ARTICOLO UNDECIMO

Sui Massimi e Minimi delle funzioni algebriche elementari

di ALESSANDRO PADOA, a Genova.

Introduzione. — Or sono circa settant' anni, lo STEINER si doleva che, nello studio delle questioni *geometriche* di massimo e di minimo, la *sintesi* fosse stata quasi interamente negletta, per seguire i procedimenti più comodi dell' *analisi*; ed il lagno, oggi ancora opportuno, era giustificato. Invero — quantunque nei mirabili saggi dello STEINER stesso (1) la critica abbia poi rilevato l' aiuto offerto qua e là dall' *intuizione* al *raziocinio*, in modo inconscio o non sufficientemente analizzato, sicchè l' eliminazione di tale difetto attenua la semplicità, talvolta illusoria, di alcune sue dimostrazioni — certo è che la Sintesi pone in viva luce l' intimo legame tra le proprietà delle figure, e consente dimostrazioni notevoli per rigore ed eleganza anche nei casi in cui le regole generali dell'Analisi non conducono direttamente allo scopo. E, comunque, per imprendere lo studio analitico di qualsivoglia questione geometrica, è necessario trasformarla preventivamente, sostituendo alle singole *grandezze* (di ciascun gruppo omogeneo) le loro *misure* (rispetto ad una medesima grandezza del gruppo stesso); sicchè lo *spazio* appare nulla più che un campo di *applicazione* delle proprietà dei *numeri*.

In compenso, l'Analisi estende ed approfondisce lo studio diretto delle proprietà dei numeri oltre le esigenze pratiche dell' indagine geometrica, e consente di farne poi applicazione in ogni campo dello scibile in cui si ricorra al sussidio dei

(1) *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l' espace en général* [Crelle 's Journal, t. 24, Berlin, 1842, Premier mémoire p. 93-152; second mémoire p. 189-250].

numeri. Inoltre, la ricerca sintetica è frutto di un lavorìo psicologico molto complesso e in parte inconscio, che trae il suo stimolo dai caratteri particolari della questione esaminata, e il nutrimento dalla copiosità delle soluzioni che al pensiero si affacciano quali verosimili e dalla prontezza e sicurezza di questo nell'eliminare le fallaci ed accertare la vera; perciò essa richiede più *genialità* che *disciplina* e, quando sia felicemente compiuta, essa si presta meglio ad essere *ammirata* nelle sue espressioni palesi (di asserzione e di verifica) che *imitata* ne' suoi procedimenti reconditi (di tentativi e di critica). Invece, la generalità e l'uniformità dei procedimenti analitici, per la determinazione dei massimi e minimi, ha permesso di trarne un vero *metodo* di ricerca, compendiabile in *regole* di ampia e sicura applicazione; sicchè allo studioso le singole *questioni* appaiono semplici *esercizî*, utili per addestrarlo a padroneggiare il prezioso strumento, ma i cui *risultati* non è necessario restino affidati alla memoria, potendo essere agevolmente ritrovati quando che sia.

Senonchè, accennando allo studio analitico delle questioni di massimo e di minimo, il pensiero di chi abbia vivo il ricordo degli studî universitarî ed un po' sbiadito quello dell'insegnamento medio (ancorchè esso non sia stato manchevole in questa parte) ricorre subito al *metodo delle derivate.* Ma, se tal metodo è il più seducente per la sua generalità e la sua uniformità, ci sembra che per giudicarlo il più *semplice* occorra prescindere da' suoi non lievi *presupposti* concettuali ed algoritmici (che bastano a renderlo disadatto al primo ciclo almeno dell'insegnamento medio) e fermare l'attenzione più sulle condizioni *necessarie* che sulle *sufficienti* (queste essendo tutt'altro che semplici, specie per le funzioni di più variabili). E giova anche non esagerare la sua indiscussa *potenza*, la quale è più *trasformatrice* che *risolutrice*: facendo ricadere sull'Algebra la responsabilità dell'eventuale insuccesso, per le difficoltà, talora insormontabili, opposte dall'equazione o dal sistema di equazioni cui esso conduce.

Ora — essendo affidato ad altri, in questo stesso volume, il compito di esporre i procedimenti sintetici ed il metodo delle derivate — noi qui ci proponiamo anzitutto di provare col fatto che, ove manchino le difficoltà dianzi accennate, l'*Algebra basta da sola* alla risoluzione *diretta* delle questioni proposte, senza l'ausilio trasformatore del metodo delle derivate. Il quale, inoltre, ha per iscopo principale la ricerca dei massimi e dei minimi *funzionali*, e solo in modo accessorio si cura dei massimi e dei minimi *incondizionati*, cioè del massimo e del minimo fra *tutti* i valori assunti da ciascuna funzione nel suo più vasto campo di variabilità reale (considerando, ad es., il massimo incondizionato quale *massimo dei massimi* funzionali o quale valore assunto dalla funzione in un punto del *contorno* del suo campo di variabilità, ed analogamente facendo per il minimo incondizionato); mentre è proprio la ricerca di cotal massimo e di cotal minimo quella che più spontaneamente si presenta nello studio dell'Algebra, alla quale tuttavia non è negata la determinazione dei massimi e dei minimi funzionali (quali massimi e minimi incondizionati spettanti ad opportuni *intorni* contenuti nel campo di variabilità).

L'accennata differenziazione nei fini, nei pregi e nei difetti dei varî procedimenti, non mira ad esaltare o deprimere l'uno o l'altro di essi, ma piuttosto ad invogliare il lettore ad istituire egli stesso quei raffronti di cui ci accontentiamo di offrirgli l'occasione e gli argomenti: a ciò guidati sovratutto dalla convinzione (estesa a qualunque ramo dello scibile) che ogni metodo legittimo di indagine sia parte inalienabile del patrimonio intellettuale collettivo, quanto i risultati che mercè sua furono conquistati; e che perciò sia opportuno raccomandarli tutti allo studioso, ancorchè ragioni di economia didattica o di lavoro debbano poi costringerlo a dare ad un solo di essi una decisa preferenza, sovente determinata soltanto da ragioni intellettuali soggettive.

Parecchi autori di trattati scolastici mostrano di ritenere che il *rigore* e la *semplicità* siano esigenze rispettabilissime, ma fra loro antagoniste; e — presumendo che, almeno sotto l'aspetto didattico, esse debbano farsi continue concessioni — finiscono col sacrificarle entrambe, senza che alcuna delle due tragga alcun vantaggio sostanziale dal sacrificio dell'altra. Accade così — per quanto concerne le questioni algebriche elementari di massimo e di minimo — che proposizioni *vere* siano dimostrate in modo *illusorio* [§ 10] e che problemi *facili* sian fatti apparire *ardui* per la mancanza di un'accurata indagine circa il linguaggio ed i mezzi sufficienti ad enunciarli e risolverli con precisione e chiarezza; anzi, ne' trattati più recenti, per un male inteso amore di *generalità*, essi vengono presentati quali casi particolari di questioni molto più complesse o più elevate, ingenerando nei giovani la fallace e scoraggiante persuasione che la risoluzione di quelli sia necessariamente subordinata alla risoluzione di queste [§ 5 Nota 2, § 8 Nota]. Per contro, nel modo piano e diretto in cui le abbiamo esposte, riteniamo che numerose ed attraenti questioni aritmetiche e geometriche di massimo e di minimo, oggi differite al corso universitario di esercizi di calcolo, potrebbero essere utilmente introdotte persino nell'insegnamento medio *inferiore*, specie per gli alunni che non proseguiranno gli studî [§ 5, § 6, § 7]; nel qual caso sarà opportuno non enunciare quelle *proprietà* fondamentali, che un po' troppo aridamente abbiamo riunito per comodità di consultazione [§ 3], se non quando si presenti effettiva occasione di ricorrervi.

Abbiamo anche cercato di mettere in luce la *organicità* della teoria algebrico-elementare dei massimi e minimi, fondandola su *un solo teorema*, che perciò abbiamo chiamato fondamentale [§ 9], e sulla sua *generalizzazione* [§ 13]. Infatti: i due teoremi del § 5 ne sono un'antecipazione *particolare*, dovuta a considerazioni didattiche; l'uso dei *fattori indeterminati* è presentato quale artificio mediante il quale si riesce a far dipendere dal metodo generale talune questioni che a prima giunta sembrerebbero ad esso ribelli [§ 15]; mentre lo studio dei *prodotti di polinomî* [§ 12] e delle *funzioni esplicite* [§ 18] ed *implicite* (§ 19] qui viene considerato come il soddisfacimento *complementare* di curiosità teoriche.

Abbiamo inoltre precisata e dimostrata la legge di *reciprocità* [§ 16], la quale dà un ausilio prezioso ancorchè non necessario, sovente negletto e non soltanto nei trattati scolastici; infatti, essa consente di evitare le dimostrazioni *autonome* di due proposizioni reciproche o la *deduzione* di una di esse dall'altra con argomentazioni la cui validità sembra connessa ai caratteri particolari della questione di cui si tratta.

§ 1. **Definizione.** — Dato un gruppo G di numeri, chiameremo « *massimo* } *minimo* { di G » un numero che appartenga a G e sia *maggiore* } *minore* { di ogni altro di G [1].

[1] Nel raggruppare due enunciati analoghi, vengono racchiuse entro } { le locuzioni del secondo che vanno sostituite alle immediatamente precedenti del primo.

NOTA 1. Dopo ciascuna delle locuzioni « numero *intero* », « numero *razionale* », « numero *reale* » — che non sia immediatamente seguìta dalla parola « *positivo* » o dalla parola « *negativo* » — sarà sottintesa la parola « *relativo* ». Sarà inoltre sottintesa l'esclusione dello *zero* tanto dai positivi, quanto dai negativi.

La parola « *numero* », senz'altro, va interpretata quale abbreviazione di una qualunque di codeste frasi.

Se G è un gruppo di numeri, in ciascuna delle locuzioni « nessun G », « alcuni G », ecc., davanti a G va sottintesa (al singolare o al plurale) la frase « numero appartenente a ».

APPLICAZIONE. *La minima somma di due numeri positivi reciproci è* 2.

Infatti: se uno di essi è 1, tale è anche l'altro e la loro somma è 2; se invece uno di essi, ad es. a, è diverso da 1, allora « $(a-1)^2 > 0$ », cioè « $a^2 - 2a + 1 > 0$ », cioè « $a^2 + 1 > 2a$ », da cui (poichè « $a > 0$ »)

$$a + \frac{1}{a} > 2.$$

NOTA 2. Dalla proposizione dimostrata si potrà poi dedurre, mediante la § 3·2 che:

la massima somma di due numeri negativi reciproci è « -2 ».

Ma si può dimostrarlo direttamente così: se uno di essi è « -1 », tale è anche l'altro e la loro somma è « -2 »; se invece uno di essi, ad es. a, è diverso da « -1 », allora « $(a+1)^2 > 0$ », cioè « $a^2 + 2a + 1 > 0$ », cioè « $a^2 + 1 > -2a$ », da cui (poichè « $a < 0$ »)

$$a + \frac{1}{a} < -2.$$

Ad es., il *minimo* valore *positivo* di

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$$

è 2, corrispondentemente ai valori « $\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$ » di x (dove n è un numero intero arbitrario); ed il suo *massimo* valore *negativo* è « -2 », corrispondentemente ai valori « $\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi$ » di x.

§ 2. **Unicità ed esistenza.** — La *unicità* del massimo }minimo{ dei G è manifesta; perchè, se G ammettesse due massimi }minimi{ distinti, ciascuno dovrebb'essere maggiore }minore{ dell'altro.

Invece la *esistenza* o non esistenza del massimo }minimo{ dei G dipende dalla particolare struttura del gruppo considerato, ed essa non implica nè esclude la esistenza o non esistenza del minimo }massimo{ dei G.

Nota. L'insieme dei numeri primi *fra* 31 *e* 37 (estremi *esclusi*) è un gruppo *nullo*, e perciò è *privo* di massimo e di minimo.

L'insieme dei numeri primi *da* 49 *a* 57 (estremi *inclusi*) racchiude *un solo* numero, il 53, e perciò questo è *in pari tempo* il massimo e il minimo del gruppo.

Se G è un gruppo *finito* (nell'accezione volgare) cui appartengono *almeno due* numeri, i G si potranno sempre disporre in ordine *crescente*, formandone una successione che avrà due estremi, *primo* ed *ultimo*, i quali saranno ordinatamente il minimo ed il massimo dei G. Ad es., nell'abituale sistema di numerazione, la minima cifra è 0, la massima è 9.

Ma d'ora in poi ci occuperemo esclusivamente di gruppi *infiniti* di numeri.

Se G è un gruppo di numeri *interi*, esso ha massimo }minimo{ sol quando vi sia almeno un numero maggiore }minore{ di ogni G; in particolare, ogni gruppo di numeri interi negativi }positivi{ ha massimo }minimo{.

Se G è un gruppo di numeri *razionali*, la condizione enunciata è *necessaria*, ma non *sufficiente*. Invero, ad es., se a e b sono numeri tali che « $a < b$ » e se G è l'insieme dei numeri razionali fra a e b, allora, se x è un G arbitrario, « $a < x < b$ »; conseguentemente

$$a < \frac{a+x}{2} < x < \frac{x+b}{2} < b,$$

il che esclude che x (comunque venga scelto in G) sia il massimo o il minimo dei G;

ma, se al gruppo G ora considerato si aggrega il numero b }il numero a{, questo è il massimo }minimo{ del nuovo gruppo, il quale però è ancora privo di minimo }massimo{;

infine, l'insieme dei numeri razionali da a a b ha per minimo a e per massimo b.

I quattro casi ora esaminati giustificano l'asserto generale da noi fatto circa la esistenza o non esistenza del massimo o del minimo. L'ultimo porge esempio di un gruppo *infinito* dotato di minimo e di massimo; il che è possibile per i numeri *razionali*, ma non per i numeri *interi*.

Quanto si è detto per i numeri razionali, vale anche per i numeri *reali*. Inoltre, se G è un gruppo di numeri *reali*, esso ha massimo }minimo{ sol quando i numeri maggiori }minori{ di ogni G formano un gruppo non nullo privo di minimo }massimo{.

Anche tale condizione è *necessaria*, ma non *sufficiente*, per i numeri *razionali*; perchè ad es., se x è un numero *irrazionale* e se G è l'insieme dei numeri *razionali* minori }maggiori{ di x, allora G è privo di massimo }minimo{, quantunque i numeri *razionali* maggiori }minori{ di ogni G formino un gruppo non nullo privo di minimo }massimo{.

Ma di tali criterî non ci varremo; perchè la ricerca del massimo }minimo{ di ciascuno dei gruppi di numeri di cui dovremo occuparci verrà compiuta senza alcuna indagine preventiva circa la sua esistenza, ed anche indipendentemente da ogni ordinamento dei numeri appartenenti al gruppo stesso.

§ 3. **Proprietà fondamentali.** — Dalla definizione [§ 1], e da proprietà note delle diseguaglianze, si deducono le proposizioni seguenti, ciascuna delle quali va *riletta* scambiandovi fra loro le parole « *massimo* » e « *minimo* ».

Se G è un gruppo di numeri dotato di *massimo*, rappresentiamo questo con la scrittura « $\max G$ »; analogamente, se G è dotato di *minimo*, rappresentiamo questo con la scrittura « $\min G$ ».

La scrittura « $G+a$ » indica il gruppo ottenuto aggiungendo separatamente a a *ciascun* individuo di G; analogo significato hanno le scritture « $G-a$ », « $a-G$ », « Ga » ecc.

·1 Qualunque sia il numero a:

$$\max(G+a)=(\max G)+a,$$

il che implica $\max(G-a)=(\max G)-a$; inoltre

·2 $$\min(-G)=-(\max G)$$

e quindi $\min(a-G)=a-(\max G)$.

·3 Se a è *positivo*:

$$\max(Ga) = (\max G)a,$$

il che implica
$$\max\frac{G}{a} = \frac{\max G}{a}.$$

·4 Se invece a è *negativo*, dalle ·2·3 risulta:

$$\min(Ga) = (\max G)a, \qquad \min\frac{G}{a} = \frac{\max G}{a}.$$

·5 Se i G sono *tutti positivi* o *tutti negativi* (nel qual caso è *escluso* che lo 0 appartenga a G [§ 1 Nota 1]):

$$\min\frac{1}{G} = \frac{1}{\max G}.$$

Nota 1. Quando G sia la *riunione* di un gruppo N di numeri *negativi* e di un gruppo P di numeri *positivi*, è chiaro (per la ·5 e perchè ogni negativo è minore di ogni positivo) che $\frac{1}{G}$ ha *minimo* sol quando N abbia *massimo*, e precisamente

$$\min\frac{1}{G} = \min\frac{1}{N} = \frac{1}{\max N};$$

analogamente, $\frac{1}{G}$ ha *massimo* sol quando P abbia *minimo*, e precisamente

$$\max\frac{1}{G} = \max\frac{1}{P} = \frac{1}{\min P}.$$

·6 Ancora nell'ipotesi che i G siano *tutti positivi* o *tutti negativi*, dalle ·3·4·5 segue:

$\frac{a}{\max G}$ è il *minimo* o il *massimo* di $\frac{a}{G}$, secondochè a è *positivo* o *negativo*.

Nota 2. Invece, nell'ipotesi della Nota 1, quando a è *positivo*:

$$\min\frac{a}{G} = \min\frac{a}{N} = \frac{a}{\max N}, \qquad \max\frac{a}{G} = \max\frac{a}{P} = \frac{a}{\min P};$$

e quando a è *negativo*:

$$\min \frac{a}{G} = \min \frac{a}{P} = \frac{a}{\max P}, \qquad \max \frac{a}{G} = \max \frac{a}{N} = \frac{a}{\min N};$$

sicchè la *esistenza* del minimo o massimo di $\frac{a}{G}$ è *subordinata*, come indicano codeste formule, a quella del massimo o del minimo di N o di P.

·7 Se n è un numero intero positivo:

$$\max (G^{2n+1}) = (\max G)^{2n+1}$$

da cui
$$\max \sqrt[2n+1]{G} = \sqrt[2n+1]{\max G},$$

avvertendo che dei radicali ad indice *dispari* consideriamo soltanto il valore *reale*;

·8 e, se i G sono *tutti positivi*:

$$\max (G^n) = (\max G)^n$$

da cui
$$\max \sqrt[n]{G} = \sqrt[n]{\max G},$$

avvertendo che dei radicali ad indice *pari* (e radicando positivo) consideriamo soltanto il valore *positivo*;

·9 mentre, se i G sono *tutti negativi*:

$$\min (G^{2n}) = (\max G)^{2n}.$$

NOTA 3. Nell'ipotesi della Nota 1, G^2 ha *massimo* }*minimo*{ sol quando abbia *massimo* }*minimo*{ il gruppo $|G|$ dei valori *assoluti* di G, nel qual caso

$$\max (G^2) \doteq (\max |G|)^2$$

dove « $\max |G|$ » è « $\max P$ » ovvero « $|\min N|$ ».

In particolare, se lo 0 appartiene a G,

$$\min (G^2) = 0.$$

·10 Se G_1 e G_2 sono gruppi di numeri dotati di *massimo*, allora

$$\max (G_1 + G_2) = \max G_1 + \max G_2;$$

e, secondochè i G_1 ed i G_2 sono *tutti positivi* o *tutti negativi*, « $(\max G_1)(\max G_2)$ » è il valore del *massimo* o del *minimo* di « $G_1 G_2$ ». (La scrittura « $G_1 + G_2$ » designa l'insieme delle somme che hanno per addendi un G_1 ed un G_2, *in tutti i modi possibili*; analogamente per « $G_1 G_2$ »).

§ 4. **Osservazioni critiche.** — Se G è un gruppo di numeri e se « $m = \max G$ », alla conoscenza di tal fatto si può giungere per vie diverse, due delle quali sono indicate dagli schemi seguenti:

Schema I. Il numero m appartiene a G ed è maggiore di ogni altro G.

Schema II. Il massimo dei G si può esprimere in funzione del massimo o minimo di un altro gruppo G_1 e così successivamente sino ad un gruppo G_n, il cui massimo o minimo è noto; eseguendo le operazioni accennate, si trova che « $\max G = m$ ».

Lo schema I (del quale nel § 1 abbiamo dato un'applicazione) deriva immediatamente dalla Definizione; ma, quantunque di concezione semplice e di applicazione rapida, esso presenta il difetto di essere soltanto uno strumento di *verifica*. Invece lo schema II è quello di una *ricerca*, che lascia impregiudicata sino all'ultimo la questione della *esistenza* del massimo e che alla fine la risolve implicitamente, mediante la effettiva *determinazione* del massimo.

Ed analogamente per la determinazione di un minimo.

Applicazione. *Fra i triangoli, di cui due lati sono eguali a due segmenti dati, il massimo è* (cioè: l'area massima spetta a) *quello in cui l'angolo fra essi compreso è retto* [1].

Schema I. L'area del triangolo rettangolo avente per cateti a e b è « $\frac{1}{2}ab$ ». Se h è l'altezza corrispondente ad a in un *altro* dei triangoli considerati, l'area di questo è « $\frac{1}{2}ah$ »; poichè « $b > h$ », risulta « $\frac{1}{2}ab > \frac{1}{2}ah$ ».

[1] In questo Articolo, la trattazione delle questioni *geometriche* è sempre *analitica*; rimane quindi sottinteso che ogni *grandezza* considerata è sostituita dal *numero* che la misura, e che ciascuna volta i segmenti sono misurati rispetto ad uno stesso segmento, le aree ed i volumi rispetto al quadrato o al cubo di tale segmento.

Schema II. 1) Se h è l'altezza corrispondente ad a in uno *qualunque* dei triangoli considerati, l'area di questo è « $\frac{1}{2} ah$ »; ora

$$\max\left(\frac{1}{2} ah\right) = \frac{1}{2} a (\max h) = \frac{1}{2} ab \tag{1}$$

perchè « $\max h = b$ », corrispondentemente al caso in cui b è perpendicolare ad a.

2) In altro modo, se γ è l'angolo compreso fra a e b in uno *qualunque* dei triangoli considerati, l'area di questo è « $\frac{1}{2} ab \sin\gamma$ »; ora

$$\max\left(\frac{1}{2} ab \sin\gamma\right) = \frac{1}{2} ab (\max \sin\gamma) = \frac{1}{2} ab \tag{2}$$

perchè « $\max \sin\gamma = 1$ », corrispondentemente al valore $\frac{\pi}{2}$ di γ.

