

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXV - Serie IV – volume II (2)
dicembre 2020**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

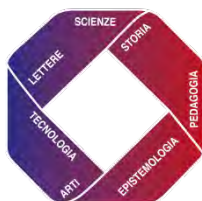
PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Fondato da Davide Besso,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXV - Serie IV - Volume II (2)
Dicembre 2020**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Alberto Trotta (Salerno)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Via Defense, 2
64026 Roseto degli Abruzzi (PE)

Copyright © 2019 Edizioni AFSU -
Teramo - ISSN Online: 2612-6745
® Registrazione n.695/2019 del 19
luglio 2019 Tribunale di Teramo

Tutti i diritti riservati

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Segreteria di redazione:

Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
catalani.giovanni@libero.it
Alberto Trotta (Salerno)
albertotrotta@virgilio.it

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, al prof. Giovanni Catalani giovannicatalani@gmail.com.

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro, Giovanni Catalani, Silvana D'Andrea, Aladino De Paulis, Gianni Di Paolo, Diana Le Quesne, Franco Eugeni, Antonio Maturo, Luca Nicotra, Marisa Quartiglia, Renata Santarossa, Ezio Sciarra, Alberto Trotta.

AMICI AFSU

Ivano Casolaro, Gianluca Eugeni, Andrea Manente, Enrico Massetti, Giovanni Grelli, Francesco Pezzoli, Federico Verrigni, Alessandro Vicerè, Orfeo Zaffiri.

INDICE

Articoli

Franco Eugeni	7
<i>Il mondo delle 4 dimensioni, negli spazi affini, ampliati ed euclidei</i>	
Ferdinando Casolaro	41
<i>Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva</i>	
Francesco Marletta	75
<i>Dante geometra</i>	
Antonio Della Rocca, Alberto Trotta	89
<i>Casi particolari del teorema di Fermat</i>	
Franco Francia	109
<i>Insiemi completi del quarto ordine</i>	
Franco Eugeni, Alberto Trotta	157
<i>Le congetture sulla forma dell'universo</i>	
Antonio Maturo, Pierpaolo Palka	171
<i>Funzioni $\mathfrak{J}$-monotone e loro applicazioni alla didattica dell'Analisi Matematica</i>	
Giordano Bruno, Franco Eugeni, Alberto Trotta	183
<i>Eliano Pessa. Ricordo di un caro amico: omaggio a tre voci</i>	
Franco Eugeni	193
<i>Vincenzo Di Marcello</i>	

F. Casolaro, M.Talamo, R.Santarossa, A.Fontana, I.Casolaro 199
Gaetano Briganti

Vincenzo Iorfida 207
A proposito di una lettera di Renata Santarossa

Recensioni

Luca Nicotra 211
Helgoland di Carlo Rovelli

Franco Eugeni 221
Il bocciato di Ferdinando Casolaro

Profili biografici degli autori 227

Norme per gli autori 233

Il mondo delle 4 dimensioni, negli spazi affini, ampliati ed euclidei

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di discipline matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle scienze Umane;
eugenif3@gmail.com

Sunto: Si sviluppa come capitolo indipendente il mondo delle 4 dimensioni richiamando in tal caso le nozioni di spazi affini, spazi ampliati ed euclidei reali di dimensione 4. Si presentano le condizioni di parallelismo ed ortogonalità, corredando il tutto con esercizi significativi.

Parole Chiave: Struttura affine, Elementi impropri, Prodotto scalare, Distanza, Ortogonalità.

Abstract: The world of 4 dimensions develops as an independent chapter, recalling in this case the notions of affine spaces, enlarged spaces and real Euclidean spaces of dimension 4. The conditions of parallelism and orthogonality are presented, accompanying everything with significant exercises.

Keywords: Affine structure, improper elements, scalar product, distance, orthogonality.

1 - La geometria affine di $\mathbb{R}^4$

Il sostegno dello spazio numerico 4-dimensionale reale, denotato con $\mathbb{R}^4$, è costituito dalle quaterne ordinate di numeri reali del tipo:

$$X = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad Y = (y^1, y^2, y^3, y^4)$$

dove le quantità in parentesi si chiamano “*coordinate del punto*” e per le quali poniamo, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$X + Y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

$$\lambda X = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n)$$

così che, sia definita la struttura vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^4$.

Fissata una base $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, il legame tra *punti* e *vettori* nasce definendo il generico vettore, con estremi X ed Y , nella forma:

$$\mathbf{u} = (x^i - y^i) e_i = u^i e_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove l'indice in alto e l'indice in basso sottintendono la sommatoria per $i = 1, 2, 3, 4$; le quantità (u^i) prendono il nome di componenti controvarianti del vettore $\mathbf{u}$.

In modo formale si scrive:

$$\mathbf{u} = Y - X.$$

Da notare che fissato $\mathbf{u} = u^i e_i$, resta fissata la corrispondenza di $\mathbb{R}^4$ in se :

$$Y = X + \mathbf{u}$$

che prende il nome di “*traslazione di vettore $\mathbf{u}$* ”.

Lo spazio vettoriale numerico, si chiama *spazio affine* se sono soddisfatte le due condizioni a) e b) seguenti.

a) È data una struttura di sottospazi, in R^n .

Un sottospazio S_d di dimensione $d < 4$ è l'insieme dei punti di R^4 le cui coordinate sono soluzioni di un sistema lineare di $4-d$ equazioni indipendenti nelle n incognite (x^1, x^2, x^3, x^4) del tipo :

$$AX^t = K^t$$

dove $A = |_{ij}$ è una matrice $(4-d) \times 4$, di caratteristica massima e X^t , K^t sono i vettori-colonna trasposti delle righe delle coordinate dei punti:

$$X = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad K = (k^1, k^2, k^3, k^4)$$

Se $d=3$ si ha un sottospazio S_3 , costituito da una sola equazione, che si chiama *iperpiano* di R^4 .

Se $d=2$, si ha una matrice 2×4 che dà luogo ad un sistema di 2 equazioni indipendenti che definiscono un S_2 , ovvero un *piano*.

Se $d=1$ si ha una matrice 3×4 che dà luogo ad un sistema di 3 equazioni indipendenti che definiscono un S_1 , ovvero una *retta*.

b) Sullo spazio opera il gruppo delle affinità.

ia $A = | a_{ij} |$, $i,j=1,2,3,4$, con $\det | a_{ij} | \neq 0$. Si chiama affinità una corrispondenza del tipo:

$$Y^t = AX^t + K^t, \text{ ovvero } Y = XA^t + K$$

dove la matrice A e il vettore riga K sono assegnati. È facile provare che tali affinità formano un gruppo, rispetto alla composizione di corrispondenze¹, detto il gruppo affine.

Chiameremo infine *geometria affine* l'insieme delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al gruppo affine.

2 - Le equazioni dei sottospazi e le condizioni di parallelismo

La struttura affine di R^4 , è stata definita assegnando i seguenti sottospazi, chiamati rispettivamente iperpiani o S_3 , piani e rette.

1 - Un *iperpiano*, ovvero un S_3 , ovvero un sottospazio 3-dimensionale, è il luogo di punti di R^4 soddisfacente ad una equazione del tipo:

$$(H) \quad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 .$$

Ne segue che, assegnato un secondo iperpiano:

$$(H) \quad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 .$$

la ovvia condizione di parallelismo è data da:

¹ Siano Y, X, Z, K, H , coordinate di punti A, B matrici 4×4 , sia inoltre I la matrice identica. Consideriamo due assegnate affinità $Y = XAt + H$ e $X = ZBt + K$, la composizione delle due è data dalla affinità seguente: $Y = Z(AB)t + (KAt + H)$. Inoltre l'affinità $X = ZI$, dove I è la matrice identica è l'elemento neutro del gruppo, mentre l'inversa della prima è $X = Y(A-1)t - H(A-1)t$.

$$(H) // (K) \Leftrightarrow a_i = \rho b_i, i = 1, 2, 3, 4, \text{ dove}$$

2 - Un *piano* (α) , ovvero un S_2 , ovvero un sottospazio 2-dimensionale, ovvero l'intersezione di due iperpiani (H) e (K) , non paralleli, è il luogo di punti di R^4 soddisfacente ad un sistema di equazioni indipendenti, del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \end{cases}$$

oppure, in modo del tutto equivalente, dalle equazioni parametriche (con u, v parametri):

$$x^i = m^i u + n^i v + q^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

La condizione di $//$ o appartenenza tra un piano (α) e un ulteriore iperpiano (H) di equazione:

$$(H) \quad c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3$$

si traduce nelle due condizioni:

$$(a) \quad (H) // (\alpha) \Leftrightarrow c_i m^i = c_i n^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove è sottointesa la somma rispetto ad i .

Consideriamo ora due piani (α) e (β) di rispettive equazioni:

$$\begin{aligned} (\alpha) & \begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \end{cases} \\ (\beta) & \begin{cases} c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3 \\ d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 = k_4 \end{cases} \end{aligned}$$

formanti nel complesso un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, la cui matrice dei coefficienti delle incognite 4×4 denotiamo ancora con A . La evidente condizione di $//$ o coincidenza è data da:

$$(c) \quad (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \det A = 0$$

Si noti che le intersezioni di due piani, sono ricondotte ad un sistema 4×4 . Ne segue che due piani non paralleli, hanno un solo punto in comune se $\det A \neq 0$, si incontrano in una retta se solo tre delle quattro equazioni sono indipendenti, coincidono altrimenti.

3.- Una *retta* (r) , ovvero un S_1 , ovvero un sottospazio 1-dimensionale, ovvero l'intersezione di tre iperpiani (H), (K) ed (L), a due a due non paralleli, è il luogo dei punti di R^4 soddisfacente ad un sistema di tre equazioni lineari indipendenti, del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k_1 \\ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = k_2 \\ c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = k_3 \end{cases}$$

o in modo del tutto equivalente, dalle equazioni parametriche (con t parametro):

$$(r) \quad x^i = m^i t + q^i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si noti che, un iperpiano ed un piano, si rappresentano, complessivamente, con un sistema di 3 equazioni in 4 incognite, avente la matrice, incompleta, A di tipo 3×4 dei coefficienti delle incognite e la matrice C di tipo 3×5 , completa. Dall'esame del sistema, e delle rispettive caratteristiche $k(A)$ e $k(C)$ delle due matrici, si ha che: possono *incontrarsi in una retta*² se $k(A) = 3$, *essere paralleli* se $k(A) = 2$, $k(C)=3$, e ancora può accadere che (α) *appartiene all'iperpiano* (H) sse $k(A) = k(C) = 2$.

Dati un iperpiano (H) ed una retta (r) rappresentati da:

$$(H) \quad a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = k$$

$$(r) \quad x^i = m^i t + q^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

la ovvia condizione di parallelismo-appartenenza, è :

$$(d) \quad (H) // (r) \Leftrightarrow a_i m^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

diversamente si incontrano in un punto.

Consideriamo ora un piano (α) ed una retta (r) rappresentati con un sistema di due equazioni, ed (r) in forma parametrica (t parametro):

$$(r) \quad x^i = m^i t + q^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Il parallelismo si traduce nella coppia di relazioni:

$$(e) \quad (\alpha) // (r) \Leftrightarrow a_i m^i = b_i m^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

dove e sottointesa la somma rispetto ad i.

Si noti che sostituendo le equazioni parametriche della retta nelle due equazioni del piano, si ottengono due equazioni nel parametro t, che possono essere incompatibili e allora retta e piano sono sghembe, compatibili e allora essi hanno un punto

² Una retta è rappresentata da tre equazioni indipendenti, ovvero dalle equazioni parametriche.

comune, impossibili (almeno una) e allora sono // o coincidenti.

L'ultimo punto riguarda il // di due rette (r) ed (s) rappresentate rispettivamente in forma parametrica:

$$(r) \quad x^i = m^i t + q^i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(s) \quad x^i = n^i \tau + p^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Dalle quali si ottiene l'ovvia condizione di // o coincidenza data da:

$$(f) \quad (r) // (s) \Leftrightarrow m^i = \rho n^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si noti che due rette non parallele sono in generale sghembe, in quanto per essere incidenti in un punto occorre che il sistema di 4 equazioni in t e τ sia compatibile.

Riassunto, nel testo sono indicate le sei possibili condizioni di // dei sottospazi di R^4 date dalle formule denotate con (a)- due iperpiani, (b)-iperpiano-piano, (c)-due piani, (d)- iper-piano-retta, (e) piano-retta, (f)- due rette.

Completiamo il paragrafo sulle proprietà affini di appartenenza in R^4 notando che, ad esempio si ha:

a - in R^4 coppie di rette sghembe individuano un preciso iperpiano (S_3) che le contiene. (Conseguenza del fatto che 4 punti non complanari individuano un unico S_3).

B - In R^4 esistono coppie retta-piano sghembi.

È facile costruirne un esempio: fissiamo un S_3 e un piano α in esso contenuto. La retta che congiunge un punto di $S_3 - \alpha$ con un punto esterno ad S_3 è sghemba con α .

c - In R^4 esistono terne di rette, a due a due sghembe, non appartenenti al medesimo S_3 .

La costruzione è analoga, fissiamo due rette sghembe in un S_3 e congiungiamo un punto di S_3 (non sulle rette) con un punto esterno ad S_3 .

3 - Lo spazio affine ampliato A^4

Chiameremo sostegno di uno spazio affine ampliato A^4 l'insieme delle quintuple ordinate, di numeri reali non tutti nulli e definiti a meno di un fattore:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$$

denominati *punti* di A^4 (che come vedremo sono di due tipi: *propri* ed *impropri*). Il legame tra A^4 ed R^4 , nasce dall'identificazione dei punti di A^4 con $x^0 \neq 0$, chiamati *punti propri* di A^4 , con quelli di R^4 dati dalle relazioni: $x^i = x^i/x^0$.

I punti di A^4 con $x^0 = 0$, cioè del tipo $(0, r^1, r^2, r^3, r^4)$, che chiamiamo invece *punti impropri*, li definiamo come geometricamente rappresentativi della direzione della retta di R^4 , di equazioni parametriche:

$$x^i = r^i t \quad (t \text{ parametro}).$$

L'insieme di tutti i punti impropri, è caratterizzato dall'equazione $x^0 = 0$, che prende il nome di equazione dell'iperpiano improprio.

Si chiama retta propria di A^4 , una retta (r) di R^4 , a cui si è aggiunto un punto improprio, esattamente quello che della direzione della stessa (r) .

Piu in generale un sottospazio proprio S_d di A^4 è un qualsiasi sotto-spazio S_d ($d = 1,2,3,4$) di R^4 , definito rispettivamente da un sistema lineare di $h = 4-d$ equazioni indipendenti in 4 incognite, e quindi con $h=1$ (per un iperpiano), $h=2$ (per un piano), $h=3$ (per una retta), definito dal sistema:

$$a_{ih} x^i = k_h \quad (i = 1,2,3,4)$$

a cui si è aggiunto l'insieme dei punti impropri definiti dal sistema:

$$a_{ih} x^i = 0, \quad x^0 = 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$

che costituisce un sotto-spazio dell'iperpiano improprio.

In A^4 chiamiamo *iperquadrica* Q_4 il luogo dei punti di A^4 che soddisfano un'equazione di 2° grado del tipo:

$$a_{ij} x^i x^j = 0 \quad (i,j = 0, 1,2,3,4), \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Per diverse questioni, che tratteremo più avanti, è opportuno considerare l'iperquadrica Q_4 di R^4 di equazione³:

$$g_{ij} x^i x^j = 1 \quad (i,j = 0, 1,2,3,4)$$

che determina sul piano improprio⁴ di A^4 , una Q_3 , di equazioni:

³ Le g_{ij} sono le componenti di una generica forma quadratica definita positiva, che, come vedremo al numero successivo, è atta a definire in R^4 un prodotto scalare.

$$x^0 = 0, \quad g_{ij} x^i x^j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad g_{ij} = g_{ji},$$

che risulta essere una quadrica priva di punti reali che prende il nome di *quadrica assoluto*, o *assoluto* dello spazio A^4 .

Alcune questioni metriche di R^4 che tratteremo più avanti, quali quelle di perpendicolarità, si possono interpretare in termini di polarità rispetto all'assoluto. Così la perpendicolarità di R^4 , dipende, come vedremo, dalle proprietà di *coniugio* di uno spazio di dimensione inferiore.

Ricordiamo che *assegnata* una iperquadrica Q_4 in A^4

$$f(X) = f(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = a_{ij} x^i x^j = 0$$

dove la somma è per $i, j = 0, 1, \dots, 4$. Dato un punto:

$$Y = (y^0, y^1, y^2, y^3, y^4)$$

si chiama iperpiano polare di Y , rispetto a Q_4 , l'iperpiano

$$f\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = f_0 y^0 + f_1 y^1 + \dots + f_4 y^4 = 0$$

con:

$$f_i = a_{0i} x^0 + a_{1i} x^1 + \dots + a_{4i} x^4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Si noti che f_i è l'equazione lineare formata con la i -ma riga della matrice (5×5) , data da: $A = |a_{ij}|$ con $i, j = 0, 1, \dots, 4$.

Si ha:

$$f\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}\right), \quad f\left(\begin{smallmatrix} X \\ X \end{smallmatrix}\right) = f(X)$$

La prima di queste equazioni esprime la cosiddetta legge di reciprocità della polarità asserente che: "Se un punto Y descrive

⁴ Tale iperpiano improprio è un effettivo spazio proiettivo P^3 di dimensioni 3, in quanto in esso non vi è una retta speciale distinta dalle altre che ne riveli una possibile struttura ampliata.

l'iperpiano polare del punto Z , allora gli iperpiani polari di Y passano per Z ".

Si noti che quando la matrice A coincide con la matrice G , le (f_i) sono esattamente le componenti covarianti di X .

4 - La struttura metrica di Spazio euclideo

Uno spazio affine 4-dimensionale si dice che è uno spazio euclideo, se è definito un prodotto scalare, ovvero una applicazione

$$S : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R},$$

denotato nella forma $S(u,v) := u \cdot v$, e definito $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^4$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, dalle seguenti proprietà:

$$1.- u \cdot v = v \cdot u \quad (\text{commutativa})$$

$$2.- \lambda (u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) \quad (\text{omogeneità})$$

$$3.- (u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (\text{distributiva}).$$

$$4.- u \cdot u \geq 0, \text{ valendo " = " sse } u = 0 \quad (\text{positività}^5)$$

Fissata una base $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 4$, i generici vettori $u, v \in \mathbb{R}^4$, assumono la forma:

$$u = u^i e_i, \quad v = v^i e_i$$

ed è immediato verificare che, il prodotto scalare è noto, allora che siano noti i valori dei prodotti scalari dei vettori della base, avendosi:

$$u \cdot v = u^i v^j e_i \cdot e_j$$

⁵ Indispensabile per definire una norma e poi la distanza.

Ponendo $e_i \cdot e_j := g_{ij}$, si noti che gli scalari g_{ij} , formano una matrice simmetrica G per la 1., che dà luogo ad una forma quadratica, che per l'assioma 4, è una forma quadratica definita positiva, il che implica, come ben noto, che la matrice $G = |g_{ij}|$ ha tutti i minori principali positivi.

Chiameremo *norma del vettore* $\mathbf{u}$, il numero reale $|\mathbf{u}| \geq 0$, definito ponendo:

$$|\mathbf{u}|^2 := \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{ij} u^i u^j$$

Per ogni vettore $\mathbf{u}$ accanto alle componenti (u^i) , dette *componenti controvarianti* possono essere definite le altre componenti, definite da:

$$u_i = g_{ij} u^j,$$

che prendono il nome di *componenti covarianti*⁶ del vettore $\mathbf{u}$. Il prodotto scalare si può scrivere nella forma:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_j v^j = u^i v_i.$$

Introduciamo la matrice $I = |\delta_{ij}|$, i cui elementi assumono il valore:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i=j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La matrice I è detta la *matrice identica*, e ha tutti 1 in diagonale e 0 altrove. Avendo la matrice I , tutti i minori principali positivi, essa definisce un particolare prodotto scalare che si chiama *prodotto scalare standard*. Nel caso in cui sia $G = I$, si ha che :

$$u_i = g_{ij} u^j = \delta_{ij} u^j = u^i$$

Ovvero coincidono le controvarianti con le covarianti e il prodotto scalare assume la forma standard:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

⁶ I nomi controvarianti e covarianti indicano un diverso comportamento di dette componenti allora che si effettui un cambiamento della base che implica delle relazioni tra le componenti rispetto alle diverse basi.

Chiameremo *distanza* di due punti $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $Y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, la quantità:

$$d(X, Y) = |Y - X|^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n [g_{ij}(y^i - x^i)]^2 \right]^{1/2}$$

La distanza nel caso *standard* assume la forma pitagorica:

$$d(X, Y) = |Y - X|^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n [(y^i - x^i)]^2 \right]^{1/2}$$

Tale distanza soddisfa, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$ alle tre condizioni:

- 1.- $d(X, Y) \geq 0$, valendo il segno "=" se e solo se $X=Y$;
- 2.- $d(X, Y) = d(Y, X)$
- 3.- $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ (diseguaglianza triangolare)

Delle quali le prime due sono ovvie, mentre omettiamo la prova della terza, che ciascuno può ricercare per suo conto.

Per completare la struttura di spazio euclideo occorre considerare tra tutte le trasformazioni affini quelle che conservano la distanza dette isometrie. Non è facile ricavarle in generale, ma possiamo definirle.

Sappiamo che quando la matrice delle g_{ij} è la matrice identica delle δ_{ij} , caso in cui la base si chiama ortonormale, le affinità che conservano le distanze sono quelle del tipo:

$$Y = X A + B$$

per le quali la matrice A è una *matrice ortogonale*. Tali trasformazioni formano un sottogruppo del gruppo affine, che è il gruppo isometrico.

In situazione più generale per matrici $n \times n$, diremo che una *matrice invertibile* ortogonale, se la sua trasposta coincide con la sua inversa, ovvero se:

$$G^{-1} = G^t$$

ovvero si dimostra che è equivalente asserire che una matrice ortogonale è una matrice che rappresenta una isometria dello spazio euclideo R^n , oppure è una matrice di cambiamento di base fra due basi ortonormali.

Si può ricavare che il numero di parametri indipendenti in una matrice ortogonale di tipo $n \times n$ è . Si può trovare che :

Una matrice quadrata è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale dello spazio euclideo R^n con l'ordinario prodotto scalare standard. In effetti questa proprietà è semplicemente la rilettura della relazione. Rileggendo la relazione, si ricava l'enunciato duale del precedente: una matrice quadrata reale è ortogonale se e solo se le sue righe formano una base ortonormale di R^n .

Da un punto di vista geometrico le matrici ortogonali descrivono le trasformazioni lineari di R^n che sono anche isometrie. Queste preservano il prodotto scalare e quindi gli angoli e le lunghezze. Ad esempio, le rotazioni e le riflessioni sono isometrie.

Viceversa, se è un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita sul campo reale, dotato di un prodotto scalare definito positivo, ed è un'applicazione lineare tale che $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, risulti: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle$. Allora è una isometria rappresentata in ogni base ortonormale di da una matrice ortogonale, allora è una isometria rappresentata in ogni base ortonormale di da una matrice ortogonale.

In uno spazio euclideo di dimensione 2 e 3, ogni matrice ortogonale esprime una rotazione intorno ad un punto o un asse, o una riflessione, o una composizione di queste due trasformazioni.

Dalla definizione segue subito che l'inversa di ogni matrice ortogonale, cioè la sua trasposta, è anch'essa ortogonale. Inoltre il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale, come segue dalla ovvia relazione:

$$(GH)^t = G^t H^t = G H^t G^t = G G^t = I$$

Questo dimostra che l'insieme delle matrici ortogonali forma un gruppo, detto il gruppo ortogonale di ordine n , e viene indicato con $O(n)$.

È facile provare che il determinante di una matrice ortogonale di dato ordine n , vale 1 o -1. Questo si può dimostrare dalla relazione seguente:

$$1 = \det I = \det (G G^t) = \det G \det (G^t) = [\det G]^2.$$

Una matrice ortogonale con determinante positivo si chiama *matrice ortogonale speciale*; l'insieme di tutte le matrici ortogonali speciali formano un sottogruppo di chiamato gruppo ortogonale speciale e denotato $SO(n)$.

Chiameremo infine *geometria euclidea* l'insieme delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al gruppo isometrico.

5 - La nozione di complemento ortogonale di un sottospazio di $\mathbf{R}^n$.

Tale nozione la presenteremo, in questo paragrafo, in situazione generale, cioè in uno spazio $\mathbf{R}^n$ nel quale sia definito un prodotto scalare.

In $\mathbf{R}^n$ data una matrice $\mathbf{G} = |g_{ij}|$ di tipo $n \times n$, definita positiva, resta fissato un prodotto scalare di due vettori, espresso rispetto ad una data base.

Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ si dicono ortogonali se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, in simboli:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Vogliamo generalizzare il concetto ad una "ortogonalità tra sottospazi" di $\mathbf{R}^n$. Sia dunque $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) un qualsiasi sottospazio di $\mathbf{R}^n$, definiamo l'insieme:

$$\mathbf{S}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}\}.$$

L'insieme $\mathbf{S}^\perp$ prende il nome di complemento ortogonale del sottospazio $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ con ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Si prova facilmente che:

PROP. 1.- Il complemento ortogonale $\mathbf{S}^\perp$ di un sottospazio $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ è a sua volta un sottospazio.

Dim. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}^\perp, \lambda \in \mathbf{R}$, allora $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}$ risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ da cui } \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ e quindi } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) &= 0 \text{ da cui } (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{x} = 0. \text{ Dunque } (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\lambda \mathbf{u}) \in \mathbf{S}^\perp. \\ \# \end{aligned}$$

PROP. 2.- Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), una base di $\mathbf{R}^n$ allora:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{S}^\perp \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

Dim. Sia $\mathbf{u} \in \mathbf{S}^\perp$ segue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}$, e quindi $\forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, \dots, n$).

Inversamente supponiamo che in un insieme X di vettori, contenenti la base $\{e_i\}$ sia: $u \cdot e_i = 0$. Allora $\forall x \in X$ si ha:

$$x = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n$$

e quindi:

$$u \cdot x = a^1 u \cdot e_1 + a^2 u \cdot e_2 + \dots + a^n u \cdot e_n = 0$$

ne segue che $X = S^\perp$. #

PROP. 3.- $I = S \cap S^\perp = \{0\}$

Dim. Sia $u \in I$, allora $u \cdot x = 0$, $\forall x \in S$, e ciò vale anche per $x=u$, allora

$$|u|^2 = 0, \text{ da cui } u = 0. \quad \#$$

PROP. 4.- $\dim S + \dim S^\perp = n$

Dim. Dalla ben nota legge di Grassmann⁷, esprime una condizione tra le dimensioni di due sottospazi S ed S' di un dato spazio vettoriale, e i relativi sottospazio unione ed intersezione, asserente che:

$$\dim S + \dim S' = \dim (S \cup S') + \dim (S \cap S')$$

segue:

$$\dim S + \dim S^\perp = \dim (S \cup S^\perp) + \dim (S \cap S^\perp)$$

allora è sufficiente provare che $(S \cup S^\perp) = \mathbb{R}^n$. Basta osservare che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\} \text{ esiste } y \in \mathbb{R}^n / \{0\} \text{ tale che } x \cdot y = 0. \quad \#$$

Ed evidentemente:

PROP. 5.- Se $S = S_k$ allora $\dim S^\perp = n - k$.

