbe doltanto l'eccesso di un millimetro nel lato risultante pel soppio cubo.

II.

§ 10. Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della trisezione dell'angolo. — Sia φ l'angolo che è proposto di trisecare. Da note formole di trigonometria risulta

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{3 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{3} - \operatorname{tang}^3 \frac{\varphi}{3}}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{3}}$$

e perciò ponendo $\operatorname{tang} \varphi = a$ e $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{3} = x$, abbiamo:

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

donde otteniamo l'equazione cubica completa

$$(1) \quad x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0.$$

Dalla quale equazione, fatta la trasformazione $x = y + a$ deduciamo l'equazione cubica ridotta

$$(2) \quad y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0$$

che è dunque soddisfatta dalla differenza $x - a$, cioè da

$$\left(\operatorname{tang} \frac{\varphi}{3} - \operatorname{tang} \varphi \right).$$

Dimostriamo che l'equazione (2) è *in generale* irriducibile.

Infatti, se essa fosse riducibile, il suo primo membro dovrebbe essere decomponibile in un prodotto di due fattori, di cui uno necessariamente lineare, ossia dovrebbe potersi porre sotto la forma

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta y + \gamma)$$

ove α , β , γ sono funzioni razionali di a . In particolare se a è razionale, α , β , γ dovrebbero essere razionali; e se poi a è

intero, un noto *lemma di GAUSS* (art. 5°) ci permette di affermare che, nell'ipotesi della riducibilità, il trinomio

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2)$$

dovrebbe potersi decomporre in un prodotto

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta y + \gamma)$$

dove α, β, γ sono numeri *interi*. Perciò ad ogni valore intero di a , dovrebbe corrispondere un valore intero d'una almeno delle tre radici dell'equazione (2): e corrispondentemente, essendo $x = a + y$, dovrebbe aversi un valore intero per x . Ma è facile verificare che supponendo per esempio $a = 2$, cioè $\text{tang } \varphi = 2$, non è intero nessuno dei tre valori distinti

$$\text{tang } \frac{\varphi}{3}, \quad \text{tang } \frac{\varphi + 180^\circ}{3}, \quad \text{tang } \frac{\varphi + 2 \cdot 180^\circ}{3}$$

che corrispondono agli angoli $\varphi, \varphi + 180^\circ, \varphi + 2 \cdot 180^\circ$, aventi per tangente 2. Invero, dalle tavole trigonometriche risulta in tal caso:

$$\varphi = 63^\circ 26' 5'', 81 \text{ (a meno di } \frac{1}{100} \text{ di secondo)}$$

e perciò

$$\frac{\varphi}{3} = 21^\circ 8' 41'', 93 \quad \gg$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^\circ}{3} = 81^\circ 8' 41'', 93 \quad \gg$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 141^\circ 8' 41'', 93 \quad \gg ;$$

ed essendo

$$0 < \frac{\varphi}{3} < 45^\circ$$

è anche

$$0 < \text{tang } \frac{\varphi}{3} < 1;$$

parimente, essendo

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} > 135^\circ,$$

e perciò essendo minore di 45° l'angolo supplementare di

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 180^\circ}{3},$$

la tangente di questo angolo è pure in valore assoluto compresa fra 0 e 1. Fatto poi il calcolo per l'angolo

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^\circ}{3}$$

resulta

$$\text{tang} \frac{\varphi + 180^\circ}{3} = 6,4112\dots$$

cioè

$$6 < \text{tang} \frac{\varphi + 180^\circ}{3} < 7.$$

Dunque l'equazione (2) è *in generale* irriducibile, e poichè non è di grado 2^m è irrisolvibile per radicali quadratici (art. 5°); per conseguenza (art. 4°) non è costruibile, per mezzo della riga e del compasso, il segmento y e perciò nemmeno x . È così dimostrato che è, *in generale, impossibile di risolvere il problema della trisezione dell'angolo col solo uso della riga e del compasso.*

Vediamo ora di giungere alle medesime conclusioni, prendendo a considerare la questione sotto un aspetto diverso (sebbene un po' meno elementare).

Posto $\lambda = u + iv$ ove $u = \cos \varphi$, $v = \sin \varphi$ rappresentano il coseno e il seno dell'angolo φ che è proposto di trisecare, e posto $z = x + iy$ ove

$$x = \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y = \sin \frac{\varphi}{3},$$

resulta subito, dalla nota formula di MOIVRE, l'equazione $z^3 = \lambda$, da cui il problema della trisezione viene così a dipendere.

Dimostriamo anzitutto che l'equazione $z^3 = \lambda$ è algebricamente irriducibile, cioè che non può aversi identicamente

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\} \{z^2 + \mu(\lambda)z + \nu(\lambda)\},$$

designando f , μ , ν funzioni razionali di λ .

Infatti si avrebbe

$$f(\lambda) = \frac{\Psi(\lambda)}{\chi(\lambda)},$$

ove Ψ, χ denotano due polinomi:

$$\Psi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots$$

$$\chi(\lambda) = b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \dots$$

E perciò dovrebbe aversi *identicamente*:

$$\frac{\Psi^3(\lambda)}{\chi^3(\lambda)} = \lambda.$$

Ora che questa uguaglianza non possa essere soddisfatta *identicamente*, cioè per qualunque valore di λ , risulta evidente dall'osservare che supposto che l'espressione $\frac{\Psi^3}{\chi^3}$ equivalga ad un polinomio in λ , il grado di questo polinomio sarà uguale a $3(n - m)$ e perciò mai uguale a 1.

L'equazione considerata $z^3 = \lambda$, rappresenta, come abbiamo detto, l'equazione per la trisezione dell'angolo φ quando si limita la variabilità di λ , ponendo

$$\lambda = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

cioè

$$\text{mod } \lambda = 1;$$

essa rappresenta d'altra parte l'equazione da cui dipende la *generale moltiplicazione del cubo* per un numero reale arbitrario, quando si limita la variabilità di λ ai valori reali.

Ora dall'essere l'equazione $z^3 = \lambda$ *algebricamente irriducibile* si può desumere che essa è *in generale irriducibile* anche nei due casi

$$\lambda = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{mod } \lambda = 1), \text{ e } \lambda \text{ reale};$$

altrimenti lo spezzamento in fattori di $z^3 - \lambda$ cioè l'uguaglianza

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\} \{z^2 + \mu(\lambda) \cdot z + \nu(\lambda)\}$$

dovrebbe essere possibile rispettivamente per

$$\lambda = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

o per λ reale; e questo non può accadere senza che tale uguaglianza sussista per *tutti* i valori complessi di λ , giacchè se le due funzioni analitiche

$$z(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda} \quad \text{e} \quad z = f(\lambda)$$

prendono uno stesso valore in tutti i punti d'una linea del piano complesso (rispettivamente sul cerchio dei punti di modulo uguale a 1, e sull'asse reale) non possono prendere valori diversi nel restante piano.

Osservazione. Le considerazioni precedenti mostrano in un tempo l'irriducibilità *in generale* delle due equazioni, per la trisezione dell'angolo, e per la moltiplicazione del cubo (per un numero reale *arbitrario*), onde si desume l'impossibilità di risolvere geometricamente quei problemi colla retta e col circolo.

Non pertanto vi possono essere *casi particolari* in cui l'equazione sopra considerata diventi riducibile; così per es. per la moltiplicazione del cubo, quando λ è il cubo d'un numero intero, ma non per altri valori interi di λ (§ 1).

Anche nel caso della trisezione dell'angolo si hanno casi particolari di riducibilità e quindi *particolari angoli trisecabili* colla riga e col compasso.

Sia ad esempio $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ ove n non è divisibile per 3. Per l'ipotesi fatta per n , sappiamo che si possono sempre determinare due numeri interi x, y in modo da soddisfare all'equazione d'analisi indeterminata:

$$nx - 3y = 1.$$

Per così fatti numeri x, y si avrà dunque:

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n}$$

e quindi l'angolo $\frac{\varphi}{3}$ si potrà determinare come differenza tra l'angolo multiplo dell'angolo $\frac{2\pi}{3}$ (del triangolo equilatero) secondo il numero x , e l'angolo multiplo secondo il numero y dell'angolo $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ *supposto dato*.



Dunque tutti gli angoli $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ e perciò anche gli angoli $m\varphi = \frac{2m\pi}{n}$, ove n non è divisibile per 3, sono trisecabili per mezzo della riga e del compasso.

A proposito poi degli angoli $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ trisecabili elementarmente, giova osservare che di questi angoli φ possono costruirsi elementarmente soltanto quelli per cui n decomposto in fattori primi è della forma

$$2^{\nu}(2^{2^{\nu_1}} + 1)(2^{2^{\nu_2}} + 1)$$

con $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0, \dots$ (cfr. art. 5°) (1).

§ 11. Trisezione dell'angolo mediante la quadratrice di Ippia. — L'indagine storica sulle prime ricerche relative alla trisezione dell'angolo ci fa risalire, secondo il parere dei più illustri storici della matematica, fino ad IPPIA d'Elea, filosofo, sofista e matematico, vissuto nel 4° secolo av. C., a cui si attribuisce l'invenzione di una curva detta *quadratrice* che vedremo come possa adoperarsi pel nostro problema.

Probabilmente la curva in questione non ebbe alcun nome speciale dall'inventore, mentre fu poi chiamata *quadratrice* da Dinocrate e dagli altri che, in appresso, credettero di potersene valere per la *quadratrice del circolo* (2).

Questa curva può essere così generata: dato un quadrato $ABCD$ (fig. 25), si descriva, col centro in A , la circonferenza BED e si supponga che \overline{AB} si muova

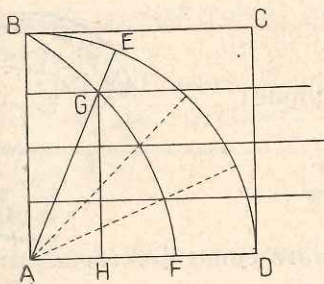


Fig. 25.

uniformemente ruotando attorno ad A ; \overline{BC} , alla sua volta, si muova uniformemente mantenendosi parallelo ad AD e scorrendo col suo estremo B lungo BA . Supposto che questi due movimenti si inizino nello stesso istante e procedano uniformemente, le rette mobili AB, BC si segheranno, in ogni loro posizione, in

(1) Per particolari ricerche in proposito cfr. BOSAUQUET: *Treatise on the trisection of the angle of 30° and any other plane angle*. London, 1877.

(2) Cf. LORIA: l. c., I, n. 38; ZAUTHEN: l. c., pag. 62, ecc.

un punto mobile insieme con esse: il luogo di questo punto è la curva detta *quadratrice*, la cui principale proprietà è questa: condotta una retta qualunque per A , come AE nella figura, tutto il quadrante circolare BED sta all'arco DE come BA sta a GH ordinata del punto G d'intersezione di AE con la quadratrice; proprietà questa che è un'immediata conseguenza della genesi della curva stessa. Cioè, indicando con y l'ordinata d'un punto qualsivoglia della quadratrice in un sistema di coordinate ortogonali (AD , AB), e con θ l'angolo che fa il raggio dello stesso punto con l'asse delle ascisse, la curva è definita dall'equazione

$$\frac{y}{b} = \frac{\theta}{\rho}$$

ovè indichiamo con ρ un angolo retto e con b il valore di y corrispondente a $\theta = \rho$.

Ossia

$$y = k\theta \quad \text{con} \quad k = \frac{b}{\rho}.$$

Donde apparisce subito che questa curva può servire alla divisione d'un angolo in parti eguali, oppure in due parti in un dato rapporto qualsivoglia. Per es. nel caso della figura, dovendosi trisecare l'angolo EAD basta trisecare l'ordinata GH del punto d'intersezione di AE con la quadratrice, e condurre i raggi ai punti della quadratrice corrispondenti ai punti di divisione di GH .