Avvertenza. Nel comune linguaggio matematico, a e b sono chiamate *costanti*, h e γ sono chiamate *variabili*. Il vero è che a è *un numero* (e così pure b), mentre h nelle spiegazioni è *un numero qualunque* di un certo gruppo, e nelle formule è *un gruppo di numeri* (e così pure γ e « $\sin\gamma$ »); senza di che, le scritture « $\max h$ » e « $\max \sin\gamma$ » sarebbero prive di senso.

Dopo ciò, è chiaro che il passaggio dal *primo* al *secondo* membro della (1) o della (2) è un'applicazione di § 3·3, ed è quindi subordinato all'*ipotesi sottintesa* « se h o $\sin\gamma$ ammette massimo », la cui verità è però implicita nel passaggio dal *secondo* al *terzo* membro.

Chiarita in tal modo la legittimità logica dello schema II, rimane evidente la sua superiorità euristica, e perciò è ad esso che daremo la preferenza. Nè tragga in inganno la forma di *teorema* sotto cui presentiamo ciascuna questione, per comodità di consultazione; invero, poichè nella trattazione non ci gioveremo dell'anticipata notizia del valore del massimo o del minimo (tranne nel teorema fondamentale [§ 9]), avremmo potuto presentare ogni *problema* in forma di domanda e risposta, frapponendovi la *ricerca*. Eccone due esempî.

Esempio 1. La potenza di un punto, rispetto ad una circonferenza } superficie sferica { data, ammette *massimo* o *minimo*?

Se r è il raggio della circonferenza } superficie sferica { data e se d è la distanza di un punto qualunque (del suo piano, trattandosi della circonferenza) dal suo centro, allora la potenza del punto considerato è espressa dalla formula « $d^2 - r^2$ »; sicchè [§ 3·1]

$$\min (d^2 - r^2) = \min (d^2) - r^2 = - r^2$$

quando « $d = 0$ » [§ 3 Nota 3], e perciò il *centro* della circonferenza } superficie sferica { data ha la *minima* potenza rispetto ad essa. Nessun punto ha potenza massima; invero, dato un numero positivo grande a piacere, ad es. n^2, basta assumere « $d > \sqrt{n^2 + r^2}$ » affinchè risulti

$$d^2 - r^2 > n^2.$$

Esempio 2. L'espressione « $\sin x \cos x$ » ammette *massimo* o *minimo*?

Poichè

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin (2x),$$

si ha [§ 3·3]:

$$\max (\sin x \cos x) = \frac{1}{2} \max \sin (2x)$$

e $$\min (\sin x \cos x) = \frac{1}{2} \min \sin (2x);$$

ma $$\max \sin (2x) = 1$$

e $$\min \sin (2x) = - 1,$$

sicchè: $$\max (\sin x \cos x) = \frac{1}{2}$$

e $$\min (\sin x \cos x) = - \frac{1}{2}.$$

Per « $0 \leqq x < 2\pi$ », i valori di x corrispondenti al *massimo* sono $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$; quelli corrispondenti al *minimo* sono $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

NOTA. Sarebbe stata erronea l'applicazione della § 3·10; infatti, posto « $G_1 = \sin x$ » e « $G_2 = \cos x$ », non è « $G_1 G_2 = \sin x \cos x$ », perchè in « $\sin x \cos x$ » *ciascun* valore di « $\sin x$ » va moltiplicato per *il* valore di « $\cos x$ » che corrisponde al valore considerato di x. La § 3·10 sarebbe da applicarsi per la ricerca del massimo di « $\sin x \cos y$ », in quanto x ed y fossero *variabili fra loro indipendenti*; in tal caso,

$$\max(\sin x \cos y) = 1$$

e ciò perchè, oltre a « $\max \sin x = 1$ » e « $\max \cos x = 1$ », si ha « $\min \sin x = -1$ » e « $\min \cos x = -1$ »; sicchè, per valori di x e di y del primo giro, il massimo indicato corrisponde tanto ad « $x = \frac{\pi}{2}$ » ed « $y = 0$ », quanto ad « $x = \frac{3\pi}{2}$ » ed « $y = \pi$ ».

§ 5. **Prodotto di due numeri aventi somma o differenza data.**

·1 *Il prodotto di due numeri, aventi somma data, è massimo quando essi sono fra loro eguali.*

Dim. Sia « $2s$ » la somma data. I due numeri si possono rappresentare con « $s + x$ » ed « $s - x$ », dove x è un numero arbitrario, e quindi il loro prodotto con « $s^2 - x^2$ ». Si ha:

$$\max(s^2 - x^2) = s^2 - \min(x^2) = s^2$$

quando « $x = 0$ » [§ 3 Nota 3], cioè quando ciascuno dei due numeri è s.

·2 *Il prodotto di due numeri, aventi differenza data, è minimo quando essi sono fra loro opposti.*

Dim. Sia « $2d$ » la differenza data. I due numeri si possono rappresentare ordinatamente con « $x + d$ » ed « $x - d$ », dove x è un numero arbitrario, e quindi il loro prodotto con « $x^2 - d^2$ ». Si ha:

$$\min(x^2 - d^2) = \min(x^2) - d^2 = -d^2$$

quando « $x = 0$ », cioè quando i due numeri sono ordinatamente d e « $-d$ ».

NOTA 1. Le ·1·2 si possono anche dedurre dall'identità

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy;$$

1) se « $x + y = 2s$ », allora « xy » è massimo quando « $(x - y)^2$ » è minimo [§ 3·2], cioè quando « $(x - y)^2 = 0$ », cioè quando « $y = x$ »;

2) se « $x - y = 2d$ », allora « xy » è minimo quando « $(x+y)^2$ » è minimo [§ 3·1], cioè quando « $(x+y)^2 = 0$ », cioè quando « $y = -x$ ».

Nota 2. Per dimostrare la ·1, in parecchi trattati scolastici si rappresenta con « $2s$ » la somma data, con x uno dei due numeri e quindi con « $2s - x$ » l'altro numero, e con y il loro prodotto. Risultando

$$y = 2sx - x^2,$$

la determinazione del massimo di y è fatta dipendere da quella del massimo o del minimo della funzione

$$y = ax^2 + bx + c,$$

per la quale determinazione si ricorre alle derivate, prima e seconda, di y rispetto ad x.

Un tale procedimento, suggerito da un eccessivo amore di generalità, ci sembra il più adatto a sgomentare i giovani che sono alle loro prime armi nell'affrontare le difficoltà di una ricerca.

Del resto, chi preferisse rappresentare i due numeri con x e « $2s - x$ », potrebbe attenersi a quest'altra dimostrazione, pure molto facile.

Quali che siano s ed x,

$$(s - x)^2 \geqq 0,$$

da cui $$s^2 \geqq 2sx - x^2,$$

da cui $$x(2s - x) \leqq s^2;$$

dunque il prodotto considerato è minore di « s^2 », tranne quando « $s - x = 0$ », nel qual caso il prodotto è « s^2 », « $x = s$ » e « $2s - x = s$ »; quindi ecc.

Nota 3. Nei comuni trattati, la questione ·2 non viene nemmeno posta, probabilmente perchè anch'essa si considera inclusa nella determinazione generale cui abbiamo accennato nella Nota 2; eppure essa è suscettibile di un'importante applicazione, forse nuova sotto l'aspetto del metodo, di cui si occupiamo nel § 8.

Frattanto, si osservi che la ·2 potrebbe anche venir presentata quale corollario della ·1, così:

se « $x - y = 2d$ », cioè se « $x + (-y) = 2d$ », per la ·1 « $x(-y)$ » è massimo quando « $x = -y$ »; ma il massimo di « $x(-y)$ », cioè di « $-(xy)$ », corrisponde al minimo di « xy » [§ 3·2]; quindi ecc.

Avvertenza. Giova rilevare, per quanto diremo nel seguito, che la ·1 è valida indifferentemente nel campo *assoluto* o *relativo*, così per la somma che per i due numeri. In essa non si parla di *minimo*, perchè nel campo assoluto esso è *sempre* 0, corrispondentemente ai numeri « $2s$ » e 0; e nel campo relativo esso *non esiste*, poichè i numeri « $s + \sqrt{s^2 + n^2}$ » ed « $s - \sqrt{s^2 + n^2}$ » (in cui n è un numero qualunque) hanno per somma « $2s$ » e per prodotto « $-n^2$ ».

Invece la ·2 è valida nel campo *relativo*, come appare dall'enunciato, mentre nel campo assoluto il minimo del prodotto è *sempre* 0, corrispondentemente ai numeri « $2d$ » e 0. In essa non si parla di *massimo*, perchè esso *non esiste*; infatti, i numeri « $\sqrt{n^2 + d^2} + d$ » e « $\sqrt{n^2 + d^2} - d$ » (in cui n è un numero qualunque) hanno per differenza « $2d$ » e per prodotto « n^2 ».

§ 6. **Prime questioni geometriche.** — Ecco un saggio di applicazioni della sola proposizione § 5·1, ristretta anzi al campo *assoluto*.

·1 *Fra i rettangoli aventi un perimetro dato, il quadrato è il massimo.*

Invero, l'*area* di ciascuno di tali rettangoli è il *prodotto* delle sue dimensioni, la cui *somma* (essendo la metà del perimetro dato) è data; quindi ecc.

·2 *Fra i triangoli di cui sono dati un lato e la somma degli altri due, il massimo è quello in cui questi altri due lati sono fra loro eguali.*

Dati il lato a e la somma « $2s$ » degli altri due lati, si ponga « $2p = 2s + a$ ».

Se x ed y sono codesti due lati in uno qualunque dei triangoli considerati, l'*area* di questo diviene massima assieme al suo quadrato [§ 3·8], cioè a

$$p(p-a)(p-x)(p-y)$$

cioè [§ 3·3] a $(p - x)(p - y)$

dove $(p - x) + (p - y) = 2p - 2s = a;$

dunque l'area è *massima* quando

$$p - x = p - y$$

cioè quando $x = y = s.$

·3 *Fra i triangoli di cui sono dati un angolo e la somma dei due lati che lo comprendono, il massimo è quello in cui questi due lati sono fra loro eguali.*

Infatti, se due lati x ed y di un triangolo comprendono l'angolo dato φ ed hanno la somma data « $2s$ », l'area Δ di tale triangolo è data dalla formula

$$\Delta = \frac{1}{2} xy \sin \varphi$$

e perciò [§ 3·3] diviene massima assieme ad « xy », dove « $x + y = 2s$ »; sicchè Δ è *massima* quando « $x = y = s$ ».

·4 *Fra i triangoli di cui è data la somma di due lati, il massimo è quello in cui questi due lati sono fra loro eguali e perpendicolari.*

Invero, riferendoci alla questione precedente e considerando φ quale *variabile indipendente* da x e da y, risulta [§ 3·10, § 4 Nota]:

$$\max \Delta = \frac{1}{2} \max (xy) [\max \sin \varphi]$$

e perciò Δ è *massima* quando « $x = y = s$ » e « $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ».

·5 *Fra i rettangoli inscritti in un triangolo dato, sono massimi quei tre le cui dimensioni sono le metà di ciascun lato del triangolo e della corrispondente altezza*; perciò l'area di tali rettangoli è la *metà* di quella del triangolo dato.

Dicendo che un rettangolo è *inscritto* in un triangolo, intendiamo dire che un lato di quello sia contenuto in un lato di questo e che gli altri due vertici di quello appartengono uno a ciascuno degli altri due lati di questo; pertanto, i rettangoli considerati si possono distinguere in *tre gruppi* secondo il lato del triangolo dato su cui poggiano.

Consideriamo dapprima un rettangolo qualunque appartenente ad *uno* di codesti gruppi; sia x il lato del rettangolo che è contenuto nel lato a del triangolo, e ne siano y ed h le corrispondenti altezze.

Risulta che $$a : x = h : (h - y),$$ da cui

$$x = \frac{a}{h}(h - y). \tag{1}$$

L'*area* del rettangolo considerato essendo perciò « $\frac{a}{h}(h - y)y$ », essa diviene massima assieme ad

$$(h - y)y$$

dove $$(h - y) + y = h;$$

dunque l'area è massima quando « $y = \frac{h}{2}$ ».

Contemporaneamente, per la (1), « $x = \frac{a}{2}$ ».

Poichè in tal caso l'area del rettangolo risulta « $\frac{ah}{4}$ », cioè la *metà* di quella del triangolo dato, al medesimo risultato *numerico* si deve giungere per gli altri due gruppi di rettangoli; pertanto i *tre rettangoli*, ciascuno dei quali è il *massimo* del proprio gruppo, sono fra loro *equivalenti*, e quindi essi sono i *massimi* del gruppo complessivo.

·6 *Fra i cilindri inscritti in un cono dato, ha la massima superficie laterale quello la cui altezza è la metà dell'altezza del cono*; perciò tale superficie è un *quarto* della superficie laterale del *cilindro circoscritto* al cono dato. (Qui, e nel seguito, le parole « cilindro » e « cono » hanno il consueto significato elementare) (1).

Se x ed y sono il diametro e l'altezza di un cilindro *inscritto* nel cono dato, di diametro a e di altezza h, la *superficie laterale* « πxy » del cilindro considerato diviene massima assieme ad « xy », cioè all'area del rettangolo inscritto nel triangolo (isoscele) di base a e di altezza h. Quindi [·5], tale

(1) Veggasi più innanzi la questione analoga per la *superficie totale* [§ 8 Appl. geom.] e per il *volume* [§ 14·2].

superficie è *massima* quando « $x = \frac{a}{2}$ » ed « $y = \frac{h}{2}$ », nel qual caso essa è appunto un *quarto* di « $\pi a h$ ».

§ 7. Corollarî aritmetici e loro applicazioni.

·1 *La somma dei quadrati di due numeri, dei quali è dato il valore della somma o del prodotto* (positivo), *è minima quando essi sono fra loro eguali.*

Invero, se

$$x + y = 2s,$$

allora

$$x^2 + y^2 = 4s^2 - 2xy;$$

quindi « $x^2 + y^2$ » è *minimo* quando « xy » è *massimo* [§ 3·2·3], cioè [§ 5·1] quando « $x = y = s$ ».

Se invece

$$xy = p^2,$$

allora

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2p^2;$$

quindi [§ 3·1] « $x^2 + y^2$ » diviene *minimo* assieme ad « $(x - y)^2$ », cioè [§ 3 Nota 3] quando « $x - y = 0$ », da cui « $x = y$ » (il che accade quando x vale p o « $-p$ »).

·2 *La somma ed il prodotto di due numeri positivi, di cui è data la somma dei quadrati, sono massimi quando i due numeri sono fra loro eguali.*

Infatti, se

$$x^2 + y^2 = 2s^2, \tag{1}$$

allora

$$(x + y)^2 = 2s^2 + 2xy,$$

e perciò « $x + y$ » diviene massimo assieme ad « xy » [§ 3·1·3·8]; quindi *entrambi* divengono *massimi* assieme ad « x^2y^2 » [§ 3·8], cioè, per la (1), quando « $x^2 = y^2$ » [§ 5·1], cioè quando

$$x = y = s;$$

sicchè: $\max(x + y) = 2s, \quad \max(xy) = s^2.$

NOTA. Data la (1) e se x ed y sono numeri *relativi*, allora « $\max(xy) = s^2$ » anche quando « $x = y = -s$ », cui però corrisponde

$$\min(x + y) = -2s;$$

invece $$\min(xy) = -s^2$$

quando $$x = \pm s \quad \text{ed} \quad y = \mp s.$$

Ecco alcune applicazioni immediate della ·1.

·3 *Fra i rettangoli aventi un dato perimetro o una data area, il quadrato ha la minima diagonale* (simultaneamente, la circonferenza ed il cerchio circoscritti hanno lunghezza ed area minime); in altri termini:

·4 *fra i triangoli rettangoli, di cui è data la somma dei cateti o l'area, l'isoscele ha la minima ipotenusa*; od anche:

·5 *fra i quadrati inscritti in un quadrato dato, quello, che ha per vertici i punti medî dei lati di codesto quadrato, ha perimetro ed area minimi.*

Ed ecco alcune applicazioni immediate della ·2.

6· *Fra i rettangoli inscritti in un cerchio dato, il quadrato ha perimetro ed area massimi*; in altri termini:

·7 *fra i triangoli rettangoli aventi una data ipotenusa, quello isoscele ha perimetro ed area massimi*; od anche:

·8 *fra i quadrati circoscritti ad un quadrato dato, quello, i cui lati sono paralleli alle diagonali di codesto quadrato, ha perimetro ed area massimi.*

Seguono alcune applicazioni della ·2, meno manifeste delle precedenti.

·9 *Fra i cilindri inscritti in una sfera data, l'equilatero* (in cui l'altezza è eguale al diametro) *ha superficie laterale massima* (che è la *metà* di quella della *sfera*) [1].

Infatti, se x e « $2y$ » sono il raggio e l'altezza di un cilindro *inscritto* nella sfera di raggio a, risulta

$$x^2 + y^2 = a^2; \tag{1}$$

la *superficie laterale* « $4\pi xy$ » del cilindro considerato diviene *massima* assieme ad « xy », cioè, per la (1), quando « $x = y$ »; in tal caso essa vale « $4\pi \cdot \frac{1}{2} a^2$ », cioè la *metà* di « $4\pi a^2$ ».

[1] Veggasi più innanzi la questione analoga per il *volume* [§ 14.3] e per la *superficie totale* [§ 20 Quest. V].

·10 *Il massimo rettangolo inscritto in un' ellisse data è simile al rettangolo ad essa circoscritto, ed è la metà di esso.*

Siano infatti « $2a$ » e « $2b$ » gli assi dell' ellisse, « $2x$ » e « $2y$ » le dimensioni (rispettivamente parallele ai detti assi) di un rettangolo inscritto qualunque, la cui *area* sia s.

Poichè
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
risulta
$$\max\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{2},$$
quando
$$x:a=y:b.$$

Segue che
$$\max(xy)=\frac{ab}{2},$$
da cui
$$\max s=2ab=\frac{1}{2}(2a\cdot 2b).$$

·11
$$\max(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}$$
quando $x=\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi$, dove n è un intero arbitrario;

e
$$\min(\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}$$
quando $x=\left(2n+\frac{5}{4}\right)\pi$;

inoltre:
$$\max(\sin x\cos x)=\frac{1}{2}$$
per qualunque dei detti valori di x, mentre
$$\min(\sin x\cos x)=-\frac{1}{2}$$
quando $x=\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi$ ovvero $x=\left(2n+\frac{7}{4}\right)\pi$.

Tutto ciò si deduce da
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
e dalla Nota; ma i risultati che riguardano « $\sin x\cos x$ » furono già trovati per altra via [§ 4, *Es.* 2].

§ 8. **Prodotto di due fattori lineari.**

TEOREMA. Sia

$$(1) \qquad y = (a_1 x + a_2)(b_1 x + b_2)$$

in cui a_1, a_2, b_1, b_2 sono numeri dati (a_1 e b_1 diversi da 0) ed x è un numero arbitrario; secondochè « $a_1 b_1$ » è *positivo* o *negativo*, y ammette *minimo* o *massimo*, il quale in ambo i casi è

$$(2) \qquad y_0 = -\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{4a_1 b_1}$$

corrispondentemente ad

$$(3) \qquad x_0 = -\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2a_1 b_1}.$$

Dim. Dalla (1) si deduce

$$(4) \qquad 4a_1 b_1 y = 2a_1(b_1 x + b_2) \cdot 2b_1(a_1 x + a_2)$$

in cui

$$(5) \qquad 2a_1(b_1 x + b_2) - 2b_1(a_1 x + a_2) = 2(a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

quindi [§ 5·2], il *minimo* di « $4a_1 b_1 y$ » è *sempre* « $-(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$ », da cui [§ 3·3·4] la (2); il minimo o massimo di y corrisponde al valore di x per cui

$$(6) \qquad 2a_1(b_1 x + b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

da cui la (3).

NOTA. Dalle (4)(5) risulta [§ 5 AVV.] che « $4a_1 b_1 y_1$ » è *privo di massimo*; perciò y è *privo* di massimo o di minimo, secondochè *ammette* minimo o massimo.

Alla formola (2), che dà il valore del minimo o del massimo di y, siamo giunti con procedimento *aritmetico*, senza cioè risolvere alcuna equazione; mentre di solito la questione di cui ci siamo occupati vien fatta dipendere dalla teoria delle equazioni di *secondo* grado.

Solo in quanto si voglia conoscere il valore di x che corrisponde al minimo od al massimo di y, occorre risolvere un'equazione di *primo* grado, per passare dalla (6) alla (3). Nello scrivere la (6) abbiamo preferito eguagliare il sottraendo della (5) alla semidifferenza, anzichè all'opposto del sottrattore.

Anche senza premettere il *Teor.* ora dimostrato, si può insegnare *praticamente* a ricondurre il problema all'una o all'altra delle questioni ·1·2 del § 5, e ad operare coi più piccoli numeri possibili. Eccone due esempî.

Esempio 1. Sia

$$y = (5 + 6x)(13 - 14x) \tag{7}$$

e si voglia conoscere il minimo o il massimo di y.

Poichè il minimo multiplo di 6 e di 14 è 42, ed inoltre « $42:6=7$ » e « $42:14=3$ », distribuiamo il fattore 7 entro la prima parentesi, il fattore 3 entro la seconda, ed in compenso moltiplichiamo il primo membro per « 7×3 ». La (7) equivale dunque a

$$21y = (35 + 42x)(39 - 42x) \tag{8}$$

dove

$$(35 + 42x) + (39 - 42x) = 74 = 2 \times 37; \tag{9}$$

quindi [§ 5·1]

$$\max(21y) = 37^2 = 1369$$

da cui

$$\max y = \frac{1369}{21} = 65 + \frac{4}{21}.$$

Dalle (8)(9) risulta [§ 5·1] che y è *massimo* quando

$$35 + 42x = 37,$$

cioè quando

$$x = \frac{1}{21}.$$

Esempio 2. Analoga questione per

$$y = (18x - 7)(30x - 13) \tag{10}$$

Operando come sopra, la (10) equivale a

$$15y = (90x - 35)(90x - 39)$$

dove

$$(90x - 35) - (90x - 39) = 4 = 2 \times 2; \tag{11}$$

quindi [§ 5·2]

$$\min(15y) = -2^2 = -4$$

da cui

$$\min y = -\frac{4}{15}.$$

Dalle (10)(11) risulta [§ 5·2] che y è *minimo* quando

$$90x - 35 = 2,$$

cioè quando $$x = \frac{37}{90}.$$

APPLICAZIONE GEOMETRICA. *Fra i cilindri inscritti in un cono dato, ve n' è uno di superficie totale massima* } minima {, *purchè nel cono l' altezza sia maggiore* } minore { *del raggio*; in ambo i casi, *tale cilindro è quello in cui la somma del raggio e dell' altezza è la metà dell' altezza del cono.* (Nel § 6·6 venne fatta analoga ricerca per la *superficie laterale*).