Dim. Conseguenza delle proposizioni precedenti. #

⁷ Si veda ad esempio per la dimostrazione: F.Eugeni-M.Gionfriddo, (1994). *Appunti del Corso di Algebra lineare*, CUSL ,Pescara p.289, reperibile in www.afsu.it/matematica/geometria.

N.B. Tali nozioni conducono ad asserire che:

nel caso $n=2$, il complemento ortogonale di una retta è una retta;

nel caso $n=3$, il complemento ortogonale di una retta è un piano e viceversa;

nel caso $n=4$, il complemento ortogonale di un iperpiano (S_3) è una retta e viceversa, il complemento ortogonale di un piano è un piano;

nel caso $n=5$, il complemento ortogonale di un iperpiano (S_4) è una retta e viceversa, il complemento ortogonale di un S_3 è un piano e viceversa.

6- La perpendicolarità tra i sottospazi di R^4

In R^4 , data una matrice $G = | g_{ij} |$ di tipo 4×4 , definita positiva, resta fissato un prodotto scalare di due vettori espresso rispetto ad una data base. Così se $\mathbf{u} (u_i)$, $\mathbf{v} (v_i)$ sono i due vettori, di assegnate componenti rispetto ad una base $\{e_i\}$ ($i = 1, \dots, 4$), risulta intanto:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Nel seguito troveremo i legami tra le componenti.

1.- Iniziamo con lo studiare la perpendicolarità di due rette (n) , (m) . Non è restrittivo supporre, nell'assegnarne le forme parametriche, che passino per l'origine.

$$(n) \quad x^i = n^i t \quad , \quad (m) \quad x^i = m^i \tau \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Consideriamo i vettori $\mathbf{L}(n^i)$ ed $\mathbf{M}(m^i)$, rispettivamente paralleli alle rette date, segue allora banalmente la condizione di perpendicolarità:

$$(a) \quad (n) \perp (m) \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = g_{ij} n^i m^i = n_i m^i = n^i m_i = 0$$

Nelle quali è sottointesa la somma rispetto ad i ed j . Naturalmente nella rappresentazione standard nella quale G è la matrice identica⁸ $I = ||\delta_{ij}||$, la condizione diviene:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + m_4 n_4 = 0.$$

Nota. I punti $L(n_i)$ ed $M(m_i)$ sono coniugati rispetto all'assoluto $\Leftrightarrow$ sono $\perp$. Il caso della matrice G generale. Per comprendere la difficoltà che nasce quando la matrice G , non è la matrice identica I , osserviamo che un vettore ortogonale al generico vettore $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3, x^4) //$, oppure appartenente all'iperpiano:

$$(H) \quad a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4 = b$$

si può desumere considerando il vettore costituito dai coefficienti dell'equazione dell'iperpiano, ovvero il vettore $\mathbf{H} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ per il quale si può scrivere:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} = g_{ij} a^i x^j = a_j x^j = 0$$

dove la quaterna delle $a_j = g_{ij} a^i$ ($j = 1, 2, 3, 4$) è la quaterna delle componenti covarianti del vettore $\mathbf{H}$, che a loro volta formano un vettore $\mathbf{H}^* = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, che chiamiamo il covariante di $\mathbf{H}$, ed è tale vettore che risulta ortogonale⁹ all'iperpiano (H) .

Le formule di geometria metrica di $\mathbf{R}^4$, sono molto complesse nel caso in cui la matrice G che definisce il prodotto scalare non è la matrice identica, come del resto accadeva anche in $\mathbf{R}^3$, per questa ragione supporremo di essere nel caso

⁸ Si ha $\delta_{ij} = 1$ per $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

⁹ Quando la matrice G è la matrice identica le componenti covarianti e controvarianti coincidono ed è $H = H^*$ e si ritrova il risultato noto per $G = I$, e il vettore ortogonale è dato dai coefficienti dell'equazione dell'iperpiano.

standard¹⁰. Nel caso standard è banale e verificare che i vettori:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Sono una base, sono due a due “ortogonali” e ciascuno di essi ha modulo 1. Si dirà che essi costituiscono una *base ortonormale standard* dello spazio $\mathbf{R}^4$.

Due iperpiani le cui equazioni¹¹ differiscono per il termine noto, sono paralleli. Siano:

$$(H) \quad a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = b,$$

$$(H_0) \quad a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 0$$

Posto : $\mathbf{H} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ e $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ed avendosi dalla (H_0) :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} = 0 \text{ ovvero } \mathbf{H} \perp \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in (H)$$

risulta che il vettore $\mathbf{H}$ (ortogonale ad ogni vettore $\mathbf{X}$ di (H)), avente per componenti i coefficienti dell’equazione dell’iperpiano, è ortogonale all’iperpiano (H) .

Se rinunciamo alla rappresentazione generale e supponiamo $g_{ij} = \delta_{ij}$, d’ora in avanti *useremo solo indici in basso*. Proviamo :

Teorema L’iperpiano $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ e il punto $H = (0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, ortogonale all’iperpiano, determinano sull’iperpiano improprio $x^0 = 0$ (con coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4)) un piano e un punto di medesima

¹⁰ Negli esercizi tratteremo qualche caso nel quale la matrice G è più generale, senza tuttavia ricavare formule metriche più generali.

¹¹ Nel caso standard le componenti covarianti e controvarianti coincidono, dunque useremo notazioni con indici in basso.

rappresentazione. Essi sono polo e piano polare rispetto alla quadrica assoluto $(x_1)^2 + \dots + (x_4)^2 = 0$.

Dim. Infatti il piano polare di $H = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ è $a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 0$. #

Ciò premesso entriamo nei dettagli delle formule di ortogonalità. #

Ritorniamo all'ortogonalità dei sottospazi di R^4 .

1.- Da quanto detto, se L, M sono vettori ortogonali agli iperpiani (H) e (K) di equazioni :

$$(H) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1, \quad (K) \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = k_1$$

gli iperpiani sono ortogonali se e solo se:

$$(a) \quad (H) \perp (K) \Leftrightarrow \mathbf{H} \cdot \mathbf{K} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 a_i b_i = 0.$$

NOTA. Nel caso della matrice G generale si può provare che due iperpiani, sono ortogonali se i rispettivi covarianti $\mathbf{H}^*$ e $\mathbf{K}^*$ dei vettori formati dai coefficienti delle equazioni sono ortogonali, ovvero se $\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{K}^* = 0$.

2.- Siano dati ora un iperpiano (H) ed un piano (α) rappresentati rispettivamente (H) in forma cartesiana ed (α) in forma parametrica (u, v parametri):

$$(H) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = k_1$$

$$(\alpha) \quad x_i = h_i u + k_i v + q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

È immediato notare che i due vettori $\mathbf{h}$ (h_i) e $\mathbf{k}$ (k_i), sono due vettori indipendenti e paralleli al piano (α) . Dunque perchè l'iperpiano (H) sia ortogonale al piano (α) occorre che

il vettore $\mathbf{H}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, ortogonale all'iperpiano, sia complanare con i vettori $\mathbf{h}, \mathbf{k}$, cioè che sia:

$$(\mathbf{H}) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \mathbf{H} = \gamma \mathbf{h} + \mu \mathbf{k}$$

ovvero

$$(b) \quad (\mathbf{H}) \perp (\alpha) \Leftrightarrow (\mathbf{H}) \perp (\alpha) \Leftrightarrow || \mathbf{H} \mathbf{h} \mathbf{k} || = 0$$

ovvero una riga della matrice sia combinazione lineare delle altre due.

3.- Siano dati un iperpiano (H) ed una retta (r) rappresentati

$$\text{da:} (\mathbf{H}) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = k_1$$

$$(\mathbf{r}) \quad x_i = r_i t + q_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Il vettore $\mathbf{r} = (r_i)$, parallelo alla retta (r), affinché la retta (r) sia ortogonale ad (H), deve essere parallelo al vettore $\mathbf{H}(a_i) \perp$ iperpiano (H) dunque:

$$(c) \quad (\mathbf{H}) \perp (\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{H} = \rho \mathbf{r} \Leftrightarrow a_i = \rho r_i \quad (i = 1, \dots, 4).$$

NOTA. In generale il punto improprio $(0, r_1, r_2, r_3, r_4)$ deve essere il polo del piano che (H) determina sul piano improprio: $a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4 = 0, x_0 = 0$ rispetto alla quadrica Q_3 di equazione $g_{ij} x^i x^j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) essendo appunto:

$$\sum_{i=1}^4 (g_{ij} x^j) r_i = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{r} = 0.$$

4.- Siano dati due piani (α) e (β) rappresentati rispettivamente:

$$(\alpha) \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = k_1 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = k_2 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = k_3 \\ \end{cases}$$

$$d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 = k_4$$

oppure:

$$(\alpha) \quad x_i = m_i u + n_i v + p_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$(\beta) \quad x_i = h_i u + k_i v + q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

La condizione di perpendicolarità dei due piani è data dal fatto che ciascuno dei due piani è complemento ortogonale dell'altro, ovvero, risulta:

$$(\beta) = (\alpha)^\perp \quad \text{ovvero} \quad (\alpha) = (\beta)^\perp$$

Ragioniamo sulla prima condizione e ricordiamo che:

$$(\alpha)^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in (\alpha) \}.$$

ovvero

$$(\alpha)^\perp := \{ \mathbf{x} = (x_i) \text{ t.c. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} = (\lambda m_i + \mu n_i), i=1, \dots, 4 \}.$$

Ora dovendo essere il vettore $\mathbf{x}$ un elemento di (β) , dovrà essere

$$x_i = \gamma h_i + \delta k_i \quad i = 1, \dots, 4$$

per cui da $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, segue:

$$(\lambda m_i + \mu n_i)(\gamma h_i + \delta k_i) = 0$$

sottointesa la somma per $i=1, \dots, 4$, da cui:

$$\lambda \gamma m_i h_i + \mu \gamma n_i h_i + \lambda \delta m_i k_i + \mu \delta n_i k_i = 0$$

e quindi:

$$(d) \quad (\alpha)^\perp (\beta) \Leftrightarrow m_i h_i = n_i h_i = m_i k_i = n_i k_i = 0$$

essendo ciascun membro la somma sottesa per $i=1, \dots, 4$.

La precedente formula si può sintetizzare geometricamente, asserendo che: assegnati per ciascun piano due vettori ad esso paralleli, siano (m_i) ed (n_i) per (α) , ed (h_i) , (k_i) per (β) , occorre e basta per la perpendicolarità dei due piani, che ciascuno dei due vettore di (α) , sia ortogonale ad ognuno dei due vettori di (β) .

Dalle relazioni trovate appare che fissato un piano, (α) , per esempio, cioè fissando gli (m_i) ed gli (n_i) , si hanno quattro equazioni nelle 8 incognite omogenee (h_i) ed (k_i) , quindi i piani ortogonali al piano dato dipendono da tre parametri.

5.- Siano dati ora un piano (α) ed una retta (r) rappresentati rispettivamente:

$$(\alpha) \quad x_i = m_i u + n_i v + p_i \quad , \quad (u, v \text{ parametri}, i = 1, 2, 3, 4.$$

$$(r) \quad x_i = r_i t + q_i \quad (t, \text{ parametro}, i = 1, 2, 3, 4)$$

La evidente condizione di ortogonalità è data da:

$$(e) \quad (\alpha) \perp (r) \quad \Leftrightarrow \quad m_i r_i = n_i r_i = 0$$

formula questa che si può sintetizzare geometricamente, asserendo che: assegnati per il piano (α) due vettori ad esso paralleli, siano (m_i) ed (n_i) sia (r_i) , un vettore parallelo ad (r) . o Per la perpendicolarità retta - piano, occorre e basta che ciascuno dei due vettore di (α) , sia ortogonale al vettore parallelo ad (r) .

6.- Siano date ora due rette, rappresentate da :

$$(r) \quad x_i = r_i t + q_i \quad , \quad (s) \quad x_i = s_i t + p_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Le due rette sono ortogonali se e solo se i vettori

$$r = (r_i) \quad , \quad s = (s_i):$$

$$(f) \quad (r) \perp (s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad . \Leftrightarrow \quad r_1 s_1 + r_4 s_4 = 0$$

N.B. Nel caso generale sarà $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = g_{ij} r^i s^j = 0$. Si noti che la condizione che i due punti impropri $(0, r_1, r_2, r_3, r_4)$ e $(0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ delle rette, siano coniugati rispetto alla quadrica assoluto, $g_{ij} x^i x^j = 0$, equivalgono alla perpendicolarità.

Sono così determinate le sei condizioni di perpendicolarità tra sottospazi di R^4 come riassunte nei punti sopra indicati: **(a)** due iperpiani **(b)** iperpiano-piano **(c)** iperpiano-retta **(d)** due piani **(e)** piano -retta **(d)** due rette.

La comprensione della struttura di uno spazio 4-dimensionale affine ed euclideo, acquista maggior significato attraverso una serie di esercizi e complementi che evidenziano sia le analogie che le differenze con le dimensioni precedenti.

7 - Esercizi significativi

Esercizio 1. Siano dati in uno spazio euclideo numerico R^4 , nel quale la metrica è assegnata dalla matrice $G = I$ (I matrice identica) e quindi in una rappresentazione standard, i due piani (α) , (β) di equazioni:

$$(\alpha) \ x^1 = x^2 = 0 \ , \ (\beta) \ x^3 = x^4 = 0.$$

Provare che i due piani hanno un solo punto comune e che sono tra loro ortogonali.

Che i due piani hanno un solo punto comune segue dal fatto che il sistema :

$$x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$$

ha come unica soluzione il punto $(0,0,0,0)$, essendo il determinante della matrice incompleta del sistema diverso da zero (in particolare è la matrice identica I). Per ragionare

sull'ortogonalità scriviamo le equazioni parametriche dei due piani:

$$(\alpha) \quad x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = u, \quad x^4 = v$$

$$(\beta) \quad x^1 = h, \quad x^2 = k, \quad x^3 = 0, \quad x^4 = 0$$

Sul piano α restano individuati i due vettori // al piano stesso (individuati per $v = 0$, e poi per $u=0$) dati da $u=(0,0,1,0)$ e $v=(0,0,0,1)$. Analogamente su (β) consideriamo i vettori $h=(1,0,0,0)$ e $k=(0,1,0,0)$.

Essendo: $uh = uk = vh = vk = 0$, come è di immediata verifica, i due piani sono ortogonali.

Esercizio 2. Siano dati in uno spazio euclideo numerico R^4 (x,y,z,w) , nel quale la metrica è assegnata dalla matrice $G = I$ (I matrice identica), un punto $P(1,1,2,1)$ e la retta r di equazioni parametriche $x=t, y=0, z=3t, w=2t$. Scrivere l'equazione dell'iperpiano (H) per P , ortogonale ad (r) , trovare il punto comune tra retta ed iperpiano e la distanza di P da (H) .

Un iperpiano per $P(1,1,2,1)$ ha equazione:

$$a(x-1) + b(y-1) + c(z-2) + d(w-1) = 0$$

il vettore (a,b,c,d) ortogonale all'iperpiano deve essere // al vettore r direzionale della retta, cioè $r=(1,0,3,2)$. Dunque l'iperpiano è: $(x-1) + 3(z-2) + 2(w-1) = x+3z+2w -9=0$. Tale iperpiano incontra la retta r nel punto Q , relativo al valore di t che soddisfa l'equazione: $t + 9t + 4t - 9 = 0$ da cui: $t = 9/14$ che fornisce $Q(9/14, 0, 27/14, 18/14)$.

$$d(P,H)^2 = d(P,Q)^2 = (9/14 - 1)^2 + (-1)^2 + (27/14 - 2)^2 + (18/14 - 1)^2 = 17/14.$$

Esercizio 3. Sia data nello spazio 4-dimensionale una geometria metrica standard.

Dati la retta (r) di equazioni: $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = -t$ e il piano (α) di equazioni (α) $x_1 - x_3 = x_2 + x_4 - 1 = 0$, provare che (r) ed (α) sono sghembe. Trovare quindi i due punti alla minima distanza e verificare la perpendicolarità della retta (m) di minima distanza al piano dato (α).

Consideriamo due punti variabili rispettivamente su (α) e su (r):

$$(u, 1 - v, u, v) \in (\alpha) \quad , \quad (t, 2t, 3t, -t) \in (r);$$

il quadrato della distanza risulta essere:

$$f(u,v,t) = d^2 = (u - t)^2 + (1 - v - 2t)^2 + (u - 3t)^2 + (v + t)^2$$

annullando le tre derivate parziali prime si ottengono le condizioni di minimo che, risolte, conducono ai seguenti valori:

$$t = 1/5 \quad , \quad u = 2/5 \quad , \quad v = 1/5.$$

I punti alla minima distanza pertanto sono:

$$A = (2/5, 4/5, 2/5, 1/5) \in \alpha \quad , \quad B = (1/5, 2/5, 3/5, -1/5)$$

La minima distanza $d(A,B) = \frac{1}{5}\sqrt{10}$ e la retta di minima distanza passa per due punti A e B, e ha direzione $\mathbf{m} = (1, 2, -1, 2)$.

Il vettore direzione di (r) è $\mathbf{r} = (1, 2, 3, -1)$ e i vettori indipendenti // ad (α) sono

$u = (1, 0, 1, 0)$ e $v = (0, -1, 0, 1)$. Ciascuno di tali vettori è perpendicolare ad m , poiché risultano nulli i tre prodotti: $mr = mu = mv = 0$.

Dunque la retta di minima distanza è ortogonale sia ad (r) che ad (α) .

Esercizio 4. Sia data nello spazio 4-dimensionale una metrica, definita dalla matrice simmetrica $G = |g_{ij}|$, definita positiva, ed assegnata come segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dati il punto $P(1,1,1,0)$ e il piano (α) di equazioni $x_1 - x_3 = 0$, $x_3 = 2 - x_4$, determinare il punto Q del piano situato alla minima distanza. Provare che la retta PQ è ortogonale al piano (α) . Determinare inoltre l'S3, ovvero l'iperpiano contenente P ed (α) .

Le equazioni parametriche del piano sono:

$$x_1 = v, \quad x_2 = u, \quad x_3 = v, \quad x_4 = v + 2$$

Il quadrato della distanza tra i punti: $X(x_i) = (1,1,1,0)$ e $Y(y_i) = (v,u,v, 2-v)$

$$d^2(X,Y) = g_{ij} (y_i - x_i) (y_j - x_j) = (Y-X) G (Y-X)^t$$

$$[v-1, u-1, v-1, v+2][G][v-1, u-1, v-1, v+2]^t = 7v^2 + u^2 + 2uv - 4v + 2u + 10$$

Annullando le due derivate parziali, si ottengono le condizioni di minimo che, risolte, conducono ai seguenti valori:

$$u = -4/3, \quad v = 1/3.$$

Il punto Q di (α) alla minima distanza da P ha coordinate $Q(1/3, 7/3, 1/3, 7/3)$

La minima distanza segue da $d^2 = 11$ ovvero $d = \sqrt{11}$.

Il vettore direzione della retta (m) di minima distanza è data, meno di un fattore, dal vettore parallelo alla retta $QP = (2/3, 7/3, 2/3, -7/3)$, parallelo a $r = (2, 7, 2, -7)$. Due vettori u, v paralleli al piano sono, dalle equazioni parametriche di (α) , i coefficienti di u , e quelli di v , $u = (0, 1, 0, 0)$ e $v = (1, 0, 1, 1)$,
Risulta :

$$u \cdot r = (0, 1, 0, 0) \cdot (2, 7, 2, -7)^t = 0, \quad v \cdot r = (1, 0, 1, 1) \cdot (2, 7, 2, -7)^t = 0$$

Per la determinazione dell'iperpiano richiesto si osservi che uno dei due iperpiani definenti (α) , precisamente $x_1 - x_3 = 0$, passa per la retta data e contiene P, ed è quindi l'iperpiano richiesto. Volendo applicare un metodo generale, tra tutti gli iperpiani del fascio di iperpiani per (α) , di equazione $x_1 - x_3 = h(x_3 + x_4 - 2)$, quello per P si ottiene appunto per $h = 0$.

Esercizio 5. Trovare i piani per il punto $P(2, 1, -3, 2)$ perpendicolari ad una retta (r) di equazioni: $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = -t$ e, tra questi, quello unico contenuto in un iperpiano H (3-dimensionale) contenente P ed (r).

Iniziamo a trovare l'iperpiano H. Gli iperpiani contenenti r e P sono quelli per il piano α passante per P ed r.

Le tre equazioni di (r), ottenute eliminando il parametro t, sono:

$$x_2 - 2x_1 = 0, \quad x_3 - 3x_1 = 0, \quad x_4 + x_1 = 0.$$

Quindi il piano (α) per P ed (r), si può trovare considerando in R^4 l'iperfascio di piani per (r). dato da:

$$x_2 - 2x_1 = \lambda (x_4 + x_1)$$

$$x_2 - 2x_1 = \mu (x_3 - 3x_1)$$

e imponendo il passaggio per $P(2, 1, -3, 2)$.

Le condizioni imposte forniscono $\lambda = -\frac{3}{4}$ e $\mu = \frac{1}{3}$, dalle quali si hanno le due equazioni del piano (α) cercato:

$$5x_1 - 4x_2 - 3x_4 = 0, \quad 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Un iperpiano H contenente (α) fa parte di un fascio di iperpiani avente per "base" il piano α , cioè:

$$(H) \quad \lambda (5x_1 - 4x_2 - 3x_4) + \mu (3x_1 - 3x_2 + x_3) = 0;$$

in particolare si scelga quello ottenuto per $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, cioè

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Per la prima parte dell'esercizio notiamo che un generico piano per $P(2, 1, -3, 2)$ è rappresentato dalle due equazioni seguenti:

$$x_1 - 2 = a (x_3 + 3) + b (x_4 - 2)$$

$$x_2 - 1 = c (x_3 + 3) + d (x_4 - 2) \quad (1)$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2 = au + bv \\ x_2 - 1 = cu + dv \\ x_3 + 3 = u \\ x_4 - 2 = v \end{array} \right. \quad (2)$$

di vettori direzionali:

$$\vec{u} = (a, c, 1, 0) \quad \vec{v} = (b, d, 0, 1)$$

mentre la retta r data ha direzione $\vec{R} (1, 2, 3, 1)$.

Le condizioni di perpendicolarità si ottengono dalle seguenti:

$$\vec{u} \cdot \vec{R} = a + 2c + 3 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{R} = b + 2d + 1 = 0$$

che forniscono valori di a e di b in funzione di c e di d , i quali sostituiti nelle (2) danno gli ∞^2 piani per P perpendicolari ad r .

Tra questi infiniti piani si vuole quello contenuto in H , certamente esistente perchè in H , 3-dimensionale, esiste un solo piano per P perpendicolare ad un piano α .

Allo scopo imponiamo che le equazioni (2) dei piani per P siano piani contenuti in H . Sostituendo, si ha che deve essere verificata l'identità:

$$(3a - 3c + 1) u + (3b - 3d) v \equiv 0,$$

cioè le due ulteriori condizioni

$$3a - 3c + 1 = 0 \quad b = d$$

le quali, unitamente alle condizioni di perpendicolarità, forniscono i valori:

$$a = -\frac{11}{9} \quad , \quad b = -\frac{1}{3} \quad , \quad c = -\frac{8}{9} \quad , \quad d = -\frac{1}{3};$$

essi, posti in (1) danno le equazioni del piano richiesto.

Esercizio 6. Trovare il piano di $\mathfrak{R}^4$, passante per i tre punti A(1, 2, 3, 4) B(-1, -2, -3, -4) C(1, 3, 2, 3), dopo aver verificato che essi non sono allineati.

La retta $r \equiv AB$ ha equazioni:

$$(r) \quad \frac{x_1 + 1}{2} = \frac{x_2 + 2}{4} = \frac{x_3 + 3}{6} = \frac{x_4 + 4}{8};$$

come è immediato verificare il punto C non appartiene ad r ; inoltre si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = x_2 \\ 3x_1 = x_3 \\ 4x_1 = x_4 \end{array} \right. \quad (r)$$

quindi un generico piano α per r ha equazione:

$$2x_1 - x_2 = \lambda (3x_1 - x_3)$$

$$2x_1 - x_2 = \mu (4x_1 - x_4);$$

imponendo il passaggio per C si determinano λ e μ ; onde si ha

$$\lambda = \mu = -1$$

da cui sostituendo si ottiene

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$6x_1 - x_2 - x_4 = 0$$

Che sono le equazioni del piano richiesto.

Esercizio 7. Date le rette r, s, p di equazioni rispettive:

$$r) \quad x_1 = t, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 3t$$

$$s) \quad x_1 = 2t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = t + 1$$

$$p) \quad x_1 = t, \quad x_2 = -3t - 2, \quad x_3 = -5t, \quad x_4 = -1$$

chiaramente, a due a due sghembe, trovare l'iperpiano contenente r ed s e trovare il punto Q in cui la retta p , incontra tale iperpiano.

Il generico iperpiano H di R^4 ha equazione:

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e = 0$$

L'iperpiano H contiene le due rette r ed s se e solo se, per ogni t :

$$(a + 2b - c + 3d)t + e = 0$$

$$(2a - b + c + d) + d + e = 0 \quad \text{da cui:}$$

$e = 0, d + e = 0$, quindi $e = d = 0$ e per le altre:

$a + 2b - c = 0, 2a - b + c = 0$, e quindi $a = -1, b = 3, c = 5$, così che:

$$(H) \quad -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$$

L'intersezione con la retta p fornisce il valore $t = -6/35$ da sostituire nelle equazioni di p per avere Q . Dato che il vettore $\mathbf{p}(1, -3, -5, 0)$ parallelo alla retta p e il vettore $\mathbf{n}(-1, 3, 5, 0)$ ortogonale ad H , sono paralleli, segue che p ed H sono ortogonali.

Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva

Interrelazioni tra Matematica e Disegno

Ferdinando Casolaro*

*Dipartimento di Architettura Università di Napoli ferdinando.casolaro@unina.it

*Dedicato al prof. Bruno Rizzi
nel venticinquesimo anno dalla sua scomparsa*

Sunto: *Dopo una sintesi storica dell'evoluzione della Geometria dal periodo Caldeo-Babilonese (VIII sec. A.C.) ad oggi, si presenta un Modello di ampliamento della Geometria euclidea, di cui si evidenziano i limiti per la lettura dell'Universo fisico, alla Geometria Proiettiva attraverso Presentazioni e dimostrazioni della lettura analitica.*

Parole Chiave: *Euclide, Vitruvio, Brunelleschi, Desargues*

Abstract: *After a summary history of the evolution of geometry from the Chaldean-Babylonian period (VIII century BC) to today, an extension model of Euclidean geometry is presented, which highlights the limits for the reading of the physical universe, to projective geometry through presentations and demonstrations of analytical reading.*

Keywords: *Euclide, Vitruvio, Brunelleschi, Desargues*

Il progetto di aggiornamento per una nuova didattica del Disegno e della Matematica, finalizzato all'uso delle nuove tecnologie, ha avuto fin dall'inizio, tra le sue finalità, quella precipua di recuperare un robusto ed efficace collegamento tra le due discipline nelle quali gli stessi fenomeni, le stesse operazioni sono espresse, considerate con linguaggi diversi; l'obiettivo generale era quello di avviare lo studente ad un uso non passivo del computer consentendogli di sperimentare, tra l'altro, quali procedimenti logici vi siano dietro ad elaborazioni grafiche anche semplici.

(Cesare Cundari, 1990)

1 - Introduzione

Alla fine degli anni Ottanta del secolo scorso, al Modello del M.P.I. di Sperimentazione "Brocca" per l'introduzione dell'Informatica nella Scuola e nelle Università, è stato aggiunto un Progetto sulle interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno, il cui obiettivo era l'utilizzo delle nuove tecnologie informatiche nella Rappresentazione.