Dalle stesse precedenti considerazioni risulta pure manifesto che suscettibile delle medesime applicazioni della quadratrice è la cosiddetta *spirale d'Archimede* ($\rho = a\varphi$), traiettoria d'un punto che si allontana con moto uniforme su di una retta, mentre questa ruota uniformemente intorno a un suo punto.

§ 12. **Riduzione della trisezione a problemi d'inserzione.** — Secondo ciò che viene riferito da PAPP0, fino dall'antichità il problema della trisezione dell'angolo fu ricondotto a due problemi classici d'inserzione.

L'uno, scrive lo Zeuthen, di cui non si può fissare la data, potrebbe essere benissimo del V secolo, mentre l'altro

compreso nei *Lemmata Archimedis*, conservatici dagli Arabi, data forse da Archimede.

1°. Sia l'angolo BAC (acuto) da trisecare (fig. 26): si conduca da un punto B qualsivoglia dal lato BA , la perpen-

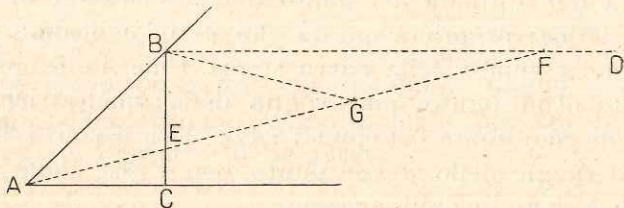


Fig. 26.

dicolare BC all'altro lato e la parallela BD al lato stesso; poi tra BC e BD si inserisce un segmento $EF = 2AB$ in maniera che il suo prolungamento passi per A : si forma così l'angolo CAE che è la terza parte dell'angolo dato BAC .

Infatti, se G è il centro di EF e si congiunge G con B , si ha:

$$EG = GF = BG = AB;$$

e perciò

$$\widehat{GAB} = \widehat{BGA} = 2\widehat{BFG} = 2\widehat{CAE}$$

e, per conseguenza,

$$\widehat{CAE} = \frac{\widehat{CAB}}{3} \quad \text{c. d. d.}$$

2°. Sia BAC l'angolo (acuto) da trisecare (fig. 27); si

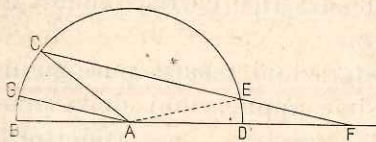


Fig. 27.

descriva un cerchio di centro A e di raggio arbitrario e siano B, C, D i punti di intersezione di questo cerchio coi lati dell'angolo dato e col prolungamento di AB al di là di A ; poi

tra la retta AD e la circonferenza descritta si inserisce un segmento EF uguale al raggio AC , in maniera che il suo prolungamento passi per C : si forma così l'angolo EFD che è la terza parte dell'angolo dato.

Infatti, congiungendo A con E , segue subito dalle costruzioni fatte che

$$\widehat{ACE} = \widehat{CEA} = 2\widehat{EFD}$$

ed essendo

$$\widehat{CAB} = \widehat{ACE} + \widehat{EFD}$$

si ha

$$\widehat{CAB} = 3 DFE$$

cioè

$$\widehat{DFE} = \frac{\widehat{CAB}}{3}$$

come avevamo asserito. E perciò, conducendo AG parallela ad FC , l'angolo GAB così ottenuto è pure la terza parte dell'angolo dato CAB (¹).

A completare l'esposizione dei due metodi precedenti, in entrambi i quali è supposto che l'angolo dato sia acuto, conviene aggiungere che se l'angolo dato è retto è ben noto come sia possibile trisecarlo *elementarmente*; e se l'angolo dato è ottuso possiamo, con mezzi *elementari*, scomporlo nella somma di un angolo retto e di uno acuto, alla cui trisezione viene così ridotta quella dell'angolo ottuso stesso.

§ 13. **Trisezione dell'angolo mediante coniche.** — *Metodi riferiti da PAPPO.* — Vi fu ostinazione senza dubbio, per lungo tempo, scrive il MONTUCLA (²) a cercare per mezzo della geometria elementare la soluzione dell'uno e dell'altro dei problemi d'inserzione esposti nel paragrafo precedente a cui era stato ridotto il problema della trisezione. Le due inserzioni richieste sono, al pari del problema che è ad esse ridotto, dipendenti da equazioni di terzo grado in generale irriducibili e per conseguenza non potrebbero essere effettuate per mezzo del cerchio e della retta. Dopo un gran numero di tentativi, infruttuosi o che non avevano prodotto che dei parallogismi, si pensò di rivolgersi alle sezioni coniche e a diverse altre curve.

(¹) Questo metodo, come abbiamo precedentemente detto, data forse da Archimede; ciò è presumibile dal testo dell'VIII lemma dei cosiddetta *Lemmata Archimedis*, che precisamente è così espresso: « Se si prolunga una « corda qualunque CE (fig. 27) di un cerchio di un segmento EF uguale al « raggio e si unisce al centro A l'estremità del prolungamento si avranno « così due secanti FEC , FDB che intercettano sulla circonferenza data « due archi non adiacenti CB , DE , di cui uno è il triplo dell'altro » donde è manifesto che vi è soltanto una lieve differenza formale dal metodo suesposto.

(²) L. c., pag. 240 e seg.

PAPPO riferisce il modo ingegnoso col quale alcuni geometri, di cui non sono citati i nomi, impiegarono l'iperbole per risolvere il secondo dei due problemi d'inserzione suesposti a cui abbiamo veduto ridursi quello della trisezione.

Riprendiamo perciò quel secondo problema, e notiamo subito, per metterci dallo stesso punto di vista di Pappo che esso può interpretarsi anche in quest'altra maniera: dato l'angolo CAB (fig. 28) (acuto), condotta da C la CL perpendicolare ad

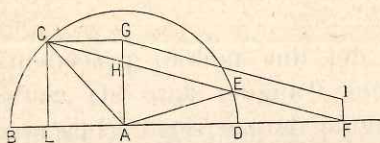


Fig. 28.

AB e completato il rettangolo $LAGC$, prolungando AB , oltre A , si inserisca tra la retta AD e la retta AG un segmento HF doppio di AC e il cui prolungamento passi per C : sarà $\widehat{HFA} = \frac{CAB}{3}$.

Adesso si completi il parallelogrammo $GHFI$; dai triangoli CLF , CGH rispettivamente equiangoli abbiamo:

$$FL : LC = CG : GH$$

cioè

$$FL : AG = AL : FI$$

da cui

$$FL \cdot FI = AG \cdot AL$$

Donde segue che il punto I appartiene a un'iperbole cogli assintoti LF , LC e passante pure pel punto G ; ora HF è dato in grandezza, uguale al doppio di AC , e per conseguenza è dato pure GI ciò che mostra che il punto I , oltre che alla suddetta iperbole, appartiene pure alla circonferenza di centro G e di raggio $GI = 2AC$; dunque I è la comune intersezione di questo cerchio e di quell'iperbole. Agevole perciò ne è la determinazione poichè non c'è che da descrivere un'iperbole pel punto G colle rette LF , LC per assintoti, e un cerchio di centro G e di raggio uguale al doppio di AC ; il punto nel quale queste due curve si intersecheranno sarà tale che conducendone l'ordinata IF si avrà il punto F e così sarà fissata la posizione del segmento HF dalla cui inserzione dipende come abbiamo visto la determinazione della terza parte dell'angolo CAB .

Da Pappo stesso (*Collect. mathém.* 1.° 4°, prop. 34) viene riferita un'altra soluzione del problema della trisezione nella

quale è fatto uso ancora dell'iperbole, ma in modo differente, senza passare attraverso un problema d'inserzione. Essa è sì elegante, scrive il Montucla, che merita davvero farne menzione. Consiste nell'applicazione di una proprietà dell'iperbole i cui assintoti formano un angolo di 120° : fig. 29, prendendo sul suo asse, a partire da un vertice, un segmento BA eguale alla metà dell'asse trasverso DB e congiungendo questo punto A e l'altro vertice D con un punto qualunque E dell'iperbole, l'angolo EAD è, in ogni caso, doppio dell'angolo EDA (1).

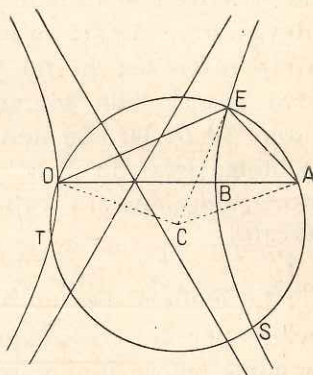


Fig. 29.

Ne segue che se si descrive un arco qualunque di cerchio pei punti D, A , la parte AE sarà il terzo dell'arco così descritto. Agevole è adesso comprendere l'applicazione che può farsi di questa proprietà per trisecare

(1) Questa notevole proprietà dell'iperbole contenuta in assintoti tra loro inclinati di 120° è poco nota: ne diamo perciò una dimostrazione:

Premettiamo che dall'ipotesi fatta per l'angolo degli assintoti discende subito che (adoperando le notazioni classiche a, b pei semiassi) $b = a \operatorname{tang} 60^\circ = a\sqrt{3}$ e perciò l'eccentricità $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2$ e l'equazione dell'iperbole riferita agli assi cioè, in generale, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ si particolarizza così:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 \quad \text{da cui} \quad y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Ciò premesso, osserviamo che conducendo l'asse HI di \overline{DA} (fig. 30) e unendo I con A per dimostrare che $\widehat{EAD} = 2\widehat{EDA}$ basta provare che IA è bisettrice dell'angolo A e a tal fine basta provare che

(1) $DI : IE = DA : AE.$

Conducasi l'ordinata EP ; avremo

$$DI : IE = DH : HP$$

e perciò se sussiste la (1) deve sussistere pure che

(2) $DH : HP = DA : AE$

e reciprocamente.

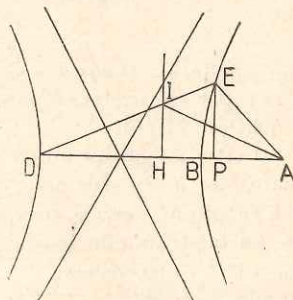


Fig. 30.

cerchio DEA che un angolo qualunque: basterà descrivere su DA l'arco di misura l'angolo proposto DCA ⁽¹⁾ (C indicando il centro); ed \widehat{ECA} sarà la terza parte dell'angolo DCA .

Osservazione. L'iperbole suddetta, al tempo stesso separa dalla circonferenza DEA l'arco AS uguale ad un terzo dell'arco ASD che rimane dopo aver tolto dalla circonferenza intera l'arco AED ; ed inoltre l'altro ramo dell'iperbole taglia la circonferenza in un punto T tale che l'arco AST è la terza parte della somma della circonferenza intera e dell'arco AED . Di che non ci sorprendiamo, ricordando che il problema essendo di 3° grado conduce necessariamente a una costruzione con tre valori differenti per la corda dell'arco cercato.

Le coniche furono adoperate dai geometri moderni come mezzo per la trisezione dell'angolo, e dettero luogo alle seguenti costruzioni notevoli.