Dim. Siano x, y, s il raggio, l' altezza e la *superficie totale* di un cilindro inscritto nel cono dato, di raggio a e di altezza h; è noto che

(1) $$s = 2\pi x(x+y).$$

Se $h = a$, allora « $x + y = a$ » e perciò « $s = 2\pi a x$ »; ma « $0 < x < a$ » e quindi nè x nè s ammettono massimo o minimo [§ 2 Nota e § 3·3].

In ogni caso,

(2) $$x : a = (h - y) : h$$

e perciò la (1), eliminandovi x, diviene

$$s = 2\pi \frac{a}{h^2}(h-y)[ah + (h-a)y]$$

da cui, quando « $h \neq a$ »:

$$\frac{s}{h-a} = 2\pi \frac{a}{h^2}(h-y)\left(\frac{ah}{h-a} + y\right)$$

dove

$$(h-y) + \left(\frac{ah}{h-a} + y\right) = \frac{h^2}{h-a};$$

quindi $\frac{s}{h-a}$ diviene massimo [§ 3·3, § 5·1] quando

(3) $$h - y = \frac{h^2}{2(h-a)};$$

simultaneamente [§ 3·3·4], s diviene *massimo* o *minimo* secondochè « $h - a$ » è *positivo* o *negativo*.

In ambo i casi, eliminando « $h-y$ » fra le (2)(3),

$$x=\frac{ah}{2(h-a)}$$

e dalla (3) $$y=h-\frac{h^2}{2(h-a)},$$

sicchè $$x+y=\frac{h}{2},$$ c. d. d.

§ 9. **Il teorema fondamentale.**

TEOREMA. *Il prodotto di un gruppo finito di numeri assoluti, in numero dato e aventi somma data, è massimo quando essi sono fra loro eguali.*

Dim. Sia n (intero e non minore di 2) il numero dato e sia « ns » la somma data, sicchè « s^n » è *uno* dei prodotti considerati.

Se « $s=0$ », l'unico prodotto che verifichi le condizioni poste è 0, e perciò esso è il massimo [§ 1 Nota]; ciascun suo fattore essendo 0, in questo caso il *Teor.* è dimostrato.

Se invece « $s>0$ » e se p_1 è un *altro* di tali prodotti, si vuol dimostrare che

(1) $$s^n>p_1.$$

I fattori di p_1, che sono diversi da s, non possono essere tutti maggiori, nè tutti minori, di s (altrimenti la somma complessiva risulterebbe maggiore o minore di « ns »); perciò di essi *uno almeno*, ad es. a, è *maggiore* di s, ed *uno almeno*, ad es. b, è *minore* di s.

Poichè

$$a+b-s>0 \quad \text{ed} \quad s+(a+b-s)=a+b,$$

fra i prodotti considerati ve n'è uno p_2 che differisce da p_1 per avere quali fattori s ed « $a+b-s$ », invece di a e b, tutti gli *altri* fattori essendo *comuni* a p_1 e p_2.

Dall'identità

$$s(a+b-s)=ab+(a-s)(s-b)$$

e dall'ipotesi $$a>s>b,$$ si deduce

(2) $$p_2>p_1.$$

Se « $p_2=s^n$ », la (1) è dimostrata. Altrimenti, si operi su p_2 come dianzi su p_1; se p_3 è il nuovo prodotto cui si perviene in tal modo, « $p_3 > p_2$ » e quindi, per la (2),

$$p_3 > p_1.$$

Se « $p_3 = s^n$ », la (1) è dimostrata. Altrimenti, si prosegue sempre allo stesso modo, finchè si giunga ad un prodotto p_m, tale che « $p_m = s^n$ »; in tal caso, poichè

$$p_m > p_{m-1} > \ldots . p_3 > p_2 > p_1,$$

la (1) è dimostrata.

Rimane solo da chiarire che ad un tale prodotto p_m si giunge necessariamente; si può anzi precisare che « $m \leqq n$ ». Infatti — poichè di fattori eguali ad s ve n'è in p_2 almeno uno di più che in p_1, ve n'è in p_3 almeno uno di più che in p_2, ecc. — nel *caso più sfavorevole* ve ne sarà 1 in p_2, 2 in p_3, ecc., « $n-1$ » in p_n; ma, in tal caso, l'n^{esimo} fattore di p_n è « $ns-(n-1)s = s$ », sicchè « $p_n = s^n$ ». (Il caso più sfavorevole, per cui « $m = n$ », accade quando *ogni* fattore di p_1 è *diverso* da s, e *ciascuna volta* la *somma* dei due fattori scelti in p_1, in p_2, ecc., è *diversa* da « $2s$ »).

Variante, in cui si rende esplicito il procedimento di *induzione completa.*

Dimostrato il teorema quando « $n = 2$ » [§ 5·1], si supponga nota la sua verità quando « $n = x$ ».

Osservato che « s^{x+1} » è *uno* dei prodotti di « $x+1$ » fattori assoluti aventi per somma « $(x+1)s$ », sia p un *altro* di tali prodotti; si tratta di dimostrare che

(3) $$s^{x+1} > p.$$

Si ragioni su p come dianzi su p_1, e si ponga « $q = p:(ab)$ »; essendo q positivo, giunti alla formula che precede la (2), si deduce:

(4) $$s(a+b-s)q > p.$$

Ma « $(a+b-s)q$ » è un prodotto di x fattori assoluti aventi per somma « xs »; dunque, per il supposto,

$$s^x \geqq (a+b-s)q,$$ da cui

(5) $$s^{x+1} \geqq s(a+b-s)q.$$

Dalle (5) e (4) si deduce la (3).

AVVERTENZA. Mentre nel caso in cui « $n=2$ » il teorema è valido indifferentemente nel campo *assoluto* o *relativo* [§ 5 Avv.], invece per « $n>2$ » il teorema sarebbe *falso* qualora vi si cancellasse la parola *assoluti*.

Infatti, quando « $n>2$ », dato un numero a grande a piacere, si possono sempre determinare n numeri *relativi* aventi per somma « ns » (dove s è un numero relativo dato, senza escludere che sia *positivo*), in modo che il loro prodotto p risulti *maggiore* di a. A tal fine, chiamato c il *maggiore* dei due numeri a ed « $n(s-1)+6$ », si formi p attribuendo a *tre* de' suoi fattori i rispettivi valori

$$c, \quad « \, n(s-1)+4-c \, », \quad « \, -1 \, »$$

ed a *ciascuno* degli altri « $n-3$ » (se « $n>3$ ») il valore 1. In tal modo p è uno dei prodotti considerati, perchè la somma dei suoi n fattori è

$$c+[n(s-1)+4-c]-1+(n-3)=ns;$$

e risulta

$$p=c[n(s-1)+4-c](-1)=c\{c-[n(s-1)+4]\}. \tag{1}$$

Ora, per il modo in cui venne scelto c, si ha

$$c \geqq a \qquad c-[n(s-1)+4]>1;$$

da ciò e dalla (1) si deduce appunto

$$p>a.$$

COROLLARIO. *La media aritmetica di un gruppo finito di numeri assoluti, non tutti eguali fra loro, è sempre maggiore della loro media geometrica.*

Sia n il numero dei numeri dati , « ns » la loro somma e p il loro prodotto; poichè i fattori di p non sono tutti eguali fra loro, per il teorema fondamentale si ha:

$$s^n>p,$$

da cui

$$s>\sqrt[n]{p}.$$

§ 10. **Nota storico-critica.** — Il teorema fondamentale per il caso di due fattori, da noi dimostrato nel § 5, risale alla Matematica antica. In forma geometrica [§ 6·1] esso si trova nel libro II di EUCLIDE.

Apollonio pone esplicitamente fra i suoi lemmi che « $x(a-x)$ » è massimo quando « $x=a$ » [1].

All' epoca in cui Zenodoro fondò la teoria generale degli isoperimetri (cfr. Art. 12), se non già prima, dovette pure presentarsi la scoperta che il volume di un parallelepipedo rettangolo, di cui è data la somma degli spigoli, è massimo quando esso è un cubo; cioè il nostro teorema fondamentale per « $n=3$ ». Intorno alle origini di questa scoperta non abbiamo precise notizie; ma — per analogia col procedimento seguìto nello studio dei poligoni isoperimetri — si può arguire che la dimostrazione venisse dedotta dal caso particolare in cui « $n=2$ », conformemente ad uno schema tradizionale che si è mantenuto di poi e si ritrova ancora in molti trattati scolastici.

Dimostrazione tradizionale. Si considerino i prodotti

$$p = a_1 a_2 .... a_n$$

in ciascuno dei quali

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = ns,$$

dove s ha un valore assegnato. Si vuol dimostrare che p è *massimo* quando

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = s.$$

A tale scopo, si dimostra che un *altro* qualunque dei pro dotti p, in cui cioè i fattori non siano tutti eguali fra loro, non può esser massimo. Infatti, se per es. i fattori a_1 e a_2 sono diseguali,

$$(1) \qquad \frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{a_1+a_2}{2}\,a_3 .... a_n > a_1 a_2 a_3 .... a_n,$$

mentre ancora

$$\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + ... + a_n = ns;$$

sicchè il primo membro della (1) è un prodotto p maggiore di quello dianzi considerato.

Questa dimostrazione suppone tacitamente l' esistenza di un massimo fra i prodotti p.

[1] Cfr. Zeitschrift für Math. und Physik. Bd. XXII. *Historisch-literarisch Abtheilung*, p. 178, (1877).

Ove non si formuli e giustifichi in alcun modo codesto presupposto, il ragionamento precedente si lascerebbe ridurre al seguente

Schema falso. Il numero m, appartenente a G, è il *massimo* dei G, perchè si può assegnare un procedimento che, applicato ad un qualsiasi G diverso da m, determina un G che è *maggiore* di quello dianzi considerato.

Con questo pseudo-ragionamento, nota argutamente O. PERRON in un recente articolo critico dell'Iahresbericht der deutscher Math. Vereinigung, si potrebbe provare che:

il numero 1 *è il massimo dei numeri interi e positivi*; infatti: se n è un numero intero e positivo, anche n^2 è un numero intero e positivo; e, se n è diverso da 1,

$$n^2 > n.$$

Ed in generale si potrebbe giustificare questo assurdo: se G è un gruppo non nullo *privo di massimo*, comunque si scelga m in G, è m il *massimo* dei G.

Se si vuole colmare la lacuna del procedimento suaccennato, occorre dunque dimostrare l'esistenza del massimo. Si avrà allora uno *schema vero* da aggiungersi a quelli già considerati nel § 4:

Schema III. Il gruppo G ammette massimo; inoltre, se x è un G diverso da m, si può sempre determinare un G che sia maggiore di x; dunque m è il massimo dei G.

Per approfondire l'analisi della dimostrazione tradizionale del teorema fondamentale, consideriamo un prodotto $a_1 a_2 a_3$, limitandoci per semplicità al caso di tre fattori diseguali fra loro; il che permette di supporre « $a_1 \neq a_2$ ».

La dimostrazione anzidetta indica una trasformazione che vale ad ottenere un prodotto maggiore di quello dato, lasciando invariata la somma « $3s$ » de' suoi fattori.

In tal modo, da

$$p = a_1 a_2 a_3$$

si passa a
$$p_1 = a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)},$$

dove
$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad a_3^{(1)} = a_3$$

e quindi ancora
$$a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = 3s.$$

Se era « $a_3 = s$ », risulterà

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = a_3^{(1)} = s$$

e quindi « $p_1 = s^3$ », da cui « $s^3 > p$ »; il che dimostra intanto, conforme allo *schema I* [§ 4], che s^3 è il *massimo* di quelli fra i prodotti considerati in ciascuno dei quali un fattore (almeno) è s.

Altrimenti, se « $a_3 \neq s$ » e quindi « $a_3 \neq \frac{a_1 + a_2}{2}$ », da cui « $a_2^{(1)} \neq a_3^{(1)}$ », allora da p_1 si passa a

$$p_2 = a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)}$$

dove

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)}, \qquad a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = \frac{a_2^{(1)} + a_3^{(1)}}{2}$$

ed in cui perciò ancora

$$a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} = 3s.$$

Di nuovo si sostituisca a ciascuno dei numeri $a_1^{(2)}$ ed $a_2^{(2)}$ la loro semi-somma e così successivamente.

Si otterrà in tal modo una *successione illimitata* di prodotti del tipo

$$p_n = a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)},$$

in cui sempre $\qquad a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + a_3^{(n)} = 3s,$

e tali che $\qquad p < p_1 < p_2 \dots p_n < p_{n+1} \dots$

Infatti, designando con r un numero intero assoluto (0 non escluso), secondochè n è *dispari* o *pari*, risulterà:

$$a_1^{(2r+1)} = a_2^{(2r+1)} \neq a_3^{(2r+1)}$$

ovvero $\qquad a_1^{(2r)} \neq a_2^{(2r)} = a_3^{(2r)}.$

Quindi la trasformazione che conduce da p_n a p_{n+1} si può proseguire illimitatamente senza che si arrivi mai ad un massimo; perciò la successione crescente dei p_n, ciascuno dei quali è certo minore di « $(ns)^n$ », ammette un limite superiore.

Inoltre, posto

$$h = a_3 - s,$$

risulta

$$a_3 = a_3^{(1)} = s + h, \quad a_3^{(2)} = a_3^{(3)} = s + \frac{h}{2}, \ldots \quad a_3^{(2r)} = a_3^{(2r+1)} = s + \frac{h}{2^r}, \ldots;$$

quindi, secondochè h è positivo o negativo, s è il limite inferiore o superiore degli $a_3^{(n)}$. Simultaneamente, s è il limite superiore o inferiore degli $a_1^{(n)}$, e perciò è anche il limite cui tende (oscillando) la successione degli $a_2^{(n)}$.

Sicchè, il limite superiore dei p_n, del quale abbiamo giustificato l'esistenza, vale s^3.

Riassumendo: s^3 è il *massimo* dei prodotti considerati in ciascuno dei quali *un* fattore (almeno) è s, ed è il *limite superiore* di quelli in cui *nessun* fattore è s; sicchè esso è il *massimo* di *tutti* i prodotti considerati.

Così *il procedimento, di cui abbiamo rilevato la insufficienza nella dimostrazione tradizionale, fornisce una dimostrazione rigorosa, in accordo col teorema generale che ogni funzione continua limitata ammette un massimo* (cfr. Art. 13).

E si noti che allo stesso risultato si arriva per il prodotto di un numero qualunque n di fattori, purchè si proceda ordinatamente a sostituire con la loro semi-somma, una prima volta il 1° e il 2° termine, poi il 2° e il 3°,.... l'$(n-1)^{esimo}$ e l'n^{esimo}, quindi di nuovo il 1° e il 2°, ecc. (ovvero, circolarmente, l'n^{esimo} ed il 1°, ecc.).

La prima dimostrazione rigorosa del nostro teorema fondamentale s'incontra in Cauchy « Oeuvres » s. II, t. III, p. 375-77 [1]; la riproduciamo poco più innanzi, rimaneggiata in modo da introdurvi esplicitamente il principio di induzione completa, perchè essa fornisce una bella ed istruttiva variante di quella del § 9.

Steiner ha avuto occasione di osservare che in alcuni casi il procedimento di trasformazione maggiorante, suggerito dai metodi classici per la ricerca del massimo, si può convertire in un procedimento *finito*, ponendo addirittura al posto di una variabile il suo valor limite. Appunto questo artifizio serve di base alla dimostrazione del § 9, che sostanzialmente abbiamo desunta dall'« Algebra ad uso delle Scuole medie »

[1] Cfr. Darboux, *Bullettin des Sciences Mathématiques*, s. II, t. XI, p. 149, (1881).

Vedi pure Arzelà, Nota finale ai *Complementi di Algebra* (Succ. Le Monnier, Firenze, 1894, p. 220-223).

di F. Giudice [1], e che è stata nuovamente svolta da E. Veneroni [2] e P. Cattaneo [3].

Un artifizio analogo è adottato da R. Sturm « Maxima und Minima in der elementaren Geometrie » [4]; ma l'A., in luogo di cercare il massimo del prodotto di n numeri di cui è la somma, cerca il minimo della somma di n numeri di cui è dato il prodotto. Così egli è condotto a uno sviluppo meno semplice, dovendo ridur minima un'espressione del tipo

$$x + (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{p}{x}}.$$

Ed ecco l'accennata

Dimostrazione di Cauchy. — α) Si dimostra il teorema nel caso in cui « $n = 2$ » [§ 5·1].

β) Supposta nota la verità del teorema per x fattori, si dimostra ch'esso è vero per « $2x$ » fattori.

Infatti, se p è uno *qualunque* dei prodotti di « $2x$ » fattori, aventi per somma « $(2x)s$ », siano p_1 ed « xs_1 » il prodotto e la somma di x qualunque di essi, e siano p_2 ed « xs_2 » il prodotto e la somma degli altri x. Per il supposto,

$$s_1^x \geqq p_1 \qquad s_2^x \geqq p_2 \qquad \text{da cui}$$

$$(s_1 s_2)^x \geqq p; \tag{1}$$

ma

$$xs_1 + xs_2 = (2x)s$$

da cui

$$s_1 + s_2 = 2s, \qquad \text{sicchè } [\alpha]$$

$$s^2 \geqq s_1 s_2; \tag{2}$$

dalle (1) (2) segue

$$s^{2x} \geqq p.$$

γ) Da α) e β), mediante induzione completa, risulta che il teorema è vero quando n sia una potenza di 2.

δ) Se n non è potenza di 2, sia m una potenza di 2 maggiore di n. Se p è uno *qualunque* dei prodotti di n

(1) Remo Sandron, Palermo, 1886, p. 211, es. 202.

(2) *Intorno ad alcune questioni elementari di massimo e di minimo*, Per.° di Mat.ª, Giusti, Livorno, luglio-agosto 1908.

(3) Cfr. G. Frattini, *Lezioni di Algebra, Geometria e Trigonometria*, G. B. Paravia, 1912, v. I, 2ª ed., p. 152.

(4) Teubner, Lipsia, 1910. Cfr. p. 1-4.

fattori, aventi per somma « nx », sarà « $s^{m-n}p$ » un prodotto di « $(m-n)+n=m$ » fattori, aventi per somma « $(m-n)s+ns=ms$ »; quindi [γ]:

$$s^m \geqq s^{m-n}p$$

da cui
$$s^n \geqq p.$$

§ 11. **Applicazioni geometriche.** — *Fra i triangoli di perimetro dato, l'equilatero è quello in cui*

·1 *è massimo il rettangolo dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta,*

·2 *è massima l'area* (cfr. Art. 12),

·3 *è massimo il raggio della circonferenza inscritta.*

Dim. Siano x, y, z i lati di un triangolo qualunque, fra quelli di semiperimetro dato p; ne siano r ed R i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta, e ne sia Δ l'area. È noto che

$$(1) \qquad R=\frac{xyz}{4\Delta}, \qquad\qquad (2) \qquad r=\frac{\Delta}{p},$$

$$(3) \qquad \Delta^2=p(p-x)(p-y)(p-z).$$

·1 Dalle (1)(2) segue

$$Rr=\frac{xyz}{4p}$$

e perciò [§ 3·3] « Rr » diviene massimo assieme ad « xyz », in cui

$$x+y+z=2p;$$

quindi [§ 9] « Rr » è *massimo* quando

$$(4) \qquad x=y=z.$$

·2 Dalla (3) risulta [§ 3·8·3] che Δ diviene massima

assieme a
$$(p-x)(p-y)(p-z)$$

in cui
$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=p.$$

La nota condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di un triangolo di lati assegnati, che ciascuno di questi sia minore della somma degli altri due, si può esprimere dicendo che ciascun lato è minore del semiperimetro; sicchè « $p-x$ »,

« $p-y$ », « $p-z$ » sono tutti positivi per ipotesi. Si deduce [§ 9] che Δ è *massima* quando

$$p-x=p-y=p-z,$$

da cui la (4).

·3 Dalla (2) risulta [§ 3·3] che r diviene *massimo* assieme a Δ, cioè [·2] quando sussiste la (4).

·4 *Fra i parallelepipedi rettangoli di cui è data la somma degli spigoli, o la superficie, il cubo ha il massimo volume.*

Dim. α) Siano x, y, z le dimensioni di un parallelepipedo, in cui la *somma* data degli *spigoli* è « $12s$ »; allora

$$x+y+z=3s$$

e perciò il *volume* « xyz » è *massimo* quando « $x=y=z=s$ » [§ 9].

β) Siano x, y, z le dimensioni di un parallelepipedo, in cui la *superficie* data è « $6s^2$ »; il volume « xyz » diviene massimo assieme ad « $(xyz)^2$ » [§ 3·8], cioè assieme ad

$$xy \cdot yz \cdot zx$$

in cui

$$xy+yz+zx=3s^2;$$

dunque [§ 9], il *volume* considerato diviene *massimo* quando

$$xy=yz=zx=s^2$$

cioè quando

$$x=y=z=s.$$

·5 *Divisa ciascuna altezza di un tetraedro in due parti tali che quella verso il vertice sia tripla dell'altra, e segnato per ciascuno dei punti divisorii il piano parallelo alla faccia corrispondente all'altezza considerata, i quattro piani passano per uno stesso punto* (baricentro); *questo punto è quello, fra tutti i punti interni al tetraedro, per cui il prodotto delle distanze dalle faccie è massimo.*

Sia « $4v$ » il *volume* del tetraedro dato. Siano y_1, y_2, y_3, y_4 le *distanze* di un punto interno ad esso dalle sue faccie, le cui *aree* sono $3b_1$, $3b_2$, $3b_3$, $3b_4$, mentre le *altezze* corrispondenti sono $4h_1$, $4h_2$, $4h_3$, $4h_4$.