Ideatore è stato il prof. Cesare Cundari, ordinario di Rappresentazione e Rilievo alla Facoltà di Architettura dell'Università "La Sapienza" di Roma, che ha sviluppato il Progetto, col coordinamento per la matematica, del prof. Bruno Rizzi, ordinario di Analisi Matematica presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma e in quel periodo Presidente Nazionale della Mathesis.

In questo articolo si pone in risalto uno degli aspetti fondamentali del Progetto che, dal punto di vista didattico per la matematica, ha permesso di introdurre nell'insegnamento

l'ampliamento del modello euclideo alla geometria proiettiva.

Il progetto aveva come obiettivo:

- per il disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI', oggi GEOGEBRA, ...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;
- per la matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la geometria proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università (Casolaro, Cirillo, 1996; Casolaro, 2003; Casolaro, Prosperi, 2011).

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, è stato incaricato, su indicazione di Bruno Rizzi, il sottoscritto, le cui risultanze sono in bibliografia (Cundari, 1990).

Personalmente ritengo che, dal punto di vista della didattica, in Matematica sono stati raggiunti buoni risultati, che sarebbero stati ottimi se non ci fossero stati limiti dalle istituzioni politiche che pongono difficoltà ad autorizzare attività di carattere generale. Infatti, la divulgazione dei temi affrontati è avvenuta principalmente con Seminari locali in varie scuole, invio di materiale attraverso Internet e grande spirito di collaborazione di giovani docenti che, dopo aver sperimentato il percorso in classe, comunicavano le risultanze permettendomi anche continue correzioni ai temi che affrontavano.

Argomenti, quali Geometria Proiettiva e cenni sulle Geometrie non euclidee (Casolaro, 2002) (Casolaro, Pisano 2006)

sono oggetto delle Indicazioni ministeriali del 2012 per la Scuola Secondaria di secondo grado, per cui nei paragrafi successivi si presenta un percorso didattico che è stato esposto nell'ambito dei corsi di abilitazione (SSIS, TFA, PAS, ...ecc.) e sperimentato prima nel tirocinio, poi nell'insegnamento in itinere, dai docenti candidati all'abilitazione. A tale percorso, riteniamo non secondario anteporre un breve excursus storico che permette agli studenti di comprendere come il tema in oggetto sia stato dibattuto già dai tempi di Euclide e ripreso con forza negli ultimi due secoli in cui si è sviluppata la Geometria Descrittiva e la Geometria Proiettiva (Casolaro, 1996).

Dico subito che senza l'idea di Cesare Cundari, probabilmente la Geometria Proiettiva non avrebbe mai trovato spazio nei percorsi di insegnamento (attuali Indicazioni nazionali per i licei e Linee guida per gli Istituti tecnici e professionali) perché non avendola studiato nei corsi universitari, i docenti di Matematica, compreso il sottoscritto, ne ignoravano le potenzialità di visualizzazione dell'Universo geometrico ed anche la funzione per le interrelazioni con altre discipline.

Alla base del Progetto c'è il concetto di omologia che approfondiremo in tutti i suoi dettagli nel paragrafo 4, ma che vogliamo introdurre con le parole di Cundari (Cundari, 1990) nella presentazione dal titolo «Il principio proiettivo nei metodi della Geometria Descrittiva» (Loria 1921):

Il fondamento geometrico che è alla base di tutti i metodi della Rappresentazione consiste nel processo di proiezione ed intersezione da cui si genera una qualsiasi delle immagini che possono essere geometricamente costruite di un oggetto. Questo concetto, che può essere insegnato in molti modi di-

versi, è fondamentale. Ed è un concetto che unisce tutti i metodi di rappresentazione, anche quelli che si avvalgono di supporti strumentali: mi riferisco esplicitamente alla fotografia e alla fotogrammetria.

Il principio cui intendo riferirmi è quello dell'Omologia. Appartenente all'ambito della Geometria Proiettiva, esso trova la sua ragione di applicazione e di utilizzazione nel Disegno, per la corrispondenza biunivoca che esiste tra l'oggetto e la sua rappresentazione, e deriva dal processo di proiezione ed intersezione.

2 – Dalla Rappresentazione alla Geometria: breve excursus storico

Le prime dimostrazioni di geometria risalgono alla scuola di Talete nel VI secolo a.C.. Precedentemente, nell'VIII-VII sec. a.C., si trova solo qualche frammento, in particolare di geometria sferica, nei caldeo-babilonesi che, attratti dal fascino della volta celeste, cercando di approfondire le proprietà dello spazio indirizzavano il loro campo di studio sulla sfera (Kline, 1991; Casolaro, Santarossa, 1997).

Gli stessi greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica; di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati pubblicati i due testi (Kline 1991) *Sulle sfere mobili* e *Il sorgere ed il tramontare*, scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di Euclide, Autolico di Pitane (sono i due testi più antichi che sono stati trovati intatti).

Nel testo *Sulle sfere mobili* Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli; il libro presuppone teoremi di geometria sferica che dovevano perciò essere noti ai greci di quell'epoca.

È significativo, come nell'opera *Sulle sfere mobili* le proposizioni siano disposte in ordine logico; infatti, ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta, con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione. È questo lo stile usato da Euclide nella sua opera *gli Elementi*, in cui riassume le principali ricerche dei matematici che lo precedettero completandole e riordinandole in modo pressoché perfetto, specialmente dal punto di vista logico, essendo ben determinata la deduzione di ogni teorema dai precedenti o dalle proposizioni primitive.

Lo stesso Euclide trattò alcune questioni di geometria sferica, come si trova nella sua opera *I fenomeni*, di cui esiste una pubblicazione del 1916 (Kline 1991). In essa viene definita, per la prima volta, la superficie sferica come superficie di rotazione di una circonferenza intorno a un diametro. È in questa opera che compare per la prima volta, anche se non esplicitamente, il concetto di trasformazione geometrica, in considerazione delle varie posizioni che assume la circonferenza ruotando intorno a un diametro.

La parte della geometria che si occupa degli argomenti che si trovano negli *Elementi* di Euclide, seguendo i metodi della geometria greca, è detta geometria elementare. Tale definizione non è rigorosa in quanto non sono chiari i limiti tra la geometria elementare e le altre geometrie nate successivamente negli ultimi secoli.

Secondo un punto di vista più moderno, possiamo dire che la geometria elementare tratta, quasi esclusivamente, proprietà di uguaglianza e similitudine tra figure; infatti, le proprietà che essa studia sono tali che, se valgono per una figura, valgono per le figure uguali ad essa e ad essa simili.

L'analisi della struttura della geometria, che ha portato a questo punto di vista, è stata compiuta dal matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) nella seconda metà del XIX secolo, dopo le dispute sulla crisi dei fondamenti e le discussioni sul postulato delle parallele, che avevano condotto, negli ultimi due secoli, allo sviluppo delle cosiddette "geometrie non euclidee", oltre all'evoluzione che aveva avuto la geometria proiettiva, che si presentava come una geometria più generale di quella euclidea.

I risultati di Klein sono la conseguenza della ricerca di geometrie diverse da quella euclidea, principalmente da parte di architetti e cultori dell'arte pittorica.

Dopo vari tentativi, già dai tempi di Euclide, di considerare l'arte come scienza, nel XV secolo Filippo Brunelleschi (1377-1446) stabilisce le regole della prospettiva che danno una identità scientifica alle opere degli architetti e dei pittori.

La prospettiva, dal termine latino *perspectiva* (ottica) è universalmente considerata il fondamento teorico della rappresentazione pittorica. Il metodo della prospettiva, in geometria, rientra tra quelli usati per rappresentare figure tridimensionali sopra un piano.

La rappresentazione dei dettagli tecnici della figura avviene con i metodi della geometria descrittiva. È compito, invece, della geometria proiettiva la rappresentazione mediante le trasformazioni che la figura subisce con le operazioni di proiezione e sezione.

I primi che tentarono di risolvere alcuni problemi di rappresentazione furono probabilmente gli artisti greci, e non è da escludere che in età classica esistesse un sistema di rappresentazione non molto dissimile da quello elaborato du-

rante il Rinascimento. Pare, invece, esclusa qualsiasi ricerca di definizione spaziale matematica e unitaria nelle figurazioni preistoriche.

È nel periodo greco, infatti, che ebbe origine un gruppo di ricerche i cui risultati costituiscono "l'ottica degli antichi", che nasceva dal desiderio di studiare fenomeni luminosi allo scopo di distinguere ciò che è "apparenza" da ciò che è "realtà".

Partendo dal postulato che "la luce si propaga in linea retta", vengono stabiliti molti teoremi (per lo più da Euclide che faceva parte del gruppo) che ancora oggi sono ritenuti tra i fondamenti della trattazione matematica della luce; altre proposizioni, invece, vengono ritenute inaccettabili essendo conseguenza del principio - sostenuto da Platone ma ripudiato come falso dalla fisica contemporanea - che la visione avvenga per effetto di raggi emananti dall'occhio dell'osservatore e non dall'oggetto.

Già in un'opera del XII secolo, tradotta dall'arabo in latino da Gherardo da Cremona (1114 - 1187), ma pubblicata da Pietro Rama (1515 - 1572) nel 1572, si incontra per la prima volta l'idea che:

da ogni punto di un corpo illuminato si dipartano raggi in tutte le direzioni, sicché l'occhio dell'osservatore (la cui pupilla diventa centro di un cono prospettico) è centro di una stella di raggi diretti a tutti i punti dell'oggetto osservato".

Immaginando, poi, che fra l'occhio e l'oggetto venga interposta una superficie trasparente (quadro) dove si individuano i punti in cui essa interseca ogni raggio luminoso, si vedrà

sul quadro un insieme di punti che produrrà sull'osservatore la stessa impressione dell'oggetto considerato: questa è la "prospettiva" che è, dunque, «l'arte di rappresentare gli oggetti sopra un quadro in modo da conservarne l'aspetto esteriore» e costituisce il fondamento teorico dell'arte pittorica (Casolaro, Rotunno, 2015).

Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento dell'arte pittorica, lo si evince da alcuni passi di Marco Vitruvio Pollone (80 a.C. - 15 a.C.) che si può considerare il più significativo trattatista di architettura del mondo latino. Di Vitruvio si sa poco, addirittura si mette in dubbio l'originalità della sua opera più famosa, *De Architectura* (27 a.C.), in cui descrive la Basilica di Fano, di cui si dichiara il costruttore (I cap. - V libro). Tale opera, in 10 libri, fu presa a modello da tutti i trattatisti di architettura del Rinascimento, che vi attinsero nozioni e notizie, spesso ne adottarono schemi e criteri. Nel I libro viene delineata la figura dell'architetto e i limiti dell'architettura come scienza; nel II libro è svolta una sommaria storia dell'architettura e nei libri successivi la trattazione si fa man mano più analitica e tecnica.

È però nel sec. XII, con l'architettura gotica, che si incomincia a intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale. Il problema principale che poneva l'architettura gotica era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture.

Già nell'XI secolo i costruttori dell'*Île-de-France* avevano pensato di eliminare progressivamente dagli edifici delle chie-

se ogni massa inerte, che risaliva all'arte romanica, per adottare l'arco acuto che permette di attenuare le spinte laterali.

Con l'architettura gotica si è accentuato maggiormente il verticalismo e lo spazio è stato configurato in forma indefinita, in modo da offrire, attraverso la complessità delle piante a più navate con cappelle radicali, prospettive sempre più mutevoli sotto la varia azione della luce, spesso filtrante attraverso le vetrate colorate. Quindi, la cattedrale gotica, intorno alla quale fiorirono generazioni di costruttori e decoratori, risultò così un edificio estremamente logico, nel quale sono in rilievo tutte le parti aventi reale funzione statica, quasi un fascio di forze senza materie inerte. Carattere gotico ebbero le abbazie di Fossanova e di Casamari, la chiesa dei Servi a Bologna e la chiesa di San Francesco d'Assisi.

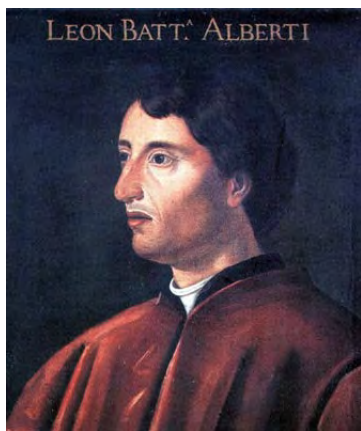
Successivamente riscontriamo il primo passo per il superamento della concezione medioevale nelle opere di Giotto (1266 - 1337), di Duccio di Buoninsegna (1255 circa - 1318 o 1319) e, qualche decennio più tardi, nelle opere di Ambrogio Lorenzetti (1290 circa - 1348), in cui è evidente la ricerca per definire lo spazio contenente i vari elementi della rappresentazione.

Ma l'adozione di un preciso metodo di prospettiva lineare geometrica risale all'inizio del secolo XV con il fiorentino Filippo Brunelleschi, che per primo fissò le norme della prospettiva e aprì un'era nuova che simboleggiava l'inizio dell'età del Rinascimento.

Le prime opere del Brunelleschi, intorno al 1400 circa, non lasciavano prevedere la rivoluzione che avrebbe poi messo in atto, in quanto si mantengono ancora nell'ambito della tradizione gotica, come si evince dai busti e dalle statue d'argento

per l'altare di San Jacopo, nel Duomo di Pistoia, eseguiti intorno al 1400.

È col *Crocefisso* di Santa Maria Novella (1409, o forse dopo)



Leon Battista Alberti

che si incomincia a intravedere un'opera nuova per le perfette proporzioni e per la simmetrica distribuzione delle parti, perché in quel periodo Brunelleschi cercava il mezzo per rendere oggettivamente rappresentabili (e quindi razionalmente conoscibili) i corpi dello spazio: questo mezzo lo trovò nella prospettiva (la prova è nelle vedute prospettiche del Battistero di San Giovanni e di Palazzo Vecchio a Fi-

renze) di cui fissò le norme.

Sulla stessa linea si è espresso Leon Battista Alberti,¹ che ha anche dedicato al Brunelleschi il suo trattato *De pictura* in cui scrisse che «nell'arte fiorentina di quegli anni si intravedeva già il superamento delle opere dell'antichità».

Il suo pensiero si basa sulla concezione della prospettiva brunelleschiana, che ha riproposto in modo più chiaro e preciso, sfruttando anche le conoscenze matematiche e filosofiche, come si evince dalla grande opera architettonica *Il Tempio Malatestiano* di Rimini.

¹ Architetto, scrittore, matematico, umanista, crittografo, filosofo, musicista e archeologo, fu una delle figure artistiche più poliedriche del Rinascimento. (Genova, 14 febbraio 1404 – Roma, 25 aprile 1472).

A differenza del Brunelleschi che seguiva personalmente le opere che aveva progettato, l'Alberti, convinto che l'architetto non avesse un compito artigianale, affidava ad altri la realizzazione dei suoi disegni e dei suoi progetti. Leon Battista Alberti diffuse tra i pittori del proprio tempo anche il procedimento (forse già noto agli antichi egiziani) che consi-



Piero della Francesca

ste nell'usare un reticolato a maglie quadrate per riprodurre in altra scala un dato disegno; è un procedimento fondato sul concetto di similitudine e in cui si può individuare un primo approccio alla geometria analitica ed alla geometria proiettiva che si svilupperà due secoli più tardi.

L'ingegno e la cultura dell'Alberti si manifestano anche nelle opere letterarie e pedagogiche; egli si può definire il letterato dell'arte del XV secolo, quasi in contrapposizione ad un altro grande artista dello stesso periodo, Piero della Francesca,² che rappresenta invece il matematico dell'arte del XV secolo, tanto che Giorgio Vasari³ nelle *Vite dei più eccellenti scultori, pittori ed architettori*, scrisse che

Piero non si ritrasse mai dalle matematiche nelle quali era stato tenuto maestro raro, tanto che i libri meritatamente gli

² Pittore e matematico (Borgo Sansepolcro, 12 settembre 1416/1417 – 12 ottobre 1492).

³ Pittore, architetto e storico dell'arte (Arezzo, 30 luglio 1511 – Firenze, 27 giugno 1574).

hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi.

Nel decennio 1470-1480, Piero della Francesca scrisse un trattato completo di prospettiva: *De perspectiva pingendi*, dove, applicando il concetto albertiano di "prospettiva di un corpo", si servì di alcuni procedimenti che soltanto nell'odierna Geometria Descrittiva trovano il loro completo svolgimento e per primo sfruttò, per tracciare la prospettiva di un solido limitato da una superficie curva, le corrispondenti sezioni di una conveniente serie di sezioni piane; di conseguenza, prima che venisse stabilito e percepito il concetto di involuppo di una famiglia di linee piane, vide che tutte le curve così nascenti sono tangenti ad una determinata linea, che è la proiezione del contorno della superficie considerata.

In questo gruppo di eminenti pittori-geometri italiani emerge, poi, Leonardo da Vinci⁴ anch'egli convinto all'idea che la pittura deve avere un fondamento scientifico come si evince nel capitolo VII della sua opera «Trattato della pittura», in cui così si esprime:

quelli che si innamorano della pratica senza la diligenza (la scienza) sono come i nocchieri che entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino.

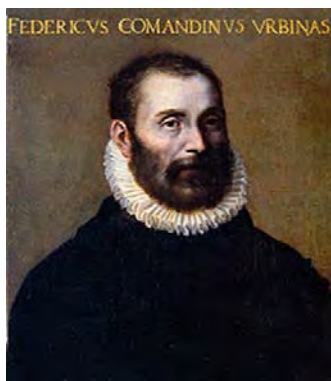
⁴Anchiano, 15 aprile 1452 – Amboise, 2 maggio 1519. Considerato uno dei geni universali dell'umanità. Infatti, fu inventore, scienziato, filosofo, architetto, pittore, scultore, disegnatore, scenografo, anatomista, botanico, musicista, ingegnere e progettista.

Secondo il Vasari, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci erano due personalità antitetiche: da un lato un Leonardo tanto "mirabile e celeste" quanto "vario ed instabile" che passa dagli affreschi agli specchi, dalle macchine all'anatomia; dall'altra invece un Piero razionale, sistematico, che costruisce teorema dopo teorema, problema dopo problema i molti libri scritti in cui lo stile è molto vicino a quello usato da Euclide.



Leonardo da Vinci

Ed è sulla scia di Piero della Francesca che nel XVI secolo la prospettiva è passata dalle mani degli artisti a quelle degli scienziati grazie principalmente ai lavori di un eminente commentatore, Federico Commandino.⁵



Claudio Tolomeo

Questi, in un suo trattato di prospettiva lineare scritto con l'intento di stabilire i principi su cui si basa il metodo di proiezione dovuto all'astronomo greco Claudio Tolomeo (II sec. d.C.) e che oggi chiamiamo "proiezione stereografica", suppone di riferire tutte le figure considerate a due piani fra loro ortogonali, l'orizzontale e il verticale (con il linguaggio degli architetti la

⁵ Urbino, 16 giugno 1509 – Urbino, 5 settembre 1575. Matematico e umanista, uno dei maggiori traduttori delle opere dei grandi matematici dell'antichità.

pianta e l'alzato) e di assumere per quadro un piano perpendicolare ad entrambi e per punto di vista un punto situato sopra il piano verticale. Egli poi immagina che il quadro venga ribaltato sopra il piano verticale mediante rotazione attorno alla sua intersezione col piano stesso, in modo da fissare anche gli elementi uniti: è questa una prima idea di composizione di due operazioni di prospettiva che, con lo sviluppo della Geometria Proiettiva, condurrà al concetto di omologia.

Nel frattempo, l'insegnamento dei grandi artisti italiani, da Brunelleschi all'Alberti, da Piero della Francesca a Leonardo da Vinci, fu assimilato anche da altri pittori non italiani di cui un posto di particolare rilievo, nella storia della matematica, spetta sicuramente al tedesco Albrecht Durer (Norimberga, 1471-1528), matematico, pittore e trattatista di architettura che, nel suo paese, ha insegnato molte cose relative alla Prospettiva, probabilmente imparate da Piero della Francesca durante un lungo soggiorno da lui fatto in Italia.

Il contributo di belgi e olandesi alla prospettiva è stato dato principalmente dalle opere di alcuni matematici, di cui i più significativi sono Simone Stevin⁶ e Francesco D'Aguillon,⁷ anche se già all'inizio del XV secolo il pittore olandese, Giovanni Van Dick,⁸ aveva dimostrato di conoscere e di usare il punto di fuga di un sistema di rette parallele fra loro, ma gli altri pittori olandesi ne appresero l'esistenza soltanto due secoli dopo da scrittori italiani di prospettiva.

In Francia va ricordato il pittore e scultore Giovanni Cousin (1500-1590) che nel suo trattato *Il livre de Pourtraiture* applica

⁶ Bruges 1548-Aja 1620.

⁷ Bruxelles 1566-Anversa 1617.

⁸ Maastricht 1385-Bruges 1440.

alla ricerca della rappresentazione prospettica di un solido, l'artificio del mutamento del piano verticale di proiezione.

Ed è proprio in Francia, che alcuni decenni dopo, si delineano nuovi orizzonti per la geometria.

In particolare, è considerato il padre del metodo generale per la Geometria Descrittiva e il precursore della Geometria Proiettiva il matematico francese Girard Desargues (1591-1661) che, facendo uso del metodo delle coordinate nel periodo in cui si stava sviluppando la Geometria Analitica ad opera di Renè Descartes (1596-1650) e di Pierre de Fermat (1601-1675), suggeriva un nuovo metodo di costruzione basato sul seguente concetto:

“Una figura qualsivoglia è determinata completamente nello spazio quando di ogni suo punto si conoscono le distanze dalle facce di un triedro trirettangolo; analogamente dicasi per una figura piana.”

È questa la rappresentazione del metodo analitico che è alla base anche del concetto di assonometria.

Il Desargues completò la sua trattazione con un lavoro del 1639 in cui inaugurava il Metodo delle proiezioni centrali, che introduceva per la prima volta il concetto di punto all'infinito,

mettendo le basi allo sviluppo della Geometria Proiettiva, cioè, quella disciplina che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezione e sezione.



Girard Desargues

Ed è nella geometria proiettiva che è messa in risalto l'importanza dei punti all'infinito e l'analogia tra punti e rette espressa dal “principio di dualità”.

La geometria proiettiva fu sviluppata, poi, nel secolo successivo prima con Gaspard Monge (1746-1818) e quindi col suo allievo, Jean-Victor Poncelet (1788-1867) per trovare



Gaspard Monge e Jean Victo Poncelet

la sua rigorizzazione nel 1872 con *Il programma di Erlangen* di Felix Klein (1849-1925), il quale, nominato professore ordinario all'Università di Erlangen, pubblicò il suo «Program» in cui considerava le proprietà geometriche delle figure rispetto a “gruppi di trasformazioni”. Ciò consiste nell'applicazione della “Teoria dei gruppi” (nella sistemazione data poi da Jordan), alle teorie geometriche. In tal modo, Klein presentava una teoria unificatrice che permetteva di classificare le varie geometrie che progredivano indipendentemente una dall'altra (Casolaro in Cundari 1990).

Klein osservò che nello spazio vi sono delle trasformazioni che non alterano le proprietà geometriche delle figure. L'insieme delle trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà è detto "gruppo principale di trasformazioni", in quanto:



- La composizione di Felix Klein due o più trasformazioni è ancora una trasformazione.
- Esiste la trasformazione che muta le figure in se.
- Esiste la trasformazione inversa.
- La composizione di trasformazioni è associativa.

Per proprietà geometriche, Klein intendeva quelle indipendenti dalla posizione della figura nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, dall'ordinamento delle sue parti (Cundari, 1990).

3 – La “Geometria Proiettiva”: un percorso didattico per la Scuola Secondaria di secondo grado

Relativamente alle trasformazioni lineari, oggetto del nostro lavoro, il gruppo di trasformazioni più ampio tra forme geometriche (rette, fasci di rette, piani, fasci di piani, spazi tridimensionali, ecc.) è il gruppo delle proiettività che, nel caso di trasformazioni piane (a cui noi ci riferiremo) prende il nome di “gruppo delle omografie”.

In generale, diciamo proiettività tra due forme geometriche π_1 e π_2 , una corrispondenza biunivoca ω che a punti di π_1 associa punti di π_2 ed a rette di π_1 associa rette di π_2 . Una proiettività tra piani è detta omografia.

Pertanto, un'omografia è una trasformazione lineare tra due piani π_1 e π_2 (distinti o sovrapposti) che trasforma un punto di π_1 in un punto di π_2 ed una retta di π_1 in una retta di π_2 . Essa avviene attraverso (e solo) le operazioni di proiezione e sezione (Casolaro, Eugeni 1996).

3a - Proiezione e sezione

Si definisce proiezione di un punto P su una retta r , da un centro di proiezione S , il punto $P' \equiv SP \cap r$ (fig. 3.1). Se il segmento SP è perpendicolare ad r , la proiezione si dice ortogonale. Il punto P' è detto anche sezione della retta SP con la retta r .

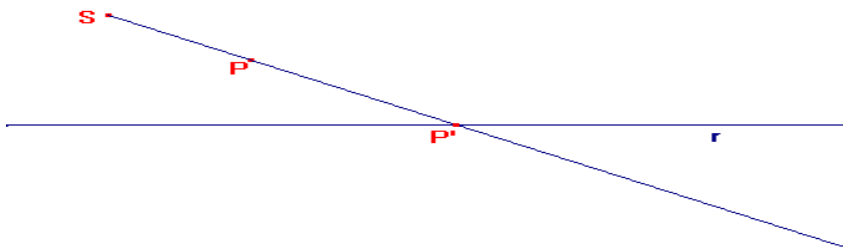


Fig. 3.1

3b - Prospettività tra rette: punto limite, punto improprio

Date due rette r ed s del piano ed un punto S esterno sia ad r che ad s , si definisce prospettiva di centro S tra le rette

s ed r la corrispondenza che ad ogni punto $P \in s$ fa corrispondere il punto $P' \equiv SP \cap r$ (cioè la proiezione del punto P di r dal centro di proiezione S) (fig. 3.2).

Se s è parallela ad r , la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di s , interseca certamente la retta r , e viceversa.

Se s incide r in un punto U , si può osservare:

1. al punto U corrisponde se stesso: U è detto punto unito.
2. esiste un punto $I \in s$ tale che la retta IS è parallela ad r , per cui al punto I non corrisponde alcun punto di r .

E' possibile completare la corrispondenza biunivoca tra s ed r , associando al punto $I \in s$ un elemento J_∞ di r che è detto "punto improprio" o punto all'infinito ed è individuato dalla direzione della retta r (cioè del fascio di rette parallele ad r).

Infatti, se consideriamo la prospettività di centro S tra la retta s ed una qualsiasi parallela ad r , possiamo osservare che al punto $I \in s$ corrisponde ancora J_∞ (fig. 3.3).