Metodo di CARTESIO ⁽²⁾. Per trattare della trisezione d'un angolo o d'un arco, Cartesio pone così il problema: presa

Ora $DH = \frac{3}{2}a$; $HP = x - \frac{a}{2}$; $AE = \sqrt{AP^2 + PE^2} = \sqrt{(2a-x)^2 + y^2}$; $DA = 3a$

onde la proporzione (2) equivale all'altra

$$\frac{3}{2}a : \left(x - \frac{a}{2}\right) = 3a : \sqrt{(2a-x)^2 + y^2}$$

la quale, manifestamente equivale all'equazione

cioè $2x - a = \sqrt{(2a-x)^2 + y^2}$ da cui $(2x-a)^2 = (2a-x)^2 + y^2$

$$4x^2 + a^2 - 4ax = 4a^2 + x^2 - 4ax + y^2$$

donde riducendo segue

$$y^2 = 3x^2 - 3a^2$$

che è appunto l'equazione di questa particolare iperbole. Sussiste dunque la (2) e per conseguenza pure la (1) e perciò IA è bisettrice dell'angolo A , ed $\widehat{EAD} = 2\widehat{EDA}$.

⁽¹⁾ Per maggiore schiarimento di questo punto aggiungiamo che determinato, nel modo ben noto, l'angolo alla base d'un triangolo isoscele di cui l'angolo al vertice sia quello da trisecare, costruiremo con AD come base un tal triangolo isoscele ADC . Dopo di che fatto centro in C , con raggio CD descriveremo la circonferenza, di cui l'arco DEA misurerà l'angolo proposto.

⁽²⁾ Cfr. *La Géométrie*, op. cit., pag. 75 e seg.

come unità il raggio del circolo a cui appartiene l'arco da trisecare $ABCD$ (fig. 31), la cui corda $AD = q$ e indicata con z la corda AB della terza parte dell'arco $ABCD$ che supponiamo già trisecato dai punti B, C , condotti i raggi OA, OB, OC, OD e tracciata per B la BF parallela a CO , dai triangoli AOB e BAE rispettivamente equiangoli (perchè hanno \widehat{ABO} comune ed $\widehat{AOB} = \widehat{BAE}$) segue

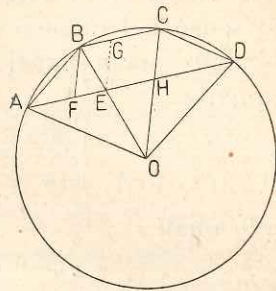


Fig. 31.

(1) $AO : AB = AB : BE.$

E dai triangoli BAE ed EBF pure rispettivamente equiangoli (perchè hanno \widehat{BEF} comune ed $\widehat{FBE} = \widehat{BOC} = \widehat{BAE} \dots$) segue

(2) $AB : BE = BE : FE.$

Ossia, dalle precedenti proporzioni (1), (2), segue:

$1 : z = z : BE; \quad z : z^2 = z^2 : FE$ donde $FE = z^3.$

Ed essendo $AE = HD = AB$ ed $EH = BC - BG$ (tracciata EG parallela ad HC) cioè $EH = AB - FE$ e perciò $AD = 3AB - FE$ ne discende

$q = 3z - z^3$ ossia z soddisfa all'equazione

(3) $z^3 = 3z - q.$

Ciò premesso, si descriva, secondo Cartesio, una parabola di parametro uguale alla metà del raggio del circolo a cui appartiene l'arco da trisecare, ossia uguale a $\frac{1}{2}$ secondo la posizione precedentemente fatta; si prenda sull'asse a partire dal vertice una ascissa $AB = 2$ e da B si innalzi un segmento BC perpendicolare all'asse ed eguale a $\frac{q}{2}$ metà della corda dell'arco dato. Preso C come centro e CA come raggio,

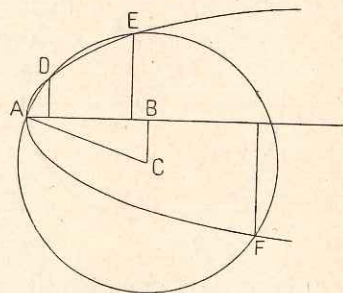


Fig. 32.

si descriva una circonferenza, la quale avrà colla parabola, oltre al vertice, tre ulteriori intersezioni. le cui ordinate sono i tre valori della corda cercata. Infatti tenendo anche conto del senso nel quale è stata tracciata l'ordinata BC del centro, abbiamo per i punti d'intersezione il sistema d'equazioni seguente:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-2)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4} \end{cases}$$

dalle quali

$$(y^2 - 2)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$y^4 - 3y^2 + qy = 0$$

$$y(y^3 - 3y + q) = 0$$

donde $y=0$ a cui corrisponde il punto A e $y^3 = 3y - q$ da cui apparisce che l'ordinata y d'uno qualsivoglia dei punti di intersezione soddisfa all'equazione (3) a cui, secondo il metodo di Cartesio è ridotto il problema della trisezione. Chè se poi BC fosse tracciata nel semipiano positivo ne verrebbe $y^3 = 3y + q$ equazione che differisce dalla (3) solo pel segno di z , perchè se nella (3) stessa cambiamo z in $-z$ e poi cambiamo segno a tutti i termini: essa si trasforma appunto nell'altra

$$z^3 = 3z + q.$$

Manifestamente, dalle tre ordinate la minore rappresenta la corda del terzo dell'arco proposto, la media è la corda del terzo di ciò che resta della circonferenza e la rimanente, che è eguale alla somma delle prime due, è la corda del terzo della circonferenza aumentata dell'arco proposto.

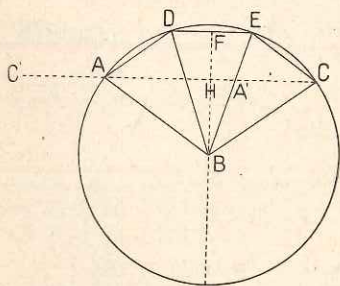


Fig. 33.

per centro il vertice dell'angolo e un raggio qualunque.

Metodo di CLAIRAUT ⁽¹⁾
(1713-1767). — Dato un angolo ABC qualunque (fig. 33) descri-
viamo una circonferenza che abbia

⁽¹⁾ Cfr. TAYLOR: *Geometry of the conics*. Cambridge, 1881, n. 308, pag. 126.

Supposto triseccato l'angolo mediante le rette BD , BE , e condotte le corde AD , DE , EC , e il diametro BF perpendicolare a DE , vediamo che

$$CE = ED = 2 \cdot EF,$$

onde già può dirsi che il punto E (dalla cui determinazione dipende evidentemente la trisezione dell'angolo dato) appartiene ad un'iperbole avente il punto C per fuoco, il diametro BF per direttrice e l'eccentricità 2. Ora il punto A è distante da C del doppio della sua distanza dal diametro BF ; esso appartiene inoltre alla perpendicolare alla BF condotta da C , dunque A è un vertice della detta iperbole, e l'altro vertice A' si trova sulla CA dalla stessa parte di C rispetto al diametro BF , ad una distanza da C uguale ai $\frac{2}{3}$ di CH (essendo H il punto d'intersezione di AC e BF). È così fissato l'asse trasverso della detta iperbole, di cui l'altro fuoco sarà sulla retta AA' , (esternamente al segmento AA'), a una distanza da A uguale a CA' ; ed è così perfettamente determinata l'iperbole che intersecando la circonferenza in principio descritta, individua il punto E e per conseguenza permette di trisecare l'angolo dato ABC .

Metodo di CHASLES ⁽¹⁾ (1793-1880). — Essendo ACB l'angolo, e quindi \widehat{AB} l'arco, da trisecare (fig. 34), prendasi un arco qualunque \widehat{BD} ed un altro $\widehat{AE} = 2\widehat{BD}$. Conducendo la tangente AT vediamo che l'angolo TAE è uguale all'angolo BCD ; onde immaginando che varî successivamente l'arco BD ed in corrispondenza l'arco AE (mantenendosi costantemente doppio dell'arco BD), si hanno corrispondentemente due fasci di raggi di centri C , A fra loro proiettivi perchè gli angoli di due raggi qualunque del primo fascio e dei loro corrispondenti dell'altro fascio sono uguali. Il luogo geometrico dell'intersezione M dei raggi omologhi CD , AE sarà perciò una conica, e il punto d'intersezione N di questa

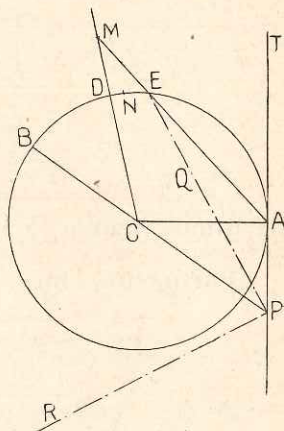


Fig. 34.

(1) Cfr. *Aperçu historique*.

conica coll'arco AB risolverà il problema della trisezione dell'arco AB (e quindi dell'angolo ACB) avendosi $\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$ e in conseguenza $\widehat{ACB} = 3\widehat{BCN}$.

Si può inoltre vedere che detta conica è un'iperbole equilatera, poichè se pei punti A, C si conducono le parallele alle bisettrici PQ, PR degli angoli delle rette AT, BC , si hanno due coppie di raggi paralleli e omologhi dei due fasci generatori della detta conica, la quale dunque avrà due punti all'infinito e perciò sarà un'iperbole, ed equilatera, essendo i suoi assintoti ortogonali perchè paralleli rispettivamente alle bisettrici di due angoli adiacenti.

§ 14. **Trisezione dell'angolo mediante la concoide.** — *Metodo di NICOMEDE.* — Per quanto già avvertimmo nel § 4, i problemi d'inserzione a cui la trisezione venne ricondotta nel § 12, possono venire risolti direttamente colla concoide di Nicomede.

Così pel 1° problema (fig. 35) basterà descrivere coll'istrumento

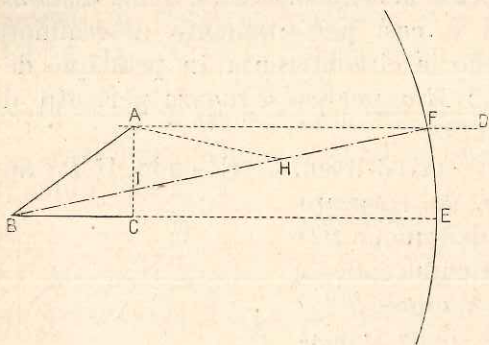


Fig. 35.

già dimostrammo (§ 12) sarà $\widehat{FBC} = \frac{\widehat{ABC}}{3}$.

Parimente, facendo uso della concoide può risolversi

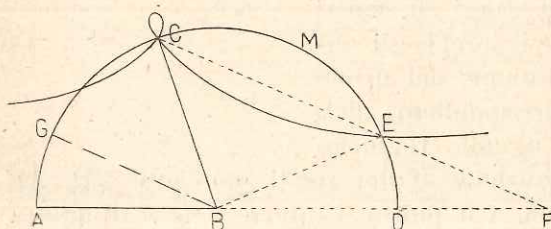


Fig. 36.

agevolmente il 2° dei ricordati problemi d'inserzione (§ 12): prendendo C per *polo*, il raggio CB per *intervallo* e la retta AB per *base* possiamo descrivere una concoide (fig. 36),

che si trovi rispetto alla base dalla stessa parte del polo (la cosiddetta *seconda concoide*, secondo gli antichi, la quale avrà necessariamente il polo come *punto doppio*, essendo il suo intervallo maggiore della distanza del polo dalla base). Se E è il punto in cui la concoide così descritta incontra la semicirconferenza $ACMD$, esternamente all'angolo dato ABC , conducasi CE e si prolunghi questa retta fino ad incontrare in F il suo prolungamento del diametro AD : sarà così inserito tra la semicirconferenza e la retta AB il segmento $EF = BC$, e, come fu dimostrato (§ 12-2°), sarà $\widehat{DFE} = \frac{\widehat{ABC}}{3}$.