Il *prodotto*

$$y_1 y_2 y_3 y_4$$

diviene massimo assieme a [§ 3·3]

$$(b_1 y_1)(b_2 y_2)(b_3 y_3)(b_4 y_4)$$

in cui $$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4 = 4v;$$

dunque [§ 9] « $y_1 y_2 y_3 y_4$ » è *massimo* quando

$$b_1 y_1 = b_2 y_2 = b_3 y_3 = b_4 y_4 = v$$

cioè quando

$$y_1 = h_1, \quad y_2 = h_2, \quad y_3 = h_3, \quad y_4 = h_4.$$

Dunque: il massimo di « $y_1 y_2 y_3 y_4$ » corrisponde al punto di intersezione dei quattro piani dichiarati, del qual *punto* risulta così dimostrata la *esistenza.*

Analogamente si dimostra che:

·6 *Fra tutti i punti interni ad un triangolo, il baricentro è quello per cui è massimo il prodotto delle distanze dai tre lati.*

§ 12. **Prodotto di n polinomi lineari ad $n-1$ variabili.**

Sia

$$z = y_1 y_2 \dots y_n \tag{1}$$

dove n è un numero intero maggiore di 1 e dove, per ogni valore intero di r da 1 ad n,

$$y_r = a_{r_1} y_1 + a_{r_2} y_2 + \dots a_{r,n-1} y_{n-1} + a_{rn}. \tag{2}$$

Osserviamo subito che, se si pone

$$n\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

si può *sempre* supporre

$$\Delta \geqq 0 \tag{4}$$

perchè, se fosse stato $\Delta < 0$, sarebbe bastato scambiare prima fra loro due fattori di z, per cambiare il segno di Δ.

Ma, per una ragione che verrà chiarita fra breve, qui si suppone che il *minore* d'un elemento qualunque dell'ultima colonna sia diverso da 0; sicchè, designando con A_{rs} il minore corrispondente ad a_{rs}, si suppone che

$$A = A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \neq 0. \tag{5}$$

Ora, assoggettando le variabili $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ alla *sola* condizione che y_r abbia sempre il medesimo segno di A_{rs}, il quale contiene già il fattore « $(-1)^{r+s}$ », cioè che

$$A_{rn} y_r \geqq 0, \tag{6}$$

dimostreremo: che z è sempre dotato di *massimo* o di *minimo* secondochè A è *positivo* o *negativo*, che il *valore* di questo massimo o minimo è dato, in ambo i casi, dalla formola

$$z' = \Delta^n : A \tag{7}$$

e che questo valore z' di z corrisponde sempre ad *un solo* sistema di valori (determinati e finiti) delle variabili $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$.

Dim. Il valore del determinante (3) non cambia se all'ultima colonna si aggiungono i prodotti delle altre per $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$; quindi, per la (2),

$$n\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots y_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots y_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots y_n \end{vmatrix}$$

da cui, sviluppando secondo l'ultima colonna,

$$A_{1n} y_1 + A_{2n} y_2 + \dots + A_{nn} y_n = n\Delta. \tag{8}$$

Moltiplicando membro a membro le (5)(1), si ottiene

$$Az = (A_{1n} y_1)(A_{2n} y_2) \dots (A_{nn} y_n);$$

da ciò e dalle (6)(8) risulta [§ 9] che, *purchè* si possa determinare un sistema di valori delle variabili tale che

$$A_{1n} y_1 = A_{2n} y_2 = \dots = A_{nn} y_n, \tag{9}$$

a questi valori corrisponderà il *massimo* di Az, e precisamente

$$\max (Az) = \Delta^n; \tag{10}$$

quindi, essendo A diverso da zero (5), la (7) ci darà il *massimo* o il *minimo* di z secondochè A è *positivo* o *negativo* [§ 3·3·4].

A cagione della (8), la (9) è verificata sol quando, per ogni valore considerato di r,

$$(11) \qquad A_{rn} y_r = \Delta.$$

Considerando come *incognite* $x_1, x_2, \ldots\ x_{n-1}$, la (11) rappresenta un sistema di n equazioni lineari; ma, quantunque il numero delle equazioni sia maggiore di quello delle incognite, questo sistema ammette *sempre* una soluzione. Essa è data dalla formula

$$(12) \qquad x_s' = \frac{1}{n}\left(\frac{A_{1s}}{A_{1n}} + \frac{A_{2s}}{A_{2n}} + \ldots + \frac{A_{ns}}{A_{nn}}\right)$$

dove, per ogni valore intero di s da 1 ad « $n-1$ », con x_s' si designa il valore cercato dell'incognita x_s; valore che è sempre *determinato e finito,* in conseguenza dell'ipotesi (5), di cui ora appare l'importanza.

Infatti, designando con y_r' il valore assunto da y_r quando, nella (2), alle *variabili* $x_1, x_2, \ldots\ x_{n-1}$ si sostituiscono i *numeri* $x_1', x_2', \ldots\ x_{n-1}'$, otteniamo

$$\begin{aligned} n y_r' = {} & a_{r1}\left(\frac{A_{11}}{A_{1n}} + \frac{A_{21}}{A_{2n}} + \ldots + \frac{A_{n1}}{A_{nn}}\right) \\ & + a_{r2}\left(\frac{A_{12}}{A_{1n}} + \frac{A_{22}}{A_{2n}} + \ldots + \frac{A_{n2}}{A_{nn}}\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{r,\,n-1}\left(\frac{A_{1,\,n-1}}{A_{1n}} + \frac{A_{2,\,n-1}}{A_{2n}} + \ldots + \frac{A_{n,\,n-1}}{A_{nn}}\right) \\ & + a_{rn}\left(\frac{A_{1n}}{A_{1n}} + \frac{A_{2n}}{A_{2n}} + \ldots + \frac{A_{nn}}{A_{nn}}\right), \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine è una semplice trasformazione di « $n a_{rn}$ ».

Eseguendo le moltiplicazioni indicate e addizionando poi in colonna, per una ben nota proprietà dei determinanti ciascuna delle somme parziali è *zero,* tranne quella di posto r che, a cagione della (3), vale $\frac{n\Delta}{A_{rn}}$; si ottiene dunque « $ny_r' = \frac{n\Delta}{A_{rn}}$ », da cui, per la (5),

$$A_{rn} y_r' = \Delta$$

e quindi il sistema (11) è *vérificato.*

D'altronde, tale sistema non potrebbe avere *altre* soluzioni; perchè, lasciando da parte una qualunque delle sue n equazioni, si ottiene un sistema di « $n-1$ » equazioni ad « $n-1$ » incognite, per il quale il determinante dei coefficienti, essendo il minore di un elemento dell'ultima colonna del determinante $n\Delta$, è sempre diverso da zero, per l'ipotesi (5).

Dunque: la formola (12) dà *il solo* sistema di valori delle variabili al quale corrisponde il *massimo* o il *minimo* di z, che già sappiamo essere determinato dalla (7) (1).

§ 13. **Generalizzazione del teorema fondamentale.**

Dati un numero intero n (non minore di 2), i numeri *razionali positivi* a_1, a_2,.... a_n ed un numero *assoluto* (anche irrazionale) s; e posto

$$p = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \tag{1}$$

in cui x_1, x_2,.... x_n sono numeri *assoluti* assoggettati soltanto alla condizione

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n = s, \tag{2}$$

p diviene *massimo* allorchè *le basi variabili sono proporzionali agli esponenti costanti*, cioè quando

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{s}{a}, \tag{3}$$

(1) Vedi « *Une question de maximum ou de mininum* par A. PADOA — International Congress of Mathematicians — Cambridge, August 1912 ». In tale comunicazione viene analizzato il caso particolare in cui $\Delta = 0$ e viene dato un esempio di applicazione del teorema, il quale chiarisce il significato geometrico delle condizioni (5) e (6); ma la importanza della (5) è sufficientemente lumeggiata dal commento alle (12); e la (6) è necessaria per giungere alla (10) [§ 9, Avv.]. Quanto all'applicazione geometrica, essa viene poi ripresa in modo elementare, come qui è stata esposta al § 10·5.

Si osservi che il teorema ora dimostrato è una *generalizzazione* di quello del § 8.

in cui

$$(4)\qquad a = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

e precisamente, posto

$$(5)\qquad c = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n},$$

risulta:

$$(6)\qquad \max p = c\left(\frac{s}{a}\right)^a.$$

Dim. α) Gli esponenti *siano tutti interi*. Da (1) e (5) risulta

$$(7)\qquad p = c\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2} \dots \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n};$$

quindi, sciolte nei loro fattori le potenze quivi indicate, p risulta prodotto del numero positivo c, determinato dalla (5), per un gruppo finito di fattori, assoluti per ipotesi, il cui numero, per la (4), è a e la cui somma, per la (2), è

$$\frac{x_1}{a_1} a_1 + \frac{x_2}{a_2} a_2 + \dots + \frac{x_n}{a_n} a_n = s.$$

Da tutto ciò si deduce [§ 3·3, § 9] la (6) e la (3).

β) Gli esponenti *non siano tutti interi*. Indicando con m un *multiplo* comune dei loro *denominatori* (ad es. il minimo), dalla (1) si ricava

$$(8)\qquad p^m = x_1^{ma_1} x_2^{ma_2} \dots x_n^{ma_n}$$

in cui ma_1, ma_2, ... ma_n sono numeri *interi*, la cui somma, per la (4), è « ma ». In tal modo ci ritroviamo nel caso α); quindi, confrontando la (1) con la (8) e rammentando le (6)(5)(4), si ha:

$$\max(p^m) = (ma_1)^{ma_1}(ma_2)^{ma_2} \dots (ma_n)^{ma_n}\left(\frac{s}{ma}\right)^{ma} =$$

$$= m^{ma} c^m \left(\frac{s}{ma}\right)^{ma} = c^m\left(\frac{s}{a}\right)^{ma} = \left[c\left(\frac{s}{a}\right)^a\right]^m$$

da cui [§ 3·8] la (6). Corrispondentemente, si avrà l'analoga della (3), cioè

$$\frac{x_1}{ma_1} = \frac{x_2}{ma_2} = \dots = \frac{x_n}{ma_n} = \frac{s}{ma_n},$$

da cui segue la (3) stessa.

NOTA. Per le applicazioni è sufficiente che il teorema ora dimostrato sia conosciuto nel caso α); perchè dal caso β) si può passare ciascuna volta al caso α), mediante un'opportuna elevazione a potenza, appunto come indica la (8). Anzi, quel che importa rammentare è soltanto la (3), cioè la *condizione* di massimo, la quale per $n = 2$ è sufficientemente espressa da

$$x_1 = \frac{a_1 s}{a_1 + a_2}.$$

§ 14. **Altre applicazioni geometriche.**

·1 *Fra i parallelepipedi rettangoli di cui è data la somma degli spigoli e la cui base è simile ad un rettangolo dato, quello di massimo volume ha per altezza* $\frac{1}{12}$ *di codesta somma.*

Dim. Siano x, y, z e v le dimensioni ed il volume di un parallelepipedo, in cui la *somma* data degli *spigoli* è « $12s$ », sicchè

(1) $$x + y + z = 3s;$$

sia r il rapporto fra le dimensioni del *rettangolo* dato e precisamente

$$x : y = r.$$

Dalla (1) e da ciò si deduce

$$3s - z = x + y = (r+1)y,$$

da cui $$(3s - z)^2 = \frac{(r+1)^2}{r} xy,$$

da cui $$v = xyz = \frac{r}{(r+1)^2}(3s - z)^2 z,$$

dove $$(3s - z) + z = 3s;$$

quindi [§ 13], v diviene *massimo* quando « $z = s$ ».

NOTA. Si confronti con § 11·4, osservando che, data la somma degli spigoli, l'altezza del massimo parallelepipedo è *indipendente* dalla condizione che la base sia simile ad un rettangolo dato.

·2 *Fra i cilidri inscritti in un cono dato, quello la cui altezza è $\frac{1}{3}$ dell'altezza del cono ha volume massimo* [1].

Dim. Siano x, y, v il raggio, l'altezza ed il volume di un cilindro inscritto nel cono dato, di raggio a e di altezza h.

Poichè $$x : a = (h - y) : h$$

risulta $$v = \pi x^2 y = \pi \frac{a^2}{h^2}(h - y)^2 y$$

in cui $$(h - y) + y = h;$$

quindi [§ 13], v diviene *massimo* quando « $y = \frac{h}{3}$ ».

·3 *Fra i cilindri inscritti in una sfera data, ovvero fra i coni che hanno il vertice nel centro di una sfera data e la circonferenza di base sulla sfera stessa, ha volume massimo quello in cui il quadrato del raggio è $\frac{2}{3}$ del quadrato del raggio della sfera*; in tale cilindro }cono{ il rapporto fra l'altezza e il raggio }fra il raggio e l'altezza{ è $\sqrt{2}$ [2].

Dim. Sia r il raggio della sfera; sia x il raggio di uno qualunque dei cilindri o dei coni considerati, e ne siano $2y$ ed y le rispettive altezze, cosicchè

(1) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

I *volumi* del cilindro e del cono considerati sono « $2\pi x^2 y$ » e « $\frac{1}{3}\pi x^2 y$ »; perciò essi divengono massimi assieme a « $x^2 y$ », ovvero ad « $(x^2)^2 y^2$ ». Dunque, per la (1), essi divengono *massimi* [§ 13] quando

$$« \; x^2 = \frac{2}{3} r^2 \; »;$$

simultaneamente

$$2y : x = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x : y = \sqrt{2}.$$

[1] La medesima questione fu trattata nel § 6·6 per la *superficie laterale* e nel § 8, App. geom. per la *superficie totale*.

[2] Per i cilindri, la questione analoga per la *superficie laterale* fu risolta nel § 7·9; quella per la *superficie totale* verrà risolta nel § 20, Quest. V.

4 *Fra i coni inscritti in una sfera data, quello la cui altezza è $\frac{4}{3}$ del raggio della sfera ha volume e superficie laterale massimi.*

Dim. Se x ed « $r+y$ » sono il raggio e l'altezza di un qualunque cono inscritto nella sfera di raggio dato r (1), è ancor vera la (1); e se v ed s ne sono il *volume* e la *superficie laterale*, poichè il quadrato dell'apotema del cono risulta « $2r(r+y)$ », si avrà:

$$v = \frac{1}{3}\pi x^2 (r+y) \qquad s^2 = \pi^2 x^2 \cdot 2r(r+y)$$

e perciò v ed s divengono massimi assieme ad « $x^2(r+y)$ », cioè, per la (1), ad « $(r^2-y^2)(r+y)$ » cioè ad

$$(r+y)^2(r-y),$$

in cui

$$(r+y)+(r-y)=2r;$$

dunque [§ 13], r ed s divengono *massimi* quando

$$r+y=\frac{4}{3}r. \tag{2}$$

NOTA. Si ha pure [§ 13]

$$\max\,[(r+y)^2(r-y)] = 2^2\left(\frac{2r}{3}\right)^3$$

da cui

$$\max v = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2}{3}r\right)^3$$

cioè: il cono considerato *equivale* ad una sfera il cui raggio sia $\frac{2}{3}$ di quello della sfera data.

Inoltre

$$r-y=\frac{2}{3}r$$

la quale eguaglianza, moltiplicata per la (2), dà, per la (1),

$$x^2=r^2-y^2=\frac{8}{9}r^2$$

(1) y risulterà *positivo*, ma le operazioni che eseguiremo *non lo presuppongono*; esse esigono soltanto che $y^2 < r^2$, il che è vero manifestamente.

e perciò, nel cono considerato, il *rapporto* fra l'altezza e il raggio è

$$(r+y):x=\frac{4}{3}r:\frac{2\sqrt{2}}{3}r=\sqrt{2}.$$

·5 *Fra i coni di data superficie laterale, ha volume massimo quello in cui il rapporto fra l'apotema e il raggio è* $\sqrt{3}$.

Dim. Se x ed y sono il raggio e l'apotema di un cono di superficie laterale data « πs^2 », e se v ne è il volume, risulta

$$v=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2-x^2} \quad \text{ed} \quad xy=s^2,$$

da cui
$$v=\frac{1}{3}\pi x\sqrt{s^4-x^4}$$

da cui
$$v^4=\left(\frac{1}{3}\pi\right)^4 x^4(s^4-x^4)^2$$

dove
$$x^4+(s^4-x^4)=s^4.$$

Quindi [§ 13], v diviene *massimo* quando « $x^4=s^4:3$ »; corrispondentemente « $y^4=3s^4$ », e perciò « $y^4:x^4=9$ », da cui « $y:x=\sqrt{3}$ ».

·6 *Fra i trapezi inscritti in un semicerchio dato* (aventi per basi il diametro ed una corda), *il semi-esagono regolare ha l'area massima.*

Dim. Sia « $2x$ » la base minore di un *trapezio* inscritto nel semicerchio di diametro dato « $2r$ »; indicando con y la sua *area* « $(r+x)\sqrt{r^2-x^2}$ », risulta

$$y^2=(r+x)^3(r-x)$$

in cui
$$(r+x)+(r-x)=2r;$$

perciò y^2, e quindi y, diviene *massimo* [§ 13] quando « $r-x=\frac{r}{2}$ », cioè quando « $2x=r$ ».

·7 *Fra i rettangoli inscritti in un segmento parabolico* (la cui corda sia perpendicolare all'asse), *il massimo è quello la cui dimensione sull'asse è* $\frac{1}{3}$ *della freccia.*

Dim. Se p ed a sono il parametro e la freccia del segmento parabolico, se « $a - x$ » e « $2y$ » sono le dimensioni (parallela e perpendicolare all'asse) di un *rettangolo* inscritto e se s è l'area di questo, allora

$$y^2 = 2px$$

e perciò $$s^2 = (a - x)^2 (2y)^2 = 8p(a - x)^2 x$$

dove $$(a - x) + x = a;$$

quindi [§ 13], s diviene *massimo* quando $x = \frac{a}{3}$.

·8 *Fra i trapezi inscritti in un segmento parabolico* (la cui corda sia perpendicolare all'asse), *il massimo è quello in cui la base minore è $\frac{1}{3}$ della corda.*

Dim. Se p ed a sono il parametro e la freccia del segmento parabolico, « $2\sqrt{2pa}$ » è la sua corda, che assumiamo quale base maggiore del *trapezio*; designando con « $2y$ » l'altra base, con « $a - x$ » la sua altezza, e con s la sua area, risulta

$$s = (\sqrt{2pa} + y)(a - x) \quad \text{ed} \quad y^2 = 2px,$$

da cui

$$s = (\sqrt{2pa} + y)\left(a - \frac{y^2}{2p}\right) = \frac{1}{2p}(\sqrt{2pa} + y)^2(\sqrt{2pa} - y)$$

dove $$(\sqrt{2pa} + y) + (\sqrt{2pa} - y) = 2\sqrt{2pa}.$$

Quindi [§ 13], s diviene *massimo* quando

$$(\sqrt{2pa} + y) : 2 = 2\sqrt{2pa} : 3$$

cioè quando $$y = \frac{1}{3}\sqrt{2pa}.$$

·9 *Problema.* Dato un foglio *quadrato*, di lato « $3a$ », toglierne quattro quadrati, di lato x, ciascuno avente un vertice comune con quello dato, determinando x in modo che risulti *massima* la *capacità* della scatola avente per fondo il quadrato rimasto nel centro del foglio e per faccie laterali i quattro rettangoli ad esso aderenti (1).

(1) Il problema più generale, in cui il foglio dato è di forma *rettangolare*, è risolto nel paragrafo seguente.

Soluzione. La base di una scatola costruita nel modo indicato è un quadrato di lato « $3a - 2x$ », e la sua altezza è x; quindi, indicando con y la sua *capacità*, risulta

$$2y = (3a - 2x)^2 (2x)$$

in cui $$(3a - 2x) + 2x = 3a;$$

perciò [§ 13], y diviene *massimo* quando

$$2x = a.$$

Risposta. Il lato dei quadrati da asportare è $\frac{1}{6}$ di quello del foglio dato.

§ 15. **Metodo dei fattori indeterminati.** — Una difficoltà si oppone talvolta all'applicazione del teorema fondamentale [§ 9], nonchè della sua generalizzazione [§ 13]: l'indole particolare della questione che si sta esaminando può *escludere* che i numeri *variabili* in essa considerati possano assumere i *valori* cui, secondo i teoremi rammentati, *corrisponderebbe* il *massimo* cercato.

Proponiamoci, ad es., di risolvere il *Problema* del *foglio* e della *scatola* [§ 14·9], supponendo invece che il foglio dato sia un *rettangolo* di dimensioni a e b; per *non escludere* il caso già trattato e poterlo anzi ritrovare come caso *particolare*, poniamo

(1) $$a \geqq b.$$

Indicando con y la *capacità* di una scatola costruita nel modo indicato, risulta

(2) $$y = (a - 2x)(b - 2x)x$$

da cui $$4y = (a - 2x)(b - 2x)(4x);$$

ora, quantunque

$$(a - 2x) + (b - 2x) + 4x = a + b,$$

non si può applicare in tal caso il teorema fondamentale, perchè, se « $a > b$ », *non* vi è *alcun* valore di x per cui « $a - 2x = b - 2x$ ».

Si usa ricorrere in tali casi al *metodo dei fattori indeter-*

minati, che qui spiegheremo applicandolo senz'altro alla questione proposta ([1]).