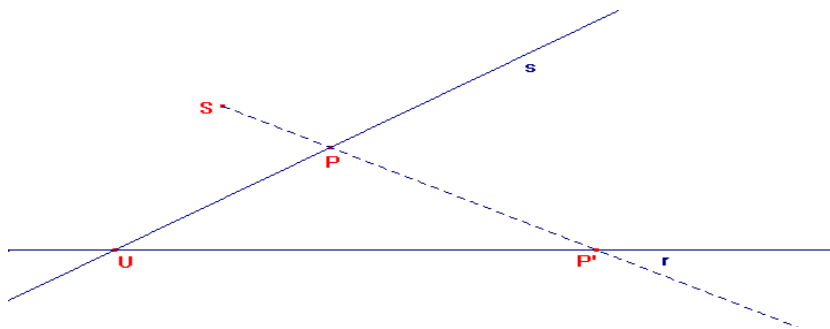


Fig. 3.2

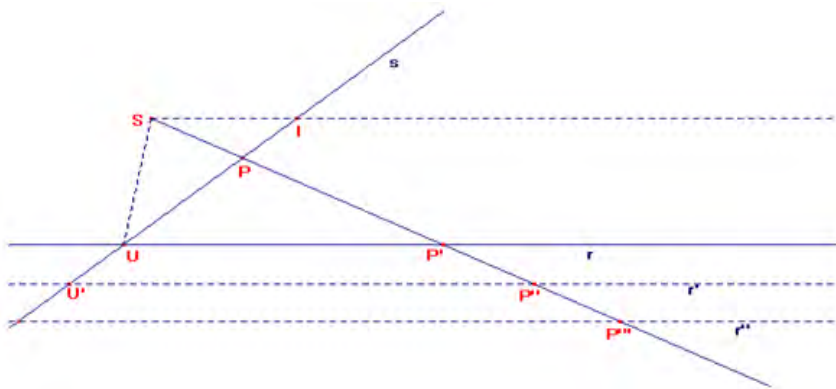


Fig. 3.3

Il punto $I \in s$ è detto “punto limite” nella prospettiva di centro S tra le rette s e r .

3c - Prospettività tra piani: retta limite, retta impropria

Siano α e β due piani dello spazio euclideo e sia S un punto esterno sia ad α che a β . Si definisce prospettiva di centro S tra i piani β ed α , la corrispondenza che ad ogni punto $P \in \beta$ associa il punto $P' \in \alpha$ tale che $P' \equiv \alpha \cap SP$ (cioè la proiezione del punto P di β sul piano α dal centro di proiezione S).

- Se β è parallelo ad α , la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di β interseca certamente il piano α e viceversa.
- Se β incide α secondo una retta u , si può osservare:
 1. ai punti della retta u corrispondono i punti stessi: u è detta “retta di punti uniti” nella prospettiva di centro S tra i piani α e β ;

2. esiste una retta $t \in \beta$ i cui punti sono situati nel piano per S parallelo ad α , per cui le proiezioni da S su α sono punti impropri. Si completa la corrispondenza tra β ed α associando ai punti della retta t i punti impropri che costituiscono, quindi, una retta all'infinito t_∞ , detta "retta impropria".

La retta impropria è individuata dalla giacitura del piano α (ovvero, dal fascio di piani paralleli ad α). Infatti, se consideriamo la prospettiva di centro S tra il piano β ed un qualsiasi piano parallelo ad α , possiamo osservare che ai punti della retta t di β corrispondono ancora i punti impropri di t_∞ . La retta t è detta "retta limite" nella prospettiva di centro S tra i piani α e β .

Lo spazio euclideo, con l'aggiunta degli elementi impropri, prende il nome di spazio proiettivo; la geometria che ne studia le proprietà è la Geometria Proiettiva; il gruppo di trasformazioni è il gruppo delle omografie.

Una prospettiva ω tra piani subordina sempre una prospettiva tra rette.

Infatti, se α e β si corrispondono nella prospettiva ω di centro S , un piano per S non parallelo né ad α né a β , interseca α e β secondo due rette t_1 e t_2 che si corrispondono in ω .

Pertanto, una *prospettività* ω tra due piani α e β è un'omografia, in quanto corrispondenza biunivoca, tale che se un punto $P \in \alpha$ descrive una retta su α , anche il suo corrispondente $P' = \omega(P)$ descrive una retta su β .

In generale, le omografie sono prospettività tra piani o composizione di due o più prospettività.

Un omografia ω del piano α in sé che presenta un punto U unito e una retta u di punti uniti è detta omologia (Casolaro, Cirillo, 1996)

In tal caso l'omografia (omologia) si ottiene come composizione di due prospettività tra piani nello spazio tridimensionale.

L'omologia è dunque una trasformazione che avviene nel piano, ma ha la sua genesi nello spazio.

Ed è questo il concetto su cui è stato costruito il Progetto; concetto estremamente significativo per l'insegnamento della geometria perché tutti i pedagogisti e didattici della matematica, nella seconda metà del XX secolo (primo tra tutti Bruno Rizzi che ne sottolineava i dettagli già nel 1990 (Cundari, 1990) hanno ritenuto essenziale un insegnamento basato sul fusionismo, cioè sull'integrazione e/o connessione tra le diverse parti della matematica, nel nostro caso l'insegnamento della geometria nel piano e nello spazio in un unico percorso.

In figura, un esempio didattico che propongono i docenti di matematica agli studenti in aula; è la rappresentazione dell'omologia nella realtà (Casolaro, Rotunno 2019).

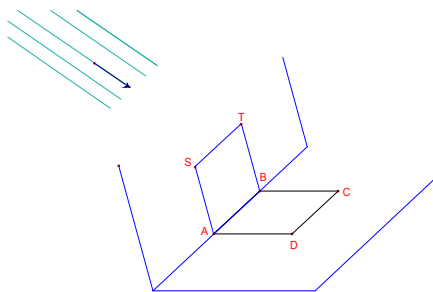


Fig. 3.4 - Proiezione della finestra

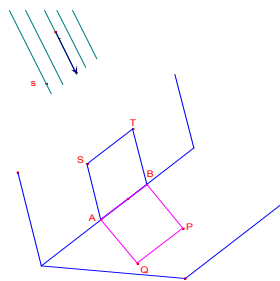


Fig. 3.5 - Proiezione della finestra

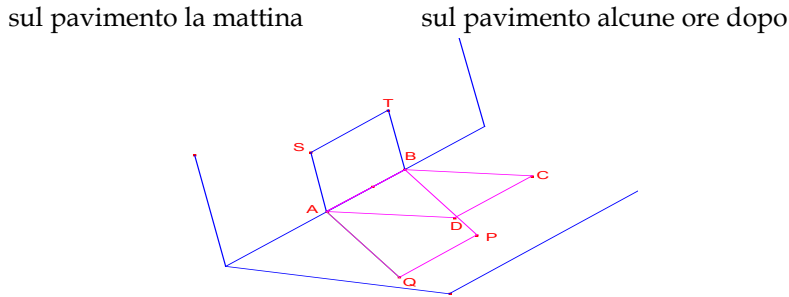


Fig. 3.6 - Sovrapposizione delle proiezioni: omologia

4 – La rappresentazione nel piano proiettivo

Si pone, dunque, il problema della rappresentazione di un punto e di una retta nel piano proiettivo. Dal punto di vista didattico, riteniamo opportuno presentare la questione partendo dalla rappresentazione di un punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ nel piano cartesiano, per poi, mediante l'ampliamento al piano proiettivo, individuare il punto improprio con l'aggiunta di una terza coordinata (Casolaro, Rotunno 2015).

Con riferimento alla figura, consideriamo una direzione δ del piano (punto improprio P_∞); sia r la retta la retta per l'origine che individua P_∞ e sia $P_1(\bar{x}, \bar{y})$ un punto di r .

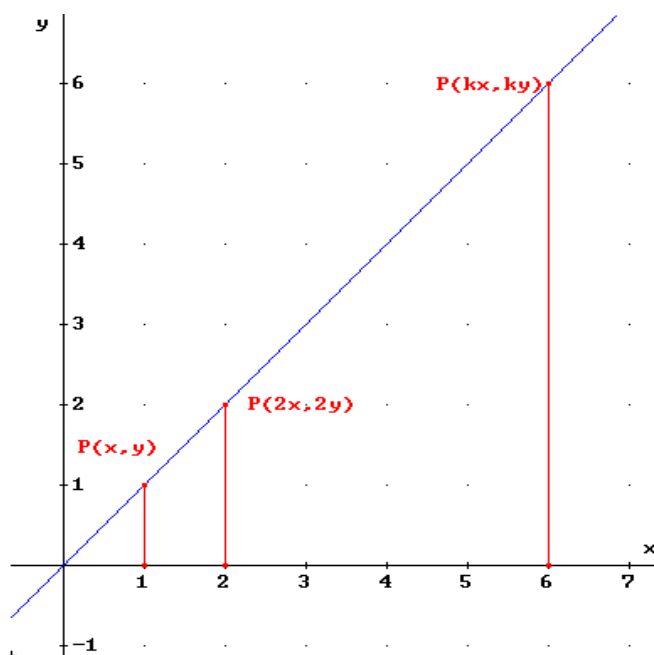


Fig. 4.1

Consideriamo la successione di punti:

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1}, \frac{\bar{y}}{1} \right); \quad P_2(2\bar{x}, 2\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{2}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{2}} \right); \dots$$

$$P_{10}(10\bar{x}, 10\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{10}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{10}} \right) \dots P_{1000}(1000\bar{x}, 1000\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{1000}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{1000}} \right)$$

che, considerando il denominatore una terza coordinata, possiamo anche scrivere:

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}, 1); \quad P_2(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2}); \quad \dots\dots P_{10}(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{10}); \quad \dots\dots\dots$$

$$P_{1000}(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{1000});$$

I punti di tale successione appartengono tutti alla retta r ed al crescere dell'indice k , cresce la distanza $\overline{OP_k}$, ovvero, al tendere a zero del denominatore comune alle due coordinate (o terza coordinata), il punto P_k si allontana indefinitamente.

Posto:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3} \qquad (5.1)$$

possiamo definire le coordinate dei punti impropri come terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) in cui risulta $x_3 = 0$.

Pertanto, l'espressione

$$x_3 = 0 \qquad (5.2)$$

individua il luogo geometrico dei punti impropri del piano, cioè la retta impropria.

5 - Rappresentazione analitica

Poiché un'omografia muta rette in rette, deve essere rappresentata, nel piano proiettivo, da equazioni di primo grado (Franchetta 1969):

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad (5.1)$$

dove la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

ha rango tre ($\det A \neq 0$), affinché la corrispondenza sia biunivoca.

All'interno dei gruppi di trasformazioni si conservano alcune proprietà. Relativamente alle trasformazioni di rette (invarianti espressi da equazioni di primo grado) ed alle trasformazioni di coniche (invarianti espressi da equazioni di secondo grado), un'Omografia muta una retta in un'altra retta ed una circonferenza in una conica reale non degenera; inoltre si conserva il birapporto tra quaterne di punti su rette corrispondenti.

Se l'omografia muta rette parallele in rette parallele, è detta Affinità; le affinità formano gruppo (sottogruppo delle omografie) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle affinità caratterizza la geometria affine (primo ampliamento della geometria euclidea). Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, poiché in una trasformazione affine si conserva il parallelismo, un punto improprio si muta in un altro punto improprio, per cui la retta impropria è unita; relativamente alle trasformazioni espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza si muta in una conica chiusa (ellisse); inoltre si conserva il rapporto semplice tra terne di punti su rette corrispondenti, ed è costante il rapporto tra le misure delle aree di figure corrispondenti.

La proprietà delle affinità di avere unita la retta impropria, si traduce analiticamente nella eliminazione della terza equazione della (5.1) in quanto risulta: $x'_3 = x_3$.

Pertanto un'affinità è espressa analiticamente da due equazioni lineari in quanto il piano proiettivo coincide con il piano affine (Casolaro, Rotunno, 2019)

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Un'affinità in cui si conservano le ampiezze degli angoli è detta Similitudine; le similitudini formano gruppo (sottogruppo delle affinità) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle similitudini caratterizza la geometria euclidea. Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, in una similitudine, rette perpendicolari si mutano in rette perpendicolari; relativamente alle proprietà espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza è mutata in un'altra circonferenza.

Inoltre, si conserva il rapporto tra le misure di coppie di segmenti corrispondenti.

Relativamente a quest'ultima proprietà, è interessante notare che nel passaggio:

omografia $\rightarrow$ affinità $\rightarrow$ similitudine

in cui si conserva rispettivamente il

birapporto $\rightarrow$ rapporto semplice $\rightarrow$ rapporto distanze

si passa da una proprietà relativa

- a quattro punti corrispondenti (birapporto),
- tre punti corrispondenti (rapporto semplice),
- due punti corrispondenti (rapporto distanze).

Se la similitudine conserva le distanze, è detta Isometria.

Lo studio delle proprietà delle similitudini e delle isometrie è l'argomento dei testi di geometria euclidea.

6 – Conclusioni e prospettive future

È evidente che per lo studio dell'Universo che ci circonda, il modello euclideo è insufficiente.

Negli ultimi 150 anni lo sviluppo della Teoria della Relatività ha imposto modelli di Geometria strutturati sullo spazio curvo; analogamente l'evoluzione dell'Ottica, dai classici concetti di riflessione e rifrazione alle trasformazioni sulle grandi distanze, in particolare alle modifiche delle ombre nel piano per effetto dei raggi solari, impongono la conoscenza degli elementi fondamentali di Geometria Proiettiva nell'insegnamento (Casolaro, Prospero 2011).

Ciò emerge, come già accennato nell'introduzione di questo lavoro, anche dalle Indicazioni nazionali per i licei e dalle Linee guida per gli Istituti tecnici e professionali (che sostituiscono i vecchi programmi) in cui sono inseriti questi temi. Infatti, non a caso sono state introdotte delle ore di Fisica anche nei bienni del liceo e si è provveduto alla modifica della seconda prova agli esami di Stato, che non conterrà solo argomenti di Matematica, ma sarà arricchita da argomenti di Fisica e di Scienze naturali.

Purtroppo la resistenza a dare il peso che meritano queste tematiche nella didattica viene proprio dagli addetti ai lavori (Dirigenti Scolastici, Ispettori e docenti di maggiore esperienza) che sono poco disponibili a confrontarsi con argomenti che non hanno fatto parte del bagaglio di conoscenze nel proprio percorso di studio universitario (Casolaro 2014).

Per il futuro, comunque, c'è da essere ottimisti perché non credo che possa continuare la resistenza nella divulgazione di temi che sono essenziali alla Formazione dei giovani per una corretta osservazione del mondo fisico, anche perché con Cesare Cundari c'è l'auspicio di riorganizzare e continuare a proporre questo Progetto.

In particolare, il concetto di Omologia è considerato essenziale già da alcune maestre della Scuola Primaria che, avendolo assimilato nei corsi di Formazione per Distretti scolastici e Progetti PON organizzati dal Ministero già da alcuni anni, fanno disegnare nelle quarte e nelle quinte classi la finestra e l'ombra che produce sul pavimento in momenti diversi della giornata, come nelle figure (3.4), (3.5), (3.6) del paragrafo 3 di questo lavoro.

Il significato di questi cosiddetti "disegnini" va oltre gli obiettivi della rappresentazione perché permette all'insegnante di mostrare concretamente il movimento della Terra intorno al Sole (interrelazione con le Scienze) e le modifiche delle figure attraverso la prospettiva (interrelazione con l'Arte).

Ringraziamenti

Questo lavoro è dedicato al prof. Bruno Rizzi che, alle elevate conoscenze scientifiche, associava una carica umana che il sottoscritto ha sentito fin dal primo incontro.

Oggi, venticinque anni dopo la scomparsa, mi preme ricordare l'insegnamento che ho ricevuto e che ho cercato di trasmettere ai giovani docenti, con i quali ho avuto l'onore e l'onere di seguire nei vari corsi di Formazione, con lo stesso entusiasmo e impegno con cui sono stato seguito da Bruno. Sento inoltre il dovere di sottolineare la gratitudine nei confronti del prof. Cesare Cundari, per avermi dato la possibilità di imparare e divulgare temi così importanti per la crescita culturale delle nuove generazioni, con l'auspicio che se ne rendano conto anche gli addetti ai lavori della comunità scolastica.

Bibliografia

Casolaro F., Eugeni F. (1996). *Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie*. Atti del Convegno "Aspetti multidisciplinari della didattica della matematica" - Teramo, 1-3 dicembre 1995. *Ratio Matematica* n. 1, 1996 - pp. 23-33.

Casolaro F., Cirillo L. (1996). *Le trasformazioni omologiche*. Atti Convegno Nazionale Mathesis "I fondamenti della matematica per la sua didattica". - Verona, 28-30 novembre 1996 - pp. 309-318.

Casolaro F. , Santarossa R. (1997). *Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche*. Congresso Nazionale

Mathesis 1997: "Attività algoritmica e pensiero dialettico nell'insegnamento della Matematica". Caserta, 28-31 ottobre 1997 - pp. 213-219.

Casolaro F. (2002). *Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*. Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo" - 17-19 ottobre Bergamo 2002 - pp.185-198.

Casolaro F. (2003). *Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica* - Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio" Vasto, 10-12 aprile 2003; pp. 129-148.

Casolaro F., Pisano R. (2006). *Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*. Atti del XXVI Congresso Nazionale di "Storia della Fisica e dell'Astronomia" (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura "Valle Giulia" dell'Università di Roma "La Sapienza", pp. 221-231.

Casolaro F., Prosperi R. (2011). *La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*. Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011, Editore 2C Contact.

Casolaro F., Pisano R. (2011). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One) - In *History Research* - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pp. 47-60.

Casolaro F. (2014). L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola.

la?. In *Science & Philosophy Divulgation* Fascicolo 1 (2014) - Fondazione "Panta Rei" Numero speciale di *Ratio Mathematica* - ISSN: 2282-7757.

Casolaro F., Rotunno A. (2015). *Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations*. Brno, Czech Republic: University of Defence.

Casolaro F., Rotunno A. (2019). L'ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo. In *Matematica, Architettura, Fisica, Natura*. Roma: Aracne 2019, pp. 106-122.

Cundari C. (1991). *Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie*. Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma;; 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991.

Franchetta A. (1969). *Algebra lineare e Geometria analitica*, Napoli: Ed. Liguori.

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli.

Kline M. (1991). *Storia del pensiero matematico*. Torino: Einaudi Editore.

Il nastro di Mobius



Una antica raffigurazione del nastro è un mosaico, che rappresenta il Dio Aion contornato dallo Zodiaco, proveniente dalla città di Sentinum nei pressi dell'odierna Sassoferrato.

Il nastro di Möbius è una superficie tridimensionale scoperta nel 1858 da August Ferdinand Möbius (1790–1869).

Come si può osservare, scorrendo il nastro di Möbius con un dito possiamo ritornare all'esatto punto di partenza senza attraversare i bordi, a differenza di quanto accade nel cilindro o per una porzione di piano. Il fatto si esprime asserendo che questa superficie ha una sola faccia e che è una superficie non orientabile. Le equazioni parametriche del nastro di Mobius sono:

$$x(u,v) = [1 + (v/2) \cos(u/2)] \cos u$$

$$y(u,v) = [1 + (v/2) \cos(u/2)] \sin u$$

$$z(u,v) = (v/2) \sin(u/2)$$

$$\text{con } 0 \leq u < 2\pi, -1 \leq v \leq 1$$

Che succede tagliando un nastro di Mobius lungo la linea mediana? E tagliandolo una seconda volta?

Dante geometra

Francesco Marletta* †

*Matematico, Preside della “Scuola Marletta” di Catania

Sunto: *In un saggio del 1899, ripubblicato in forma monografica nel 1930, dal titolo “Dante geometra”, Francesco Marletta svela come Dante Alighieri avesse “divinato” l’insolubilità della quadratura del cerchio oltre cinque secoli prima che essa fosse dimostrata dal matematico tedesco Ferdinand von Lindemann nel 1882.*

Parole Chiave: *Rettificazione della circonferenza, quadratura del cerchio, Dante Alighieri, Convito.*

Abstract: *In an essay of 1899, republished in monographic form in 1930, entitled “Dante geometra”, Francesco Marletta reveals how Dante Alighieri had “divined” the insolubility of squaring the circle over five centuries before it was proved by the German mathematician Ferdinand von Lindemann in 1882.*

Keywords: *Correction of the circumference, squaring the circle, Dante Alighieri, Convito.*

Premessa della Direzione

Nel fondo librario ereditato da mio nonno Giuseppe Innocenzo Nicotra Toscano (per distinguersi dai numerosi altri “Nicotra” di Catania, mio nonno aggiungeva al cognome paterno anche quello materno: Toscano) è contenuto un libriccino di appena 16 pagine dall’intrigante titolo *Dante*

geometra, pubblicato nel 1930 a Catania dall'Officina Grafica Moderna. Si tratta di un saggio ripubblicato in forma monografica a cura della Scuola Marletta in occasione del compleanno del suo Autore nonché preside della Scuola: il prof. Francesco Marletta, matematico come il più noto fratello Giuseppe Marletta, che fu professore ordinario di Geometria Proiettiva e Descrittiva all'Università di Catania dal 1926 al 1943 e anche musicista, particolarmente noto per le sue ricerche sugli iperspazi ad un numero finito qualunque di dimensioni e per quelle sugli spazi ad infinite dimensioni, da lui stesso chiamati ultraspazi.

Come afferma lo stesso Marletta nella prefazione, il saggio fu pubblicato per la prima volta nel 1899, nella rivista «La Cronaca d'oro» diretta da mio nonno paterno, ma non incontrò quell'attenzione e quei riconoscimenti che invece meritava, sia da parte dei letterati sia da parte dei matematici, fatta eccezione per quelli dal Marletta stesso menzionati.

Ritengo utile e interessante riproporlo sulle pagine della nostra Rivista, sia come contributo alle celebrazioni in occasione del settimo centenario della morte di Dante Alighieri, sia per le "rivelazioni", veramente inattese, sulla divinazione da parte di Dante della impossibilità della quadratura del cerchio.

Come è noto a tutti, la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio¹ sono operazioni possibili soltanto con un certo grado di approssimazione. Il problema di poter effettuare, in maniera esatta, la rettificazione della

¹ Nel primo caso si tratta di poter costruire un segmento di lunghezza uguale a quella della circonferenza; nel secondo caso, invece, si tratta di poter costruire un quadrato di area uguale a quella del cerchio, col solo uso di riga e compasso.

circonferenza e la quadratura del cerchio era rimasto insoluto fino al 1882. Fino a tale data, in altri termini, non era stato risolto ma ci si lavorava, perché si pensava che fosse un problema risolubile. In verità i matematici greci dell'Antichità avevano intuito che il problema fosse insolubile, senza però riuscire a dimostrarlo. Così molti matematici successivi tentarono invano di risolvere il problema. Fra i più noti: Oronzio Fineo nel 1544 (*Quadratura circuli*, Colines, Simon de), Vincent Leotaud nel 1654 (*Examen circuli quadraturae*, Lugduni, Guillaume Barbier), Ottavio Scarlattini nel 1690, P. de Faurè nel 1747 (*Dissertation, découverte, et demonstrations de la quadrature mathématique du cercle*, A Genève, J.P. de Faurè), Filippo Carmagnini nel 1751 (*Della quadratura del circolo e del doppiamento del cubo*, Firenze, Pietro Gaetano Viviani)

Nel 1882, finalmente, il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrò invece l'impossibilità di costruire, col solo uso di riga e compasso, un quadrato equiesteso a un dato cerchio. Poiché l'area di un cerchio di raggio r è πr^2 , occorrerebbe costruire un quadrato di lato e quindi anche poter "costruire" il numero irrazionale con l'uso esclusivo di riga e compasso. Lindemann dimostrò che π , e quindi anche la sua radice quadrata, è un numero trascendente, ovvero è un numero non-algebrico, ovvero non ottenibile come radice di una equazione algebrica (un polinomio nell'incognita x uguagliato a zero) e quindi non-costruibile.

Il lavoro di Francesco Marletta, che qui riproduco fedelmente conservando i corsivi dell'originale, asserisce per la prima volta che Dante, nel *Convito*, divinò l'insolubilità del problema della quadratura del cerchio: «... il cerchio per lo

suo arco è impossibile a qua-drare perfettamente, e però è impossibile a misurare appunto». Ma ovviamente non si tratta di una “dimostrazione”.

Luca Nicotra

PREFAZIONE

Questa mia piccola Nota fu pubblicata, l'anno 1899, nella pregiata Rivista La «Cronaca d'oro», diretta dal Prof. Dott. Giuseppe NicotraToscano, letterato e poeta degno di alta stima. La dedicai al mio Maestro Prof. Dott. Sebastiano Catania, ed oggi, con immutata devozione, mi onoro di ripetere la dedica allo Illustre Uomo.

Questo mio saggio fu lodato, oltre che dal Prof. Sebastiano Catania e da Giuseppe Guarnaccia, compianto mio Professore di Lettere italiane, dai miei grandi Maestri Mario Rapisardi, Luigi Marino, Vincenzo Casagrandi, Antonio Zocco - Rosa, dai miei amici Prof. Dott. Carlo Tommaso Aragona, illustre filosofo, pedagogista, letterato e poeta, Prof. Dott. Giuseppe Nicotra Toscano, Prof. Dott. Rosario Pulvirenti, da Giuseppe Marletta, sommo matematico, mio fratello, e da pochi altri.

Ma nel pubblico trovò una glaciale indifferenza. Matematici e Letterati non lo degnarono di alcuna considerazione. I primi affettarono un sacro disdegno, un falso orgoglio offeso per il profano, che osava sovvertire la loro opinione, affermando un fatto, che, per loro, puri idealisti, non esiste, non deve esistere. Gli altri presero l'atteggiamento di chi ode un linguaggio, che non intende, e non videro quale importante contributo io apportavo agli studi danteschi.

Qualche giornale si occupò più di me che della mia Nota, con parole benevoli, ma non osando entrare nell'esame della questione. Solo la Rivista Parlamentare Roma pubblicò una recensione, in cui chiamò il mio scritto un curioso saggio, pur affermando che dimostravo che l'insolubilità del

problema della quadratura del cerchio era stata proclamata da Dante prima che dal Linde-mann.

Ma se l'importante Rivista, diretta da T. Pala-menghi Crispi, riconosceva che io dimostravo tanto, perché trovò curioso il saggio? E non trovò niente di interessante in quanto io pervenivo a dimostrare, e che errato non apparve a quella Redazione?

Nonostante quanto ho detto, io, che non ho mai pubblicato per ottenere fama o denaro, ma solo per il trionfo della verità, dopo trent'anni, essendo esaurita da tempo la prima edizione, oggi credo opportuno di pubblicare questa seconda, perché sono convinto che è favilla di vero, che potrà suscitare una bella fiamma di verità, dando al grande Poeta ciò che gli spetta, e, provando, anco una volta, che la scienza non è retaggio di determinate classi di persone, ma può sorgere da chi, pur non appartenendo a quelle caste, intenda, non la semplice tecnica scientifica, ma la vera Filosofia, che è la vita.

Francesco Marletta

Nel trentesimo-terzo del *Paradiso* si legge:

*Qual' è 'l geométra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
Pensando, quel principio ond'egli indige,*

*Tal era io a quella vista nuova;
Veder voleva come si convenne
L'imago al cerchio, e come vi s'indova.*

*Ma non eran da ciò le proprie penne:
Se non che la mia mente fu percossa
Da un fulgore, in che sua voglia venne.*

*All'alta fantasia qui mancò possa :
Ma già volgeva il mio disiro e il velle,
Sì come ruota che igualmente è mossa,*

L' Amor che muove il Sole e l'altre stelle.

Così il Poeta pone fine all'ultimo lavoro. È lo intelletto che *appressa sè al suo disire*, ed in esso si profonda. È il massimo a cui sia dato pervenire al veder mentale: qui manca possa all'alta fantasia; qui cessa la sublime visione.

La preghiera di Bernardo, e Beatrice e i beati supplicanti ottengono al poeta, dalla Santissima Vergine, la grazia di poter fissare ultimamente lo sguardo nella trina unità di Dio, e particolarmente nella divina umanità di Gesù Cristo.