L'applicazione della concoide alla trisezione è da Proclo attribuita a Nicomede stesso, mentre Pappo, a torto secondo Cantor, sembra vantarla come opera propria (1).

Metodo di NEWTON. — Rimanendo ancora in quest'ordine di soluzioni è degna di particolare menzione quella semplicissima data da NEWTON (2) mediante un'inserzione speciale effettuabile immediatamente con la concoide.

Essendo \widehat{AB} l'arco da trisecare (fig. 37), tracciata la sua corda e il diametro CA , si tracci la retta BC e fra le rette AB, CB si inserisca un segmento ED uguale al diametro CA e il cui prolungamento passi pel centro M del cerchio dato.

Se G è il punto d'intersezione di DE col semicerchio ABC , sarà GB la terza parte dell'arco dato, cioè

$$\widehat{BMG} = \frac{1}{3} \widehat{BMA}.$$

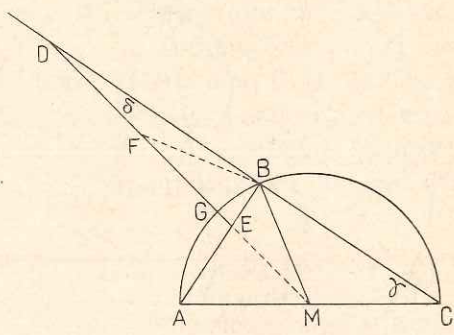


Fig. 37.

Infatti bisecando ED in F e congiungendo F con B sarà $BF = \frac{1}{2} DE$ e perciò BF è eguale al raggio BM . Ne segue che $\widehat{BMG} = \widehat{GFB} = 2\widehat{FDB} = 2\delta$.

(1) Cfr. LORIA, op. cit., II, pag. 202. - CANTOR. *Vorlesungen* ecc. p. 305.

(2) Op. cit.

Perciò $\widehat{BMA} = \widehat{GMA} + \widehat{BMG} = (\gamma + \delta) = 2\delta$ se (come nella figura) è posto $\widehat{BCA} = \gamma$.

Donde

$$\widehat{BMA} = 3\delta + \frac{\widehat{BMA}}{2}$$

e perciò

$$\frac{\widehat{BMA}}{2} = 3\delta$$

ossia infine

$$\widehat{BMA} = 3(2\delta) = 3\widehat{BMG} \quad \text{c. d. d.}$$

Descritta dunque la concoide con M per polo, AB per base e con un intervallo eguale al diametro del circolo, congiungendo il punto D d'intersezione di questa concoide con la retta BC , col centro M , separiamo dall'arco e dall'angolo proposto la rispettiva terza parte.

§ 15. Trisezione dell'angolo mediante la lumaca di Pascal o mediante altre curve, notevoli per la polisezione in generale ⁽¹⁾. — La lumaca di PASCAL. — Essendo ABC un angolo

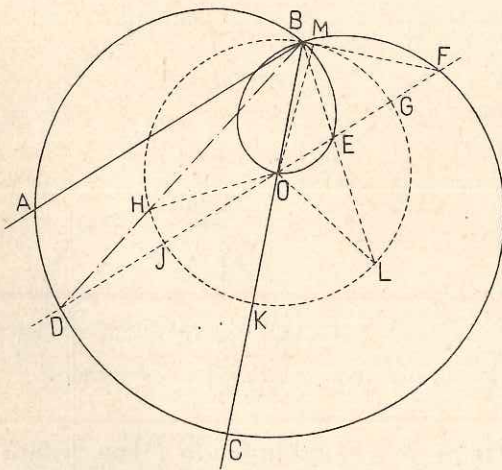


Fig. 38.

qualunque che è proposto di trisecare (fig. 38) si descriva una circonferenza che passi pel vertice B dell'angolo dato e abbia il centro O in un punto qualunque del lato BC . Si conducano per B quante rette si vogliano, e, a partire dai punti d'incontro di queste rette colla detta circonferenza, si stacchi da ognuna, nei due

sensi opposti, un segmento costante uguale al raggio. Il luogo

⁽¹⁾ Nel redigere questo paragrafo, ci siamo riferiti specialmente all'opera del prof. GINO LORIA: *Spezielle algebraische und transzendente ebene kurven* - (*Theorie und geschichte*). (Leipzig, 1902) ove, in vari punti, e soprattutto in un apposito capitolo (cap. 12°, pag. 323 e seg.) è detto

geometrico dei punti X così ottenuti, è una linea del quarto ordine, caso particolare della curva conosciuta col nome di *lumaca* o *conchiglia di Pascal*, la quale può pure considerarsi come una *concoide a base circolare*, bastando perciò rammentare la definizione della concoide (§ 4).

Condotta ora, pel centro O , la DE parallela al lato AB dell'angolo dato, e congiunto col vertice B dell'angolo, il punto D comune alla parallela tracciata e alla curva suddetta, sarà $\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABC}}{3}$. Infatti, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABD} + \widehat{OHB} = \widehat{ABD} + 2\widehat{ODB} = 3\widehat{ABD}$ (¹). c. d. d.

Così considerando gli altri due punti E, F comuni alla parallela ad AB tracciata per O e alla curva si può agevolmente dimostrare che:

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABL} = \frac{\widehat{\pi} + \widehat{ABC}}{3}$$

ed

$$\widehat{ABF} = \frac{2\widehat{\pi} + \widehat{ABC}}{3}$$

onde sono determinate tutte e tre le soluzioni del problema.

La cyclois anomala di CEVA. — Tommaso Ceva nei suoi *Opuscula Mathematica* (Mediolani 1699) sotto il titolo *Cycloidum anomalarum descriptio* dà la costruzione d'una curva che l'autore chiama *Cyclois anomala* e ne spiega l'applicazione alla divisione di un angolo in un numero qualsivoglia

ampiamente delle curve più notevoli mediante le quali può risolversi in generale il problema della polisezione d'un angolo qualunque.

Cogliamo quest'occasione per esprimere vivi ringraziamenti all'Autore, per le notizie cortesemente forniteci, e per le pubblicazioni che con somma gentilezza egli ha messo a nostra disposizione.

(¹) Il PASCAL di cui qui si tratta, secondo Cantor, Tannery e Loria, è, fuor di dubbio, Stefano padre di Biagio; e, secondo il Roberval (nelle sue *Observations*) è da attribuirsi al Pascal stesso che la *lumaca* sia una curva *trisettrice*, osservazione che fu poi ripetuta e trasformata da molti altri (cfr. AZÈMAR. *Trisection de l'angle, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet de Garnier*. (Paris, 1809). - FUSINIERI. *Trisezione geometrica degli archi di cerchio ecc.* (Mem. della Società Ital. delle Scienze, XXIII, 1846); JOUANNE. *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal*. (Nouv., Ann. 2, Ser. IX, 1870). - BROCARD. *Note sur un compas trisecteur*. (Bull. de la Soc. math. de France, III, 1875).

di parti uguali. Essa è così generata: dato un cerchio (fig. 39) di centro O e raggio a e tracciata pel centro una retta qua-

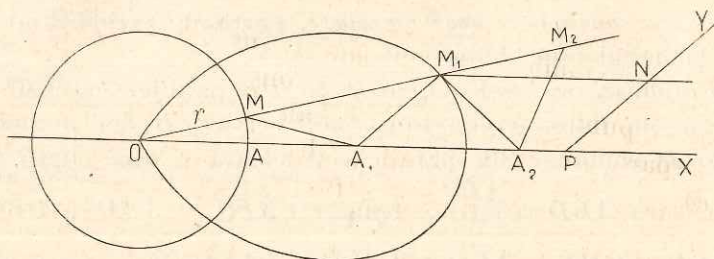


Fig. 39.

lunque OX che taglia la circonferenza in A , si conduca pure per O una retta arbitraria r che taglia la circonferenza in M e su OX e su r si segnino le successioni di punti $A_1, A_2, A_3, \dots, M_1, M_2, M_3, \dots$, in guisa che $MA_1 = M_1A_1 = M_1A_2 = M_2A_2 = \dots = a$.

Si faccia poi variare la r attorno ad O : i punti M_1, M_2, M_3, \dots descrivono altrettante cycloidi di Ceva. Ora, indicando con ω l'angolo $r \cdot \widehat{Ox}$, abbiamo, evidentemente,

$$\widehat{MOA_1} = \widehat{MA_1O} = \omega;$$

$$\widehat{MM_1A_1} = \widehat{A_1MM_1} = 2\omega$$

$$\widehat{M_1A_1A_2} = \widehat{M_1A_2A_1} = 3\omega$$

$$\widehat{M_2M_1A_2} = \widehat{M_1M_2A_2} = 4\omega \text{ ecc.}$$

donde apparisce manifestamente che qualora siano costruite le suddette curve di Ceva, esse possono servire al problema della polisezione d'un angolo qualsivoglia. In particolare per la trisezione (cfr. *la figura*) ci si potrà servire della seconda curva di Ceva nel modo seguente: dato un angolo \widehat{XPY} di cui un lato appartenga alla retta OX , si stacchi su PY un segmento $PM = OA$, e si conduca per N una parallela ad OX fino ad incontrare la curva; il raggio che proietta da O questo punto d'incontro forma con OX la terza parte dell'angolo dato.

Sulla precedente proprietà è fondato un *compasso triset-*

tore attribuito al Ceva stesso e uno strumento simile dello TSCHIRNAUSSEN.

Le curve di SCHOUTE. — Dati due punti A, A' (fig. 40), si consideri il luogo dei punti fissi P , del piano, tali che tracciate le PA, PA' , l'angolo PAA' sia in un determinato rapporto con l'angolo esterno $PA'B$ (e quindi anche con l'angolo $PA'A$). In corrispondenza ai valori differenti che per tale rapporto possono essere assegnati, si hanno altrettante curve, come luogo del punto P , le quali

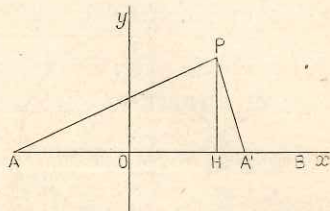


Fig. 40.

possono servire al problema generale della polisezione dell'angolo. Tralasciando ogni maggiore spiegazione in proposito, rimandiamo il lettore al capitolo citato dell'opera del Loria: *Spezielle alg. und trans. ebene kurven*; e qui ci limitiamo a notare che la risoluzione da noi già esposta (§ 13) come applicazione di una notevole proprietà dell'iperbole contenuta in un angolo di 120° , non è che un caso particolare di questo problema generale di Schoute.

Nel libro citato del Loria è pure trattato diffusamente di altre curve settrici, di natura piuttosto complicata e su cui crediamo opportuno non intrattenerei anche per rimanere più prossimi al nostro particolare tema. Tuttavia non vogliamo tralasciare di dir brevemente delle

Curve di KEMPE. — Premettiamo le seguenti osservazioni: ogni numero intero o è primo o è un prodotto di fattori primi, e perciò la divisione di un angolo in un numero qualsivoglia di parti uguali può essere ridotta alla divisione in un numero primo di parti uguali. Ora se p è un numero primo (dispari), sappiamo dal Teorema di Fermat che $2^{p-1} - 1$ è divisibile per p ; altrettanto sarà dunque del prodotto $\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ di cui uno almeno dei fattori sarà perciò multiplo di p . Ne segue che pur tendendo alla divisione in un numero qualsivoglia di parti uguali, basta occuparsi della divisione in un numero di parti uguali rappresentato da $2^n \pm 1$.