Riserbandoci di determinare opportunamente i numeri u e v, diversi da 0, dalla (2) si ricava

$$uvy = u(a-2x)\cdot(b-2x)\cdot vx \tag{3}$$

in cui

$$u(a-2x)+(b-2x)+vx=(au+b)+[v-2(u+1)]x;$$

basterà dunque porre

$$v=2(u+1), \tag{4}$$

per ottenere, *qualunque* sia x,

$$u(a-2x)+(b-2x)+vx=au+b. \tag{5}$$

Esaminiamo ora se sia possibile la *eguaglianza* dei tre fattori indicati nel secondo membro della (3); cioè, per la (4), se sia possibile soddisfare il sistema

$$u(a-2x)=2(u+1)x \qquad b-2x=2(u+1)x,$$

ovvero il suo equivalente

$$(6) \quad u(a-4x)=2x \qquad (7) \quad b-4x=2ux.$$

Moltiplicando membro a membro queste due equazioni e dividendo poi ambo i membri per u, si ottiene

$$(a-4x)(b-4x)=4x^2$$

cioè

$$12x^2-4(a+b)x+ab=0 \tag{α}$$

che risolta dà

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{a+b\mp\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}. \tag{8}$$

Ma dalla (1) si deduce

$$a+b\geqq 2b \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2-ab+b^2}\geqq b,$$

da cui « $x_2\geqq\frac{b}{2}$ », e perciò x_2 *non soddisfa* alle condizioni

([1]) Vedi nel § 20 (Quest. IV) altra soluzione, più rapida, della medesima questione.

del problema. Invece, dall'identità

$$(a+b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab$$

si ricava

(9) $$a + b > \sqrt{a^2 - ab + b^2} > a - b,$$

da cui

$$(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2} < (a+b) - (a-b),$$

cioè « $6x_1 < 2b$ », ed « $x_1 > 0$ »; da cui

(10) $$b - 2x_1 > 0.$$

Per calcolare comodamente il corrispondente valore u_1 di u, trasformiamo le (6) (7) nelle eguaglianze

$$au - 2x = 4ux, \qquad 2b - 8x = 4ux,$$

dal cui confronto risulta « $au - 2x = 2b - 8x$ », da cui « $au = 2b - 6x$ ». Quindi, al valore x_1 fornito dalla (8) corrisponde

$$u_1 = \frac{-(a-b) + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{a}$$

da cui, per la (9),

(11) $$u_1 > 0,$$

da cui, per la (4),

(12) $$v_1 > 0.$$

Da quanto precede si deduce che

$$u_1(a - 2x_1) = b - 2x_1 = v_1 x_1$$

dove, per la (10), il valore comune di tali espressioni è positivo. Quindi [§ 9], indicando con y_1 il valore di y corrispondente al valore x_1 di x, dalle (3)(5) segue che

$$\max(uvy) = u_1 v_1 y_1;$$

ma, per le (11)(12),

$$u_1 v_1 > 0,$$

quindi $$\max y = y_1.$$

Dunque, affinchè la capacità della scatola risulti *massima*, il lato dei quadrati da asportare ha il valore x_1 fornito dalla (8),

cioè
$$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6};$$

in particolare, per « $a=b$ », x_1 è un sesto di a, come già abbiamo trovato per altra via [§ 13·9].

§ 16. **Legge di reciprocità.** — Le definizioni di *massimo* e di *minimo* [§ 1] differiscono tra loro soltanto per lo scambio delle parole *maggiore* e *minore*; di qui la perfetta *dualità* fra le proprietà fondamentali dei massimi e dei minimi [§ 3].

Ma, oltre a ciò, moltissime *questioni* di massimo e di minimo (non tutte però) obbediscono ad una legge di *reciprocità*, per cui *ciascuna* di esse si può *enunciare* a piacere quale proposizione di *massimo* o quale proposizione di *minimo*. Ad es., sono fra loro reciproche (nel senso accennato, che ci riserbiamo di precisare) le proposizioni:

α) « fra i triangoli, aventi *perimetro* dato, l'equilatero è quello in cui l'*area* è *massima* » [§ 11·2],

β) « fra i triangoli, aventi *area* data, l'equilatero è quello in cui il *perimetro* è *minimo* ».

La mutua dipendenza fra le due proposizioni di questa coppia è apparsa — fino dall'antichità — ai geometri che si sono occupati della teoria degli isoperimetri. Dimostrata comunque la proposizione α, l'argomentazione mediante la quale ne vien dedotta la proposizione β, è del tipo seguente: « se A' è un triangolo equilatero *equivalente* ad un triangolo « dato A, si tratta di dimostrare che *nessun* triangolo B può « essere equivalente ad A ed avere perimetro *minore* di « quello di A'; invero (dimostrazione per assurdo), se B' è « un triangolo equilatero *isoperimetro* a B, allora (per la « proposizione α)

(1) B è suvvalente o equivalente a B';

« ma il perimetro di B', eguale a quello di B (per ipotesi), « è *minore* di quello di A' (per ipotesi); inoltre B' ed A' sono « entrambi equilateri, sicchè

(2) B' è suvvalente ad A';

« dalle (1)(2) e dal fatto che (per ipotesi)

A' è equivalente ad A,

« segue che

B è suvvalente ad A,

« contro il supposto ».

È chiaro che lo schema di tale argomentazione può applicarsi immediatamente a molte altre questioni, ed in particolare a quella delle *figure piane* (a contorno semplice) *isoperimetre* o *equivalenti*; invero, a tal fine, basta che nelle proposizioni α e β, e nell'argomentazione esposta, si scriva dovunque « figura piana » invece di « triangolo », e « cerchio » invece di « triangolo equilatero ».

Ma, sotto l'aspetto *analitico* (prescindendo cioè dalla *specie* delle figure considerate e dalla *forma* di quella dotata di massimo o di minimo, per tener conto unicamente dei *numeri* che le misurano), lo *schema essenziale* di una *coppia* di proposizioni reciproche (quali α e β) è il seguente:

fra due gruppi X ed Y di numeri (che nel caso particolare sono l'insieme di tutti i « perimetri » e quello di tutte le « aree », sicchè ciascuno di essi è la totalità dei numeri positivi) è stabilita una *corrispondenza* che ad ogni *individuo* di ciascun gruppo fa corrispondere una *parte* determinata dell'altro (nel caso particolare, dando forma triangolare ad *un* « perimetro » qualunque, *le* « aree » corrispondenti formano un gruppo infinito, che però è una *parte* di tutte le « aree » possibili ed istessamente scambiando fra loro le parole « perimetro » ed « area »); — ciò premesso, una delle due proposizioni afferma che, comunque si scelga x_1 in X, il gruppo parziale degli Y che corrispondono ad x_1 è dotato di *massimo*; e l'altra proposizione afferma che, comunque si scelga y_1 in Y, il gruppo parziale degli X che corrispondono ad y_1 è dotato di *minimo*; e precisamente, se (per la prima proposizione) y_1 è il *massimo* dei corrispondenti di x_1, allora (per la seconda proposizione) x_1 è il *minimo* dei corrispondenti di y_1.

Ora, affinchè la prima proposizione *implichi* la seconda nel modo dichiarato, mostreremo esser *sufficiente* che: se y_1 è il *massimo* dei corrispondenti di x_1, e se y_2 è il *massimo* dei corrispondenti di x_2, allora, secondochè x_2 è minore o eguale o maggiore di x_1, anche y_2 sia minore o eguale o maggiore di y_1; la qual condizione (cui nel seguito accenneremo chiamandola « *condizione di reciprocità* ») esprimeremo brevemente dicendo che

x_1 ed y_1 variano *concordemente.*

Si ha infatti il seguente:

Teorema. Se fra due gruppi X ed Y di numeri sussiste una *corrispondenza* tale che l'insieme dei corrispondenti di un X arbitrario è dotato di *massimo*, il quale varia *concordemente* con l'X prescelto, e se

(1) y_1 è il massimo dei corrispondenti di x_1,

allora:

(2) x_1 è il *minimo* dei corrispondenti di y_1.

Dim. Per la (1),

x_1 è *uno* dei corrispondenti di y_1;

quindi, per giustificare la (2), basta dimostrare che *nessuno* dei corrispondenti di y_1 è *minore* di x_1. Ora ciò è vero, perchè, se ad es. « $x_2 < x_1$ » e se y_2 è il massimo dei corrispondenti di x_2 (il quale massimo esiste per ipotesi), allora (per l'ipotesi del variare *concorde*) « $y_2 < y_1$ », sicchè y_1 non è fra i corrispondenti di x_2, cioè x_2 non è fra i corrispondenti di y_1.

Nota 1. Sussiste pure una *seconda legge di reciprocità* il cui enunciato si ricava da quello della prima sostituendovi « *discordemente* » a « *concordemente* » (nell'ipotesi) e « *massimo* » a « *minimo* » (nella tesi); e la cui dimostrazione si ricava dalla precedente sostituendovi « *maggiore* » a « *minore* », « $x_2 > x_1$ » ad « $x_2 < x_1$ », e « *discorde* » a « *concorde* ».

Questa seconda legge ha applicazioni meno frequenti; tuttavia, eccone un esempio.

La corrispondenza fra X ed Y sia stabilita mediante la formula « $x^n y = 1$ », dove x è un numero maggiore di 1, mentre y è un numero fra 0 ed 1, e dove, corrispondentemente a *ciascuna* scelta di x o di y, si deve attribuire ad y o ad x ogni valore compatibile con la formula data e con ogni valore intero positivo di n. Allora, comunque si scelga x_1 in X, i corrispondenti di x_1 in Y sono

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_1^3}, \ldots$$

il cui *massimo* (poichè per ipotesi « $x_1 > 1$ ») è $\frac{1}{x_1}$; reciprocamente, posto

$$(1) \qquad y_1 = \frac{1}{x_1},$$

i corrispondenti di y_1 in X sono

$$\frac{1}{y_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{y_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{y_1}}, \ldots.$$

il cui *massimo* (poichè per ipotesi « $0 < y_1 < 1$ ») è $\frac{1}{y_1}$, cioè, per la (1), x_1; il che si poteva arguire dalla *seconda* legge di reciprocità, perchè dall'ipotesi risulta il variare *discorde* di x_1 e di y_1.

[Per il caso in cui la *corrispondenza* stabilita fra x_1 ed y_1 *non sia* sempre *concorde* nè sempre *discorde*, si veda l'Articolo 13].

Avvertenza. Entrambe le leggi di *reciprocità* obbediscono alla legge di *dualità*, cui abbiamo accennato da principio, e quindi ciascuna di esse si può rileggere scambiandovi fra loro le parole « *massimo* » e « *minimo* ».

Ritornando alla prima legge di reciprocità, quale risulta dal Teorema e dal suo duale, si badi che la sua applicazione dev'esser fatta con qualche accorgimento, se si vuol giungere a risultati notevoli.

Ad es., sappiamo che « tra i cilindri inscritti in una sfera data, ve n'è uno il cui volume è *massimo* » [14·3], ed è chiaro che il *volume* della sfera considerata ed il *volume* di codesto cilindro variano *concordemente*; ma il dedurne per reciprocità che « tra le sfere circoscritte ad un dato cilindro, ve n'è una il cui volume è *minimo* » sarebbe inutile, essendovi sempre *una sola* sfera circoscritta ad un cilindro dato.

Però una lieve modificazione del primo asserto, ad es. così:

« tra i volumi dei cilindri inscritti in una sfera di raggio dato, ve n'è uno che è il *massimo* »,

basta a rendere non trascurabile il suo reciproco:

« tra i raggi delle sfere circoscritte ad un cilindro di volume dato, ve n'è uno che è il *minimo* » [vedi più innanzi ·13].

In tal modo, dalla risoluzione della maggior parte delle questioni geometriche di massimo o di minimo si deduce immediatamente (per reciprocità) la risoluzione di questioni altrettanto notevoli e la cui trattazione diretta sarebbe non meno laboriosa.

Tuttavia, in un Corso di carattere molto elementare può essere opportuno di non occuparsi, e quindi di non valersi, della legge di reciprocità; appunto per soddisfare anche a questa eventuale esigenza, abbiamo dimostrato in modo autonomo le § 7·1·2, che sono fra loro *reciproche*. Si osservi inoltre, nel § 7, che le applicazioni ·3·4·5 della ·1 hanno ordinatamente per *reciproche* le applicazioni ·6·7·8 della ·2.

Ma ecco un saggio di

DEDUZIONI PER RECIPROCITÀ. ·1 *Fra i rettangoli aventi area data, il quadrato ha perimetro minimo* [§ 6·1].

·2·3 *Nei triangoli di cui sono dati l'area ed un lato* } angolo {, *la somma degli altri due lati* } dei lati che lo comprendono { *è minima quando essi sono eguali fra loro* [§ 6·2·3].

·4 *Nei triangoli aventi area data, la minima somma di due lati è quella dei lati eguali del triangolo isoscele rettangolo* [§ 6·4].

·5 *Fra i triangoli circoscritti ad un rettangolo dato, sono minimi quelli* (aventi stessa area, doppia di quella del rettangolo dato, ma infinite forme diverse) *in cui un lato e la corrispondente altezza sono doppî delle dimensioni del rettangolo dato* [§ 6·5] ([1]).

·6 *La superficie ed il volume della sfera circoscritta ad un cilindro di cui è data la superficie laterale, sono minimi quando il detto cilindro è equilatero* [§ 7·9].

·7 *Il minimo rettangolo circoscritto ad un'ellisse circoscritta ad un rettangolo dato, è simile a questo e doppio di questo* [§ 7·10].

·8·9·10 *Fra i triangoli aventi area data* } o circoscritti a circonferenza data o di cui è dato il rettangolo dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta {, *l'equilatero ha perimetro minimo* [§ 11 ·2·3·1].

·11·12 *Fra i parallelepipedi rettangoli di volume dato, il cubo è quello in cui sono minime la somma degli spigoli e la*

([1]) Da § 6·6 non si ricava per reciprocità nulla di importante, fuorchè: « nei coni circoscritti ad un cilindro dato, l'area della sezione meridiana è minima quando il raggio e l'altezza sono doppî di quelli del cilindro »; il che è implicito nella ·5.

superficie [§ 11·4]; e, fra quelli la cui base è simile ad un rettangolo dato, la somma degli spigoli è minima quando essa è 12 volte l'altezza [§ 14·1].

·13·14 *Affinchè la sfera circoscritta ad un cilindro* } cono { *di volume dato abbia raggio minimo* (e quindi anche superficie e volume minimi) *è necessario che nel cilindro* } cono { *considerato il rapporto fra l'altezza e il raggio sia* $\sqrt{2}$ (ciò vale anche se del cono cui la sfera dev' essere circoscritta è data invece la superficie laterale) [§ 14·3·4, Nota].

·15 *Fra i coni di volume dato, ha superficie laterale minima quello in cui il rapporto fra l'apotema e il raggio è* $\sqrt{3}$ [§ 14·5].

·16 *Il minimo foglio quadrato, dal quale si possa ricavare* (nel modo indicato al § 14·9) *una scatola di data capacità* v, *ha per lato* « $3\sqrt[3]{\frac{v}{2}}$ ».

Il reciproco del teorema fondamentale. *La somma di un gruppo finito di numeri assoluti, in numero dato e aventi prodotto dato, è minima quando essi sono fra loro eguali.*

Dim. Sia n (intero e non minore di 2) il numero dato. A *ciascun* numero assoluto s corrisponde un *gruppo* di prodotti di n numeri assoluti aventi per somma « ns » e questo gruppo ha per *massimo* « s^n » [§ 9]. La *condizione di reciprocità* è verificata, perchè, quando « $s_1 < s$ », anche « $s_1^n < s^n$ »; quindi « ns » è la *minima* somma di n numeri assoluti aventi per prodotto « s^n ». Che questa minima somma corrisponda al caso in cui *ciascuno* degli addendi è s, risulta dal fatto che altrimenti il loro prodotto non sarebbe « s^n » (ma minore di « s^n » [§ 9]).

Nota 2. Dunque se p è il prodotto dato, la condizione di minimo è che ciascun fattore sia « $\sqrt[n]{p}$ », considerando soltanto il valore reale assoluto di tale espressione; e perciò la *minima somma* cercata è « $n\sqrt[n]{p}$ ».

In particolare, se « $p=1$ » ed « $n=2$ », la minima somma è 2, come già si trovò direttamente [§ 1 Appl.].

Sappiamo che, se « $n=2$ », il teorema fondamentale è valido anche senza la restrizione, necessaria quando « $n>2$ », di considerare soltanto numeri *assoluti* [§ 5 Avv.]; ma per il suo reciproco, ora dimostrato, tale restrizione è *necessaria* anche se « $n = 2$ »; altrimenti non sarebbe verificata la *condizione di reciprocità*.

Analogamente, si ottiene

Il reciproco del teorema generalizzato. Conservando a ciascuna *lettera* il significato attribuitole nel § 13, ma supponendo dato p invece di s, si ha

$$s_0 = \min s = a\sqrt[a]{\frac{p}{c}}$$

e la *condizione di minimo* è ancora

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots \frac{x_n}{a_n} = \frac{s_0}{a}.$$

Ad es., se

$$p = x_1^{\,5} x_2^{\,3} = 553\,584\,375,$$

calcolati

$$a = 5 + 3 = 8 \qquad c = 5^5 \times 3^3 = 84\,375 \qquad p : c = 6\,561,$$

risulta
$$s_0 = \min(x_1 + x_2) = 8\sqrt[8]{6561} = 24,$$

corrispondentemente ad

$$\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{3} = \frac{24}{8} = 3,$$

cioè ad
$$x_1 = 15 \quad \text{e} \quad x_2 = 9.$$

Applicazione. La conoscenza dei reciproci del teorema fondamentale e del suo generalizzato permette di risolvere *immediatamente* alcune questioni di *minimo* di cui non sia stata ancora trattata la corrispondente questione di *massimo*; poi, per reciprocità, viene risolta anche questa.

Proponiamoci ad es. di cercare quali debbano essere il raggio x e l'altezza y di un *cilindro* — di cui è dato il *volume* o la *superficie laterale* o la *superficie totale* — affinchè risulti *minimo* il *perimetro* di una sua sezione meridiana; si cerca dunque, se c'è, il minimo di « $4x + 2y$ », cioè di « $2x + y$ ».

1 Sia πz^3 il *volume* dato, cosicchè « $x^2 y = z^3$ », da cui « $(2x)^2 y = 4z^3$ »; allora la *condizione di minimo* è « $\frac{2x}{2} = \frac{y}{1}$ »,

cioè « $x = y = z$ », e quindi il cilindro cercato è quello in cui l'altezza è eguale al raggio.

·2 Sia πz^2 la *superficie laterale* data, cosicchè « $(2x)y = z^2$ »; allora la *condizione di minimo* per « $2x + y$ » è

$$2x = y = z$$

che si avvera nel *cilindro equilatero*.

·3 Sia πz^2 la *superficie totale* data, cosicchè « $2(x^2 + xy) = z^2$ », da cui « $(2x + y)^2 = 2z^2 + y^2$ ». Qui « $2x + y$ » diverrebbe minimo assieme a « $(2x + y)^2$ », cioè a « $2z^2 + y^2$ » e quindi, poichè z^2 è dato, assieme ad y^2, cioè ad y; ma y può assumere qualunque valore assoluto tranne lo 0, e perciò non ha minimo; dunque, in questo caso, anche « $2x + y$ » è *privo di minimo*.

§ 17. **Funzioni razionali di una variabile.** — Dicendo che

y è una *funzione razionale* di x

intenderemo che la dipendenza di y da x sia espressa da una formula del tipo

$$y = \frac{P}{Q}, \tag{1}$$

in cui P e Q sono *polinomî* in x, non entrambi di *grado zero* e nessuno dei quali sia lo *zero*, sicchè a *ciascun* valore (reale) di x, che non sia radice dell'equazione « $Q = 0$ », corrisponda *un* valore di y. Supporremo inoltre che P e Q siano *primi fra loro* (nel significato che ha tale locuzione nel calcolo letterale), sicchè la (1) sia *equivalente* a

$$Qy - P = 0. \tag{2}$$

Diremo che un numero (reale) è un valore *lecito* o *vietato* di y secondochè l'equazione in x, che deriva dalla (2) attribuendo ad y quel valore, ammette o no almeno una radice reale; il che può essere deciso (coi mezzi dell'Algebra elementare ed indipendentemente da qualsiasi particolarità propizia alla ricerca) sol quando la (2) non sia di grado superiore al *secondo* rispetto ad x (potendo essere però di *terzo* grado complessivo rispetto ad x e ad y).

Sicchè ogni funzione razionale ELEMENTARE di una variabile è espressa (o esprimibile) mediante una formola desunta da

$$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{px^2 + 2qx + r} \tag{3}$$

attribuendo un valore particolare a ciascuna delle lettere a, b, c, p, q, r, con la restrizione che *non siano simultaneamente nulli* nè a, b, p, q, nè a, b, c, nè p, q, r, e che i polinomî

$$ax^2 + 2bx + c \qquad px^2 + 2qx + r$$

siano *primi fra loro.*

Dei *sei numeri* che appaiono nella (3) uno potrebbe sembrare di troppo, ambo i termini della frazione potendo essere preventivamente divisi per uno di quei numeri (che non sia nullo); ma ciò non sarebbe comodo qualora essi fossero *interi* complessivamente primi fra loro, al qual caso gioverà anzi ridursi preliminarmente qualora i detti numeri siano *razionali.*

Il nostro scopo principale è quello di accertare od escludere la *esistenza* del *minimo* o del *massimo* dei valori *leciti* di y e, quando vi siano, di *determinarli.* Ora, poichè a tal fine noi *risolveremo* la (3) rispetto ad x, per desumere dalla formula ottenuta la *separazione* dei valori leciti di y da quelli vietati, il metodo che ci accingiamo a seguire può chiamarsi di RISOLUZIONE RISPETTO ALLA VARIABILE INDIPENDENTE o, più brevemente, di SEPARAZIONE (cfr. Art. 13).

La determinazione dei valori leciti di y ci consentirà di scoprire alcune altre proprietà del loro insieme, di cui non ci siamo occupati sino ad ora, ma che talvolta sono non meno importanti di quelle che formano l'oggetto principale della nostra ricerca.

Ci proponiamo di analizzare partitamente ciascuna possibilità, principalmente per mettere in luce quanto esse siano varie; ma il metodo cui abbiamo accennato è così uniforme che sarebbe superfluo affaticar la memoria a ricordare ipotesi e tesi di ciascun caso, potendo esser sicuri di ritrovarle senza alcun artificio. Però non sempre codesto metodo è il più breve, e perciò talvolta gli preferiremo altri procedimenti, suggeriti da qualche particolarità dei casi considerati, lasciando al lettore di giungere alle medesime conclusioni applicando il metodo generale.