La solennità del momento richiede la solennità de' concetti, e Dante, dopo cotanta sapienza, sapientemente chiude la cantica, raccogliendo le forze del suo altissimo ingegno, e perviene alla visione dell'umanamente inconcepibile, e l'afferma, e la lumeggia con argomenti rigorosamente

scientifici, specie se si tenga conto del tempo in cui Egli visse. Ma la dottrina di Dante non si ferma all'età di mezzo, come qualcuno asserì; essa vola attraverso i secoli, ed ancora il commento dell'eterno poema non è che un insieme di tentativi più o meno fortunati.

È perciò mio intendimento di far rilevare l'alto valore scientifico della terzina :

*Qual' è il géométra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
Pensando, quel principio ond'egli indige,*

Le Chiose ricordano Archimede, che non si accorgeva, speculando, che i soldati romani, espugnata Siracusa, li eran sopra.

Tale spiegazione è un prodotto d'impressione non di logica coerenza.

Nella terzina notata, Dante accenna al famoso problema della quadratura del cerchio.

Occorre rilevare che il poeta dà una speciale importanza al detto problema: difatti se ne occupa in un altro luogo della *Divina Commedia* e nel *Convito*.

Archimede fu il primo a determinare con approssimazione il rapporto della circonferenza al diametro, paragonando i perimetri de' poligoni regolari convessi iscritti e circoscritti di 6, 12, 24, 48, 96 lati, e ciò molto prima del 212 a. C., anno in cui egli cessò di vivere.

Gl'Indiani del XII secolo conoscevano questo rapporto con l'approssimazione per eccesso di meno di $1/10^5$.

Si occuparono della stessa questione Metius, geometra olandese del XVII secolo, il Ludolph di Colonia (anno 1539),

il Vega, geometra austriaco (anno 1793), il Dase (1844), il Richter (1854); indi il Shanks spinse il calcolo sino alla 707ma cifra decimale.

Se ne occuparono pure il Wallis, il Brounker e il Leibniz.

Il rapporto della circonferenza al diametro s'indica con la lettera greca π le cui prime trenta cifre decimali si possono agevolmente ritenere mercè i seguenti versi:

*Que j'aime a faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.*

Se a ciascuna parola si sostituisce il numero delle lettere che la compongono, si trova:

$\pi = 3,141592653589793238462643383279.....$

Se il numero π fosse razionale, sarebbe facile calcolare le misure della circonferenza e del cerchio, data quella del raggio.

Ma è impossibile esprimere esattamente il numero π con un numero finito di cifre; infatti il Lambert, nel 1761, dimostrò che π è irrazionale, al che il Legendre aggiunse che tale è anche π^2 ; e da ultimo, nell'anno 1882, il Lindemann dimostrò che π non può essere radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali, cioè esso è trascendente.

Dal teorema del Lindemann segue che non è possibile per mezzo di rette e di circonferenze, cioè facendo solamente uso della riga e del compasso, rettificare la circonferenza, nè quadrare il cerchio, vale a dire è impossibile costruire un segmento eguale al segmento compreso tra le classi contigue

dei perimetri iscritti e circoscritti, o un quadrato equiesteso al cerchio.

Si ha tuttavia la rettificazione approssimata della circonferenza e la quadratura approssimata del cerchio: di ciò, per il nostro assunto, è inutile occuparci.

Dunque: fino al 1882 il problema della quadratura del cerchio si considerava come insoluto; dal 1882, per merito del Lindemann, si sa che è un problema insolubile: così concludono i Geometri.

Dante, prima del Lindemann, dichiarò l'insolubilità del problema.

Nel canto decimoterzo del *Paradiso*, san Tommaso dichiara Salomone senza pari come re, ma, come uomo, inferiore ad Adamo e Gesù Cristo, opere immediate di Dio. Termina dimostrando i pericoli del lievemente concludere o giudicare.

*E questo ti fia sempre piombo a' piedi,
Per farti muover lento, com'uom lasso,
Ed al sì ed al no, che tu non vedi :*

*Chè quegli è tra gli stolti bene abbasso,
Che senza distinzione afferma o nega,
Così nell'un come nell'altro passo;*

*Perch' egli incontra che più volte piega
L' opinion corrente in falsa parte,
E poi l'affetto lo intelletto lega.*

*Vie più che indarno da riva si parte,
Perchè non torna tal qual ei si move,
Chi pesca per lo vero e non ha l'arte:*

E di ciò sono al mondo aperte prove

*Parmenide, Melisso, Brisso, e molti
Li quali andavan e non sapean dove.*

Il De Marzo, nel suo magnifico commento, ingiustamente oggi negletto, così si esprime :

Brisso, filosofo, rammentato da Dante con Parmenide e con Melisso, fu sconosciutissimo a tutti i comentatori, e nè dal Landino, nè dal Vel-lutello venne nominato, bensì dall' Anonimo unicamente, il quale poi donde ne abbia attinto conoscenza non ci lascia punto comprendere; e così ne parla: Brisso, con false dimostrazioni, volle del circolo trovare proporzionalmente il quadro, del quale tocca Aristotile nel libro delle Posteriora, riprovando suoi falsi argomenti.

Brisso si acquistò fama per i suoi sofismi: egli dimostrò, con false argomentazioni, la possibilità della quadratura del cerchio, e tale dimostrazione è cotanto sottile ed arguta che il grande Stagirita sentì il bisogno di combatterlo. Brisso non è conosciuto per altro. Dante lo cita come esempio di uomo stolto, che, senza averne l'arte, *pesca per lo vero*; ed essendo Brisso unicamente conosciuto per avere ammesso la quadratura del cerchio, negando lui vero filosofo, Dante nega l'ammettere la quadratura del cerchio come verità scientifica, e perciò Egli esclude la possibilità della quadratura del cerchio.

Aristotele, nel Lib. I . della *Logica*, confuta tanto Melisso, quanto Parmenide. Confuta pure Brisso negli *Ultimi Analitici*. A questo punto si può obbiettare: Dato che Dante, citando Brisso, abbia inteso negare la possibilità della quadratura del cerchio, ciò facendo, il Poeta esprime un suo pensiero originale, oppure ripete quanto già disse Aristotele?

Il Poeta esprime un suo pensiero originale. Difatti Aristotele, negli *Ultimi Analitici*, si contenta di confutare le argomentazioni di Brisso, ma non si pronunzia sulla solubilità o insolubilità del problema, poiché provare che una data dimostrazione sia errata non equivale a provare che nessun'altra dimostrazione possa sciogliere giustamente la questione.

La citazione di Brisso ci ha permesso una dimostrazione indiretta del nostro assunto. Ora daremo la dimostrazione apodittica.

Ritorniamo alle terzine citate del canto trentesimo-terzo del *Paradiso*.

È utile accertare il significato di alcune parole della terzina propostaci:

S'affige per licenza poetica sta invece di *s'affigge*.

Principio: la costruzione cercata.

Indige: latino *indiget*: ha bisogno.

Nella terzina seguente si trova il verbo *indoversi*, voce dantesca che significa stabilirsi in un luogo.

Dante dice: qual'è il Geometra, il quale, con tutto ardore, si dà alla ricerca della soluzione del problema della quadratura del cerchio, (ricerca, che si tenta, perché il problema si reputa insoluto, non insolubile), e pensando e ripensando, non giunge a trovare il principio di cui ha bisogno; tale era io al cospetto di quella nuova vista dell'effigie umana che s'indovava in quei tre misteriosi cerchi: perciocchè io ardeva di vedere come l'umanità fosse congiunta con la divinità, e come tale ipostasi fosse fatta. *Ma non eran da ciò le proprie penne*.

Dunque, ponendo la corrispondenza fra i termini della similitudine, abbiamo: È impossibile che l'uomo intenda il mistero della divina umanità di Gesù Cristo, com'è impossibile che il geometra risolva il problema della quadratura del cerchio: il detto mistero è inaccessibile, come insolubile è il detto problema.

Nel Tratt. II, Cap. 14 del *Convito* sta scritto:

La Geometria si muove intra due repugnanti ad essa; siccome tra 'l punto e 'l cerchio (e dico cerchio largamento ritondo, o corpo, o superficie), chè, siccome, dice Euclide, il punto è principio di quella, e, secondo, ch'ei dice, il cerchio è perfettissima figura in quella che conviene però aver ragione di fine; sicchè tra 'l punto e il cerchio, siccome tra principio e fine, si muove la Geometria. E questi due alla sua certezza repugnano; che 'l punto per la sua indivisibilità è immisurabile e il cerchio per lo suo arco è impossibile a qua-drare perfettamente, e però è impossibile a misurare appunto.

Più manifestamente non si può dichiarare l'insolubilità del problema.

Ma Dante vide l'impossibilità della quadratura del cerchio, oppure si pronunziò in tal guisa per la vana riuscita degli sforzi dei matematici intorno al detto problema, senza che Egli ne abbia avuto una esatta visione scientifica?

Dante accennò alla dimostrazione dell'impossibilità del problema. Difatti Egli dice: «*Il cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a mi-surare appunto*».

Resta a vedere se Dante abbia inteso parlare specificatamente della circonferenza, oppure sia caduto nell'errore della vecchia scuola, cioè che il cerchio è impossibile a quadrare appunto per la eterogeneità della linea retta e della curva: in tal caso Dante sarebbe caduto in un errore gravissimo, poiché esistono figure chiuse da linee curve, che si possono quadrare esattamente. Esempio: le lunule d'Ippocrate.

Dante intende parlare specificatamente dell'arco del cerchio, e ciò, senza difficoltà, si rileva dal possessivo *SUO* nell'espressione: *il cerchio per lo suo arco*, e dalla parentesi che Egli, da persona accorta, ha la premura di aggiungere: *e dico cerchio largamento ritondo, o corpo, o superficie*.

Finalmente dalle espressioni: *è impossibile a quadrare perfettamente, è però è impossibile a misurare appunto*, si desume che Dante non escludeva la rettificazione approssimata della circonferenza e la quadratura approssimata del cerchio.

Dunque l'impossibilità della quadratura del cerchio fu divinata e dichiarata da Dante.

Casi particolari del teorema di Fermat

Antonio Della Rocca* Alberto Trotta**

* Ingegnere; dellaroccaantonio77@gmail.com

** Docente I.I.S.S. "S. Caterina Amendola" Salerno; albertotrotta@virgilio.it

Sunto: *si suddivide la dimostrazione della impossibilità che una terna di numeri interi soddisfi l'eguaglianza di Fermat in otto casi esaustivi. Di questi quattro si escludono immediatamente sulla base del criterio della parità e della disparità. Gli altri quattro casi si riconducono alla dimostrazione di due casi. Detti due casi vengono trattati considerando separatamente n pari ed n dispari. Sono stati esaminati detti quattro casi e si è giunti a soluzione per tre di essi, mentre per il rimanente si è tracciato il percorso per pervenire alla soluzione. Gli autori ritengono che la validità della presente memoria consista nell'aver affrontato il problema in parola con una metodologia semplice, basata su considerazioni di aritmetica e algebra elementare, e sulle proprietà dei numeri interi.*

Parole chiave: *proprietà dei numeri interi, criterio di parità e disparità, analisi della divisione per 2 delle potenze dei numeri interi, fattorizzazione dei numeri interi, Teorema di Pitagora.*

Abstract: *The demonstration of Fermat's Last Theorem is divided into eight sub-cases. Four of these sub-cases are excluded basing on properties of natural numbers. The other four sub-cases are referred to the resolution of three cases. The interest of this articles consists in the use of a simple method, based on elementary considerations.*

Keywords: *properties of integers, criterion of parity and disparity, analysis of the division by 2 of the powers of integers, factorization of integers, Pythagorean theorem*

1 - Premessa

L'ultimo Teorema di Fermat asserisce che non è possibile trovare tre interi positivi x , y , z , tali che valga la seguente uguaglianza:

$$z^n = x^n + y^n \quad (1)$$

nelle seguenti ipotesi:

$$\begin{aligned} n &\geq 3 \\ x, y, z &\in \mathbb{N} \\ x, y \text{ e } z &\neq 1 \\ z &> y > x \end{aligned}$$

Le considerazioni espone si basano prevalentemente su alcune proprietà dei numeri interi, che si riportano in Appendice 1 per comodità di esposizione, e sul criterio di parità e di disparità.

2 - Parte prima. I casi possibili

2.1 - Casi possibili

Dal punto di vista della parità e disparità delle basi i casi possibili sono i seguenti:

- B.1 x, y e z pari
- B.2 x, y e z dispari
- B.3 x e y pari, z dispari
- B.4 x e z pari, y dispari
- B.5 y e z pari, x dispari

B.6 x e y dispari, z pari

B.7 x e z dispari, y pari

B.8 y e z dispari, x pari

Con riferimento a quanto sopra la dimostrazione è stata suddivisa nei due seguenti sottogruppi:

- Il primo che comprende i casi B.2, B.3, B.4 e B.5 in cui non sono necessarie particolari elaborazioni poiché i risultati sono evidenti.
- Il secondo che comprendente i casi B.1, B.6; B.7, B.8 la cui soluzione si riduce all'esame dei soli casi B.6. e B.8.

Primo sottogruppo

Caso B.2

1. x, y e z dispari
2. $[dispari]^n = [dispari]^n + [dispari]^n$, ossia:
3. $dispari = dispari + dispari$
4. Essendo: $dispari + dispari = pari$; ciò implica che l'eguaglianza (1) non è vera.

Caso B.3

1. x e y pari, z dispari
2. $[dispari]^n = [pari]^n + [pari]^n$
3. $dispari = pari + pari$
4. Essendo: $pari + pari = pari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Caso B.4

1. x e z pari, y dispari
2. $[pari]^n = [pari]^n + [dispari]^n$
3. $pari = pari + dispari$
4. Essendo: $pari + dispari = dispari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Caso B.5

1. y e z pari, x dispari
2. $[pari]^n = [dispari]^n + [pari]^n$
3. $pari = dispari + pari$
4. Essendo: $dispari + pari = dispari \Rightarrow$ eguaglianza non vera.

Secondo sottogruppo

Nell'esame del seguente sottogruppo verranno utilizzate anche proprietà della fattorizzazione dei numeri interi.

Caso B.1

1. x , y e z pari
2. x pari implica anche x^n pari che può essere scritto in forma fattorizzata come:

$$x^n = (2^{i_0} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m})^n, \text{ con } q_1, \dots, q_m \text{ tutti numeri primi.}$$
3. Analogamente vale la stessa considerazione per y e z , anch'essi numeri interi pari:

$$y^n = (2^{j_0} r_1^{j_1} r_2^{j_2} \dots r_h^{j_h})^n, \text{ con } r_1, \dots, r_h, \text{ tutti numeri primi.}$$

$$z^n = (2^{k_0} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_t^{k_t})^n, \text{ con } s_1, \dots, s_t \text{ tutti numeri primi.}$$

4. L'uguaglianza (1) pertanto può essere scritta come:

$$(2^{i_0} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m})^n + (2^{j_0} r_1^{j_1} r_2^{j_2} \dots r_h^{j_h})^n = (2^{k_0} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_t^{k_t})^n$$

Da cui segue:

$$2^{i_0 n} \text{Dispari}_1^n + 2^{j_0 n} \text{Dispari}_2^n = 2^{k_0 n} \text{Dispari}_3^n.$$

Indicando rispettivamente con D_1 , D_2 e D_3 le variabili precedenti si può scrivere:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{j_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n. \quad (2)$$

5. Dividendo i tre termini della terza uguaglianza (2), di cui al punto 4, per il minore dei fattori costituiti dalle potenze di 2, si possono avere tre casi:

Primo caso: Supponiamo sia $2^{i_0 n}$ il minore. In questo caso si otterrebbe:

$$D_1^n + 2^{(j_0 - i_0)n} D_2^n = 2^{(k_0 - i_0)n} D_3^n, \text{ ossia: } \text{dispari} + \text{pari} = \text{pari}, \text{ il che è assurdo.}$$

Nel caso fosse $2^{j_0 n}$ il minore, si ricadrebbe in una situazione analoga.

Secondo caso: Supponendo sia $2^{k_0 n}$ il minore, si avrebbe:

$$2^{(i_0 - k_0)n} D_1^n + 2^{(j_0 - k_0)n} D_2^n = D_3^n, \text{ ossia: } \text{pari} + \text{pari} = \text{dispari}.$$

Terzo caso: Si supponga ora l'uguaglianza di tutte e tre o di due delle potenze del 2.

- a. Se tutte le predette potenze sono uguali si dividono tutti e tre i termini dell'uguaglianza considerata per il predetto valore ($2^{i_0 n}$) e si ottiene: $D_1^n + D_2^n = D_3^n$, ossia *dispari+dispari=dispari*.
- b. Si supponga ora di avere le due potenze pari del primo membro della relazione (2) uguali, la stessa relazione si può scrivere nella forma semplificata:

$$2^{j_0 n} (D_1^n + D_2^n) = 2^{k_0 n} D_3^n \quad (2.a)$$

- c. In questa eventualità, però, vanno esaminate ulteriori condizioni:

c.1 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 < i_0$.

Dividendo ambo i membri per $2^{k_0 n}$ la (2.a) si trasforma nella: $2^{(j_0 - k_0)n} (D_1^n + D_2^n) = D_3^n$, che conduce all'assurdo di ottenere: *pari=dispari*.

c.2 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 = i_0$

Si rimanda al punto a.

c.3 Sia $i_0 = j_0$ e $k_0 > i_0$. In questo caso la (2) si può scrivere:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{i_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n$$

e quindi:

$$D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n \quad \text{ove } h = k_0 - i_0 \quad (3)$$

L'eguaglianza (3) corrisponde al caso B.6.

Finora non si è fatta alcuna distinzione tra n pari e n dispari.

Esaminiamo la (3) con n pari, in questo caso:

$$\frac{D_1^n + D_2^n}{2} \text{ risulta sempre dispari.}$$

Infatti la eguaglianza (3) si può scrivere dividendo primo e secondo membro per due nel modo seguente:

$$\frac{D_1^{2m} + D_2^{2m}}{2} = \frac{2^{h2m} D_3^{2m}}{2}$$

In dette condizioni il primo membro è sempre dispari mentre il secondo resta pari, e quindi l'eguaglianza di partenza è falsa.

Infatti un numero dispari elevato a una potenza pari è sempre un numero dispari, che diviso per due si presenta sempre nella forma $2m + 0,5$; sommando due numeri del tipo

$2m + 0,5$ si ottiene un numero dispari (la dimostrazione in dettaglio è riportata in Appendice 3).

Con n dispari, quindi $n = 2m + 1$ con m intero ≥ 1

Si possono avere, nella ipotesi $D_2 > D_1$, due sottocasi ⁽¹⁾:

1. $D_2 - D_1 = 4s$ con s intero ≥ 1 per cui $D_2 = D_1 + 4s$

In tale caso la eguaglianza (3) si può scrivere dividendo primo e secondo membro per due nel modo seguente:

$$\frac{D_1^{2m+1} + (D_1 + 4s)^{2m+1}}{2} = \frac{2^{h(2m+1)} D_3^{2m+1}}{2}$$

In dette condizioni il primo membro è sempre dispari mentre il secondo resta pari, e quindi l'eguaglianza (3) è falsa.

Infatti un numero dispari elevato a una potenza dispari è sempre un numero dispari; nella ipotesi di cui sopra che la distanza tra D_2 e D_1 sia un multiplo di 4, il primo membro della relazione di cui sopra è sempre del tipo $2m + 0,5 + 2m + 0,5$ o $2m + 1 + 0,5 + 2m + 1 + 0,5$ e pertanto è sempre un numero dispari. (la dimostrazione in dettaglio è riportata in Appendice 4).

2. $D_2 - D_1 = 2 + 4s$ con s intero ≥ 0 per cui $D_2 = D_1 + 2 + 4s$

⁽¹⁾ Il caso $D_1 = D_2$ è riportato in Appendice 5; con $D_1 \neq D_2$ si è considerato il $D_2 > D_1$, il caso $D_2 < D_1$ si tratta in maniera analoga

Consideriamo la (3) $D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n$ ove $h = k_0 - i_0$

Come è noto, con n intero dispari

$$\frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d(\text{dispari})$$

Posto

$$D_1 + D_2 = 2^w D_4,$$

ove D_4 è la parte dispari di $D_1 + D_2$ e dividendo i due membri della (3) per $D_1 + D_2$, si ottiene

$$\frac{2^{hn} D_3^n}{D_1 + D_2} = \frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d$$

e anche

$$\frac{2^{hn} D_3^n}{2^w D_4} = \frac{D_1^n + D_2^n}{D_1 + D_2} = d$$

(3b)

Se

$$2^{hn} \neq 2^w$$

l'uguaglianza (3b) non è verificata divenendo del tipo pari = dispari.

Pertanto condizione necessaria affinché la (3) sia possibile è che

$$2^{hn} = 2^w.$$

Ne consegue

$$D_3^n = D_4 \times d$$

quindi per dimostrare che D_3^n è una potenza n -esima occorre dimostrare che

$D_4 \times d$ è una potenza n -esima.

- d. Si supponga ora di avere uguali una potenza del primo membro e una potenza del secondo membro, la relazione (2), che per comodità si riporta:

$$2^{i_0 n} D_1^n + 2^{j_0 n} D_2^n = 2^{k_0 n} D_3^n$$

- e. Assume i seguenti aspetti:

d.1 Sia $j_0 = k_0$ e $k_0 < i_0$

In questo caso si ottiene:

$$2^{(i_0 - k_0)n} D_1^n + D_2^n = D_3^n \quad (4)$$

che corrisponde al caso B.8.

sia $i_0 = k_0$ e $k_0 < j_0$ si ottiene

$$D_1^n + 2^{(j_0 - k_0)n} D_2^n = D_3^n \text{ che corrisponde al caso B.7.}$$

Considerando n dispari e scrivendo la (4) nel modo seguente:

$$2^{(i_0-k_0)n} D_1^n = D_3^n - D_2^n$$

risulta che:

- se $D_3 - D_2 = 2$ il secondo membro diviso per 2 è sempre dispari
- se $D_3 - D_2 = 2+4s$ il secondo membro diviso per 2 è sempre dispari
- se $D_3 - D_2 = 4s$ il secondo membro diviso per $4s$ è sempre dispari

e quindi i primi due casi non sono proponibile; il terzo è da esaminare solo se la eguaglianza è verificata.

La relativa dimostrazione è facilmente costruibile con i meccanismi riportati in Appendice.

d.2 Sia $j_0 = k_0$ e $k_0 > i_0$

In questo caso si ottiene:

$$D_1^n + 2^{(k_0-i_0)n} D_2^n = 2^{(k_0-i_0)n} D_3^n$$

che non è proponibile.

d.3 Sia $i_0 = k_0$ e $k_0 > j_0$

In questo caso si ottiene:

$$2^{(k_0-j_0)n} D_1^n + D_2^n = 2^{(k_0-j_0)n} D_3^n$$

che non è proponibile

Consideriamo ora il caso con n pari uguale a 4, z dispari, x dispari e y pari

Posto

$$z^4 = x^4 + y^4$$

si può scrivere

$$(z^2)^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2$$

Da cui si evince che z^2 , x^2 , y^2 sono una terna pitagorica, che, come è noto, sono legati dalle seguenti relazioni nel caso di una terna pitagorica primitiva:

$$\begin{aligned} z^2 &= h^2 + k^2 \\ y^2 &= 2h k \\ x^2 &= h^2 - k^2 \end{aligned} \quad 5)$$

con h e k interi positivi primi tra di loro, uno pari e l'altro dispari e $h > k$ e pertanto, avendo posto $z^4 = x^4 + y^4$ deve risultare:

$$(h^2 + k^2)^2 = (2hk)^2 + (h^2 - k^2)^2 \quad 6)$$

Esaminando le 5) si evince che essendo:

$$h^2 + k^2 + h^2 - k^2 = z^2 + x^2$$

risulta

$$2h^2 = z^2 + x^2$$

e quindi, essendo x e z dispari, deriva che h deve essere dispari e quindi k pari.

Dall'esame delle 6) emerge che se $(h^2 - k^2)$ fosse un quadrato dispari (x^2) ed $(h^2 + k^2)$ un quadrato dispari (z^2), essendo:

$$z^2 = h^2 + k^2 = (h + k)^2 - 2hk$$

e quindi

$$2hk = (h + k)^2 - z^2$$

Che si può scrivere:

$$y^2 = 2hk = (h + k - z)(h + k + z)$$

e quindi

$$y^4 = (h + k - z)^2 (h + k + z)^2$$

e

$$h + k - z = a^2$$

$$h + k + z = b^2 \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ interi pari}$$

sommando:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = h + k$$

e si ottiene pari = dispari, contrariamente all'ipotesi $(h + k)$ *dispari*, e quindi l'eguaglianza di Fermat con $n = 4$ e con z, x *dispari* e y *pari* non trova soluzioni in N .

Per n *pari* multiplo di 4:

$$z^n = x^n + y^n$$

si può scrivere: $(z^m)^2 = (x^m)^2 + (y^m)^2$

$$m = 2n$$

e la dimostrazione è analoga alla precedente.

Consideriamo ora il caso n pari non multiplo di quattro e cioè:

$n = 2(2m + 1)$ con z dispari, x dispari e y pari.

Posto $z^n = x^n + y^n$

Si può scrivere $(z^{2m+1})^2 = (x^{2m+1})^2 + (y^{2m+1})^2$

e pertanto la terna z^{2m+1} , x^{2m+1} e y^{2m+1} è una terna pitagorica, che come tale deve soddisfare le seguenti eguaglianze:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 60 \cdot m_1 \quad 7)$$

$$x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 12 \cdot m_2 \quad 8)$$

con m_1 e m_2 interi.

Se m_1 è dispari la eguaglianza 7) non è rispettata, in quanto la parte pari di 60 è pari a 2^2 mentre la prova pari di y^{2n+1} è almeno 2^3 e quindi risulta una eguaglianza del tipo pari = dispari.

Con m_1 pari esaminiamo i casi possibili:

$$a) \quad x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} \cdot z^{2m+1} = 60 \cdot m_1 \quad 9)$$

$$\text{essendo } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{risulta: } m_1 = 2^{2m-1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2m}$$

$$\text{e} \quad y^{2m+1} \cdot x^{2m+1} = 12 \cdot m_2 \quad 10)$$

$$\text{essendo } 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{risulta: } m_2 = 2^{2m-1} \cdot 3^{2m}$$

dalle 9) e 10) risulta: $z^{2m+1} = 5 \cdot \frac{m_1}{m_2}$

e quindi $z^{2m+1} = 5 \cdot 5^{2m} = 5^{2m+1}$

inoltre: $x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 2^{2m+1} \cdot 3^{2m+1}$

e quindi $x^{2m+1} = 3^{2m+1}$

$$y^{2m+1} = 2^{2m+1}$$

ma non essendo la terna 5^{2m+1} , 3^{2m+1} e 2^{2m+1} una terna pitagorica

l'ipotesi iniziale $z^{2(2m+1)} = x^{2(2m+1)} + y^{2(2m+1)}$ è falsa.

b) nel caso esaminato al punto a) risulta che:

$$- m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1}$$

$$- m_2 \cdot 12 = 6^{2m+1}$$

pertanto:

$$b1) \text{ se } m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1} \cdot 2^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

con $d = \text{intero dispari}$, risulta:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 30^{2m+1} \cdot 2^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

$$\text{da cui: } z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 60^{2m+1} \cdot d^{2m+1} \quad 1)$$

che risulta del tipo dispari = pari

$$b2) \text{ se } m_1 \cdot 60 = 30^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

risulta:

$$z^{2m+1} \cdot x^{2m+1} \cdot y^{2m+1} = 30^{2m+1} \cdot d^{2m+1}$$

ma detta eguaglianza è improponibile in quanto il secondo membro non sarà mai del tipo $m_1 \cdot 60$

La procedura esposta è universale, nel senso che risolve il caso di n pari, sia con n multiplo di quattro che con $n = 2(2m + 1)$, con z dispari, x dispari e y pari.