Ciò premesso si descriva con M come centro ed a come

raggio un cerchio (fig. 41) tangente in O all'asse delle x ; si tiri per O una secante arbitraria OA e vi si trasportino i

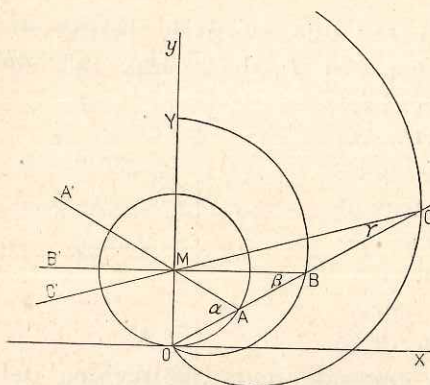


Fig. 41.

segmenti $AB = AM$, $BC = BM$, $CD = CM$,; variando la secante i punti B, C, D, \dots descrivono altrettante curve. Prolungando al di là di M le rette AM, BM, CM, \dots e chiamando $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gli angoli che le rette MA, MB, MC, MD, \dots fanno con OA e $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ gli angoli che MA', MB', MC', \dots

fanno con OM , segue dalla figura che

$$\alpha' = 2\alpha, \quad \beta' = 3\beta, \quad \gamma' = 5\gamma, \quad \delta' = 9\delta, \dots$$

donde apparisce che se per M si conduce una retta arbitraria che formi con OM l'angolo ω , questa taglierà il cerchio dato e quelle *hilfskurven* nei punti F, G, H, K, \dots di guisa che gli angoli formati con essa dalle rette OF, OG, OH, OK, \dots saranno rispettivamente uguali ad $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{5}, \frac{\omega}{9}, \dots$ onde queste *hilfskurven* servono alla divisione dell'angolo in $2^n + 1$ parti uguali.

In secondo luogo, coll'origine per centro e col raggio a si descriva un cerchio (fig. 42) che tagli in M l'asse delle x .

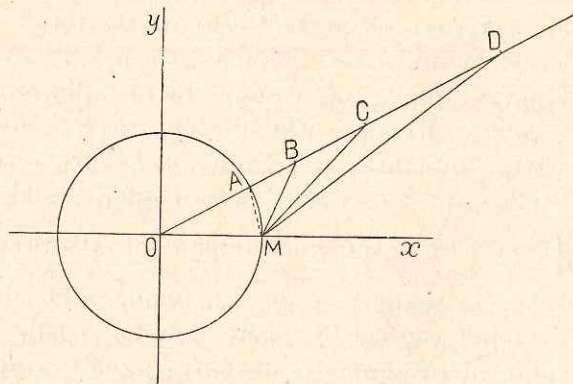


Fig. 42.

Si conduca allora un raggio arbitrario OA e vi si trasportino i

segmenti $AB = AM, BC = BM, CD = CM, \dots$; i punti B, C, D, \dots al variare della retta OA attorno ad O , descrivono altrettante curve.

Dalla figura seguono per le costruzioni fatte le eguaglianze seguenti: $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$, $\widehat{OBM} = \frac{1}{3} \widehat{OMB}$, $\widehat{OCM} = \frac{1}{7} \widehat{OCM}$, $\widehat{ODM} = \frac{1}{15} \widehat{ODM}, \dots$; se dunque una retta arbitraria tracciata per M e che forma con MO l'angolo ω , taglia le suddette curve in G, H, K, \dots le rette OG, OH, OK, \dots formano rispettivamente con essa l'angolo $\frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{7}, \frac{\omega}{15}, \dots$ onde tali curve possono servire alla divisione d'un angolo in $2^n - 1$ parti uguali.

Ed avendo così trattati tutti i casi a cui è riducibile il problema della divisione d'un angolo in un numero qualunque di parti eguali, il problema stesso è esaurito anche secondo questo metodo esposto da Kempe ⁽¹⁾.

§ 16. Trisezione dell'angolo mediante strumenti appositi.

— Abbiasi lo strumento rappresentato dalla fig. 43, dove D, F, E

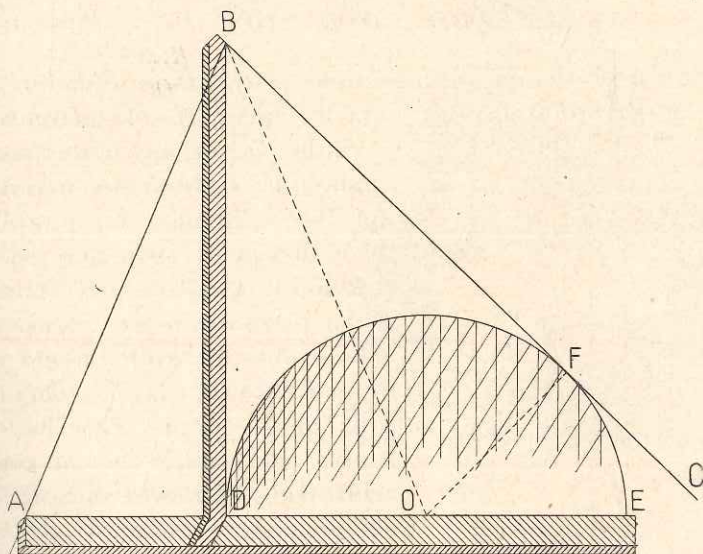


Fig. 43.

(1) A. KEMPE. De verdeeling van een hoek een $2^n + 1$ gelyke deelen, sowie De verdeeling van een hoek in een villkeurig antal gelyke deelen (Nieuw Archiv. voor Wiskunde, 2 Ser., I, 1894). Auszerdem s. die Abh. *Sur les courbes sectrices* (Mém. de Liège, Ser. XX, 1898).

è un semicerchio (di legno, d'ottone, ecc.) DB un regolo, convenientemente lungo, e disposto tangenzialmente alla semicirconferenza nel punto D , ed AE un altro regolo su cui s'appoggia col suo diametro il semicerchio DFE , e che si prolunga oltre questo semicerchio d'una lunghezza DA uguale al raggio DO . Volendo con questo strumento trisecare un angolo qualunque ABC , lo si dispone, sul piano ove questo angolo è disegnato, in modo che il lato BD del regolo tangente alla semicirconferenza passi pel vertice B dell'angolo dato, il punto A sia su un lato di quest'angolo, e la semicirconferenza sia tangente all'altro lato (ciò che potrà ottenersi scorrendo convenientemente il punto A lungo il lato BA).

Così disposto il *trisettore* rispetto all'angolo ABC , questo è trisecato dalle rette BD , BO . Infatti se F è il punto di contatto del lato BC colla semicirconferenza, poichè O è equidistante da BD e BC appartiene alla bisettrice dell'angolo DBC ma evidentemente

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBO}$$

dunque

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBO} = \widehat{OBC} \quad \text{c. d. d. } (^1).$$

È altresì degno di menzione il *trisettore* costruito dal dott. QUINTILIO AMADORI e da lui spiegato nel suo opuscolo

« Sulla Trisezione d'un angolo qualunque » stampato a Savona nel 1883. Affinchè sia postobene in evidenza il principio su cui si fonda il trisettore dell'Amadori, giova premettere le seguenti considerazioni. Dato un angolo qualunque ROS (fig. 44), bisechiamolo colla retta LZ , e descritta col centro nel vertice O e con raggio arbitrario, la circonferenza $RZSV$, conduciamo il diametro CD perpendicolare alla bisettrice LZ dell'angolo dato. Presa adesso una

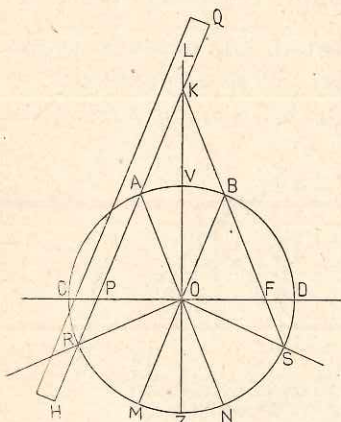


Fig. 44.

riga HQ , convenientemente lunga, e staccatone un segmento PK ,

(¹) Di questo strumento è fatta una descrizione da GOOD ARTHUR (Tom Tit.) nella sua opera *La science amusante*.

uguale al diametro della circonferenza descritta, si disponga questa riga sul piano dell'angolo da trisecarsi in modo che il punto P e il punto K appartengano rispettivamente al diametro CD e alla bisettrice LZ . Scorrendo convenientemente lungo queste due rette, si potrà trovare una posizione della riga tale da contenere il punto R ; giunti a questa posizione si disegni la retta RPK ; ed operando analogamente dall'altra parte della figura si disegni la retta SFK .

I diametri AN , BM corrispondenti ai punti A , B in cui queste due rette RK , SK incontrano ulteriormente la circonferenza, trisecano l'angolo dato ROS (¹).

Infatti, essendo OA ed OB metà rispettivamente di PK e FK , ed essendo rettangoli i triangoli POK , KOF , sarà $PA = AK = AO = OB = BF = BK$, ossia il quadrilatero $AKBO$ è un rombo, e dal parallelismo delle rette AK , OB e delle altre due OA , BK segue immediatamente $\widehat{RM} = \widehat{NS}$; ma per lo stesso parallelismo gli angoli PAO , OBF sono uguali entrambi all'angolo \widehat{MON} , onde l'arco MN è metà sia dell'arco RN che dell'arco MS e per conseguenza $\widehat{RM} = \widehat{MN} = \widehat{NS}$ e corrispondentemente $\widehat{ROM} = \widehat{MON} = \widehat{NOS}$

c. d. d.

Ciò premesso descriviamo il *trisettore dell'Amadori* rappresentato dalla fig. 45. Esso consta di due parti: di una lamina metallica della forma poligonale $KVELRSTUZ$, come la più opportuna; e d'una riga YW dello stesso metallo, colle parti spongenti indicate nei punti I , H , e la quale deve agire sovrapposta

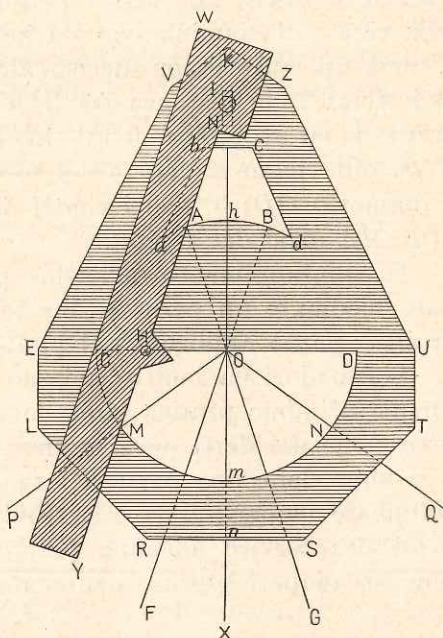


Fig. 45.

(¹) È ovvio notare che il punto K , dalla cui determinazione, secondo tale metodo, viene a dipendere la risoluzione del problema, è anche il punto in cui la retta LZ è incontrata dalla conoide di Nicomede, avente R

alla lamina predetta. Nella lamina sono praticate tre aperture, cioè la prima semicircolare $CMND$ col centro in O sull'asse di simmetria XK della figura poligonale, la seconda della forma d'un trapezio isoscele mistilineo $abcd$, avente per asse di simmetria l'asse XK predetto, e la cui base maggiore è un arco di 60° appartenente alla stessa circonferenza a cui appartiene la suddetta semicirconferenza; la terza apertura poi è di forma rettangolare e deve rispondere alle seguenti condizioni: fatto centro in O e in C con raggio uguale a CD si intersechi con due archi di circolo la retta XK ; la lunghezza compresa fra queste due intersezioni sarà la lunghezza della terza apertura che deve indicare il percorso del punto I della riga lungo la XK .