Assumendo x ed y quali coordinate cartesiane nel piano, l'imagine della (3) sarà una *retta* o una *conica* o una *cubica*; ma, affinchè essa fornisca una *rappresentazione* delle varie possibilità analitiche che verremo esaminando, bisogna considerarla rigidamente collegata agli assi di riferimento, perchè a casi analiticamente distinti corrisponde talvolta una stessa imagine diversamente collocata rispetto agli assi. Quanto alle rette parallele all'asse delle y sappiamo a priori che ciascuna di esse ha un sol punto (proprio) comune con la detta imagine; tranne quelle (se ve ne sono) che tagliano l'asse delle x in punti la cui ascissa sia radice (reale) dell'equazione « $Q=0$ », le quali (per l'ipotesi che P e Q siano primi fra loro) non hanno alcun punto (proprio) comune con l'imagine stessa. Non sappiamo invece, ed è quello che desideriamo conoscere, come si comportino rispetto a tale imagine le rette parallele all'asse delle x; per brevità, chiameremo regione *attraversata* dalla detta imagine il luogo delle parallele all'asse delle x che hanno almeno un punto (proprio) comune con essa, cioè che tagliano l'asse delle y in punti le cui ordinate sono i valori *leciti* di y.

Nell'esaminare i varî casi possibili, contrassegnati con numerazione romana e riferiti alla (3) per la notazione, *sottintenderemo* ciascuna volta che *non sia nullo* il primo numero (da sinistra a destra) effettivamente indicato in P ed in Q.

Se

(I) $$y=\frac{2bx+c}{r},$$

allora $$x=\frac{ry-c}{2b};$$

sicchè *ogni* numero è un valore *lecito* di y, e perciò non vi è *nè minimo*, *nè massimo*.

Geometricamente, la (I) rappresenta una *retta* non parallela ad alcuno degli assi (infatti essa taglia l'asse delle x nel punto di ascissa « $-\frac{c}{2b}$ » e l'asse delle y nel punto di ordinata « $\frac{c}{r}$ ») e che perciò *attraversa* tutto il piano (nel senso dichiarato).

Se

$$\text{(II)} \qquad y = \frac{c}{2qx + r},$$

allora $$(2qx + r)y = c,$$

che per « $y = 0$ » darebbe (qualunque sia x) « $c = 0$ », contro l'ipotesi generale; ma, per ogni altro valore di y,

$$x = \frac{c - ry}{2qy};$$

sicchè *ogni* numero *diverso da zero* è un valore *lecito* di y, e perciò non vi è *nè minimo, nè massimo.*

Analiticamente, i due casi esaminati differiscono fra loro in quanto nel caso (I) lo *zero* è un valore *lecito* ed invece nel caso (II) esso è il *limite separatore* dei due gruppi parziali in cui si scinde l'insieme dei valori leciti di y, corrispondentemente alle condizioni « $y < 0$ » ed « $y > 0$ ».

Geometricamente, la (II) rappresenta un' *iperbole* (mai degenere) di cui l'asse delle x è un *asintoto* ed i cui rami perciò *attraversano* i semipiani uscenti dall'asse delle x, questo escluso (l'altro asintoto è la retta « $x = -\frac{r}{2q}$ »).

Se

$$\text{(III)} \qquad y = \frac{2bx + c}{2qx + r},$$

allora $$2(qy - b)x = c - ry,$$

che per « $qy - b = 0$ » darebbe (qualunque sia x) « $c - ry = 0$ » e quindi « $br = cq$ », sicchè P e Q non sarebbero primi fra loro, contro il supposto. Quando « $qy - b \neq 0$ »,

$$x = \frac{c - ry}{2(qy - b)},$$

sicchè *ogni* numero diverso da « $\frac{b}{q}$ » è un valore lecito di y, e perciò non vi è *nè minimo, nè massimo.*

Il caso (III) differisce dal caso (II), analiticamente in quanto il *limite separatore*, invece di *zero* è « $\frac{b}{q}$ »; e geometrica mente perchè un *asintoto* dell' iperbole, anzichè l' asse delle x, è la retta « $y = \frac{b}{q}$ ». Sicchè, liberando il caso (III) dalla restrizione « $b \neq 0$ », se ne dedurrebbe il caso (II) per « $b = 0$ ».

Se si volesse soltanto concludere, nei casi finora considerati, che l'insieme dei valori leciti di y è *privo di minimo e di massimo*, basterebbe osservare che in ciascuno di essi l' equazione proposta è di *primo grado* rispetto ad x; tale condizione è sufficiente, non però necessaria, come risulterà da parecchi dei casi seguenti.

Se

(IV) $$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{2qx + r},$$

allora $$ax^2 - 2(qy - b)x + (c - ry) = 0,$$

da cui, per ogni valore *lecito* di y,

$$x = \frac{qy - b \pm \sqrt{(qy - b)^2 - a(c - ry)}}{a};$$

e perciò sono *vietati* (se ve ne sono) i valori di y per i quali

$$(qy - b)^2 - a(c - ry) < 0,$$

cioè per i quali

$$q^2y^2 - (2bq - ar)y + (b^2 - ac) < 0.$$

Quindi (poichè « $q^2 > 0$ ») i valori *vietati* sono i numeri compresi fra le radici dell' equazione

(4) $$q^2y^2 - (2bq - ar)y + (b^2 - ac) = 0,$$

purchè esse siano *reali* e fra loro *distinte*. Comunque, i valori *leciti* di y non hanno *nè minimo, nè massimo*.

Geometricamente, anche la (IV) rappresenta un' *iperbole*, ma i suoi *asintoti* sono le rette

(5) $$2qx + r = 0 \qquad 2aqx - 4q^2y + (4bq - ar) = 0$$

delle quali la prima è parallela all' asse delle y, mentre la seconda *non è parallela* ad alcuno degli assi.

Per fare un'analisi esauriente della (IV) bisogna esaminare il discriminante della (4)

$$\Delta = (2bq - ar)^2 - 4q^2(b^2 - ac) = a[ar^2 + 4q(cq - br)].$$

Se « $\Delta > 0$ », le radici y_1 ed y_2 della (4) sono reali e fra loro distinte e, come si è detto, i valori *vietati* di y sono i numeri compresi fra y_1 ed y_2; essi sono dunque interposti fra due gruppi di valori *leciti* di y, dei quali (posto « $y_1 < y_2$ ») uno (determinato dalla condizione « $y \leqq y_1$ ») ha y_1 per *massimo* e l'altro (determinato dalla condizione « $y \geqq y_2$ ») ha y_2 per *minimo*, corrispondentemente ad

$$x_1 = \frac{qy_1 - b}{a} \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{qy_2 - b}{a},$$

sicchè y_1 ed y_2 possono considerarsi quali *massimo e minimo parziali* dei valori leciti di y. Geometricamente, l'iperbole è contenuta nell'*angolo completo* degli asintoti cui *non appartiene* la parallela all'asse delle x passante per la loro intersezione; sicchè essa *attraversa* con un *ramo* il semipiano *sottostante* alla retta « $y = y_1$ » e con l'altro il semipiano *sovrastante* alla retta « $y = y_2$ », le quali due rette (parallele all'asse delle x) sono *tangenti* all'iperbole nei punti di ascisse rispettive x_1 ed x_2.

Se « $\Delta \leqq 0$ », le radici della (4) sono *complesse* od *eguali*, e perciò non vi sono valori vietati di y; sicchè *ogni* numero è un valore *lecito* di y. Però, geometricamente, bisogna separare i due casi ora considerati: se « $\Delta < 0$ », l'iperbole è contenuta nell'*altro angolo completo* formato dagli asintoti; se invece « $\Delta = 0$ », l'iperbole *degenera* nella coppia di rette (5); e perciò, in ambo i casi, l'imagine della (IV) *attraversa* tutto il piano.

Badando soltanto alle scopo principale della ricerca, che sinora ha avuto per risultato la *inesistenza* del minimo e del massimo dei valori *leciti* di y, potrebbe sembrar conveniente liberare la (IV) dalle restrizioni « $a \neq 0$ » e « $q \neq 0$ », e dedurne la (III) per « $a = 0$ », la (II) per « $a = b = 0$ », e la (I) per « $a = q = 0$ »; ma bisognerebbe tener presente la *esclusione* (meno agevole a ricordare) che sia « $q = 0$ » ed « $a \neq 0$ », perchè tal caso (che esamineremo subito) conduce a conclusione diversa.

Se

$$(\text{V}) \qquad y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{r},$$

abbandonando il metodo generale, deduciamone

$$ary = (ax + b)^2 + (ac - b^2)$$

da cui [§ 3·1 e Nota 3]

$$\min (ary) = ac - b^2, \quad \text{perchè} \quad \min (ax + b)^2 = 0;$$

e quindi il numero

$$y_0 = \frac{ac - b^2}{ar}, \quad \text{corrispondente ad} \quad x_0 = -\frac{b}{a},$$

è il *minimo* o il *massimo* dei valori leciti di y, secondochè « ar » è *positivo* o *negativo* [§ 3·3·4]. Corrispondentemente i valori leciti di y sono *tutti* i numeri *non minori* o *non maggiori* di y_0; e perciò, nel caso considerato, quando c'è minimo *non vi è massimo* e quando vi è massimo *non vi è minimo.*

Geometricamente, la (V) rappresenta una *parabola* (conica) di cui « x_0 , y_0 » è il *vertice*, « $x = x_0$ » è l'*asse*, ed « $y = y_0$ » è la *tangente* nel vertice; inoltre essa *attraversa* il semipiano *sovrastante* o *sottostante* alla detta tangente, secondochè « ar » è positivo o negativo.

Se

$$(\text{VI}) \qquad y = \frac{c}{px^2 + 2qx + r},$$

allora

$$(6) \qquad cpy = \frac{c^2p^2}{(px + q)^2 - (q^2 - pr)}.$$

In particolare, quando

$$(\text{VI}_1) \qquad q^2 - pr = 0,$$

$$(7) \qquad y = \frac{cp}{(px + q)^2}$$

e perciò i valori leciti di y sono i numeri che hanno il segno di « cp », lo zero escluso; sicchè essi non hanno *nè minimo,* *nè massimo*, ma hanno lo *zero* quale *limite superiore* o *inferiore*, (cfr. Art. 13) secondochè « cp » è *negativo* o *positivo.*

Quando invece

$$q^2 - pr < 0, \tag{VI$_2$}$$

dalla (6) si deduce « $cpy > 0$ », da cui [§ 3·1·6]

$$\max(cpy) = -\frac{c^2p^2}{q^2 - pr}, \quad \text{perchè} \quad \min(px + q)^2 = 0;$$

e quindi [§ 3·4·3] il numero

$$y_0 = -\frac{cp}{q^2 - pr}, \quad \text{corrispondente ad} \quad x_0 = -\frac{q}{p},$$

è il *minimo* o il *massimo* dei valori leciti di y, secondochè « cp » è *negativo* o *positivo.* Inoltre, i valori leciti di y hanno il segno di « cp »; perciò essi hanno lo *zero* quale *limite superiore* o *inferiore* secondochè « cp » è *negativo* o *positivo.*

Infine, quando

$$q^2 - pr > 0, \tag{VI$_3$}$$

si osservi anzitutto che, per la (6), « cpy » ha il segno di

$$(px + q)^2 - (q^2 - pr); \tag{7$'$}$$

dalla inesistenza del massimo dei valori negativi (0 escluso) di tale differenza e del minimo di quelli positivi (0 escluso), si deduce [§ 3 Nota 2, parte prima] la *inesistenza* del *minimo* e del *massimo* di « cpy », e quindi di y.

Osservando però che i valori negativi della (7$'$) hanno per minimo « $-(q^2 - pr)$ » (quando « $x = x_0$ »), si conclude [§ 3, duale della parte prima della ·6] che « cpy_0 » è il massimo valore negativo di « cpy »; quindi y_0 è il *minimo* o il *massimo* di quei valori di y che hanno il segno di y_0, secondochè « cp » è negativo o positivo [§ 3·4·3], cioè secondochè y_0 è *positivo* o *negativo.*

Per contro, i valori positivi della (7$'$) non avendo massimo, quelli positivi di « cpy » hanno per limite inferiore lo zero; quindi quei valori di y che hanno segno opposto ad y_0 hanno per *limite superiore* od *inferiore* lo *zero*, secondochè y_0 è *positivo* o *negativo.*

Riassumendo, i valori leciti di y, nel caso (VI_3) sono tutti i numeri tranne lo 0 e tranne quelli fra 0 ed y_0 (sicchè il loro insieme si scinde in due gruppi *parziali*, dei quali quello cui appartiene y_0 si estende *infinitamente* nel verso che corrisponde al segno di y_0, mentre l'altro si estende *infinitamente* nel verso opposto). Alla qual conclusione qui ci è piaciuto di giungere (per varietà di metodo, quantunque meno agevolmente) ricorrendo alle proprietà fondamentali dei massimi e dei minimi, anzichè ai complementi della teoria delle equazioni di secondo grado. Chi preferisse quest'altra via, potrà dedurre l'analisi della (VI) da quella della (VII).

Geometricamente, la (VI) rappresenta una *cubica* simmetrica rispetto alla retta « $x = x_0$ », come risulta manifesto dalla (6), avente un *flesso* improprio sull' asse delle x (ivi tangente alla cubica). Questa *attraversa*: nel caso (VI_1), il semipiano *sottostante* o *sovrastante* all' asse delle x (escluso), secondochè « cp » è *negativo* o *positivo*; nel caso (VI_2), la *striscia* di piano avente per lati l' asse delle x (escluso) e la retta « $y = y_0$ » (tangente alla cubica); e nel caso (VI_3), tutto il piano tranne la detta striscia, compresa però la retta « $y = y_0$ » (tangente alla cubica).

Se

$$(VII) \qquad y = \frac{2bx + c}{px^2 + 2qx + r},$$

riprendiamo il metodo generale, osservando preliminarmente che lo *zero* è un valore *lecito* di y, corrispondente ad « $x_0 = -\frac{c}{2b}$ » (il quale valore di x, annullando il numeratore della frazione, per l'ipotesi generale non ne annulla il denominatore).

Dalla (VII) si ha

$$pyx^2 + 2(qy - b)x + (ry - c) = 0;$$

sicchè, per ogni valore *lecito* di y che sia diverso da *zero*,

$$(8) \qquad x = \frac{b - qy \pm \sqrt{(b - qy)^2 - pq(ry - c)}}{py},$$

e perciò sono *vietati* (se ve ne sono) i valori di y per i quali

$$(b - qy)^2 - py(ry - c) < 0,$$

cioè per i quali

(9) $$(q^2 - pr)y^2 - (2bq - cp)y + b^2 < 0.$$

Quando

(VII$_1$) $$q^2 - pr = 0,$$

il valore « $-\frac{q}{p}$ » di x, annullando il denominatore della (VII), per l'ipotesi generale non ne annulla il numeratore; sicchè « $-\frac{q}{p} \neq -\frac{c}{2b}$ », cioè

$$2bq - cp \neq 0;$$

quindi, per la (9), secondochè « $2bq - cp$ » è *negativo* o *positivo*, i valori *vietati* di y sono i numeri *minori* o *maggiori* di

$$y_3 = \frac{b^2}{2bq - cp}$$

(fra i quali non è lo *zero*). Perciò, secondochè y_3 è *negativo* o *positivo*, esso è il *minimo* o il *massimo* dei valori *leciti* di y (il cui insieme si estende *infinitamente* nel verso *opposto* a quello che corrisponde al segno di y_3); per la (8), y_3 corrisponde ad

$$x_3 = \frac{b - qy_3}{py_3} = \frac{q}{p} - \frac{c}{b}.$$

Quando invece

(VII$_2$) $$q^2 - pr > 0,$$

i valori *vietati* di y sono i numeri compresi fra le radici y_1 ed y_2 dell'equazione

(10) $$(q^2 - pr)y^2 - (2bq - cp)y + b^2 = 0,$$

purchè esse siano *reali* e fra loro *distinte* (nel qual caso hanno il medesimo segno e perciò lo *zero* non è compreso fra esse); comunque i valori *leciti* di y non hanno *nè minimo, nè massimo.*

Designato con Δ il discriminante della (10), allorchè « $\Delta > 0$ », come già nel caso (IV), i valori *vietati* di y sono interposti fra due gruppi di valori *leciti* di y, sicchè (posto « $y_1 < y_2$ ») y_1 ed y_2 saranno rispettivamente *il massimo ed il* *minimo parziali* dei valori leciti di y; per la (8), essi corrispondono ad

$$x_1 = \frac{b}{py_1} - \frac{q}{p} \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{b}{py_2} - \frac{q}{p}.$$

Invece, allorchè « $\Delta \geqq 0$ », *ogni* numero è un valore *lecito* di y.

Infine, quando

(VII$_3$) $$q^2 - pr < 0,$$

allora « $\Delta > 0$ » ed i valori *leciti* di y sono i numeri da y_1 ad y_2 (questi inclusi, che hanno segno diverso e fra i quali perciò è compreso lo *zero*); quindi essi formano un gruppo *continuo*, di cui y_1 è il *minimo* ed y_2 è il *massimo*.

Geometricamente, la (VII) rappresenta una *cubica* che tocca l'asse delle x nel suo punto improprio e la taglia nel punto proprio di ascissa x_0. La cubica *attraversa*: nel caso (VII$_1$), il semipiano *sovrastante* o *sottostante* alla retta « $y = y_3$ » (tangente alla cubica), secondochè « $2bq - cp$ » è *negativo* o *positivo*; nel caso (VII$_2$) con « $\Delta > 0$ », il semipiano *sottostante* alla retta « $y = y_1$ » *ed* il semipiano *sovrastante* alla retta « $y = y_2$ » (entrambe tangenti alla cubica); nel caso (VII$_2$) con « $\Delta \leqq 0$ », tutto il *piano*; e nel caso (VII$_3$), la *striscia* di piano avente per lati le rette « $y = y_1$ » ed « $y = y_2$ » (entrambe tangenti alla cubica).

Dall'analisi della (VII) si può dedurre quella della (VI), facendovi « $b = 0$ »; in tal caso, y_3 ed uno dei numeri y_1 ed y_2 valgono *zero*, il quale, mentre per la (VII) è un valore *lecito*, per la (VI) è invece un valore *vietato*; inoltre, per « $b = 0$ », il caso (VII$_2$) dà sempre « $\Delta > 0$ ».

Per ultimo, se

(VIII) $$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{px^2 + 2qx + r},$$

anzichè applicare il metodo generale, giova osservare che l'equazione proposta equivale ad

$$y - \frac{a}{p} = \frac{2(bp - aq)x + (cp - ar)}{p(px^2 + 2qx + r)};$$

e così, secondochè « $bp - aq$ » è *zero* o *diverso da zero*, siamo ricondotti alla (VI), od alla (VII) e possiamo trarne le conseguenze cambiandovi

$$\left.\begin{array}{lcccccc} & y & b & c & p & q & r \\ \text{in} & y-\frac{a}{p} & bp-aq & cp-ar & p^2 & pq & pr \end{array}\right\} (11).$$

Quindi, se

$$(\mathrm{VIII}_1)\qquad bp-aq=0 \quad \text{e} \quad q^2-pr=0,$$

i valori leciti di y non hanno *nè minimo, nè massimo*, ma hanno $\frac{a}{p}$ per *limite superiore* od *inferiore* secondochè « $cp-ar$ » è *negativo* o *positivo*;

mentre se

$$(\mathrm{VIII}_2)\qquad bp-aq=0 \quad \text{e} \quad q^2-pr<0,$$

riducendo si trova che il numero

$$y_0=\frac{bq-cp}{q^2-pr},$$

corrispondente ad

$$x_0=-\frac{q}{p}$$

ne è il *minimo* o il *massimo*, secondochè « $cp-ar$ » è *negativo* o *positivo*; corrispondentemente, « $\frac{a}{p}$ » è ancora *il limite superiore* od *inferiore* dei valori leciti di y;

se poi

$$(\mathrm{VIII}_3)\qquad bp-aq=0 \quad \text{e} \quad q^2-pr>0,$$

i valori leciti di y sono tutti i numeri tranne $\frac{a}{p}$ e tranne i numeri compresi fra $\frac{a}{p}$ ed y_0.

Quando

$$(\mathrm{VIII}_4)\qquad bp-aq\neq 0 \quad \text{e} \quad q^2-pr=0,$$

riducendo si trova che il numero

$$y_3=\frac{b^2-ac}{2bq-cp-ar},$$

corrispondente ad

$$x_3=-\frac{bq-cp}{aq-bp},$$

è il *minimo* o il *massimo* dei valori leciti di y secondochè il denominatore di y_3 è *negativo* o *positivo*;
quando invece

$$(\mathrm{VIII}_5) \qquad bp - aq \neq 0 \quad \text{e} \quad q^2 - pr > 0,$$

essi non hanno *nè minimo, nè massimo*; inoltre, se le radici y_1 ed y_2 dell'equazione

$$(12) \quad (q^2 - pr)(py - a)^2 - [p(2bq - cp + ar) - 2aq^2](py - a) + \\ + (bp - aq)^2 = 0$$

sono *reali* e fra loro *distinte*, posto « $y_1 < y_2$ », y_1 ed y_2 sono rispettivamente *il massimo ed il minimo parziali* dei valori leciti di y, corrispondentemente ad

$$x_1 = \frac{bp - aq}{p(py_1 - a)} - \frac{q}{p} \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{bp - aq}{p(py_2 - a)} - \frac{q}{p};$$

infine, quando

$$(\mathrm{VIII}_6) \qquad bp - aq \neq 0 \quad \text{e} \quad q^2 - pr < 0,$$

le radici y_1 ed y_2 della (12), certamente reali, sono distinte fra loro e da « $\frac{a}{p}$ », e si ha

$$\min y = y_1 \quad \text{e} \quad \max y = y_2.$$

Le *imagini* geometriche di questi sei casi sono identiche a quelle dei corrispondenti casi $(\mathrm{VI}_1)(\mathrm{VI}_2)(\mathrm{VI}_3)(\mathrm{VII}_1)$ $(\mathrm{VII}_2)(\mathrm{VII}_3)$, purchè si tenga conto della sostituzione (11), la quale esige inoltre una *traslazione* della detta imagine, determinata (in grandezza e segno) dal vettore « $\frac{a}{p}$ » collocato sull'asse delle y.