3 - Conclusioni

L'eguaglianza di Fermat dal punto di vista della parità e della disparità delle basi presenta otto casi possibili. Di questi otto quattro non sono proponibili. Dei quattro rimanenti basta risolverne uno, cioè il caso B.1. con le tre basi pari ed n pari e dispari. Essendo le primitive di B.1. riconducibili ai casi B.6., B.7. e B.8. basta risolvere detti casi, che si riconducono a B.6. e B.7. in quanto la soluzione del B.7. risolve anche il caso B.8.

Sono stati risolti quasi tutti i sottocasi in cui si sono suddivisi i casi B.6. e B.7., in particolare completamente il caso B.6. con n pari, individuando anche il percorso per risolvere il caso con n dispari, e il caso B.7. Per quanto detto risulta anche che una terna pitagorica può essere solo del tipo $dispari = pari + dispari$.

In sintesi si è pervenuti alla situazione seguente:

	z dispari, x dispari, y pari	z pari, x dispari, y dispari
n = 2	Caso possibile	Caso non possibile
n pari > 2	Caso non possibile	Caso non possibile
n dispari	Indicato il percorso per la soluzione	Indicato il percorso per la soluzione

Gli autori ritengono rilevante che i risultati raggiunti siano stati ottenuti utilizzando le proprietà dell'aritmetica e dell'algebra elementare.

4 - Appendice

4.1 - Appendice 1

Alcune proprietà delle operazioni elementari tra numeri interi pari e dispari

1. Somma

$$\begin{aligned} [pari] + [pari] &= [pari] \\ [dispari] + [dispari] &= [pari] \\ [dispari] + [pari] &= [dispari] \end{aligned}$$

2. Prodotto

$$\begin{aligned} [pari] \bullet [pari] &= [pari] \\ [dispari] \bullet [pari] &= [pari] \end{aligned}$$

Infatti è sufficiente che uno dei numeri sia multiplo di 2 per avere un risultato *pari*.

$$[dispari] \bullet [dispari] = [dispari]$$

posto $d_1 = (n_1 + 1); d_2 = (n_2 + 1);$

in cui n_1 ed n_2 sono numeri pari si ha:

$$d_1 \bullet d_2 = (n_1 + 1) \bullet (n_2 + 1) = n_1 \bullet n_2 + n_1 + n_2 + 1$$

in cui $n_1 \bullet n_2$ è pari, n_1 ed n_2 sono pari e quindi il risultato finale è *dispari*.

3. Potenza

$$\begin{aligned} [pari^n] &= [pari] \\ [dispari^n] &= [dispari] \end{aligned}$$

4. Fattoriale

n_1 pari: $n_1! = \text{pari}$

m_1 dispari: $m_1! = \text{pari}$

4.2 - Appendice 2

1. $x = y$

2. $z > x$

3. $z^n = x^n + y^n \Rightarrow z^n = 2x^n$ da cui $z = x^n \sqrt[n]{2}$ e dunque z è irrazionale.

4.3 - Appendice 3

Consideriamo $\frac{D^{2m}}{2}$ con D intero dispari e $2m$ intero pari

Primo caso: $\frac{D}{2} = 2m + 0,5$ per cui:

$$\frac{D^{2m}}{2} = \frac{D}{2} \times D^{2m-1} = (2m + 0,5) \times D^{2m-1} = 2m \times D^{2m-1} + 0,5 \times$$

$$D^{2m-1} = \text{pari} + \frac{D}{2} \times D^{2m-2} =$$

$$= \text{pari} + \text{pari}, 5 \times D^{2m-2} = \dots = 2m + 0,5$$

Secondo caso: $\frac{D}{2} = \text{dispari}, 5$ per cui:

$$\frac{D^{2m}}{2} = \frac{D}{2} \times D^{2m-1} = \text{dispari}, 5 \times D^{2m-1} = \text{dispari} \times D^{2m-1} +$$

$$0,5 \times D^{2m-1} = \text{dispari} + \frac{D}{2} \times D^{2m-2} =$$

$$= \text{dispari} + \text{dispari}, 5 \times D^{2m-2} = \dots = \text{pari}, 5$$

Tanto detto, $\frac{D_1^{2m} + D_2^{2m}}{2}$ è sempre dispari essendo la somma di pari, 5 più pari, 5.

4.4 - Appendice 4

Se consideriamo $\frac{D_1^{2m+1} + (D_1 + 4s)^{2m+1}}{2}$ si fa notare che

con s intero ≥ 1 $\frac{D_1^{2m+1}}{2}$ e $\frac{(D_1 + 4s)^{2m+1}}{2}$, essendo la distanza

tra D_1 e $D_1 + 4s$ multiplo di quattro, sono entrambi o del tipo pari, 5 o del tipo dispari, 5 e per tanto l'espressione di cui sopra è sempre dispari.

4.5 - Appendice 5

$$D_1^n + D_2^n = 2^{hn} D_3^n \quad (3)$$

con $D_1 = D_2$ la (3) si può scrivere $2D_1^n = 2^{hn} D_3^n$
dividendo per 2 $D_1^n = 2^{hn-1} D_3^n$
e quindi dispari uguale pari.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'ing. Paolo Fargione per la lettura critica e i preziosi suggerimenti.

Si ricorda il contributo fornito in una fase iniziale dello studio dall'amico ing. Pietro Di Giuseppe, purtroppo scomparso.

Bibliografia

Frajese A., Maccioni L.(1970). *Gli elementi di Euclide*. Milano: UTET.

Niven I. (1961). *Numbers: rational and irrational*. New York: Random House.

Corri L. (2020). *Breve storia dei numeri primi*. Milano: Hoepli.

Insiemi completi del quarto ordine

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

Sunto: *Il presente lavoro è il naturale proseguimento dello studio degli insiemi di punti materiali appartenenti alla retta, contenuto nell'articolo "Insiemi completi del terzo ordine" di Franco Francia, pubblicato sul periodico di matematica, anno 33, vol. XVI, n.1, Edizioni A.f.s.u. Questo articolo, come il precedente, è rivolto, in particolare, all'attenzione dei docenti di matematica offrendo loro indicazioni su possibili percorsi didattici.*

Parole Chiave: *Punti materiali con eguale posizionamento, Insiemi completi, Complementare di un insieme di punti materiali, Insiemi congruenti.*

Abstract: *This work is the natural continuation of the study of the sets of material points belonging to the line, contained in the article 'Insiemi completi del terzo ordine' by Franco Francia, published in Periodico di Matematica, anno 33, vol. XVI, n.1, edited by A.f.s.u.. This article, like the previous one, is aimed, in particular, at the attention of mathematics teachers by offering them information on possible educational paths.*

Keywords: *Material points with equal positioning, Complete Sets, Complementary of a set of material points, Congruent Sets.*

1 – Cenni sugli insiemi di punti materiali

Richiamiamo definizioni e proprietà fondamentali degli insiemi completi in modo schematico. Per approfondire ulteriormente gli argomenti è sufficiente consultare l'articolo precedentemente citato nel sommario.

Def. 1 Sia $R \times S$ il prodotto cartesiano di R , insieme dei reali, e S , insieme dei punti dello spazio euclideo. Un sottoinsieme finito di $R \times S : I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_n P_n)$, è detto insieme di punti materiali di ordine n . In ogni elemento di I : $m_i P_i$, detto punto materiale, si distingue, oltre al punto $P_i \in S$ (indicato con lettera maiuscola), l'elemento $m_i \in R$, (indicato con lettera minuscola), detto massa associata a P_i . Diremo sostegno di I l'insieme $J = (P_1, P_2, \dots, P_n)$.

Def. 2 Prodotto di due punti materiali: $(m_i P_i)$ e $(m_j P_j)$, è il numero reale ottenuto moltiplicando il prodotto delle masse dei due punti materiali per il quadrato della distanza dei relativi punti: $(m_i P_i) \cdot (m_j P_j) = (m_i \cdot m_j) \cdot [d(P_i P_j)]^2$.

Def. 3 Il prodotto di un punto materiale $(n P)$ per un insieme di punti materiali $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_h P_h)$ è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando $(n P)$ per ciascun elemento di I : $(n P) \cdot I = \{n m_1 [d(P P_1)]^2 + n m_2 [d(P P_2)]^2 + \dots, n m_h [d(P P_h)]^2\}$. Se la massa del punto P è unitaria: $1 \cdot P$, conveniamo di indicare il prodotto così: $P \cdot I$.

Def. 4 Se il prodotto di un qualsiasi punto materiale P , di massa unitaria, per I , con $I \in R \times S$, è costante: $P \cdot I = \text{cost}$, allora, I è detto insieme completo. Se le masse di tutti gli

elementi di I sono nulle: $I = (0 \cdot P_1, 0 \cdot P_2, \dots, 0 \cdot P_h)$, I è detto insieme completo improprio.

Def. 5 Il prodotto di un numero reale r per

$I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_h P_h)$ è così definito:

$$r \cdot I = [(r \cdot m_1)P_1, (r \cdot m_2)P_2, \dots, (r \cdot m_h)P_h] = I'$$

Nota 1 È facile dimostrare che, se I è completo, anche $I' = r \cdot I$ è completo. Gli insiemi completi I e I' sono detti equivalenti.

Def. 6 Diciamo “ridotto di I ”, e scriviamo: $\text{rid.}(I)$, l'insieme di punti materiali ottenuti sostituendo gli elementi di I , aventi stessa posizione, con un unico punto materiale avente stessa posizione e massa eguale alla somma delle masse. Nel ridotto di I sono omessi gli elementi con massa nulla.

Nota 2 È facile dimostrare che, se I è completo anche $\text{rid.}(I)$ è completo.

2 - Cenni sugli insiemi del terzo ordine

Accenniamo al teorema che fissa le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali del terzo ordine omettendone la dimostrazione, facilmente reperibile mediante le indicazioni bibliografiche contenute nel sommario.

TH. 1 Sia $I = (m \cdot A, s \cdot B, n \cdot C)$ un insieme di punti materiali del terzo ordine essendo m, s, n le masse, rispettivamente, dei punti A, B, C , distinti e allineati sulla retta r . L'insieme I è completo se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ m \cdot a + s \cdot b + n \cdot c = 0 \end{cases} \quad (2,1)$$

essendo $a < b < c$ le ascisse, rispettivamente, di A, B, C, riferite ad un punto H, scelto in modo arbitrario, sulla retta r.

NOTA 3

a) Sviluppando il sistema (2,1) si hanno le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} m &= K \cdot (c - b) = K \cdot d(B, C), \quad s = -K \cdot (c - a) = -K \cdot d(A, C), \\ n &= K \cdot (b - a) = K \cdot d(A, B) \end{aligned} \quad (2,2)$$

con $K \in \mathbb{R}^*$, arbitrario.

Tenendo conto che: $(c - b) > 0$, $(c - a) > 0$, $(b - a) > 0$,

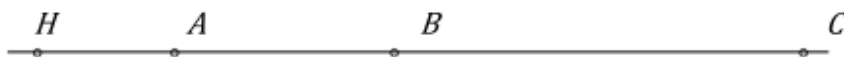


Fig. 1

i segni di m e n , masse, rispettivamente, di A e C, estremi del segmento $[A, C]$ contenente B, sono concordi; sono discordi rispetto a s , massa di B, punto interno di $[A, C]$. Evidenziando i segni delle masse di I è quindi possibile riconoscere la collocazione reciproca sulla retta r dei punti di $J = (A, B, C)$ che chiamiamo "insieme di sostegno dell'insieme completo I". Sintetizziamo quanto detto precedentemente con la seguente regola:

"Sia $I = (m A, s B, n C)$ un insieme completo; se le masse m e n sono di segno concorde, allora, i punti associati A e C sono estremi del segmento $[A, C]$; il punto B di massa s , con segno discorde rispetto ai segni di m e n , è punto interno di (A, C) ".

b) Essendo $I = (m A, s B, n C)$ un insieme completo deve risultare: $P \cdot I = \text{cost.}$ Essendo P un qualsiasi punto dello spazio lo sostituiamo con A; tenendo conto della (2,2) si ha:

$$P \cdot I = A \cdot I = m \cdot 0 + s \cdot (b - a)^2 + n \cdot (c - a)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -K(c-a) \cdot (b-a)^2 + K(c-a)^2 \cdot (b-a) = \\
 &= K \cdot (c-a) \cdot (b-a)(c-b).
 \end{aligned}$$

Oppure scriviamo così:

$$P \cdot I = K \cdot d(A, B) \cdot d(B, C) \cdot d(C, A).$$

c) Sviluppando teoremi simili al TH.1 si può verificare che insiemi di punti materiali del primo e secondo ordine siano completi solo se impropri: $I_1 = (0 \cdot P)$ e $I_2 = (0 \cdot P, 0 \cdot Q)$.

Introduciamo, di seguito, alcune definizioni che permettono di individuare agevolmente la posizione dei punti rispetto all'insieme di appartenenza.

3 – Insiemi di punti del IV ordine

Def. 7 Sia J un insieme di n punti, con $n > 2$, appartenenti alla retta r . Siano r^+ e r^- le semirette opposte, appartenenti a r , con origine $P \in J$. Se una delle due semirette aperte non contiene punti di J , allora, P è detto "estremo di J ". Se entrambe le semirette r^+ e r^- contengono elementi di J , P è detto "interno di J ".

Def. 8 Sia J un insieme di n punti non allineati, appartenenti al piano π . Siano π^+ e π^- i semipiani opposti su π con origine la retta r . Se uno dei due semipiani aperti non contiene punti di J , allora, r è detta "retta esterna". Se entrambi i semipiani di π contengono punti di J , allora, r è detta "retta interna a J ".

Def. 9 L'elemento P appartenente a J , insieme di punti non allineati del piano π , è detto punto esterno se appartiene ad una retta esterna a J ; in particolare, il punto è detto vertice se esiste una retta esterna di J contenente il solo punto P .

Def. 10 La retta esterna a J è detta aderente a J se contiene almeno due punti di J . I punti esterni di J , appartenenti ad una retta aderente a J , sono detti punti aderenti di J .

TH. 2 Sia P l'estremo di un insieme J di punti di ordine n , con $n > 2$, appartenenti alla retta r . Sia t la retta passante per P , distinta da r , e sia π il piano contenente t e r . Indichiamo con π^+ il semipiano chiuso, avente sostegno π e origine t , contenente Y , un elemento di J distinto da P . Il semipiano chiuso π^- , contenente $X \in J$, contiene tutti gli elementi di J .

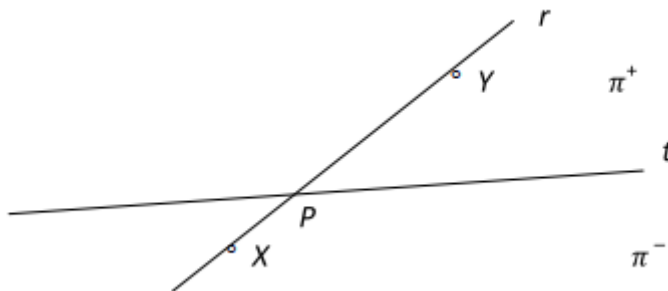


Fig. 2

Indichiamo con π^- il semipiano opposto a π^+ . Supponiamo per assurdo che, i punti $X, Y \in J$ distinti da P , risultino: $Y \in \pi^+$ e $X \in \pi^-$. Per l'assioma della partizione del piano, se Y e X appartenessero, rispettivamente, a π^+ e π^- , il segmento $[X, Y]$ conterrebbe P . In tal caso il punto P risulterebbe interno a (X, Y) , e quindi a J , in contraddizione con le ipotesi.

NOTA 4 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Effettuiamo tutte le possibili partizioni di J , i cui elementi siano coppie di punti dell'insieme. Di queste partizioni consideriamo solo quelle

contenenti coppie appartenenti a rette che si intersechino in un punto U . (escludiamo il caso di rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Def. 11 Le rette passanti per A, B e C, D si intersecano in U , punto interno sia di (A, U, B) sia di (C, U, D) . Chiamiamo coniugati interni di J gli insiemi $J' = (A, U, B)$ e $J'' = (C, U, D)$ i cui estremi sono, rispettivamente (A, B) e (C, D) .

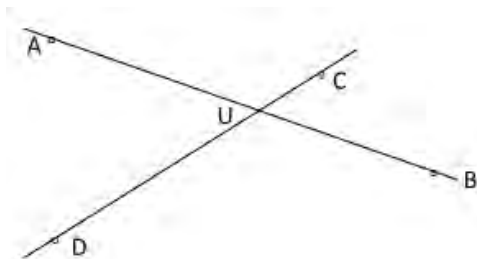


Fig. 3

Def. 12 Le rette passanti per A, C e D, B si intersecano in U , estremo di (A, C, U) e di (D, B, U) . Chiamiamo coniugate esterne di J le terne $J' = (A, C, U)$ e $J'' = (D, B, U)$.

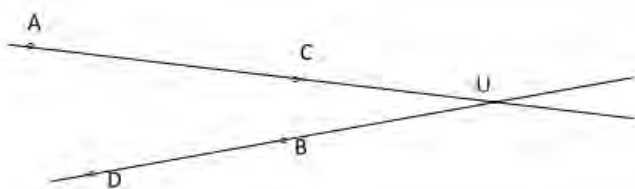


Fig. 4

Def. 13 Le rette r e s passanti, rispettivamente, per (A, B) e (C, D) si intersechino in U , punto che risulta interno a (C, D) ed esterno ad (A, B) . I due insiemi $J' = (A, B, U)$ e $J'' = (C, U, D)$ sono detti coniugati alterni di J . In particolare, J' è detto coniugato esterno di J ; l'insieme J'' è detto coniugato interno.

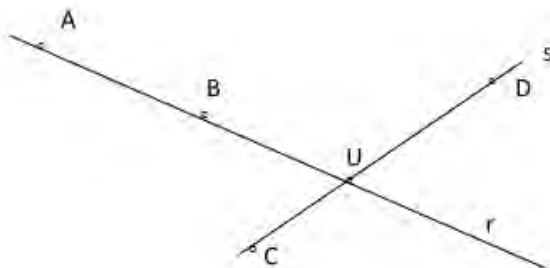


Fig. 5

TH. 3 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Se gli insiemi $J' = (A, U, B)$ e $J'' = (C, U, D)$ sono coniugati interni, allora, gli elementi di J sono tutti punti esterni dell'insieme di appartenenza.

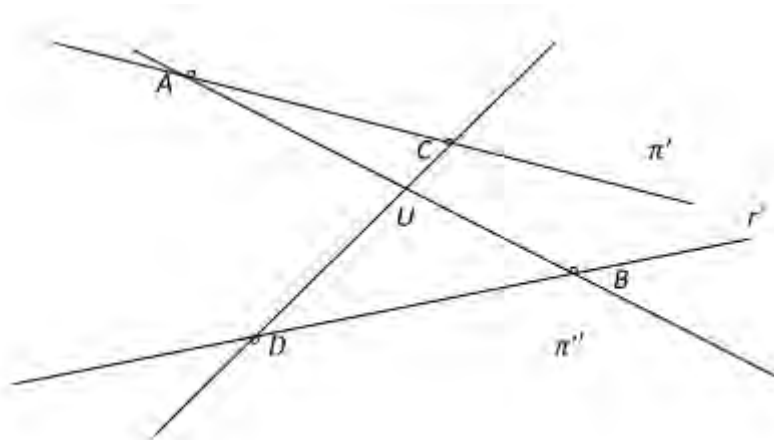


Fig. 6

Sia r' la retta passante per B e D , estremi di J' e J'' . Per il TH.2, se U appartiene a π' , semipiano con origine r' , anche A e C appartengono a π' pertanto il semipiano opposto π'' non contiene elementi di J . La r' è aderente a J e aderenti a J (*esterni di J*) sono i punti B e D (*nota 4*). Procedendo in modo

analogo risulta che anche A e C sono punti aderenti a J. Tutti gli elementi di J sono, quindi, punti esterni dell'insieme.

TH.4 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano. Se gli insiemi $J' = (A, C, U)$ e $J'' = (D, B, U)$ sono coniugati esterni, allora, gli elementi di J sono tutti punti esterni.

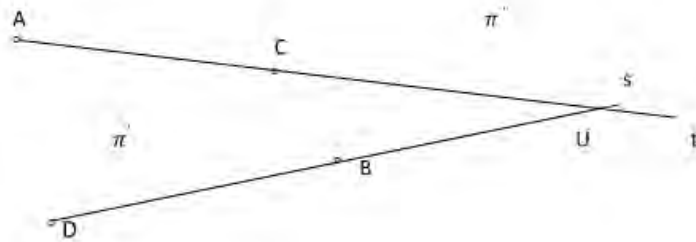


Fig. 7

Il punto U è l'estremo dei due insiemi J' e J'' appartenenti, rispettivamente, alle rette t e s. Per il TH.2 i punti B e D appartengono ad uno stesso semipiano π' con origine t. Poichè i rimanenti punti di J, A e C, appartengono a t, il semipiano π'' , opposto a π' , è vuoto pertanto t è retta aderente a J e così A e C. Procedendo in modo analogo risulta che anche D e B sono esterni a J.

TH. 5 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati. Se $J' = (C, U, D)$ e $J'' = (A, B, U)$ sono coniugati alterni di J, essendo U punto interno di J' e B punto interno di J'' , allora, B è punto interno di J.

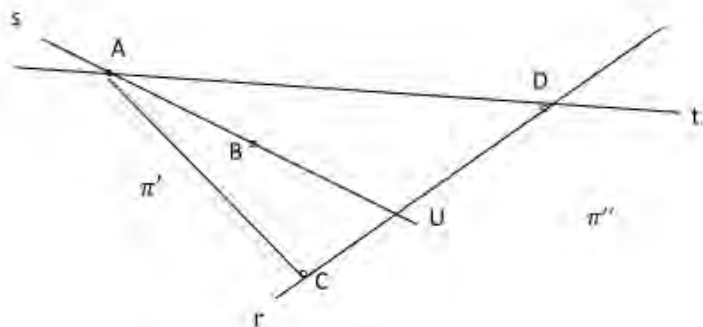


Fig. 8

Se B è punto interno di J'' , utilizzando il linguaggio tradizionale della geometria diciamo che B è punto interno del lato di estremi (A, U) comune ai due triangoli di vertici (A, U, C) e $((A, U, D)$ pertanto, per l'assioma di Pasch, tutte le rette passanti per B , intersecando $[A, D]$ oppure $[A, C]$ oppure $[C, U]$ oppure $[U, D]$, sono interne a J e quindi, per la def.3, anche B è interno a J .

NOTA 5 Sia r la retta passante per C, U, D . Per il TH. 2, i punti A e B dell'insieme coniugato esterno I'' , con U estremo, appartengono ad uno stesso semipiano π' individuato da r ; il semipiano opposto, π'' , non contiene punti di J pertanto la retta r è aderente a J e aderenti sono i punti C e D . Sia t la retta passante per A e D , estremi di J' e J'' . Poichè U è punto comune di J' e J'' , per il TH.2, i punti B, U, C appartengono allo stesso semipiano π^* individuato da t , contenente U , pertanto il semipiano π^{**} , opposto a π^* , non contiene punti di J . Essendo t aderente a J , anche A, D sono aderenti a J . In sintesi, se U è punto interno di J , i rimanenti punti sono tutti esterni.

4 – Insiemi di punti materiali del IV ordine

TH.6 L'unione di due insiemi materiali completi è un insieme completo.

NOTA 6 Dall'unione dei due insiemi ternari completi, I' e I'' , i cui sostegni siano insiemi di punti complanari, J' e J'' , in generale, scaturisce un insieme completo del 6° ordine a meno che i due insiemi non contengano, rispettivamente, elementi aventi stessa posizione e masse opposte. Consideriamo questa seconda ipotesi.

TH.7 Ai due insiemi completi ternari I' e I'' appartengano, rispettivamente, i punti materiali opposti $h P$ e $-h P$ essendo: $I' = (m A, s B, h P)$ e $I'' = (n C, t D, -h P)$. Dall'unione di I' e I'' e dalla successiva riduzione si ottiene l'insieme completo $I = (m A, s B, n C, t D)$ del IV ordine e si ha:

- a) $m + s + n + t = 0$
- b) $A, B, C, D \in \pi$ essendo π un piano di S

Effettuando l'unione si ha:

$$I' \cup I'' = (m A, s B, h P, n C, t D, -h P).$$

Riducendo si ottiene l'insieme completo del IV ordine:

$$I = \text{rid.}(m A, s B, h P, n C, t D, -h P) = (m A, s B, n C, t D).$$

Tenendo conto che la somma delle masse di I' e I'' è:

$$m + s + h = 0 \text{ e } n + t - h = 0, \text{ eseguendo la somma delle masse di } I \text{ si ha: } m+s+n+t = (m + s + h) + (n + t - h) = 0.$$

Le rette r' e r'' contenenti, rispettivamente, i punti A, B, P e i punti C, D, P , intersecandosi in P , appartengono ad uno stesso piano e così i punti dell'insieme $J = (A, B, C, D)$.

NOTA 7 Le condizioni per poter ricavare un insieme completo del IV ordine, stabilite mediante il TH.3, utilizzando insiemi completi del III ordine, possono sembrare particolarmente restrittive: in realtà è sufficiente, per poter ricavare un insieme completo del IV ordine, che gli insiemi ternari abbiano, rispettivamente, due punti materiali egualmente posizionati, non necessariamente opposti. Ad esempio:

siano $I' = (4 A, -5 P, 1 B)$, $I'' = (6 A, -8 Q, 2 C)$ due insiemi completi. I punti materiali 4 A e 6 A dei due insiemi sono egualmente posizionati ma non opposti. Moltiplicando I' per 3 e I'' per -2 si ottengono due insiemi completi "equivalenti" ai precedenti, soddisfacenti le condizioni del TH.3. Infatti si ha:

$$(3 I') \cup (2 I'') = (12 A, -15 P, 3 B, -12 A, 16 Q, -4 C)$$

Riducendo si ha:

$$I = \text{rid} \cdot [(3 I') \cup (2 I'')] = (-15 P, 3 B, 16 Q, -4 C)$$

Questo procedimento, che permette di generare un insieme completo del IV ordine utilizzando due insiemi ternari completi del terzo ordine, può essere percorso in senso inverso : dato un insieme completo I del IV ordine è possibile ricavare due insiemi ternari completi I' e I'' soddisfacenti la condizione $I' \cup I'' = I$.

Premettiamo alcune definizioni.

Def.14 Sia $(m A, s B)$ l'insieme contenente due punti materiali e r sia la retta contenente i punti A e B. Le masse associate ad A e B soddisfino le seguenti relazioni: $m \neq 0, s \neq 0, m + s \neq 0$.

Fissato un qualsiasi sistema di coordinate ascisse su r , siano α e β le ascisse di A e B . Il punto materiale $[-(m + s)P]$, con P individuato su r dall'ascissa $\gamma = \frac{m\alpha + s\beta}{m+s}$ è detto complementare di $(m A, s B)$.

TH.8 Se il punto materiale $-(m + s)P$ è il complementare di $(m A, s B)$, allora,

$I = [mA, -(m + s)P, sB]$ è un insieme completo. Omettiamo la dimostrazione che si può facilmente ottenere mostrando che per l'insieme I risultano verificate le condizioni di completezza del TH.1.