Nella riga YW devono essere praticati due fori circolari in corrispondenza delle due parti sporgenti della medesima, e tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni: 1° il loro diametro, come quello del perno cilindrico che devono ricevere, deve essere tale che il perno di congiunzione in sistema della riga colla lamina non sia impedito nella sua corsa entro la terza apertura e non succeda alcuna oscillazione nella corsa medesima; 2° la distanza fra il centro del foro nella riga al punto I ed il punto della circonferenza del secondo foro in H , più vicino al centro del foro I , sia *esattamente* uguale al diametro CD ; 3° che i centri dei due fori si trovino sulla retta MA (orlo della riga).

Il congiungimento delle due parti del trisetto è effettuato mediante un perno a due teste applicato al punto I e un altro perno applicato nel punto H .

L'Amadori dà inoltre nel suo opuscolo vari altri suggerimenti d'indole pratica circa lo spessore della lamina e la costruzione dei detti perni e circa l'effettivo congiungimento in sistema delle due parti del trisetto, affinché questo sia facilmente maneggiabile e si trovi nelle condizioni più favorevoli per servire all'uopo pel quale è costruito. Vediamo come si adoperi questo strumento per trisecare un angolo

per *polo*, la retta CD come *asse*, ed *intervallo* uguale al diametro CD della circonferenza tracciata. Onde abbiamo qui un'altra applicazione della concoide alla trisezione d'un angolo qualunque. Si noti pure il problema « d' *inserzione* » del segmento (PK) uguale al diametro che deve avere gli estremi sulle rette CD , ZL e di cui il prolungamento deve passare per R ; rendendoci così ancor meglio ragione dell'osservazione precedente circa l'uso della concoide pure in questo caso.

qualunque: dato un angolo qualsivoglia POQ (vedi ancora la fig. 45) bisechiamolo colla KX e si adagi poi il trisetttore sul piano dell'angolo in modo che il punto O del trisetttore si trovi nel vertice O dell'angolo e che le Oh, mn incise sul trisetttore si trovino sulla bisettrice KX . Il semicerchio $CMND$ del trisetttore intersecherà i lati PO, OQ dell'angolo nei punti M, N ; si disegni allora l'arco di cerchio \widehat{ahd} e poi, applicando le dita alla testa del perno in H , si faccia scorrere la riga mantenendo sempre il perno sottoposto a contatto collo spessore della lamina lungo il diametro CD . Quando il prolungamento HY della riga passerà pel punto M , si fissi la riga chiudendo la vite in I e si conduca nella seconda apertura la retta IA fino all'incontro dell'arco \widehat{ahd} . Si ripeta, volendo, l'operazione dall'altra parte per determinare il punto B , e poi si levi lo strumento e si disegnino le rette AOG, BOF le quali trisecheranno esattamente l'angolo POQ (1).

Per la divisione di un angolo in $2^n + 1$ parti uguali (in particolare, per $n = 1$, in 3 parti eguali) conviene pure rammentare un apposito strumento semplicissimo: il *multisetttore* di cui NICHOLSON fa la descrizione e spiega l'uso nel suo lavoro sulla « *The multisection of angles* » (The Analyst. X, 1883).

Questo strumento (fig. 46) ha la forma d'un quadrante solare rettangolare; PQ è preso uguale a QR e la loro lunghezza comune m dicesi modulo dello strumento. In P è fissata una matita. Sia allora data una curva

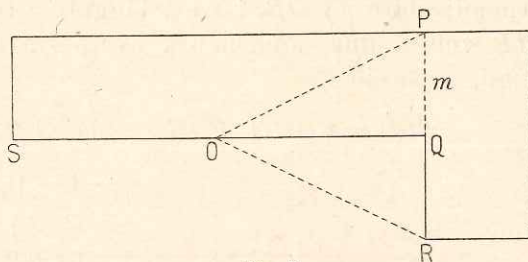


Fig. 46.

fissa qualunque Δ (la *direttrice*) e, consideratone un punto fisso O , facciamo che il *multisetttore* si muova in maniera che mentre il suo punto R descrive la curva direttrice Δ , il suo lato SQ passi costantemente per O : allora il punto P genererà una nuova curva Π , che chiamiamo *Polyode* (da $\pi\omega\lambda\acute{o}\varsigma$ molti, e $\eta\acute{o}\delta\acute{o}\varsigma$ la via). Fra le due curve Δ e Π intercede una relazione geometrica, la quale tradotta in formole, permette di trovare

(1) Altri *trisettori degli angoli* sono stati ideati e costruiti da ADRIANO LORENZONI (Bologna, 1827), da AMBROGIO FUSINIERI (Bologna, 1822) ecc.

l'equazione della seconda quando si conosce l'equazione della prima.

Vediamo adesso come possa servire questo strumento alla polisezione d'un angolo qualunque AOB , ed anzitutto occupiamoci del caso della trisezione.

Si tiri la retta b parallela al lato OB dell'angolo dato (fig. 47) ad una distanza da OB eguale al modulo m dello strumento precedentemente descritto; poi preso il vertice O come punto fisso e l'altro lato OA come direttrice (Δ) si disponga e si faccia muovere lo strumento in modo da descrivere la corrispondente curva Polyode II: se P è una delle intersezioni di questa curva II con b sarà

$$\widehat{POB} = \frac{\widehat{AOB}}{3}.$$

Fig. 47.

Infatti, preso sul lato OA il segmento $OT = OP$, congiunti P, T , e condotta OC perpendicolare a PT , e PH perpendicolare ad OB , i tre triangoli rettangoli OCT, OCP, OHP sono a due due congruenti, avendo a due a due i cateti uguali, e perciò

$$\widehat{TOC} = \widehat{COP} = \widehat{POH} \quad \text{ossia} \quad \widehat{POH} = \frac{\widehat{AOB}}{3} \quad \text{c. d. d.}$$

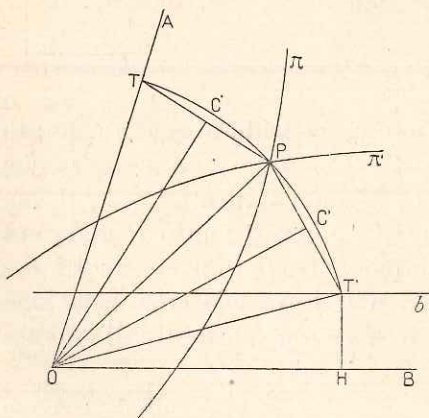


Fig. 48.

Per la divisione dello stesso angolo in 5 parti uguali, si tiri prima la retta b come nel caso precedente e la Polyode II corrispondente alla retta OA (fig. 48); poi preso di nuovo O come punto fisso e la retta b come nuova direttrice, si descriva così, col multisettore, una nuova Polyode II' e determiniamone l'intersezione P con II.

Allora si descriva il cerchio di centro O e raggio OP , e si indichino con T e T' le sue intersezioni con OA e con la retta b ; si traccino le corde PT , PT' e le perpendicolari OC , OC' ad esse, e la $T'H$ perpendicolare ad OB . I cinque triangoli rettangoli OCT , OCP , $OC'P$, $OC'T$, OHT così ottenuti sono a due a due congruenti, onde $T'OH = \frac{1}{5}AOB$.

Ed analogamente si usa il multisettole per tutti gli altri casi.

§ 17. **Trisezione dell'angolo mediante costruzioni elementari approssimate.** — *Metodo di E. COMINOTTO* (1). — Sia ABC l'angolo e quindi AC l'arco (d'una circonferenza descritta col centro in B e con un raggio arbitrario) che è proposto di trisecare (fig. 49).

Dividiamo il raggio BC in tre parti uguali nei punti D , E e sul prolungamento di questo raggio, al di là di B si porti $BF=BD=DE=EC$.

Descriviamo l'arco DG di centro B e raggio BD , e la semicirconferenza di centro E e raggio DE dalla quale staccheremo da C verso D l'arco $CH = \widehat{DG}$.

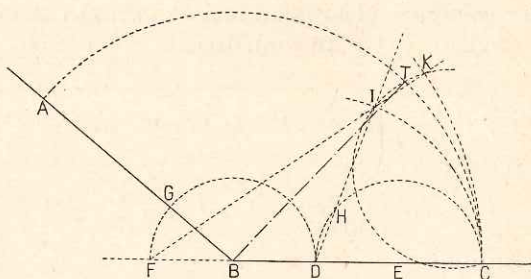


Fig. 49.

Congiunto D con H

si costruisca l'arco CI , di centro D e raggio DC , compreso fra le rette DC e DH ; si unisca poi F con I e si costruisca l'arco CK , di centro F e raggio FC , compreso tra le rette FC ed FK . La semicirconferenza che passa per K , I , C , (essendo evidentemente CI perpendicolare ad FK) interseca l'arco AC nel punto T che assai prossimamente determina la terza parte di AC . Facciamo infatti vedere che già una buona approssimazione ci è data per un arco di 180° ; donde il COMINOTTO deduce, senza però darne la dimostrazione, che a più forte ragione si avrà un risultato abbastanza approssimato per un arco più piccolo. Ripetendo dunque la precedente costruzione (come è indicato dalla

(1) *Trisezione approssimata dell'angolo.* Padova, 1895.

fig. 50) pel caso particolare di un angolo ABC piatto, e quindi d'un arco AC di 180° , vediamo di quanto la corda

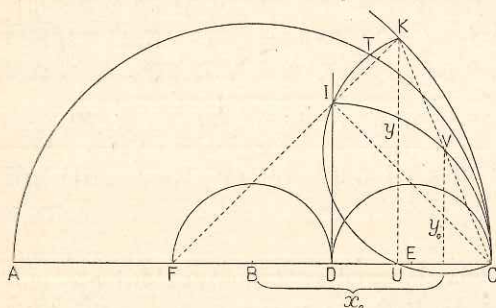


Fig. 50.

CT si discosta dal raggio, che, per semplicità, supporremo uguale a 1. A tale uopo calcoliamo le coordinate del punto T rispetto al centro B ; esse ci saranno fornite dalle soluzioni comuni delle equazioni dei cerchi CTA , CTK ri-

spettivamente di centro B e V , riferite all'origine B .

L'equazione del cerchio CTA , nell'ipotesi fatta del raggio uguale a 1, è:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Per scrivere l'equazione del cerchio KTC , occorre calcolarne il raggio VC e le coordinate del centro. Ora

$$VC^2 = \frac{1}{4}(CK^2) = \frac{1}{4}(IC^2 + IK^2)$$

e poichè

$$IC = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad \text{e} \quad IK = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$$

è dunque

$$VC^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{8}{9} + \frac{4}{9}(2 - \sqrt{2})^2 \right] = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{9}.$$

Per calcolare poi le coordinate del centro V si congiunga K coll'intersezione U della semicirconferenza KIC col raggio BC , e indicato con x_0 , y_0 dette coordinate, poichè $UC = IK$, $UK = IC$, avremo:

$$x_0 = 1 - \frac{1}{2}IK = 1 - \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}KU = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

onde l'equazione del cerchio KTC è

$$(2) \quad \left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{9}.$$

Da questa ricaviamo

$$x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{4(2 - \sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

e perciò, per la (1) abbiamo:

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} + \sqrt{\frac{4(2 - \sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2},$$

da cui

$$\sqrt{9 - 9y^2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}$$

donde

$$1 - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{9 - 9y^2}} = \sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}{9 - 9y^2}}.$$

Da cui, quadrando, risulta

$$1 + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{9 - 9y^2} - 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{9 - 9y^2}} = \frac{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}{9 - 9y^2}$$

cioè

$$\begin{aligned} 9 - 9y^2 + (1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{9 - 9y^2} &= \\ &= 6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2} \end{aligned}$$

da cui, riducendo, abbiamo

$$1 - \frac{y\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9 - 9y^2}}{3}.$$

Quadrando, raccogliendo y^2 , e riducendo, abbiamo

$$y^2 \left(\frac{2}{(1 + \sqrt{2})^2} + 1 \right) - 2 \frac{y\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 0$$

donde, dividendo per y ,

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} = 0,874\dots$$

E perciò

$$x = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - 0,874^2} \dots = 0,485\dots$$

Se \overline{CT} fosse stato esattamente il raggio del cerchio CTA le coordinate T avrebbero dovuto essere

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\dots$$

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

e questi valori si scostano ben poco dai valori trovati per y , x , calcolando la $\sqrt{2}$ e la $\sqrt{3}$ a meno di 1 millesimo; onde calcolando con una maggiore approssimazione la $\sqrt{2}$ e la $\sqrt{3}$, i valori di y e di y_1 e così quelli di x e di x_1 si avvicineranno sempre più. Stando ai valori precedenti di x , y

$$CT = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = 0,96\dots$$

onde lo scostamento di CT dal raggio è minore di $\frac{4}{100}$. Così vediamo che l'approssimazione raggiunta con questa costruzione, anche per un arco di 180° è tale da sfuggire nell'uso della riga e del compasso, e perciò essa diventa tanto più grande per un arco minore, come di solito si usa prendere, sì da essere inapprezzabile l'errore commesso.