D'altronde, liberando il caso (VIII) dalla restrizione « $a \neq 0$ », ne derivano in particolare i casi (VI) per « $a = b = 0$ », ed i casi (VII) per « $a = 0$ » e « $b \neq 0$ ».

§ 18. **Funzioni implicite di una variabile.** — Ci proponiamo anzitutto di determinare (quando vi siano) il minimo ed il massimo di y, allorchè la dipendenza di y da x è data mediante un'equazione del tipo

$$(\mathrm{I}) \qquad a_{11}x^2 + 2(a_{12}y + a_{13})x + (a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}) = 0$$

e di illustrare tale ricerca precisando in ciascun caso l'imagine della (I) in coordinate cartesiane e la sua posizione rispetto agli assi di riferimento.

Le costanti

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \quad a_{33}$$

sono arbitrarie; tuttavia, affinchè i casi forniti dalla (I) siano tutti *diversi* da quelli esaminati nel paragrafo precedente, supporremo

(1) $$a_{22} \neq 0;$$

ed affinchè nella (I) non manchi nemmeno la x, supporremo che

(2) se « $a_{11} = a_{12} = 0$ », allora « $a_{13} \neq 0$ ».

Inoltre, com'è consuetudine nella teoria analitica delle coniche, porremo

$$a_{21} = a_{12}, \qquad a_{31} = a_{13}, \qquad a_{32} = a_{23};$$

e riferendoci al determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

rappresenteremo con A_{rs} il subdeterminante, già moltiplicato per $(-1)^{r+s}$, di a_{rs}.

Talvolta il primo membro della (I) sarà designato abbreviatamente con $f(x, y)$.

Caso I. Se

$$a_{11} = a_{12} = 0,$$

la (I) diviene

$$2a_{13}x = -(a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33})$$

dove per la (2) $\qquad a_{13} \neq 0,$

sicchè *ogni* numero è un valore *lecito* di y.

Inoltre, risulta

$$A_{33} = 0$$

ed « $A = -a^2_{13}a_{22}$ », da cui per le (1)(2)

(4) $$« A \neq 0 »;$$

quindi l'imagine della (I) è una *parabola* non degenere, il cui *asse* è « $a_{22}y + a_{23} = 0$ » e che perciò incontra (in un sol punto proprio) *ciascuna* retta parallela all'asse delle x.

Se invece (come vedremo nei due *Casi* seguenti)

$$a_{11} = 0 \quad \text{e} \quad a_{12} \neq 0,$$

allora, posto

$$y_0 = -\frac{a_{13}}{a_{12}},$$

ad ogni valore di y diverso da y_0 la (I) fa corrispondere un valore di x; mentre, qualunque sia x, risulta

$$f(x, y_0) = a_{22}y_0^2 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = -\frac{A}{a_{12}^2}. \tag{5}$$

Caso II. Quindi: se

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} \neq 0, \quad A \neq 0,$$

la (5) dà

$$f(x, y_0) \neq 0;$$

sicchè, per quanto precede, y_0 è *il solo* valore *vietato* di y.

Inoltre, risulta

$$A_{33} = -a_{12}^2 < 0;$$

quindi l'imagine della (I) è un'*iperbole* non degenere, di cui « $y = y_0$ » è un *asintoto* e che perciò incontra (in un sol punto) *ciascun'altra* retta parallela all'asse delle x.

Caso III. Se

$$a_{11} = A = 0,$$

dalla (4) segue per assurdo « $a_{12} \neq 0$ » e quindi sussiste la (5), da cui per ipotesi

$$f(x, y_0) = 0$$

e perciò y_0 soddisfa la (I) unitamente ad un valore arbitrario di x; sicchè, per quanto precede, *ogni* numero è un valore *lecito* di y, come nel *Caso I*.

Ma in questo caso l'imagine della (I) è invece una *coppia di rette* fra loro incidenti, una delle quali è « $y = y_0$ », mentre l'altra

$$2a_{21}x + a_{22}(y + y_0) + 2a_{23} = 0$$

incontra (in un sol punto) *ciascuna* parallela all'asse delle x.

Esaurita così l'analisi dei casi in cui « $a_{11}=0$ », proseguiamo supponendo

(6) $$a_{11} \neq 0.$$

Risolvendo la (I) rispetto ad x e semplificando, si ottiene

(7) $$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{-A_{33}y^2 + 2A_{23}y - A_{22}}}{a_{11}};$$

sicchè i valori *leciti* di y (se ve ne sono) sono quelli per cui

(8) $$A_{33}y^2 - 2A_{23}y + A_{22} \leqq 0.$$

Caso IV. Se

$$A_{33} = A_{23} = 0,$$

dalla (8) risulta che *ogni* o *nessun* numero è un valore *lecito* di y secondochè

$$A_{22} \leqq 0 \quad \text{ovvero} \quad A_{22} > 0.$$

D'altra parte, per l'ipotesi, la (I) equivale all'equazione

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 = -A_{22}$$

la cui imagine è una *coppia di rette* fra loro parallele (reali e distinte se A_{22} è negativo, coincidenti se « $A_{22}=0$ », imaginarie coniugate se A_{22} è positivo); comunque, per la (6), esse non sono parallele all'asse delle x e perciò sono incontrate rispettivamente in due, uno, nessun punto da *ciascuna* retta parallela all'asse delle x [1].

[1] Non sorprenda che la conica sia degenere quantunque non si sia supposto « $A=0$ », perchè tale condizione è implicita nell'ipotesi. Infatti, per essa, l'identità

$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0$$

diviene

$$a_{12}A_{13} = 0;$$

ma per ipotesi « $A_{33}=0$ », cioè « $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$ », da cui per le (1)(6) « $a_{12} \neq 0$ »; sicchè

$$A_{13} = 0;$$

da ciò e dall'ipotesi segue appunto

$$A = 0.$$

Caso V. Se

$$A_{33} = 0 \quad \text{ma} \quad A_{23} \neq 0$$

la (8) diviene $$2A_{23}y \geqq A_{22};$$

quindi il numero $$y_0 = \frac{A_{22}}{2A_{23}}$$

è il *minimo* o il *massimo* dei valori *leciti* di y secondochè A_{23} è *positivo* o *negativo*, ed in ambo i casi il corrispondente valore di x, dedotto dalla (7), è

$$x_0 = -\frac{a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{11}}.$$

L'imagine della (I) è una *parabola*, il cui *asse*

$$(a_{11} + a_{22})(a_{11}x + a_{12}y) + (a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}) = 0$$

non è parallelo ad alcuno degli assi di riferimento (1); essa giace nel semipiano *sovrastante* o *sottostante* alla retta « $y = y_0$ » secondochè A_{23} è positivo o negativo, è tangente a codesta retta ed incontra in due punti distinti ciascun'altra parallela all'asse delle x che giaccia nel detto semipiano.

Proseguiamo supponendo

$$A_{33} \neq 0$$

ed osserviamo anzitutto che, posto

(9) $$d = A_{23}^2 - A_{22}A_{33},$$

risulta

(9') $$d = -a_{11}A;$$

sicchè le radici dell'equazione

$$A_{33}y^2 - 2A_{23}y + A_{22} = 0$$

sono

(10) $$y_1 = \frac{A_{23} - \sqrt{d}}{A_{33}} \qquad y_2 = \frac{A_{23} + \sqrt{d}}{A_{33}}$$

(1) Infatti, per ipotesi,

$$a_{11}a_{22} = a_{12}^2$$

da cui per le (1)(6) « $a_{12} \neq 0$ » e perciò « $a_{11}a_{22} > 0$ », da cui « $a_{11} + a_{22} \neq 0$ »; da ciò e dalla (6) risulta appunto:

$$(a_{11} + a_{22})a_{11} \neq 0 \qquad (a_{11} + a_{22})a_{12} \neq 0.$$

ed i corrispondenti valori di x, dedotti dalla (7) mediante l'identità

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{13} + a_{13}A_{33} = 0,$$

sono

$$(10') \qquad x_1 = \frac{A_{13}}{A_{33}} + \frac{a_{12}}{A_{33}}\sqrt{\frac{A}{a_{11}}} \quad x_2 = \frac{A_{13}}{A_{33}} - \frac{a_{12}}{A_{33}}\sqrt{\frac{A}{a_{11}}}$$

Caso VI. Se

$$A_{33} > 0 \quad \text{e} \quad d < 0,$$

allora, per le (10), y_1 ed y_2 sono complesse coniugate e quindi, per la (8), *nessun* numero è un valore *lecito* di y.

In tal caso manca ogni imagine (reale) della (I), che rappresenta un'*ellisse imaginaria*.

Caso VII. Se

$$A_{33} > 0 \quad \text{e} \quad d = 0,$$

allora, per le (10),

$$y_1 = y_2$$

e quindi, per la (8), questo è *il solo* valore *lecito* di y; sicchè esso è in pari tempo il *minimo* ed il *massimo* dei valori leciti di y.

Dall'ipotesi e dalle (6)(9') segue « $A = 0$ », sicchè la (I) rappresenta una *coppia di rette* imaginarie coniugate, la cui equazione complessiva è

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \pm (y\sqrt{-A_{33}} + \sqrt{-A_{22}})$$

e la cui imagine (reale) è quindi *il punto* di loro intersezione

$$(10'') \qquad x_1 = \frac{A_{13}}{A_{33}} \qquad y_1 = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Caso VIII. Se

$$A_{33} > 0 \quad \text{e} \quad d > 0,$$

allora, per le (10), y_1 ed y_2 sono reali ed « $y_1 < y_2$ »; quindi, per la (8), i valori *leciti* di y sono quelli per cui

$$y_1 \leqq y \leqq y_2$$

sicchè: $\qquad \min y = y_1 \quad \text{e} \quad \max y = y_2.$

L'imagine della (I) è un'*ellisse* giacente nella striscia di piano che ha per lati le rette (tangenti alla curva e parallele all' asse delle x)

$$y = y_1 \quad \text{ed} \quad y = y_2.$$

Caso IX. Se

$$A_{33} < 0 \quad \text{e} \quad d < 0,$$

allora y_1 ed y_2 sono complesse coniugate e quindi, per la (8), *ogni* numero è un valore *lecito* di y.

L' imagine della (I) è un' *iperbole* non degenere; per le (1)(6), nessuno de' suoi *asintoti*, aventi per equazione complessiva

$$(11) \qquad a_{11}(A_{33}x - A_{13})^2 + 2a_{12}(A_{33}x - A_{13})(A_{33}y - A_{23}) + \\ + a_{22}(A_{33}y - A_{23})^2 = 0,$$

è parallelo ad alcuno degli assi coordinati; i suoi *rami* sono contenuti in quell' angolo completo formato dagli asintoti che contiene la retta

$$(12) \qquad A_{33}y - A_{23} = 0,$$

sicchè ciascun ramo incontra in un punto *ciascuna* retta parallela all' asse delle x.

Caso X. Se

$$A_{33} < 0 \quad \text{e} \quad d = 0,$$

allora « $y_1 = y_2$ » e quindi, per la (8), *ogni* numero è un valore *lecito* di y.

Dall' ipotesi e dalle (6)(9') segue « $A = 0$ », sicchè l' imagine della (I) è una *coppia di rette* incidenti fra loro e con ciascuno degli assi coordinati, di cui la (11) è l' equazione complessiva; anch' esse sono incontrate in due punti (distinti) da ciascuna retta parallela all' asse delle x, tranne dalla (12) che le incontra simultaneamente nel punto (10'') di loro intersezione.

Caso XI. Infine, se

$$A_{33} < 0 \quad \text{e} \quad d > 0,$$

allora y_1 ed y_2 sono reali ed « $y_2 < y_1$ »; e quindi, per la (8), i valori *vietati* di y sono interposti fra due gruppi di valori *leciti* di y, uno dei quali (privo di minimo) ha y_2 per *massimo*, mentre l' altro (privo di minimo) ha y_1 per *minimo*; ma il gruppo *complessivo* dei valori *leciti* di y non ha *nè minimo nè massimo.*

L'imagine della (I) è un' *iperbole* non degenere, i cui *asintoti* hanno per equazione complessiva la (11) ed i cui *rami* sono contenuti nell'angolo completo formato dagli asintoti che non contiene la (12); essi stanno l'uno nel semipiano *sottostante* alla retta « $y = y_2$ e l'altro nel semipiano *sovrastante* alla retta « $y = y_1$ », sono rispettivamente tangenti a codeste rette e ciascuno incontra in due punti distinti ciascun'altra parallela all'asse della x che giaccia nel rispettivo semipiamo.

Riassunto. Sotto l'aspetto analitico e prescindendo dalle rappresentazioni geometriche, l'indagine compiuta si può riassumere così: il gruppo complessivo dei valori *leciti* di y rispetto alla (I) non ammette mai limite inferiore o superiore (finito); esso:

α) ammette *minimo* e *massimo*, quando « $A_{33} > 0$ » e « $d \geqq 0$ » (casi VII ed VIII);

β) ammette soltanto *minimo* o soltanto *massimo*, secondochè A_{23} è *positivo* o *negativo*, quando « $A_{33} = 0$ ma « $A_{23} \neq 0$ » (caso V);

γ) non ammette *nè minimo nè massimo*, negli altri casi.

Generalizzazione. La dipendenza di y da x sia data mediante un'equazione del tipo

$$(13) \qquad x^2 f_1(y) + 2x f_2(y) + f_3(y) = 0$$

dove f_1, f_2, f_3 sono funzioni monodrome arbitrarie di una sola variabile ed in particolare costanti. Affinchè x ed y entrino effettivamente nella (13), supporremo che f_1, f_2, f_3 non siano tutte costanti e, se f_1 ed f_2 sono entrambe costanti, che una almeno sia diversa da zero.

Rammentato che qui consideriamo soltanto valori reali, determinati e finiti, e chiamato *campo* di f_r l'insieme dei valori di y a ciascuno dei quali corrisponde *un valore* di « $f_r(y)$ » (il quale campo è la *totalità* dei numeri allorchè f_r è una *costante*) stabiliamo di designare:

con C la intersezione dei campi di f_1, di f_2, di f_3, cioè l'insieme dei valori di y a ciascuno dei quali, associato ad un valore arbitrario di x, corrisponde *un valore* del primo membro della (13);

con L l'insieme dei valori *leciti* di y rispetto alla (13), cioè di quei valori di C a ciascuno dei quali si può associare almeno un valore di x in modo che risulti *verificata* la (13), e con V l'insieme dei numeri appartenenti a C ma non ad L, i quali, assieme ai numeri non appartenenti a C, formano la totalità dei valori *vietati* di y rispetto alla (13);

con C_0 l'insieme delle radici dell'equazione

$$(14) \qquad f_1(y) = 0$$

e con C_1 l'insieme dei numeri appartenenti a C ma non a C_0;

con L_0 o con V_0 l'insieme degli L o dei V appartenenti a C_0.

La scissione del gruppo C_0 nei gruppi L_0 e V_0 non presenta alcuna difficoltà teorica. Appartiene infatti a V_0 ogni radice della (14) che sia *anche* radice della

$$(15) \qquad f_2(y) = 0$$

ma *non* della

$$(16) \qquad f_3(y) = 0;$$

perchè, qualunque fosse x, dalle (13)(14)(15) si dedurrebbe la (16), contro il supposto.

Ogni *altra* radice della (14) appartiene invece ad L_0; infatti: o essa verifica anche le (15)(16) ed allora essa verifica la (13) assieme ad un valore arbitrario di x, o essa non verifica la (15) ed allora essa verifica la (13) assieme al corrispondente valore di x fornito dalla formula

$$x = -\frac{f_3(y)}{2f_2(y)}.$$

Tale scissione (del gruppo C_0 nei gruppi L_0 e V_0) è esauriente nel caso in cui f_1 è *costante* ed eguale a *zero*, cioè quando la (13) si riduce a

$$(\mathrm{II}) \qquad 2xf_2(y) + f_3(y) = 0$$

perchè in tal caso il gruppo C_1 è *nullo*, e quindi « $L = L_0$ ».

Si osservi che i primi tre casi della (I) sono compresi nella (II) e che in essi il solo valore vietato di y è, nel caso *II*, quel numero y_0 che è radice della (15) ma *non* della (16).

Procediamo nell'indagine generale, supponendo che f_1 non sia costante o sia diversa da zero, ma subordinando la (13) alla condizione che, posto

$$F(y) = f_2^2(y) - f_1(y) f_3(y), \tag{19}$$

risulti

$$F(y) = (py^2 + 2qy + r)\varphi^2(y) \tag{19'}$$

dove p, q, r, sono costanti e φ è una funzione monodroma di una sola variabile.

Per ogni valore di y spettante a C_1, la (13), a cagione delle (19)(19'), dà:

$$x = \frac{-f_2(y) \pm \varphi(y)\sqrt{py^2 + 2qy + r}}{f_1(y)}; \tag{20}$$

sicchè: un numero appartenente a C_1 spetta ad L o a V secondochè per esso risulta soddisfatta o no una (almeno) delle condizioni

$$\varphi(y) = 0 \tag{21}$$

$$py^2 + 2qy + r \geqq 0. \tag{21'}$$

Indichiamo con Y_0 l'insieme di *tutti* i valori (reali) di y che verificano la (21), con Y_1 l'analogo insieme per la (21') e con Y la *riunione* di Y_0 e di Y_1.

Giova rilevare che dalla (14), mediante le (19)(19'), si deduce

$$(py^2 + 2qy + r)\varphi^2(y) \geqq 0$$

da cui la (21) o la (21'); sicchè Y contiene, oltre ad ogni L spettante a C_1, anche C_0, cioè L_0 e V_0; contiene dunque *tutti* gli L e *tutti* i V_0, ma nessun V spettante a C_1. Poichè ad Y possono spettare anche numeri non appartenenti a C, si può stabilire la seguente

Regola generale. Per determinare L, basta *escludere* da Y ogni numero appartenente a V_0 o non appartenente a C.

Designando con L_1 l'insieme degli L appartenenti ad Y_1, se ne deduce il

Corollario. Per determinare L_1, basta *escludere* da Y_1 ogni numero appartenente a V_0 o non appartenente a C.

Della determinazione di Y_1 abbiamo trattato esaurientemente a proposito della (I), dal *Caso IV* in poi. Infatti, dal confronto delle (7)(20) risulta che quanto si disse per A_{33}, A_{23}, A_{22} dev'essere ripetuto in generale per « $-p$ », q, « $-r$ »; inoltre, per la (9), si dovrà porre

$$d = q^2 - pr. \tag{22}$$

Servendoci di tali notazioni e coordinando i risultati ottenuti, sappiamo che al gruppo Y_1 spetta:

1) *nessun* numero, quando « $p = q = 0$ » ed « $r < 0$ » (parte del caso *IV*) o quando « $p < 0$ » e « $d < 0$ » (caso *VI*);

2) *soltanto* « $-\frac{p}{q}$ », quando « $p < 0$ » e « $d = 0$ » (caso *VII*);

3) ogni numero *non minore* o *non maggiore* di « $-\frac{r}{2q}$ », quando « $p = 0$ », secondochè q è *positivo* o *negativo* (caso *V*);

4) ogni numero *da* « $\frac{-q+\sqrt{d}}{p}$ » a « $\frac{-q-\sqrt{d}}{p}$ », quando « $p < 0$ » e « $d > 0$ » (caso *VIII*);

5) ogni numero *non compreso fra* « $\frac{-q-\sqrt{d}}{p}$ » e « $\frac{-q+\sqrt{d}}{p}$ », quando « $p > 0$ » e « $d > 0$ » (caso *XI*);

6) *ogni numero* negli altri casi, cioè quando « $p = q = 0$ » ed « $r \geqq 0$ » (parte del caso *IV*) o quando « $p > 0$ » e « $d \leqq 0$ » (casi *IX* e *X*).

Ecco alcuni

TIPI NOTEVOLI di equazioni soddisfacenti alla (19') e corrispondentemente a ciascuna delle quali sappiamo quindi determinare il gruppo Y_1:

(III) $a_0x^2 + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + (c_0y^2 + 2c_1y + c_2)\varphi^2(y) = 0$

(IV) $(a_0y + a_1)x^2 + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + (c_0y + c_1)\varphi^2(y) = 0$

(V) $(a_0y^2 + 2a_1y + a_2)x^2 + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + c_0\varphi^2(y) = 0$

(VI) $a_0x^2\varphi^2(y) + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + (c_0y^2 + 2c_1y + c_2) = 0$

(VII) $(a_0y + a_1)x^2\varphi^2(y) + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + (c_0y + c_1) = 0$

(VIII) $(a_0y^2 + 2a_1y + a_2)x^2\varphi^2(y) + 2(b_0y + b_1)x\varphi(y) + c_0 = 0$

dove $a_0, \; a_1, \; a_2, \; b_0, \; b_1, \; c_0, \; c_1, \; c_2$

sono costanti arbitrarie e φ è una funzione monodroma arbitraria di una variabile, ed in particolare una costante.

Affinchè i casi particolari di tali equazioni siano tutti *differenti* fra loro e da quelli della (II), supporremo che in ciascuna di codeste equazioni sia

$$a_0 \neq 0 \tag{23}$$

e che, nelle (VI)(VII)(VIII), $\varphi(y)$ non sia costante. Inoltre nella (III), affinchè non manchi nemmeno y, supporremo che non sia

$$b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = c_2 = 0$$

e, se φ è costante, che non sia

$$b_0 = c_0 = c_1 = 0.$$

Si noti che, se φ è costante, la (III) coincide con la (I), a cominciare dal caso IV, la (23) equivalendo alla (6). Inoltre, se φ è costante, nel qual caso (data l'arbitrarietà di a_0) possiamo supporla eguale ad « 1 », la (IV) è risolta da ciascuna radice comune (se ve ne sono) alle equazioni

$$a_0 x^2 + 2b_0 x + c_0 = 0 \qquad a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1 = 0, \tag{24}$$

assieme ad un valore arbitrario di y; ovvero da ciascun valore di x che non risolve la prima della (24), assieme al corrispondente valore di y fornito dalla formula

$$y = -\frac{a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1}{a_0 x^2 + 2b_0 x + c_0},$$

del cui studio ci siamo occupati nel paragrafo precedente.

In ciascuna delle sei equazioni considerate, C coincide col campo di φ; quindi, per poter applicare a ciascuna di esse la ***Regola generale***, ci rimane soltanto a determinare il gruppo V_0.