Def.15 Sia I un insieme completo del IV ordine. Sia I' l'insieme ternario completo ricavato dalla unione di due punti materiali di I , scelti conformemente alla def.14, e dal relativo complementare. Gli insiemi completi I' e I'' , essendo $I'' = \text{rid. } \{I \cup [(-1)I']\}$, sono detti componenti di I .

NOTA 8 Sia $I = (m A, s B, n C, t D)$ un insieme completo; sia $-(m + s)X$ il complementare di $m A, s B$, elementi scelti in modo arbitrario, con $m + s \neq 0$. Per il TH.8 la componente:

$I' = [m A, s B, -(m + s) X]$ di I è un insieme completo e completa risulta la componente

$I'' = \text{rid. } \{I \cup [(-1)I']\} = \text{rid. } [m A, s B, n C, t D, -m A - s B, (m + s) X] = [n C, t D, (m + s) X]$.

Osserviamo che le due componenti I' , I'' di I hanno un elemento opposto: $\pm (m + s)X$.

TH.9 Sia $I = (m A, s B, n C, t D)$ un insieme completo del IV ordine essendo m, s, n, t le masse associate, rispettivamente, ai punti A, B, C, D di S . Si ha:

- a) $m + s + n + t = 0$
- b) $A, B, C, D \in \pi$ essendo π un piano dello spazio S .

Siano I' e I'' le componenti di I . Essendo I l'unione di due insiemi completi I' e I'' contenenti un punto materiale opposto (Nota.4), sussistono le ipotesi del TH.7 in virtù del quale risultano verificate a), b).

NOTA 9 Dal TH.9 risulta che la somma delle masse di $I = (m A, n B, s C, h D)$, insieme completo del IV ordine, è zero: $m + n + s + h = 0$, pertanto si hanno due casi:

- a) due masse di I sono positive e due negative;
- b) una massa è negativa, le rimanenti tre sono positive (o viceversa)

Caso a)

Nell'ipotesi che le masse siano: $m, n > 0$ e $s, h < 0$, ricaviamo le seguenti componenti di I :

$I' = [m A, - (m + n) X, n B]$ e $I'' = [s C, - (s + h) X, h D]$; per la nota 1 a), sia (A, B) sia (C, D) sono estremi, rispettivamente, di (A, X, B) e di (C, X, D) ; le due terne $J' = (A, X, B)$ e $J'' = (C, X, D)$ sono quindi coniugate interne di $J = (A, B, C, D)$ pertanto, per il TH.3, tutti i punti di J sono esterni.

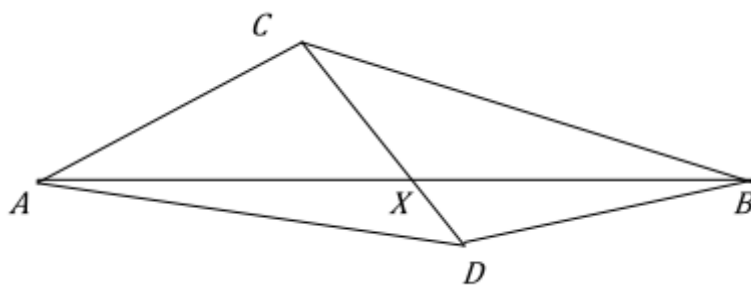


Fig. 9

Caso b)

Nell'ipotesi che le masse siano $m, n, h > 0, s < 0$, scelta, ad esempio, la coppia di punti materiali $m A, n B$ di I si ottengono le seguenti componenti:

$$I' = [m A, - (m + n) X, n B] \text{ e } I'' = [s C, + (m + n) X, h D].$$

Per la nota 1 a), essendo $m, n > 0$, risulta che A e B sono estremi di (A, X, B) e X è punto interno. Analogamente, considerando I'' , essendo concordi le masse $(m + n)$ e h , per la nota 1 a), il punto C è interno di (D, C, X) . Si ha, allora, che (A, X, B) e (D, C, X) sono insiemi coniugati alterni pertanto, per il TH. 5, C è punto interno di (A, B, C, D) .

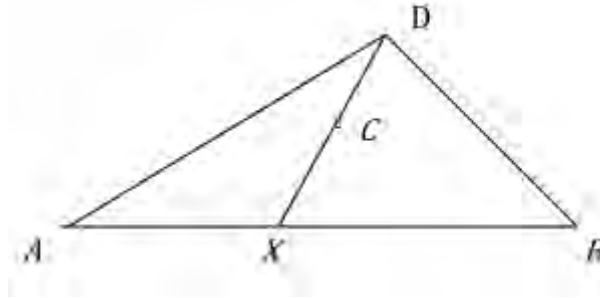


Fig. 10

NOTA 10 Dalla nota precedente possiamo ricavare la seguente regola: " Se l'insieme quaternario completo I contiene una coppia di punti associati a masse positive e una coppia di punti associati a masse negative, allora, i punti dell'insieme completo I sono tutti punti esterni. Se l'insieme quaternario completo I contiene un solo punto C con massa discorde rispetto alle masse dei rimanenti punti, allora, C è punto interno; tutti i rimanenti sono punti esterni ".

4.1 - Applicazioni

Applicazione 1 Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero (A,B,C,D) e risulti:
 $d(A,B) = 3\sqrt{10}$, $d(B,C) = \sqrt{65}$, $d(C,D) = 9$, $d(A,D) = \sqrt{26}$.

Trovare i moduli di [A, C] e [B, D] sapendo che si ha:

$$\frac{d(A,H)}{d(H,C)} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{d(B,H)}{d(H,D)} = \frac{52}{3} \quad (4,1)$$

Nota. 11 Utilizzando il linguaggio degli insiemi di punti materiali, il precedente enunciato diviene:

Applicazione 1' Siano (A, H, C) e (D, H, B) gli insiemi coniugati interni di $J = (A, B, C, D)$ e risulti:

$$d(A,B) = 3\sqrt{10} \quad , \quad d(B,C) = \sqrt{65} \quad , \quad d(C,D) = 9 \quad , \quad d(A,D) = \sqrt{26} \quad .$$

Trovare i moduli di [A,C] e [B,D] sapendo che si ha:

$$\frac{d(A,H)}{d(H,C)} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{d(B,H)}{d(H,D)} = \frac{52}{3} \quad (4,1)$$

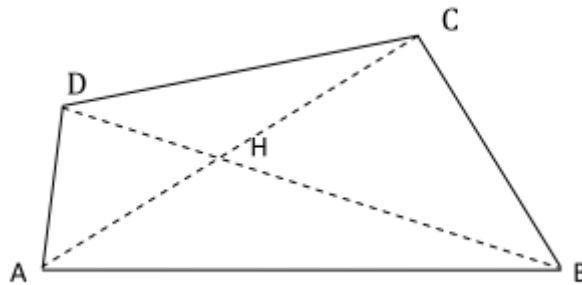


Fig. 11

Dalle (4,1) risultano completi i due insiemi: (3 A, - 5 H, 2 C) e (3 B, - 8 H, 5 D). Moltiplicando il primo insieme per + 8, il secondo per - 5, si ha:

$$I' = (24 A, -40 H, 16 C) \quad \text{e} \quad I'' = (-15 B, 40 H, -25 D).$$

Riducendo l'unione $I' \cup I''$ si ottiene l'insieme completo:
 $I = (24 A, 16 C, -15 B, -25 D)$.

Eseguendo il prodotto di I per A e C si ottiene l'equazione: $A \cdot I = C \cdot I$; sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} 16 [d(A, C)]^2 - 15 [d(A, B)]^2 - 25 [d(A, D)]^2 = \\ = 24 [d(A, C)]^2 - 15 [d(B, C)]^2 - 25 [d(D, C)]^2. \end{aligned}$$

Posto $d(A, C) = x$, si ha: $8x^2 = 1000$ da cui $d(A, C) = 5\sqrt{5}$.
 Analogamente, sviluppando l'equazione: $B \cdot I = D \cdot I$, si ha:

$$\begin{aligned} 24 [d(A, B)]^2 + 16 [d(C, B)]^2 - 25 [d(D, B)]^2 = \\ = 24 [d(D, A)]^2 + 16 [d(D, C)]^2 - 15 [d(D, B)]^2. \end{aligned}$$

Posto $d(D, B) = y$, si ha: $y^2 = 128$ da cui $d(D, B) = 8\sqrt{2}$.

Applicazione 2 Siano A, B, C i vertici di un triangolo.
 Sia N il punto che divide il segmento $[A, B]$ secondo il rapporto

$$\frac{d(A, N)}{d(N, B)} = \frac{5}{9} \quad (4,2)$$

Sia H il punto che divide il segmento $[C, N]$ secondo il rapporto

$$\frac{d(C, H)}{d(H, N)} = \frac{2}{3} \quad (4,3)$$

Sapendo che $d(A, C) = 10\sqrt{2}$, $d(C, B) = 2\sqrt{29}$, $d(A, H) = 10$,
 $d(H, B) = 6\sqrt{2}$, calcolare $d(C, H)$ e $d(A, B)$.

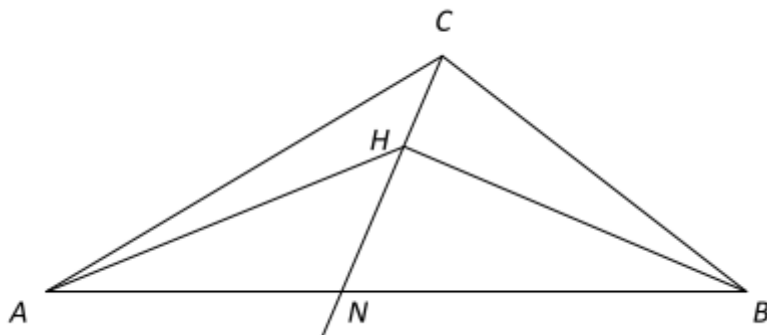


Fig. 12

Utilizzando il linguaggio degli insiemi di punti materiali il testo precedente diviene: "Siano (A, N, B) e (C, N, H) gli insiemi coniugati alterni di $I = (A, B, C, N) \dots$ "

Da (4,2) e (4,3) si ricavano gli insiemi completi: $I' = (9 A, -14 N, 5 B)$ e $I'' = (3 C, -5 H, 2 N)$.

Effettuando l'unione di I' e $(7 \cdot I'')$ e riducendo si ha l'insieme completo:

$$I = \text{rid.}[I' \cup (7 \cdot I'')] = \text{rid.}(9 A, -14 N, 5 B, 21 C, -35 H, 14 N) = (9 A, 5 B, 21 C, -35 H).$$

Essendo I completo si ha:

$$H \cdot I = C \cdot I; \text{ sviluppando, si ha: } 9 \cdot [H,A]^2 + 5 \cdot [H,B]^2 + 21 \cdot [H,C]^2 = 9 \cdot [C,A]^2 + 5 \cdot [C,B]^2 - 35 \cdot [C,H]^2.$$

Posto $d(H, C) = x$, si ha :

$$9 \cdot 100 + 5 \cdot 72 + 21 \cdot x^2 = 9 \cdot 200 + 20 \cdot 9 - 35 \cdot x^2 \quad \text{da cui}$$

$$d(H,C) = 2\sqrt{5}.$$

Svolgendo la seguente equazione : $A \cdot I = B \cdot I$, si ha :

$$5 \cdot [A,B]^2 + 21 \cdot [A,C]^2 - 35 \cdot [A,H]^2 = 9 \cdot [B,A]^2 + 21 \cdot [B,C]^2 - 35 \cdot [B,H]^2 \quad \text{da cui } d(A,B) = 14.$$

NOTA 12 Dato un insieme quaternario completo $I = (s_1 P_1, s_2 P_2, s_3 P_3, s_4 P_4)$ è sempre possibile trovare l'equivalente I' le cui masse siano espresse mediante due parametri m e n .

Moltiplicando le masse di I per un reale $K \neq 0$ si ottiene l'insieme completo equivalente I' . Poniamo, ad esempio:

$$K = \frac{1}{s_3}, \text{ si ha : } I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_1, \right) \quad (4,4)$$

Essendo $\frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0$, posto: $\frac{s_1}{s_3} = m, \frac{s_2}{s_3} = n, \frac{s_3}{s_3} = 1$, si ha:

$\frac{s_4}{s_3} = -(m+n+1)$. Sostituendo i rapporti $\frac{s_i}{s_3}$ nella (4,4), si ottiene:

$I' = [m \cdot P_1, n \cdot P_2, 1 \cdot P_3, -(m+n+1) \cdot P_4]$ da cui risulta che è possibile esprimere le masse mediante m e n .

Applicazione 3 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme quaternario di punti del piano π . Verificare se l'insieme J contiene punti interni essendo: $d(A, B) = \sqrt{130}$, $d(B, C) = 5\sqrt{2}$, $d(C, D) = 5$, $d(A, D) = \sqrt{5}$, $d(A, C) = 2\sqrt{10}$, $d(B, D) = 5\sqrt{5}$.

Con riferimento alla nota 12, attribuiamo all'insieme completo I , avente sostegno J , la seguente forma:

$$I = [m \cdot A, n \cdot B, (1 - m - n) \cdot C, -1 \cdot D]. \quad (4,5)$$

Essendo I completo deve risultare : $\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ C \cdot I = D \cdot I \end{cases}$

Sviluppando si ha :

$$\begin{cases} n[d(A,B)]^2 + (1-m-n)[d(A,C)]^2 - [d(A,D)]^2 = m[d(A,B)]^2 \\ \quad + (1-m-n)[d(B,C)]^2 - [d(B,D)]^2 \\ m[d(A,C)]^2 + n[d(B,C)]^2 - [d(D,C)]^2 = m[d(A,D)]^2 + n[d(B,D)]^2 \\ \quad + (1-m-n)[d(C,D)]^2 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} 14n - 12m + 11 = 0 \\ -10n + 12m - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{Essendo } n = -\frac{1}{4} \quad m = \frac{5}{8},$$

sostituendo nella (4,5) e riducendo si ha

$I = (5A, -2B, 5C, -8D)$. Tenendo conto della nota 10, essendo due masse di I positive e due negative, l'insieme non contiene punti interni.

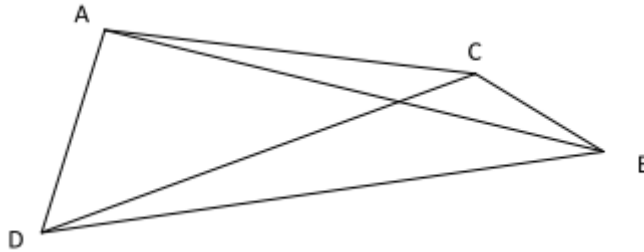


Fig. 13

Applicazione 4 Sia $J = (A,B,C,D)$ un insieme quaternario di punti del piano π . Verificare se l'insieme J contiene punti interni (nota 9) essendo: $d(A,B) = 6\sqrt{2}$, $d(B,C) = 2\sqrt{13}$,

$d(C,D) = 5$, $d(A,D) = 3\sqrt{5}$, $d(A,C) = \sqrt{10}$, $d(B,D) = 3$. Come nell'applicazione precedente, attribuiamo all'insieme completo I , avente sostegno J , la seguente forma:

$$I = [m \cdot A, n \cdot B, (1-m-n) \cdot C, -1 \cdot D] \quad (4,6)$$

Essendo I completo deve risultare: $\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ C \cdot I = D \cdot I \end{cases}$

Svolgendo si ha :

$$\begin{cases} n[d(A, B)]^2 + (1 - m - n)[d(A, C)]^2 - [d(A, D)]^2 = m[d(A, B)]^2 \\ \quad + (1 - m - n)[d(B, C)]^2 - [d(B, D)]^2 \\ m[d(A, C)]^2 + n[d(B, C)]^2 - [d(D, C)]^2 = m[d(A, D)]^2 \\ \quad + n[d(B, D)]^2 + 0(1 - m - n)[d(C, D)]^2 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} 2n - 10m + 1 = 0 \\ 40m + 34n - 25 = 0 \end{cases} \quad \text{Essendo } n = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{5},$$

sostituendo nella (4,6) e riducendo l'insieme I diviene:

$I = (2A, 5B, 3C, -10D)$. Tenendo conto della nota 10, essendo una massa di I positiva e le rimanenti negative, l'insieme contiene un punto interno, il punto D.

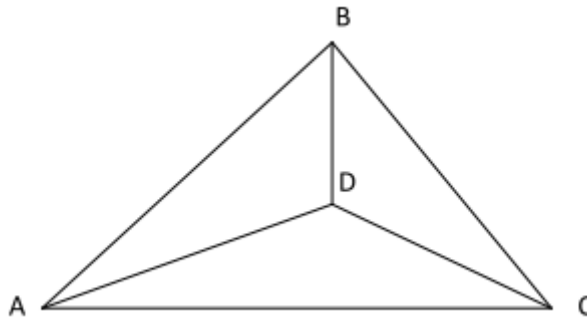


Fig. 14

Applicazione 5 Sia H il punto di intersezione delle due diagonali $[A, C]$ e $[B, D]$ del quadrilatero $Q(J)$, con

$J = (A, B, C, D)$. Sapendo che $d(B, H) = 4\sqrt{2}$, $d(D, H) = \sqrt{2}$, $d(A, D) = \sqrt{5}$, $d(C, D) = \sqrt{10}$, noto il seguente rapporto:
 $\frac{d(A, H)}{d(H, C)} = \frac{3}{2}$, trovare $d(A, C)$.

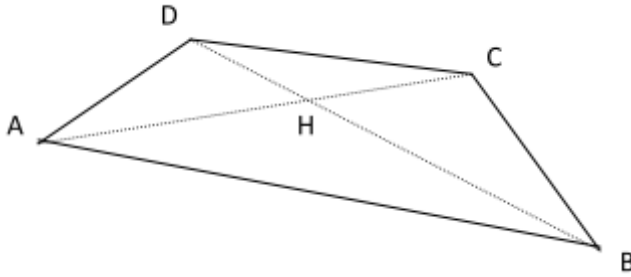


Fig. 15

Gli insiemi $J' = (A, H, C)$ e $J'' = (D, H, B)$ sono coniugati interni i J e sono di sostegno, rispettivamente, agli insiemi completi: $I' = (4 D, -5 H, B)$ e $I'' = (2 A, -5 H, 3 C)$.

Sottraendo I'' a I' e riducendo si ha: $I = I' - I'' = (2 A, 3 C, -4 D, -B)$. Essendo I completo si ha: $D \cdot I = H \cdot I$.

Sviluppando si ha:

$$2 \cdot [d(A,D)]^2 + 3 \cdot [d(C,D)]^2 - [d(B,D)]^2 = 2 \cdot [d(A,H)]^2 + 3 \cdot [d(C,H)]^2 + 4 \cdot [d(D,H)]^2 - [d(B,H)]^2.$$

Posto $d(C,H) = 2x$ si ha $d(A,H) = 3x$. Sostituendo nella precedente equazione si ha: $x = 1$ pertanto si ha: $d(A, H) = 3$, $d(C,H) = 2$ e quindi: $d(A,C) = 5$.

Applicazione 6 Sia H il punto di intersezione delle diagonali $[A,C]$ e $[B,D]$ di un quadrilatero $Q(J)$ essendo

$$J = (A,B,C,D) \text{ e risulti: } d(A,C) = 5\sqrt{5}, \quad d(B,D) = 3\sqrt{5}.$$

Sia M il punto di intersezione delle rette t e s passanti, rispettivamente, per (A, D) e (B, C) .

Sapendo che $\frac{d(M,D)}{d(D,A)} = \frac{3}{2}$ e $\frac{d(M,C)}{d(C,B)} = \frac{5}{4}$ (4,7) e che $d(A,B) = \sqrt{29}$, $d(D,C) = \sqrt{13}$, trovare $d(A,D)$ e $d(B,C)$.

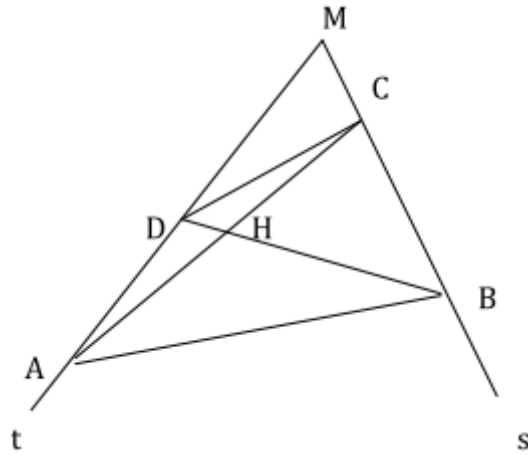


Fig. 16

Dalle (4,7) si ricavano gli insiemi completi $I' = (3 A, -5 D, 2 M)$ e $I'' = (5 B - 9 C, 4 M)$. Effettuando l'unione dei due insiemi $(2 \cdot I')$ e $(-1 \cdot I'')$ e riducendo si ha:

$$I = \text{rid.}[(2 \cdot I') \cup (-1 \cdot I'')] = \text{rid.}(6 A, -10 D, 4 M, -5 B, 9 C, -4 M) = (6 A, -10 D, -5 B, 9 C).$$

Essendo I completo si ha: $A \cdot I = D \cdot I$. Sviluppando:

$$\begin{aligned} 9 \cdot [d(A,C)]^2 - 10 \cdot [d(A,D)]^2 - 5 \cdot [d(A,B)]^2 &= \\ &= 6 \cdot [d(D,A)]^2 + 9 \cdot [d(D,C)]^2 - 5 \cdot [d(D,B)]^2 \end{aligned}$$

$$\text{Posto } d(A,D) = x, \text{ si ha: } 9 \cdot 125 - 10 \cdot x^2 - 5 \cdot 29 =$$

$$= 6 \cdot x^2 + 9 \cdot 13 - 5 \cdot 45, \text{ da cui } d(A,D) = 2\sqrt{17}.$$

Procedendo in modo analogo, sviluppando $B \cdot I = C \cdot I$, si ha: $d(C,B) = 8$.

Applicazione 7 Sia H il punto di intersezione delle diagonali $[A,C]$ e $[B,D]$ del quadrilatero $Q(J)$ con

$J = (A, B, C, D)$ e risulti: $d(A, D) = d(A, B) = 3\sqrt{13}$,
 $d(C, D) = d(C, B) = 2\sqrt{10}$.

Sapendo che $\frac{d(A, H)}{d(H, C)} = \frac{9}{2}$ (4,8), calcolare $d(A, C)$ e $d(D, B)$

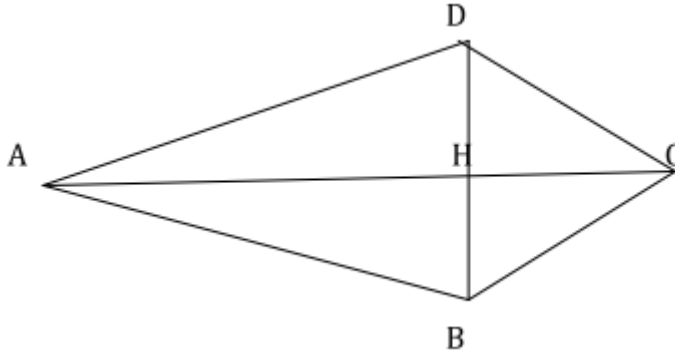


Fig. 17

Dalla (4,8) si ricava l'insieme completo $I' = (2A, -11H, 9C)$.
 Tenendo conto che H è punto medio di (D, B), si ricava
 l'insieme completo: $I'' = (D, -2H, B)$. Dalla riduzione
 dell'unione dei due insiemi completi $(2 \cdot I')$ e $(11 \cdot I'')$ si ha
 l'insieme completo:

$$\begin{aligned} I &= \text{rid.}[(2 \cdot I') \cup (11 \cdot I'')] = \\ &= \text{rid.} (4A, -22H, 18C, -11D, 22H, -11B) = \\ &= (4A, 18C, -11D, -11B). \end{aligned}$$

Essendo I completo si ha: $A \cdot I = C \cdot I$. Sviluppando, si ha:

$$\begin{aligned} 18[d(A, C)]^2 - 11[d(A, D)]^2 - 11[d(A, B)]^2 &= \\ = 4[d(A, C)]^2 - 11[d(D, C)]^2 - 11[d(B, C)]^2. \end{aligned}$$

Posto $d(A, C) = x$, si ha $x^2 = 121$ da cui $d(A, C) = 11$.

Procedendo in modo analogo, dall'equazione $A \cdot I = D \cdot I$ si
 ha $d(D, B) = 12$.

Applicazione 8 Sia $T(A, B, C)$ un triangolo isoscele e risulti $d(A, C) = d(C, B) = 10$. Sia H il piede dell'altezza relativa alla base $[A, B]$. Sia M un punto dell'altezza $[C, H]$. Siano:

$d(A, M) = d(M, B) = 3\sqrt{5}$ i moduli dei lati del triangolo isoscele $T(A, B, M)$. Sapendo che $\frac{d(C, M)}{d(C, H)} = \frac{5}{8}$ calcolare $d(C, M)$ e $d(A, B)$.

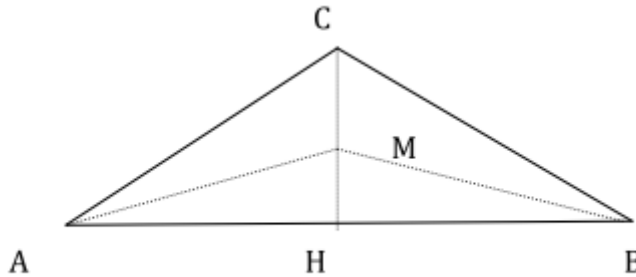


Fig. 18

Gli insiemi $J' = (A, H, B)$ e $J'' = (C, M, H)$ sono il sostegno, rispettivamente, degli insiemi completi $I' = (A, -2H, B)$ e $I'' = (3C - 8M, 5H)$. Effettuando l'unione dei due insiemi completi $(5 \cdot I')$, $(2 \cdot I'')$ e riducendo si ha :

I

$$= \text{rid.}[(5 \cdot I') \cup (2 \cdot I'')] = \text{rid.} (5A, -10H, 5B,$$

$6C - 16M, 10H)$ da cui

$I = (5A, 5B, 6C, -16M)$. Svolgendo l'equazione $M \cdot I = C \cdot I$, si ha:

$$5[d(A, C)]^2 + 5[d(B, C)]^2 - 16[d(C, M)]^2 = 5[d(A, M)]^2 + 5[d(B, M)]^2 - 16[d(C, M)]^2.$$

Posto $d(C, M) = x$, si ha: $5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 - 16 \cdot x^2 =$

$= 5 \cdot 45 + 5 \cdot 45 + 6 \cdot x^2$ da cui $d(C, M) = 5$. Analogamente, svolgendo l'equazione $A \cdot I = M \cdot I$, si ha $d(A, B) = 12$.

Applicazione 9 Essendo M il baricentro del triangolo T(J), con $J = (A, B, C)$, e H il punto medio di $[A, B]$, si ha:

$$\frac{d(C, M)}{d(M, H)} = 2 \quad (4,9). \text{ Sapendo che } d(A, C) = 2\sqrt{37}, d(C, B) = 4\sqrt{13}$$

,
 $d(M, A) = 4\sqrt{2}$, trovare $d(M, B)$, $d(C, M)$, $d(A, B)$.