Il COMINOTTO stesso, nel suo opuscolo citato (da cui è tratta la materia di questo paragrafo) riporta anche la seguente costruzione approssimata per la trisezione dell'angolo, che è molto semplice e colla quale si commette un errore inapprezzabile per angoli abbastanza acuti.

Essendo ABC l'angolo (fig. 51) e DE l'arco (della cir-

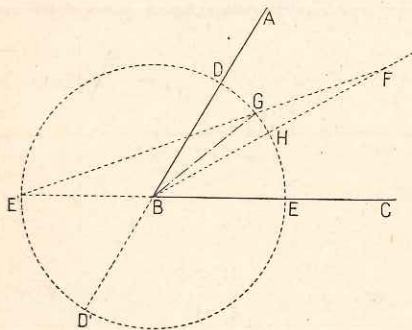


Fig. 51.

conferenza di centro B e di raggio arbitrario BD) da trisecare, si conduca la bisettrice BF dell'angolo DBE , e dal punto H in cui questa incontra l'arco DE si riporti sulla bisettrice stessa il segmento HF uguale al raggio. Se E' è il punto diametralmente opposto ad E , la congiungente $E'F$ interseca l'arco DE in G che prossimamente

determina la terza parte di esso. Ma ripetendo questa costru-

zione per un arco di 180° lo spostamento di DG dal raggio riesce già troppo sensibile coll'uso stesso della riga e del compasso; e d'altronde dal calcolo stesso apparisce che supposto il raggio uguale a 1, si ha per DG (beninteso nell'ipotesi di $\widehat{DE} = 180^\circ$) un valore inferiore a 1 di più d'un decimo. Questa costruzione è riferita dal COMINOTTO come già nota, ma è ad essa preferibile, pel molto maggiore grado d'approssimazione conseguitovi, l'altra costruzione che abbiamo esposto, del COMINOTTO stesso.

Metodo di P. MONTI ⁽¹⁾. — Essendo ABC l'angolo (fig. 52) e quindi AC l'arco da trisecare, conduciamo la bisettrice BD dell'angolo dato, tiriamo da D la DE parallela a BA e su questa riportiamo in DG la metà del raggio BD . Conduciamo AD e BG e indichiamo con H il punto d'intersezione di queste due rette. Costruiamo dalla parte inferiore di BD la BL in modo da formare con BD l'angolo $LBD = \widehat{GBD}$; dal punto M preso ad un sesto del raggio BD a partire da innalziamo la MN perpendicolare a BD . La NH prolungata incontra l'arco AC nel punto T che *prossimamente determina la terza parte dell'arco AC e quindi dell'angolo ABC* . La dimostrazione che segue è del prof. SCHIAPARELLI.

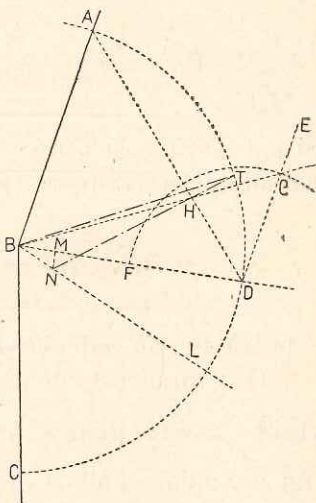


Fig. 52.

Premettiamo che per la detta costruzione

$$HD = \frac{1}{3} AD,$$

perchè i triangoli AHB , HDG sono simili e AB è doppio di DG .

Ciò premesso poniamo $\widehat{ABD} = \varphi$; sarà

$$\widehat{BDA} = 90^\circ - \frac{1}{2} \varphi, \quad \overline{DA} = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

⁽¹⁾ *Regola generale per la soluzione grafica della trisezione dell'angolo* di POMPEO MONTI, disegnatore dell'Ufficio Tecnico di Milano; seguita dalla *Dimostrazione* del prof. GIOVANNI SCHIAPARELLI.

e quindi

$$\overline{DH} = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

supposto uguale a 1 il raggio.

Allora si può risolvere il triangolo BHD conoscendone i lati HD , BD e l'angolo \widehat{HDB} , e si calcolerà così il lato HB e l'angolo HBD che indichiamo con β . Si passa allora a risolvere il triangolo BHN avendosi elementi cognitivi sufficienti e precisamente

$$BH, \quad BN = \frac{BM}{\cos \beta} = \frac{1}{6 \cos \beta} \quad \text{e} \quad \widehat{NBH} = 2\beta.$$

Si calcolerà così l'angolo BHN che indichiamo con α ; e allora passeremo a risolvere il triangolo BHT conoscendone

$$BH, \quad BT = 1 \quad \text{e} \quad \widehat{BHT} = 180^\circ - \alpha;$$

e potrà perciò calcolarsi l'angolo \widehat{TBH} che indichiamo con ε .

Ora manifestamente $\varepsilon + \beta = \widehat{TBD}$, e questo angolo dovrebbe essere uguale a $\frac{1}{3}\varphi$ se la trisezione fosse effettuata rigorosamente colla esposta costruzione; ma poichè ciò non è possibile, essendosi fatto uso soltanto della riga e del compasso, si deve esser commesso necessariamente un errore dato dunque dalla differenza

$$\left| (\beta + \varepsilon) - \frac{\varphi}{3} \right|.$$

La tavola che segue dà per tutti i valori di φ di 5° in 5° da 0° a 90° il valore di $\frac{1}{3}\varphi$ e il valore di $\widehat{TDB} = \beta + \varepsilon$, quale risulta dai calcoli precedentemente indicati. L'ultima colonna pone in evidenza l'errore e l'ispezione di questa colonna mostra che l'errore è sempre molto piccolo e tale da sfuggire alle costruzioni grafiche ordinarie, anche fatte con molta diligenza; esso non arriva mai a 7 minuti di grado, quantità realmente assai tenue in questo genere di costruzioni.

Tabella di comparazione dell'angolo $TBD = \beta + \epsilon$ col vero valore $\frac{1}{3} \varphi$.

φ	$\frac{1}{3} \varphi$	$TBD = \beta +$	ERRORE
0°	0	0	0
5°	1° 40'	1° 40'	0
10°	3° 20'	3° 20' 1"	+ 0' 1"
15°	5°	5° 0' 2"	+ 0' 2"
20°	6° 40'	6° 40' 4"	+ 0' 4"
25°	8° 20'	8° 20' 6"	+ 0' 6"
30°	10°	10° 1'	+ 1'
35°	11° 40'	11° 41' 7"	+ 1' 7"
40°	13° 20'	13° 22' 4"	+ 2' 4"
45°	15°	15° 3' 2"	+ 3' 2"
50°	16° 40'	16° 44' 1"	+ 4' 1"
55°	18° 20'	18° 25' 1"	+ 5' 1"
60°	20°	20° 5' 1"	+ 5' 9"
65°	21° 40'	21° 46' 6"	+ 6' 6"
70°	23° 20'	23° 26' 8"	+ 6' 8"
75°	25°	25° 6' 7"	+ 6' 7"
80°	26° 40'	26° 45' 2"	+ 5' 2"
85°	28° 20'	28° 22' 6"	+ 2' 6"
90°	30°	29° 58' 5"	- 1' 55"



Questa costruzione è molto più approssimata di quella stessa del COMINOTTO (§ 17) attesochè se la ripetiamo per un angolo piatto e facciamo tutti i calcoli suddetti, troviamo per la corda dell'arco che prossimamente rappresenta la terza parte della semicirconferenza, un valore dal raggio di meno di $\frac{2}{1000}$.

III.

§ 18. Risoluzione dei problemi di 3° grado mediante una parabola fissa. — Dai particolari problemi innanzi considerati, eleviamoci ora alla considerazione generale dei *problemi di 3° grado* o *riducibili a problemi di 3° grado*, cioè di quei problemi che colla riga e col compasso (operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate) si riconducano alla costruzione delle radici di una o di successive equazioni di 3° grado.

Un procedimento simile a quello già precedentemente tenute in varî casi conduce a mostrare che *si possono risol-*

vere tutti i problemi di 3° grado mediante una parabola completamente tracciata facendo uso della riga e del compasso.

Il problema generale di 3° grado che si può prendere come tipo consiste nella risoluzione simultanea di un'equazione di 3° grado e di un'equazione di primo grado nelle coordinate x, y , cioè nella determinazione delle intersezioni di una cubica (assegnata ma non tracciata) con una retta. Ma se nell'equazione di 3° grado in x, y , si sostituisce, ad y l'espressione lineare in x ottenuta risolvendo l'equazione di 1° grado fra x, y si ottiene un'equazione cubica nella sola x ; ed è chiaro quindi che il problema tipico di 3° grado si può far consistere nella costruzione delle radici di un'equazione cubica nella sola x .

Ora sia data la parabola $y = x^2$. Tagliamola col cerchio di centro (α, β) passante pel vertice $(0, 0)$, la cui equazione è

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Ponendo in quest'equazione $y = x^2$, si ottiene l'equazione risultante

$$x^4 - (2\beta - 1)x^2 - 2\alpha x = 0$$

ossia (dividendo per x)

$$x^3 - (2\beta - 1)x - 2\alpha = 0.$$

Ma l'equazione la più generale di terzo grado in x si può ridurre al tipo precedente, giacchè affettuando una trasformazione razionale essa prende la forma:

$$x^3 - px + q = 0$$

sicchè basta prendere

$$p = 2\beta - 1$$

$$q = -2\alpha.$$

Resta così stabilito il precedente enunciato, che costituisce una immediata generalizzazione di quanto abbiamo visto trattando dei due precedenti problemi particolari. Invero ricadiamo nel caso della duplicazione del cubo di lato a pren-

deno $\alpha = a^3$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Otteniamo invece la trisezione di un angolo φ la cui tangente trigonometrica sia uguale ad a , prendendo:

$$\alpha = a(1 + a^2)$$

$$\beta = \frac{1 + 3(1 + a^2)}{2}.$$

Il teorema precedente può essere generalizzato, ove, in luogo di una parabola, si prenda come tracciata nel piano una qualunque *conica fissa* non circolare. Data una tale conica, ogni problema di 3° grado può essere risolto coll'uso della riga e del compasso. Questo risultato è stato stabilito da KORTUM o STEPHEN SMITH in due noti lavori, premiati nel 1868 dall'Accademia di Berlino (4).