Ricordando che V_0 è l'insieme delle radici *comuni* alle (14)(15) che *non* sono radici della (16), si conclude che: nella (IV), a V_0 spetta *soltanto*

$$y_0 = -\frac{a_1}{a_0}, \tag{25}$$

purchè

(25′) $b_0 y_0 + b_1 = 0$, (25″) $\varphi(y_0) \neq 0$, (25‴) $c_0 y_0 + c_1 \neq 0$;

nella (V), a V_0 spetta *soltanto*

(26) $$y_1 = -\frac{b_1}{b_0},$$

purchè

(26′) $a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 + a_2 = 0$, (26″) $\varphi(y_1) \neq 0$, (26‴) $c_0 \neq 0$.

Inoltre, *ciascuna* radice reale y_2 dell'equazione (21)

$$\varphi(y) = 0$$

(se ve ne sono) spetta a V_0:
nella (VI), purchè risulti

(27′) $$c_0 y_2^2 + c_1 y_2 + c_2 \neq 0;$$

nella (VII), purchè risulti

(27″) $$c_0 y_2 + c_1 \neq 0;$$

nella (VIII), purchè sia

(27‴) $$c_0 \neq 0.$$

Al qual proposito giova osservare che, se « $c_0 = 0$ », la (VIII) si scinde nelle equazioni

$$x\varphi(y) = 0, \qquad (a_0 y^2 + 2a_1 y + a_2) x \varphi(y) + 2(b_0 y_1 + b_1) = 0;$$

delle quali: la prima è risolta da « $x = 0$ » assieme ad un valore *arbitrario* di y spettante a C, nonchè da ciascun Y_0, cioè da ciascuna *radice* (reale) della (21) assieme ad un valore *arbitrario* di x; la seconda invece è un caso particolare della (II). Dopo ciò, ci occuperemo della (VIII) solo in quanto sia verificata la (27‴).

Ma il gruppo V_0 va *completato*, aggregandogli:
nella (VII), il numero y_0, purchè verifichi le (25′)(25″)(25‴);
nella (VIII), il numero y_1, purchè verifichi le (26′)(26″)(26‴).

Quando non esista alcun numero che soddisfi alle condizioni precisate, il gruppo V_0 è *nullo*; tale esso è *sempre* nella (III), a cagione della (23).

Terminiamo con alcune osservazioni circa il gruppo Y_0 delle radici (reali) della (21).

Ciascuna delle equazioni (III)(IV)(V) è risolta da ogni Y_0 assieme ad « $x = 0$ », e perciò Y_0 è *contenuto* in L; quindi, se Y_0 è un gruppo *privo di minimo e di massimo*, tale è senz' altro anche L. In tal caso può essere utile determinare L_1, al qual fine provvede il *Corollario*.

Affinchè un Y_0 risolva la (VI) o la (VII) occorre che sia rispettivamente radice dell' equazione

$$c_0 y^2 + 2c_1 y + c_2 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad c_0 y + c_1 = 0,$$

nel qual caso si può associarlo ad un valore *arbitrario* di x. Ma ciascuna di codeste radici spetta anche ad Y_1, perchè, indipendentemente dal valore assunto da $\varphi(y)$, essa risolve la (VI) o la (VII) assieme ad « $x = 0$ »; sicchè L è *contenuto* in Y_1.

Nessun Y_0 risolve la (VIII), se in essa è verificata la (27'''), come abbiamo dichiarato ormai di supporre; sicchè ancora L è *contenuto* in Y_1.

Da ciò la

Regola speciale per le (VI)(VII)(VIII). Per determinare L, basta *escludere* da Y_1 ogni numero appartenente a V_0 o non appartenente a C.

Esempi numerici. *Es. 1.* L' equazione

$$2x \log (y - 5) + (y^7 - 3y^2 + 1) = 0 \tag{28}$$

è un caso particolare della (II), che non è caso particolare della (I).

Il campo di « $y^7 - 3y^2 + 1$ » è la totalità dei numeri; quindi C coincide col campo di « $\log (y - 5)$ », il quale è l' insieme dei numeri *maggiori* di 5; la sola radice dell' equazione

$$\log (y - 5) = 0$$

è 6, che non verifica l' equazione

$$y^7 - 3y^2 + 1 = 0$$

e perciò 6 è il solo numero spettante a V_0.

Dunque nella (28), L è l' insieme dei numeri *maggiori* di 5 e *diversi* da 6; sicchè 5 è il *limite inferiore* di L (che non ha massimo, nè limite superiore), mentre 6 è il *limite separatore* di due gruppi parziali di L.

Esempio 2. L'equazione

$$x^2 + 2(2y-3)x\cos(\pi y) + (7y^2 + 2y + 17)\cos^2(\pi y) = 0 \tag{29}$$

è un caso particolare della (III), che non è caso particolare della (I).

Dalla goniometria, l'equazione

$$\cos(\pi y) = 0$$

equivale ad $$y = n + \frac{1}{2}$$

dove n è un intero arbitrario; poichè questa formula rappresenta Y_0, per quanto precede L è *privo* di *minimo* e di *massimo*.

Volendo determinare L_1 (vedi *Corollario*), osserviamo che, per la (19),

$$F(y) = [(2y-3)^2 - (7y^2 + 2y + 17)]\cos^2(\pi y) =$$
$$= (-3y^2 - 14y - 8)\cos^2(\pi y);$$

sicchè, per la (19′),

$$p = -3, \qquad q = -7, \qquad r = -8,$$

da cui, per la (22), $d = 25$.

Ci si trova così nel caso 4) e perciò Y_1 è l'intervallo da

$$y_1 = -4 \quad \text{ad} \quad y_2 = -\frac{2}{3},$$

i cui estremi (spettanti ad Y_1) corrispondono, per la (20), ad

$$x_1 = 11\cos(-4\pi) = 11 \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{13}{3}\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{13}{6}.$$

Nella (29), C è il campo di « $\cos \pi y$ », cioè la *totalità* dei numeri, e V_0 è *nullo*, come sempre nella (III); quindi

$$L_1 = Y_1$$

e perciò: $\min L_1 = -4$ e $\max L_1 = -\frac{2}{3}$.

Esempio 3. L'equazione

$$(30) \qquad (3y-5)x^2-2(3y-5)x+(9y-10)=0$$

è un caso particolare della (IV), con « $\varphi(y)=1$ » (qualunque sia y); perciò Y_0 è un gruppo *nullo*, e quindi

$$(30') \qquad « Y=Y_1 » \quad \text{ed} \quad « L=L_1 ».$$

Per la (19),

$$F(y)=(3y-5)^2-(3y-5)(9y-10)=-(6y-5)(3y-5)$$

e perciò siamo ancora nel caso 4); quindi Y_1 è l'intervallo da $\frac{5}{6}$ a $\frac{5}{3}$.

Nella (30), il campo C è la totalità dei numeri, ed a Y_0 spetta il numero

$$y_0=\frac{5}{3}$$

dato dalla (25) e che verifica le (25')(25'''), la (25'') essendo vera qualunque sia y.

Quindi L_1 è l'insieme dei numeri *non minori* di $\frac{5}{6}$ e *minori* di $\frac{5}{3}$; da ciò e dalla (30'):

$$\min L=\frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \limsup L=\frac{5}{3},$$

il minimo corrispondendo al valore « 1 » di x.

Esempio 4. L'equazione

$$(31) \qquad (y-4)x^2-2(y-5)x \arcsin y+(y-6)\arc^2 \sin y=0$$

è un altro caso particolare della (IV), in cui però φ non è costante.

Dalla goniometria, l'equazione

$$\arcsin y=0$$

equivale ad
$$y=n\pi$$

dove n è un intero arbitrario; come nell'*Es. 2*, concludiamo che L è *privo* di *minimo* e di *massimo*, e procediamo a determinare L_1.

Per la (19),

$$F(y) = [(y-5)^2 - (y-4)(y-6)] \operatorname{arc}^2 \sin y = \operatorname{arc}^2 \sin y$$

sicchè, per la (19'),

$$p = q = 0 \quad \text{con} \quad r = 1,$$

e ci si trova nel caso 6); quindi Y_1 è la *totalità* dei numeri.

Nella (31) il gruppo V_0 è *nullo*, perchè « $y_0 = 4$ » non verifica la (25); e perciò, in questo caso,

$$L_1 = C$$

dove C è il campo di « arc sin », che è l'intervallo da « -1 » ad 1. Dunque:

$$\min L_1 = -1 \qquad \text{e} \qquad \max L_1 = 1;$$

per « $y \neq 4$ », la (31) dà

$$x = \frac{y - 5 \pm 1}{y - 4} \operatorname{arc} \sin y,$$

da cui le coppie di valori di x corrispondenti al minimo ed al massimo di L_1:

$$\frac{(6 \mp 1)(4n-1)}{10}\pi \quad \text{e} \quad \frac{(4 \mp 1)(4n+1)}{6}\pi$$

dove n è un numero intero arbitrario.

Esempio 5. L'equazione

$$(y^2 - 20y + 91)x^2 + 2(y-7)x - 5 = 0 \tag{32}$$

è un caso particolare della (V), in cui Y_0 è un gruppo *nullo* (come nell' *Es. 3*).

Per la (19),

$$F(y) = (y-7)^2 + 5(y^2 - 20y + 91) = 6(y-7)(y-12)$$

e quindi ci si trova nel caso 5); sicchè Y_1 è l'insieme di tutti i numeri tranne quelli fra 7 e 12.

Nella (32), il campo C è la totalità dei numeri, ed a V_0 spetta il numero

$$y_1 = 7$$

dato dalla (26) e che verifica la (26′), le (26″)(26‴) essendo vere qualunque sia y.

Quindi L è l'insieme dei numeri *minori* di 7 o *non minori* di 12, e perciò si scinde in due gruppi disgiunti uno dei quali ha per *limite superiore* 7, mentre l'altro ha per *minimo* 12; ma, complessivamente L non ha *nè minimo, nè massimo, nè limiti* (inferiore o superiore).

Esempio 6. L'equazione

$$7e^{2y}x^2 - 2(6y+5)e^y x + 5y(y+2) = 0 \tag{33}$$

è un caso particolare della (VI), cui perciò si applica la *Regola speciale.*

Per la (19),

$$F(y) = [(6y+5)^2 - 7 \cdot 5y(y+2)]e^{2y} = (y-5)^2 e^{2y}$$

dove, per le (19′)(22),

$$p = 1 \quad \text{e} \quad d = 0;$$

ci si trova così nel caso 6) e perciò Y_1 è la *totalità* dei numeri.

Nella (33), il campo C coincide con quello di e^y, e quindi è la *totalità* dei numeri; inoltre, l'equazione

$$e^y = 0$$

non ammette alcuna soluzione (finita), e perciò V_0 è un gruppo *nullo*. Si conclude che

$$L = Y_1,$$

cioè che *ogni* numero appartiene ad L.

Esempio 7. L'equazione

$$x^2(y-4)\log^2(3-y) - 2x(y-1)\log(3-y) + (y-7) = 0 \tag{34}$$

è un caso particolare della (VII), cui perciò si applica la *Regola speciale.*

Per la (19),

$$F(y) = [(y-1)^2 - (y-4)(y-7)]\log^2(3-y) = 9(y-3)\log^2(3-y)$$

dove, per la (19′),

$$p = 0, \qquad 2q = 9, \qquad r = -27;$$

perciò siamo nel caso 3) ed Y_1 è l'insieme dei numeri *non minori* di 3.

Nella (34), C coincide col campo di « $\log(3-y)$ », che è l'insieme dei numeri *minori* di 3. Quindi, senza nemmeno occuparci di V_0, si conclude che L è un gruppo *nullo*.

Esempio 8. L'equazione

$$(35) \qquad (y^2-6y+10)x^2 \operatorname{tg}^2(\pi y) - 2(5y-3)x \operatorname{tg}(\pi y) - 7 = 0$$

è un caso particolare della (VIII), cui perciò si applica la *Regola speciale*.

Per la (19),

$$F(y) = [(5y-3)^2 + 7(y^2-6y+10)] \operatorname{tg}^2(\pi y) = \\ = (32y^2 - 72y + 79) \operatorname{tg}(\pi y)$$

dove, per le (19')(22),

$$p = 32 \quad \text{e} \quad d = 36^2 - 32 \cdot 79 = -1232;$$

perciò siamo nel caso 6) ed Y_1 è la *totalità* dei numeri.

Nella (35), C coincide col campo di « $\operatorname{tg}(\pi y)$ », che è la *totalità* dei numeri. Poichè « $c_0 = -7$ » verifica la (27'''), al gruppo V_0 spetta ogni radice reale dell'equazione, corrispondente alla (27),

$$\operatorname{tg}(\pi y) = 0$$

cioè ogni numero *intero*; nè si deve aggregargli il numero « $y_1 = \frac{3}{5}$ » fornito dalla (26), perchè esso non verifica la (26').

Quindi L è la totalità dei numeri *non interi*, e perciò non ha *nè minimo, nè massimo, nè limiti* (inferiore o superiore); L però si scinde in infiniti gruppi parziali, fra loro disgiunti, dei quali i numeri interi sono i *limiti separatori*.

Nota 1. Il metodo esposto è sufficiente a risolvere la questione di cui ci occupiamo in ogni caso particolare delle equazioni (III)-(VIII)?

Per determinare L mediante la *Regola generale*, occorre conoscere Y, C e V_0. Ora, quanto ad Y, sappiamo sempre ricondurlo ad uno dei casi 1)-6); quanto a C, esso coincide col campo di φ, la cui determinazione nei casi comuni non presenta difficoltà; e, quanto a V_0, esso è *nullo* per la (III), mentre per le (IV)(V) esso o è *nullo* o è formato di *un sol* numero, determinato rispettivamente dalla (25) e dalla (26), la cui effettiva appartenenza o no a V_0 è subordinata rispettivamente alle condizioni (25')(25'')(25''') o (26')(26'')(26'''), le quali sono di verifica immediata.

Invece la determinazione di V_0 per le (VI)(VII)(VIII) esige la conoscenza delle radici (reali) dell'equazione (21)

$$\varphi(y) = 0$$

(la cui risoluzione può essere difficile od anche impossibile coi metodi algebrici elementari) od almeno (ricorrendo alla *Regola speciale*) di quelle spettanti ad Y_1, cioè che verificano la condizione (21')

$$py^2 + 2qy + r \geqq 0$$

(la ricerca delle quali può essere tuttavia non agevole).

È quindi opportuno rilevare che la questione di cui ci occupiamo può essere risolta indipendentemente dalla risoluzione della (21), purchè si sappia che le radici (reali) di tale equazione formano un gruppo (sia pure infinito) di numeri *isolati*.

Infatti, determinato il gruppo Y_1, se ne escludano anzitutto i numeri non appartenenti a C.

Se il gruppo così ottenuto *non ammette massimo* }minimo} ovvero *ammette o non ammette limite superiore* }inferiore{, lo stesso potrà dirsi di L senza preoccuparsi di V_0.

Soltanto nel caso in cui il gruppo accennato abbia per *massimo* }minimo{ un numero y_2, si dovrà esaminare se y_2 appartenga o no a V_0; il che richiede soltanto di *accertare* se o meno « $\varphi(y_2) = 0$ » — e, nel caso affermativo, se, corrispondentemente alla (VI)(VII)(VIII), sono verificate o no le (27')(27'')(27''') — e se, mettendo y_2 al posto di y_0 o di y_1 secondochè si tratta della (VII) o della (VIII), risultano verificate o no le (25)(25')(25'')(25''') ovvero le (26)(26')(26'')(26''');

più generalmente — cioè riferendoci, non soltanto alle (III)-(VIII), ma ad ogni equazione che verifichi la condizione (19') e quindi cui sia applicabile la *Regola generale*, e riferendo y_2 ad Y anzichè ad Y_1 — basterà *accertare* se o meno y_2 verifica le (14)(15) e *non* la (16);

qualora y_2 non appartenga a V_0, sarà y_2 il *massimo*

$\}$minimo$\{$ degli L; altrimenti y_2 ne sarà il *limite superiore* $\}$inferiore$\{$.

Ecco un' applicazione di tale procedimento.

Esempio 9. L'equazione

$$(36)\quad (3y^3-8y^2+17y-11)x^2+2(3y^2-5y+7)x+(3y-2)=0$$

non è di alcuno dei tipi (I)-(VIII), ma è del tipo (13); in essa f_1 non è costante e, per la (19),

$$F(y)=(3y^2-5y+7)^2-(3y^3-8y^2+17y-11)(3y-2)=-3y+27,$$

cioè è soddisfatta la (19') con

$$p=0 \quad \text{e} \quad 2q=-3.$$

Ci si trova così nel caso 3) e quindi Y_1 ha per *massimo* 9; anzi, poichè nella (36) « $\varphi(y)=1$ » (qualunque sia y), Y_0 è un gruppo nullo e quindi « $Y=Y_1$ », sicchè 9 è il *massimo* degli Y.

Nella (36), C è la *totalità* dei numeri; inoltre 9 non è radice dell' equazione

$$3y^3-8y^2+17y-11=0$$

e perciò non appartiene a V_0; sicchè 9 è il *massimo* di L.

NOTA 2. Naturalmente, in tal modo, cioè rinunciando a determinare V_0, si rinuncia a determinare L (e persino L_1) e quindi a conoscere se ed in qual modo esso si scinda in gruppi parziali, fra loro disgiunti, e perciò quali siano eventualmente i suoi minimi o massimi *parziali*, nonchè i suoi limiti *parziali* o *separatori*.

Si osservi tuttavia che, per la effettiva *determinazione* di V_0, e quindi di L, non occorre saper risolvere *ciascuna* delle equazioni (14)(15)(16); basta ad es. saper risolvere *una* delle equazioni (14)(15) e sperimentare quali fra le sue radici verifichino *l'altra*, ma *non* la (16).

Anzi, se f_1 ed f_2 sono *polinomî*, basta determinare il loro massimo comun divisore f_4 e cercare quali radici dell'equazione

$$(37)\quad f_4(y)=0$$

non risolvano la (16). Se non si sapesse risolvere nemmeno la (37), ma anche f_3 fosse un polinomio, basterebbe determinare il massimo f_5 tra i divisori di f_4 che sono *primi* con f_3; perchè V_0 è appunto l'insieme delle radici dell'equazione

$$(38) \qquad f_5(y) = 0.$$

Con tali accorgimenti, si superano difficoltà ben più gravi di quelle che ordinariamente si presentino nelle questioni spettanti alle matematiche elementari.

In taluni casi, essi possono agevolare anche l'accertamento se un'equazione proposta del tipo (13), ma non di alcuno dei tipi (I)-(VIII), verifichi o no la (19′); e quindi se ad essa sia applicabile o no il metodo esposto.

Esempio 10. L'equazione

$$(39) \quad (y^4 - 4y^3 - 26y^2 + 60y + 225)x^2 - 2(y^5 - 2y^4 - 7y^3 + \\ + 11y^2 - 44y - 105)x + y^2(y^4 - 4y^2 + 14y + 1) = 0$$

è del tipo (13); ma, eseguendo coi dati della (39) le operazioni indicate nella (19) e riducendo i termini simili, si ottiene

$$F(y) = 3y^6 - 40y^5 + 83y^4 + 712y^3 - 2279y^2 + 3360y + 11025,$$

dal che non è facile arguire se o meno sia verificata la (19′).

Invece, applicando alla (39) il procedimento dianzi indicato, si trova

$$f_4(y) = y^2 - 2y - 15$$

e, dividendo poi separatamente f_1 ed f_2 per f_4, i quoti risultano

$$y^2 - 2y - 15 \qquad\qquad y^3 - 2y + 7,$$

sicchè la (39) equivale a

$$(39') \quad x^2 f_4^2(y) - 2(y^3 - 2y + 7)x f_4(y) + y^2(y^4 - 4y^3 + 14y + 1) = 0.$$

Applicando ora la (19) alla (39′), si ottiene

$$F(y) = [(y^3 - 2y + 7)^2 - y^2(y^4 - 4y^2 + 14y + 1)]f_4^2(y) = \\ = (3y^2 - 28y + 49) f_4^2(y)$$

e così è manifesto che la (19′) è *verificata*, con

$$p = 3, \qquad q = -14, \qquad r = 49, \qquad \varphi = f_4.$$

Ci si trova così nel caso 5) e perciò ad Y_1 spetta ogni numero non compreso fra le radici dell'equazione

$$3y^2 - 28y + 49 = 0,$$

cioè *non compreso* fra $\frac{7}{3}$ e 7.

D'altra parte le radici della (21), cioè (nel caso nostro) di

$$y^2 - 2y - 15 = 0,$$

sono « -3 » e 5, ciascuno dei quali numeri spetta a Y_0, perchè ciascuno annulla f_1 ed f_2 ma non f_3; perciò « $L = L_1$ ».

Sostituendo separatamente « -3 » e 5 ad y in « $py^2 + 2qy + r$ », cioè (nel caso nostro) in

$$3y^2 - 28y + 49,$$

si ottiene rispettivamente 52 e « -16 »; sicchè « -3 » verificando le (21)(21'), è comune ad Y_0 ed Y_1, mentre 5, verificando la (21) ma non la (21'), spetta soltanto ad Y_0.

Poichè nella (39) il campo C è la *totalità* dei numeri, si ottiene L_1 (cioè, in questo caso, L) *escludendo* « -3 » da Y_1 (vedi *Corollario*).

In conclusione, L è *privo* di *minimo* e di *massimo*, nonchè di *limite inferiore* o *superiore*; ma abbiamo appreso inoltre che esso si compone di *tre gruppi parziali*, fra loro *disgiunti*, e cioè dei numeri:

minori di « -3 » (il qual gruppo, privo di minimo o di limite inferiore, ha per *limite superiore* « -3 »),

maggiori di « -3 » e *non maggiori* di $\frac{7}{3}$ (del qual gruppo « -3 » è il *limite inferiore* e $\frac{7}{3}$ è il *massimo*),

non minori di 7 (il qual gruppo, privo di massimo e di limite superiore, ha per *minimo* 7);

sicchè, rispetto alla (39), « -3 » è un *limite separatore* di L, $\frac{7}{3}$ ne è un *massimo parziale* e 7 ne è un *minimo parziale*.