19. Risoluzione lineare dei problemi di 3° grado mediante una cubica fissa. — FRANZ LONDON nella sua memoria « Die geometrischen Konstruktionen dritten und vierten Grades ausgeführt mittels der gerader Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung (2) », ha stabilito un risultato che si presenta come analogo a quello di PONCELET-STEINER concernente i problemi 2° grado: *tutti i problemi di 3° grado si possono risolvere colla sola riga, quando è data una cubica fondamentale completamente tracciata, aggiunto pei problemi metrici, un quadrato* (cfr. Art. 3°).

Porgeremo in modo diretto la dimostrazione del teorema, riferendoci ai due casi particolarmente semplici, in cui si prenda come cubica fondamentale una parabola

$$y = x^3,$$

oppure una cissoide di DIOCLE (§ 5):

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x};$$

(4) KORTUM. « Ueber geometrische Aufgabe dritten und vierten Grades ». Bonn 1869.

SMITH. « Mémoires sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques ». Ann. di Matematica. Serie II, Tom. 3°.

(2) Schlömilch's Zeitschrift. Bd 41.

ritorremo inoltre come dato il quadrato dei punti

$$\cdot \quad (00) \quad (01) \quad (10) \quad (11),$$

che ci permette di effettuare linearmente tutte le costruzioni espresse da operazioni razionali sui dati (Art. 4°).

Quanto al primo caso basta osservare che le radici dell'equazione di 3° grado

$$x^3 - px - q = 0,$$

sono le ascisse dei punti comuni alla parabola

$$y = x^2$$

e alla retta

$$y = px + q$$

(cfr. il § 7).

Venendo ora al caso in cui è data la cissoide, premettiamo l'osservazione che il problema tipico di 3° grado, fatto dipendere dalla risoluzione di un'equazione cubica in x , si può anche far dipendere dalla risoluzione di un'equazione cubica in $\frac{y}{x}$; basta infatti adoperare una trasformazione di coordinate della forma

$$x = \frac{Y}{X}, \quad y = Y$$

Prendiamo la cissoide rappresentata parametricamente mediante le formule

$$x = \frac{2rt^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2rt^3}{1+t^2}, \quad t = \frac{y}{x},$$

dalle quali, eliminando t si ha appunto l'equazione

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

Seghiamo questa cissoide colla retta generica

$$y = ax + b;$$

le intersezioni sono date dall'equazione

$$t = \frac{y}{x} = a + \frac{b}{x}$$

cioè (sostituendo ad x la sua espressione per t)

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 + b = 0.$$

Ora si tratta di mostrare che la più generale equazione di 3° grado in $t = \frac{y}{x}$, la quale può esser presa sotto la forma

$$\alpha t^3 - \beta t + \delta = 0$$

può trasformarsi *razionalmente* in un'equazione privata del termine lineare ed in cui ricompaia invece il quadrato dell'incognita.

Ciò si ottiene invero semplicemente, ponendo $t = \frac{1}{t'}$ con che la precedente equazione si muta nell'altra

$$\delta t'^3 + \beta t'^2 + \alpha = 0$$

che è del tipo suddetto.

L'uso della cissoide è particolarmente raccomandato dal LONDON, sia per la semplice descrizione meccanica di questa curva, sia per la proprietà di essa di contenere i punti ciclici del piano, cui si collegano le costruzioni metriche.

Si può anzi vedere come « data una cissoide K ed il centro O del cerchio generatore, si costruisca colla sola riga il quadrato fondamentale avente per vertici la cuspidi di K e le sue intersezioni col cerchio suddetto ⁽¹⁾ », onde risulta

(1) Consideriamo la cissoide K rappresentata dall'annessa figura riferendoci alle notazioni ivi indicate. Si suppone questa cissoide interamente tracciata, e dato il centro O del suo cerchio generatore.

Vogliamo costruire linearmente il punto B , intersezione dell'asintoto b colla retta perpendicolare OA , ed i punti C, D della curva, i quali insieme ad A ci forniranno il quadrato $ABCD$.

Perciò dovremo ricorrere al concetto di proiettività e in particolare d'involuzione sopra una cissoide: si definiscono come punteggiate proiettive su K , due punteggiate ottenute segnando fasci di raggi proiettivi concentrici, col centro nella cuspidi A .

Procederemo come segue:

Fissiamo sulla K un punto P , e consideriamo l'involuzione sopra la curva in cui si corrispondono i punti (come MM_1) allineati con P ; quindi il coniugato armonico del raggio AO rispetto ad AP, AM_1 , il quale seghi la K nel punto M .

Al variare di M si ha fra esso ed M' una

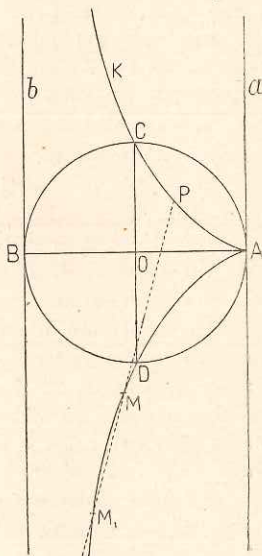


Fig. 53.

che: *tutti i problemi di 3° grado, grafici e metrici, si possono risolvere colla sola riga quando è data una cissoide fissa insieme al centro del relativo cerchio generatore.*

§ 20. **Riduzione dei problemi di 3° grado alla trisezione dell'angolo o alla costruzione delle medie proporzionali.** — Ricerchiamo ora il legame fra i problemi generali di 3° grado e i problemi speciali della trisezione dell'angolo e delle medie proporzionali. Ad un problema generale di 3° grado corrisponde un'equazione di 3° grado completa, la quale può sempre, con una trasformazione razionale, esser privata del termine di secondo grado e ridursi al tipo generale

$$(1) \quad z^3 - pz + q = 0.$$

. Adesso è facile vedere che con un'altra trasformazione $z = \lambda y$, quest'equazione può identificarsi coll'equazione da cui dipende la trisezione di un angolo (§ 10)

$$(2) \quad y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0$$

proiettività, i cui punti uniti cadono in A e nel punto all'infinito della K che è flesso di essa.

Pertanto, nel fascio A prospettivo alla cissoide, si può costruire linearmente la perpendicolare a ad OA , come secondo raggio unito di una proiettività, in cui è unito OA .

Ne risulta la costruzione lineare del punto, simmetrico rispetto ad OA , per ogni punto di K .

Le coppie di punti simmetrici così costruite, formano, su K , una involuzione I .

I punti C, D , coniugati in questa involuzione, si ottengono quindi come intersezioni di K colla perpendicolare in O ad OA , la quale (essendo date quantesivogliano parallele ad essa) si costruisce linearmente.

Ora possiamo anche costruire linearmente l'asintoto b di K , per mezzo di una proiettività nel fascio improprio delle perpendicolari ad OA , in cui sieno raggi uniti a e b .

Invero si può determinare una proiettività permutabile con I ; e questa alla sua volta si ottiene costruendo nel fascio A (prospettivo a K) una proiettività coi raggi uniti AO ed a .

Un'altra costruzione più simmetrica potrebbe darsi appoggiandosi ad una nozione un po' meno elementare, cioè considerando la corrispondenza proiettiva che intercede fra i punti della K e i loro tangenziali.

determinando convenientemente λ ed a . Posto infatti nella (1) $z = \lambda y$, ne deduciamo:

$$\lambda^3 y^3 - p\lambda y + q = 0$$

ossia, dividendo per λ^3 ,

$$y^3 - \frac{p}{\lambda^2} y + \frac{q}{\lambda^3} = 0.$$

E perciò affinchè si abbia la detta identificazione delle equazioni (1), (2) è necessario e sufficiente che λ ed a soddisfino alle due relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left(\frac{p}{\lambda^2} = 3(1 + a^2) \right. \\ (4) \quad & \left. \frac{q}{\lambda^3} = -2a(1 + a^2). \right. \end{aligned}$$

Da queste, dividendo membro a membro, ricaviamo:

$$\frac{p\lambda}{q} = -\frac{3}{2a}$$

da cui

$$(5) \quad a = -\frac{3q}{2p\lambda}.$$

Sostituendo nella (3) quest'espressione della a ne deduciamo

$$\frac{p}{\lambda^2} = 3 \left(1 + \frac{9q^2}{4p^2\lambda^2} \right)$$

cioè

$$12p^2\lambda^2 = 4p^3 - 27q^2$$

donde:

$$(6) \quad \lambda = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}}$$

e, per la (5),

$$(7) \quad a = -\frac{3q}{\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}}}.$$

La trasformazione analitica che abbiamo eseguito si potrà quindi interpretare come una costruzione eseguibile colla riga e col compasso, la quale riconduce il problema di 3° grado proposto alla trisezione di un angolo, purchè il radicale che compare nelle formole (6), (7) riposi sopra un'espressione positiva. Questa condizione è essenziale perchè altrimenti siamo arre-

stati nella costruzione dal fatto che gli elementi di essa divengono immaginari.

Concludiamo dunque che la costruzione delle radici dell'equazione cubica

$$z^3 - pz + q = 0$$

si riduce alla trisezione di angolo, quando sia

$$4p^3 - 27q^2 > 0$$

cioè il discriminante

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

Supponiamo invece

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0.$$

In questo caso l'equazione cubica

$$z^3 - pz + q = 0$$

ha una radice reale espressa dalla formula

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Onde, in tal caso, dopo aver costruito colla riga e col compasso i segmenti

$$a = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

$$b = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

presi in valore assoluto, non resta che determinare $\sqrt[3]{a}$ e $\sqrt[3]{b}$ cioè costruire il lato del cubo equivalente al parallelepipedo rettangolo di lati $a, 1, 1$, o $b, 1, 1$. Quest'ultima costruzione dipende dall'inserzione di due medie proporzionali fra a e 1 e fra b e 1.

Pertanto concludiamo con CARTESIO ⁽¹⁾.

Tutte le costruzioni di 3° grado si possono ricondurre, coll'uso della riga e del compasso, alla trisezione di un angolo o alla costruzione di due medie proporzionali.

(1) Op. cit. pag. 76-77.

ARTICOLO OTTAVO

« Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo » di BENEDETTO CALÒ a Napoli.

§ 1. **Problemi algebrici e trascendenti.** — Negli art. 4° e 5° sono state studiate, dal punto di vista della Geometria analitica e dell'Algebra, le questioni relative alla risolubilità dei problemi per via elementare, cioè colla riga e col compasso.

Quando sia proposto un problema costruttivo, si trasformi anzitutto in modo che i *dati* sieno punti (poniamo per es. in un piano), e gli elementi incogniti sieno anch'essi dei punti aventi coi dati relazioni assegnate.

Affinchè il problema proposto sia risolubile elementarmente, occorre e basta che

a) le relazioni assegnate si possano tradurre con equazioni algebriche (cioè il problema sia *algebrico*);

b) le equazioni algebriche in discorso sieno risolubili con operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate (a partire dalle coordinate dei punti dati).

Le questioni relative alla possibilità di risolvere nel modo anzidetto (con irrazionalità quadratiche) un'equazione algebrica hanno trovato posto negli art. 5°, 6° e 7°.

Noi ci rivolgiamo qui al primo gruppo di questioni tendenti a decidere dell'*algebricità*, o, per contrapposto, della *trascendenza* di un dato problema. Ed avvertiamo subito che i problemi trascendenti debbono riguardarsi come più elevati degli algebrici in questo senso, che la risoluzione loro non solo non è effettuabile colla retta e col circolo (riga e compasso), ma nemmeno col tracciamento di curve algebriche superiori (come quelle utilizzate nell'art. 7°), o cogli istrumenti atti a descrivere tali curve.