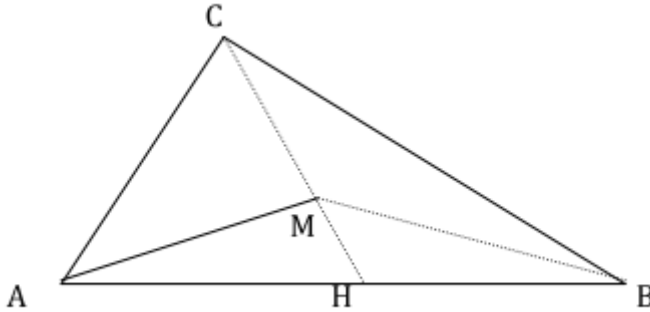


Fig. 19

Dalla (1) si ricava l'insieme completo $I' = (C, -3M, 2H)$; essendo $d(A, H) = d(H, B)$, si ricava l'insieme completo $I'' = (A, -2H, B)$. Effettuando l'unione di I' e I'' e riducendo si ottiene $I = \text{rid.}[I' \cup I''] = \text{rid.}(A, -2H, B, C, -3M, 2H) = (A, B, C, -3M)$.

Per calcolare $d(B, M)$ risolviamo l'equazione

$$A \cdot I = B \cdot I : [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 3[d(A, M)]^2 = \\ = + [d(C, B)]^2 + [d(A, B)]^2 - 3[d(M, B)]^2$$

Posto $d(M, B) = x$, si ha: $x^2 = 52$ da cui $d(M, B) = 2\sqrt{13}$.
 Risolvendo in modo analogo le equazioni:

$$M \cdot I = C \cdot I \quad \text{e} \quad A \cdot I = M \cdot I \quad \text{ricaviamo} \quad d(M, C) = 2\sqrt{17} \quad \text{e} \\ d(A, B) = 10.$$

Applicazione 10 Sia $J = (A, B, C)$ l'insieme dei vertici del triangolo T(J) e M, N siano due punti appartenenti,

rispettivamente, ai lati $[A,C]$ e $[A,B]$ e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 2$, $\frac{d(B,N)}{d(N,A)} = 3$ (4,10). Sapendo che $d(C,B) = 10$, $d(M,B) = 4\sqrt{5}$, $d(M,N) = 5\sqrt{2}$, calcolare i lati $d(C,M)$, $d(N,B)$.

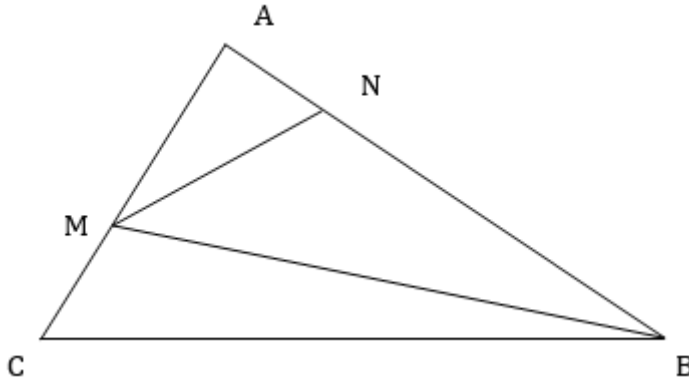


Fig. 20

Da (4,10) si ricavano i due insiemi completi: $I' = (A, -3M, 2C)$ e $I'' = (3A, -4N, B)$. Effettuando l'unione dei due insiemi, $3 \cdot I'$ e $(-1) \cdot I''$ e riducendo si ha:

$$I = \text{rid.} \{ [3 \cdot I'] \cup [(-1) \cdot I''] \} = \\ = \text{rid.} (3A, -9M, 6C, -3A, 4N, -B) = (6C, -B, 4N, -9M).$$

Posto $d(A,M) = 2 \cdot u$, per le (4,10) si ha:

$$d(C,M) = u, \quad d(A,C) = 3 \cdot u \quad (4,11)$$

Analogamente, posto $d(A,N) = v$, si ha: $d(N,B) = 3 \cdot v$ e $d(A,B) = 4 \cdot v$ (4,12). Risolviamo le equazioni:

$M \cdot I = A \cdot I$ e $B \cdot I = A \cdot I$. Si ha:

$$6 \cdot [d(M,C)]^2 - [d(M,B)]^2 + 4 \cdot [d(M,N)]^2 = 6 \cdot [d(A,C)]^2 - [d(A,B)]^2 \\ + 4 \cdot [d(A,N)]^2 - 9 \cdot [d(A,M)]^2$$

$$6 \cdot [d(B,C)]^2 - 9 \cdot [d(B,M)]^2 + 4 \cdot [d(B,N)]^2 = 6 \cdot [d(A,C)]^2 - [d(A,B)]^2 \\ + 4 \cdot [d(A,N)]^2 - 9 \cdot [d(A,M)]^2$$

Sostituendo le (4,11) e le (4,12) si ha:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 10 \\ 3u^2 - 8v^2 = -20 \end{cases}$$

da cui $u = 2\sqrt{5}$ e $v = \sqrt{10}$. Quindi si ha: $d(C,M) = 2\sqrt{5}$, $d(N,B) = 3\sqrt{10}$.

Applicazione 11 Siano N e M due punti appartenenti, rispettivamente, ai lati [A,B] e [A,C] del triangolo T(J), con $J = (A,B,C)$ e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$ e $\frac{d(A,N)}{d(N,B)} = \frac{1}{2}$ (4,13)

Sia H il punto di intersezione delle due diagonali [C, N] e [M, B] del quadrilatero Q(J) con $J = (C, B, N, M)$. Sapendo che $d(B,M) = 6\sqrt{5}$, calcolare $d(M,H)$ e $d(H,B)$.

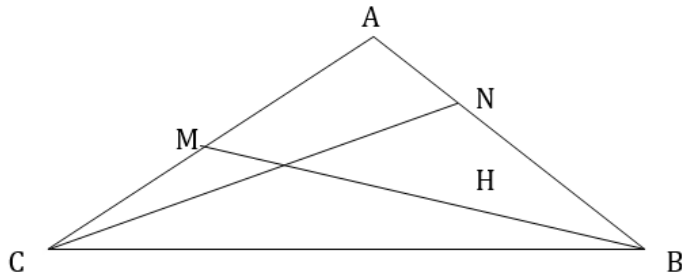


Fig. 21

Da (4,13) si ricavano i due insiemi completi: $I' = (2A, -5M, 3C)$ e $I'' = (2A, -3N, B)$. Riducendo l'unione di I' e di $(-1) \cdot I''$ si ottiene: $I = \text{rid. } [I' \cup (-1) \cdot I''] = (3C, -5M, 3N, -B)$.

Il complementare dei punti materiali $3C, 3N$ di I è $-6X$ pertanto l'insieme $I''' = (3C, -6X, 3N)$ è completo. Effettuando l'unione: $[I \cup (-1) \cdot I''']$ e riducendo, si ha: $(-5M, 6X, -B)$. Per il TH.6, contenuto nell'articolo: "Insiemi completi del terzo ordine" di Franco Francia, pubblicato sul

Periodico di Matematica, Vol. XVI(1-2), giugno-dicembre 1919, affinché un insieme ternario sia completo è necessario che le posizioni dei punti materiali ternari siano allineate pertanto il punto X , comune agli insiemi competi $(3 C, - 6 X, 3 N)$ e $(- 5 M, 6 X, - B)$, deve appartenere sia a $[C, N]$ sia a $[M, B]$; quindi, coincidendo la X con H , possiamo riscrivere i precedenti insiemi così:

$I^{IV} = (- 5 M, 6 H, - B)$, $I''' = (3 C, - 6 H, 3 N)$; tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti di sostegno dell'insieme completo I^{IV} , si ha: $\frac{d(M,H)}{d(M,B)} = \frac{1}{6}$.

Essendo $d(M,B) = 6\sqrt{5}$, dalla precedente relazione risulta $d(M,H) = \sqrt{5}$ e quindi si ha $d(H,B) = 5\sqrt{5}$.

Applicazione 12 Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A,C]$ e $[B,D]$ del quadrilatero $Q(J)$ con

$$J = (A,B,C,D) \text{ e risulti: } \frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 4, \quad \frac{d(B,M)}{d(M,D)} = \frac{3}{2} \quad (4,14)$$

Sia N il punto di intersezione delle rette t' e t'' passanti, rispettivamente, per i punti (A, D) e (B, C) . Trovare $d(D,N)$ essendo $d(A,D) = 6\sqrt{2}$.

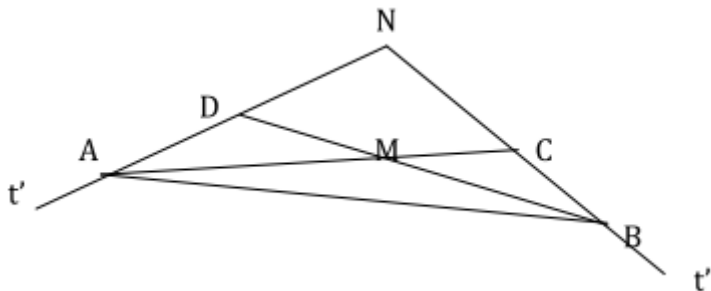


Fig. 22

Dalle (4,14) si ricavano i seguenti insiemi completi: $I' = (A, -5 M, 4 C)$, $I'' = (3 D, -5 M, 2 B)$.

Effettuando l'unione di I' e $(-1) I''$ e riducendo, si ha:

$I = (A, 4 C, -3 D, -2 B)$. Essendo $2X$ il complementare di A e $-3 D$, risulta completo l'insieme $I''' = (A, -3 D, 2 X)$.

Effettuando l'unione dei due insiemi completi: $[I''' \cup (-1) \cdot I]$ e riducendo si ha: $I^{IV} = (2 B, -4 C, 2 X)$.

PoichÈ X appartiene ai due insiemi completi I''' e I^{IV} (vedere applicazione 11) deve essere allineato con (A, D) e (B, C) pertanto si ha:

$X \equiv N$ e I''' diviene: $I''' = (A, -3 D, 2 N)$. Tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti dell'insieme di sostegno J''' di I''' , si ha: $\frac{d(D,N)}{d(A,D)} = \frac{1}{2}$ (4,15).

Essendo

$d(A,D) = 6\sqrt{2}$, sostituendo nella (4,15) si ha: $d(N,D) = 3\sqrt{2}$.

Applicazione 13 Sia M un punto interno del triangolo di vertici A, B, C . L'insieme completo, avente sostegno $J = (A, B, C, M)$, sia $I = (5 A, 4 B, 6 C, -15 M)$. Essendo $d(A,C) = 3\sqrt{13}$, $d(C,B) = 15$, $d(A,B) = 9\sqrt{2}$, trovare $d(A,N)$, $d(N,B)$ e $d(M,N)$ sapendo che N è il punto di intersezione del lato $[A,B]$ con la retta r passante per C e M .

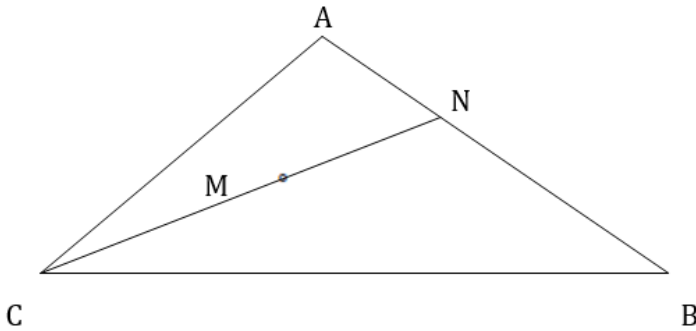


Fig. 23

Il complementare dei punti materiali 5 A e 4 B di I è $-9 X$.

L'insieme $I' = (5 A, -9 X, 4 B)$ è completo pertanto anche:

$I'' = [I' \cup (-1) \cdot I] = (6 C, -15 M, 9 X)$ è un insieme completo.

Il punto X, appartenendo sia a J' sia a J'' , insiemi di sostegno, rispettivamente, di I' e I'' , deve risultare allineato sia con (A,B) sia con (C,M) pertanto $X \equiv N$ e si ha:

$I' = (5 A, -9 N, 4 B)$ e $I'' = (6 C, -15 M, 9 N)$.

Tenendo conto della relazione fra masse e distanze dei punti dell'insieme $I' = (5 A, -9 N, 4 B)$, si ha: $\frac{d(A,N)}{d(A,B)} = \frac{4}{9}$ da cui

$d(A,N) = 4\sqrt{2}$, $d(N,B) = 5\sqrt{2}$. Essendo I' completo, si ha:

$C \cdot I' = N \cdot I'$ da cui: $d(C,N) = 5\sqrt{5}$. Tenendo conto della relazione fra masse, essendo note la distanza $[C,N]$, si ha:

$d(M,N) = 2\sqrt{5}$.

Applicazione 14 Siano h_1 e h_2 due semirette uscenti dal punto H. Siano A e B due punti equidistanti da H, appartenenti, rispettivamente, a h_1 , h_2 . La semiretta h_0 , uscente da H e passante per M, punto medio di (A, B) contiene il punto medio Z di una qualsiasi coppia di punti X,

Y, equidistanti da H, appartenenti, rispettivamente, ad h_1 , h_2 . (La h_0 è la bisettrice)

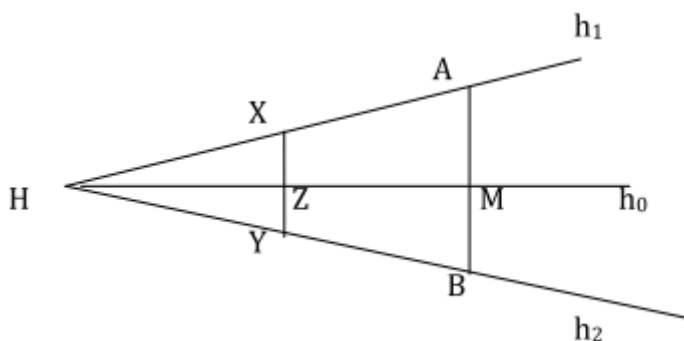


Fig. 24

Supponiamo sia: $d(X, H) = d(Y, H) = m$ e $d(A, X) = d(B, Y) = n$. Sono completi gli insiemi

$$I' = (m A, -(m+n) X, n H),$$

$$I'' = (m B, -(m+n) Y, n H),$$

$$I''' = (m A - 2m M, m B),$$

$$I^V = [(m+n) X, -2(m+n) Z, (m+n) Y].$$

Anche l'insieme rid. $[I' \cup I'' \cup (-I''') \cup I^V]$ è completo e si ha:
 $[I' \cup I'' \cup (-I''') \cup I^V] = [mA, -(m+n)X, nH, mB, -(m+n)Y, nH, -mA, 2mM, -mB, (m+n)X, -2(m+n)Z, (m+n)Y].$

Riducendo e dividendo per 2 si ottiene l'insieme completo:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \text{rid.} [I' \cup I'' \cup (-I''') \cup I^V] = [n H, -(m+n) Z, m M]$$

Essendo I un insieme ternario completo proprio, i punti H, Z, M devono essere allineati.

Applicazione 15 Siano $d(A, B) = m$, $d(B, C) = s$, $d(A, C) = n$, con $m < n$, i moduli dei lati del triangolo $T(J)$ con $J = (A, B, C)$. Siano h_1 , h_2 le semirette uscenti da A, passanti,

rispettivamente, per C e B. Sia h_0 la bisettrice (vedere applicazione 14) di h_1, h_2 intersecante $[B,C]$ in H. Verificare che sia : $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{d(A,B)}{d(A,C)}$; calcolare $d(A,H)$.

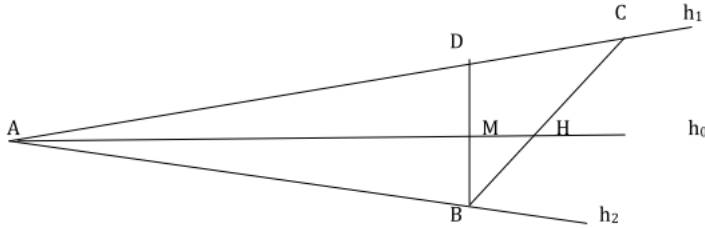


Fig. 25

Sia D il punto su h_1 soddisfacente la seguente relazione:
 $d(A, D) = d(A, B) = m$ e M sia il punto medio di $[B, D]$. La bisettrice h_0 (vedere applicazione 11) passa per M, punto medio di $[D, B]$. I punti B, M, D sono di sostegno all'insieme completo $(D, -2M, B)$ equivalente a $I' = (nD, -2nM, nB)$, con $n \neq 0$.

Anche l'insieme $I'' = [(n-m)A, -nD, mC]$ è completo. Dall'unione dei due insiemi I' e I'' si ottiene l'insieme quaternario completo $I = [(n-m)A, nB, mC - 2nM]$. Essendo $-(n+m)X$ il complementare di nB, mC , risulta completo l'insieme $I''' = [nB, -(n+m)X, mC]$ e così l'insieme $I - I''' = [(n-m)A, -2nM, (n+m)X]$ da cui si deduce che X, allineato sia con B, C sia con A, M, coincide con H pertanto scriviamo così: $I''' = [nB, -(n+m)H, mC]$.

Tenendo conto della nota 1, della relazione fra masse e distanze dei punti di I''' , si ha: $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{m}{n}$ (4,16) ;

essendo , inoltre: $\frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{m}{n}$ (4,17) , da (4,16) e (4,17) si ha:

$$\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{d(A,B)}{d(A,C)} .$$

Per calcolare $d(A,H)$ risolviamo l'equazione: $A \cdot I''' = H \cdot I'''$.

Si ha:

$$n [d(A, B)]^2 - (n + m) [d(A, H)]^2 + m [d(A, C)]^2 = \\ = n [d(H, B)]^2 + m [d(H, C)]^2 .$$

Posto $d(A,H) = x$, tenendo conto che dalla (1) si ha:

$$d(H,C) = \frac{ns}{m+n} , \quad d(H,B) = \frac{ms}{m+n} , \text{ l'equazione diviene:}$$

$$n m^2 - (n + m) x^2 + m n^2 = n \frac{m^2 s^2}{(m+n)^2} + m \frac{n^2 s^2}{(m+n)^2}$$

$$\text{da cui } x^2 = m n \left[1 - \frac{s^2}{(m+n)^2} \right] .$$

Applicazione 16 Siano (A,X) e (B,Y) due coppie di punti appartenenti, rispettivamente, alle due semirette r_1 e r_2 con origine H e risulti: $\frac{d(X,A)}{d(A,H)} = \frac{d(Y,B)}{d(B,H)} = m$ (4,18)

Siano P e Z due punti allineati, rispettivamente, con (A, B) e (X, Y) e risulti: $\frac{d(B,P)}{d(P,A)} = \frac{d(Y,Z)}{d(Z,X)} = h$, (4,19)

Mostrare che H, P, Z sono punti allineati.

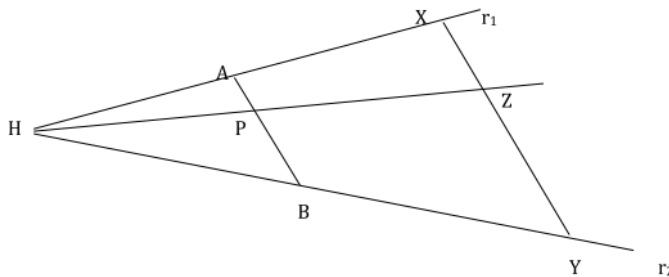


Fig. 26

Dalla (4,18) si ottengono gli insiemi completi:

$$I' = [m H, - (m + 1) A, X] \text{ e } I'' = [m H, - (m + 1) B, Y].$$

Dalla (4,19) si ottengono gli insiemi completi:

$$I''' = [h A, - (h + 1) P, B] \text{ e } I'''' = [h X, - (h + 1) Z, Y].$$

Svolgiamo la seguente unione di insiemi:

$$\begin{aligned} & [(h \cdot I') \cup I'' \cup (m+1) \cdot I''' \cup [(-1) \cdot I''']] = \\ & = [mh H, -(m+1) hA, hX, m H, -(m+1) B, Y, h(m+1) A, \\ & -(m+1)(h+1) P, (m+1) B, -h X, (h+1) Z, -Y] \end{aligned}$$

Riducendo e dividendo per $(h+1)$ si ha $I = [m H, -m+1) P, Z$. Essendo I un insieme completo e proprio, i punti H, P, Z devono essere allineati.

Applicazione 17 I punti N e M appartengano, rispettivamente, a $[A,C]$ e $[B,C]$, lati del triangolo di vertici (A,B,C) e risulti: $d(A,N) = 2\sqrt{5}$, $d(N,C) = 4\sqrt{5}$, $d(B,M) = 2\sqrt{10}$, $d(M,C) = 2\sqrt{10}$. Sapendo che la retta r , passante per N e M , interseca in H la retta s passante per A e B e che si ha: $d(N,H) = 4\sqrt{10}$, calcolare $d(M,N)$, $d(H,A)$.

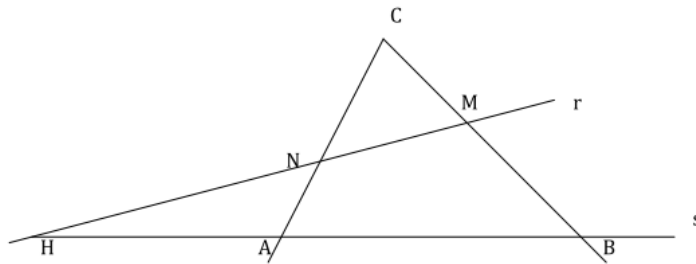


Fig. 27

Risultano completi i seguenti insiemi: $I' = (2 A, -3 N, C)$ e $I'' = (B, -2 M, C)$. Sottraendo membro a membro si ottiene l'insieme completo $I''' = I' - I'' = (2 A, -3 N, -B, 2 M)$.

Indicando con X il complementare dei punti materiali:

$-3 N, 2 M \in I'''$, l'insieme $I^{IV} = (2 M, -3 N, X)$ è completo. Effettuando la differenza fra i due insiemi completi I''' e I^{IV} si

ottiene l'insieme completo $I^V = (B, -2 A, X)$. Confrontando I^V e I^V risulta che X , essendo allineato sia con A, B sia con N, M , coincide con H pertanto risulta:

$I^V = (2 M, -3 N, H)$ e $I^V = (B, -2 A, H)$.

Da I^V si ha: $\frac{d(M,N)}{d(N,H)} = \frac{1}{2}$. Essendo $d(N,H) = 4\sqrt{10}$ risulta

$d(M,N) = 2\sqrt{10}$. Inoltre, risulta: $C \cdot I^V = N \cdot I^V$.

Sviluppando si ha: $2 [d(M, C)]^2 - 3[d(N, C)]^2 + [d(H, C)]^2 = 2 [d(M, N)]^2 + [d(H, N)]^2$.

Posto $d(H,C) = x$, si ha: $2(2\sqrt{10})^2 - 3(4\sqrt{5})^2 + x^2$

$= 2(2\sqrt{10})^2 + (4\sqrt{10})^2$ da cui $x^2 = 400$ e quindi $D(H, C) = 20$.

Per calcolare $d(A, H)$ svolgiamo la seguente equazione:

$C \cdot I' = N \cdot I'$. Si ha:

$2 [d(A, H)]^2 - 3[d(N, H)]^2 + [d(H, C)]^2 = 2 [d(N, A)]^2 + [d(N, C)]^2$ da cui $d(A, H) = 10$

Applicazione 18 I punti M e N appartengano, rispettivamente, ai lati $[A, S]$ e $[B, S]$ del triangolo di vertici (A,B,S) e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,S)} = \frac{1}{5}$ (4,20), $\frac{d(B,N)}{d(N,S)} = 2$ (4,21)

Sia t la retta passante per S intersecante nei punti T e H , rispettivamente, i segmenti $[A, B]$ e $[M, N]$.

Sapendo che si ha: $\frac{d(AT)}{d(TB)} = \frac{4}{5}$ (4,22), trovare $\frac{d(M,H)}{d(H,N)}$ e $\frac{d(S,H)}{d(H,T)}$.

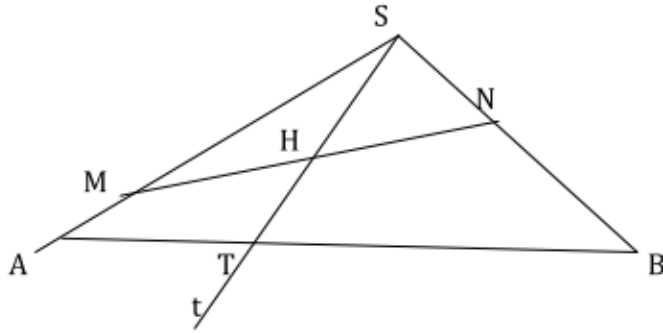


Fig. 28

Da (4,20) , (4,21) , (4,22) si ricavano i seguenti insiemi completi:

$$I_1 = (5 A, -6 M, S), I_2 = (B, -3 N, 2 S), I_3 = (5 A, -9 T, 4 B)$$

Dall'unione e dalla successiva riduzione degli insiemi completi: $I_1, (4 I_2), (-I_3)$, si ha:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \text{ rid. } [I_1 \cup (4 I_2) \cup (-I_3)] = \\ &= \frac{1}{3} \text{ rid. } (5 A, -6 M, S, 4 B, -12 N, 8 S, -5 A, 9 T, -4 B) = \\ &= (3 S, 3 T, -2 M, -4 N). \end{aligned}$$

Il complementare degli elementi $3 S, 3 T \in I$ è $-6 X$ pertanto $I' = (3 S, -6 X, 3 T)$ è un insieme completo. Anche l'insieme $I'' = I - I'$, differenza di due insiemi completi, è completo e risulta:

$$I'' = (3 S, 3 T, -2 M, -4 N, -3 S, 6 X, -3 T) = (-2 M, 6 X, -4 N).$$

Essendo I' e I'' insiemi completi del terzo ordine, i punti S, X, T sono allineati e così M, X, N pertanto X coincide con il punto H . Sostituendo H in I' e I'' , dividendo i due insiemi per 2, si ha: $I' = (S, -2 H, T)$, $I'' = (M, -3 H, 2 N)$ da cui risulta: $\frac{d(S,H)}{d(H,T)} = 1$ e $\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = 2$.

5 – Insiemi completi divisori dello zero

DEF.16 Siano $J' = (P_1, P_2, P_3)$ e $J'' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ due terne di punti ordinati secondo gli indici 1, 2, 3. Diciamo corrispondenti due elementi, appartenenti rispettivamente a J' e J'' , aventi stesso indice.

DEF.17 Siano (P_i, P_j) e (Q_i, Q_j) due coppie di punti corrispondenti appartenenti, rispettivamente, a $J' = (P_1, P_2, P_3)$ e $J'' = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Se $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$, allora, diciamo che le coppie sono congruenti e scriviamo: $(P_i, P_j) \equiv (Q_i, Q_j)$.

DEF.18 Gli insiemi ternari J' e J'' sono detti congruenti se ogni coppia di punti di J' è congruente con la coppia corrispondente di J'' .

Nota 13 Sia P un qualsiasi punto dello spazio. Essendo I un insieme completo si ha:

$P \cdot I = \text{cost.}$ Se la costante generata dal precedente prodotto è zero l'insieme I è un divisore dello zero e lo indichiamo così: I^0 . Il teorema che segue stabilisce una condizione sufficiente per individuare alcuni casi di insiemi completi, divisori dello zero.

TH.10 Siano $J' = (A, B, C)$ e $J'' = (M, N, S)$ due terne di punti allineati. Supponiamo che effettuando la seguente assegnazione di indici: (A_1, B_2, C_3) e (M_1, N_2, S_3) , i due insiemi risultino congruenti essendo:

$$\begin{aligned} d(A_1, B_2) &= d(M_1, N_2) = n, \quad d(B_2, C_3) = d(N_2, S_3) = m, \\ d(A_1, C_3) &= d(M_1, S_3) = (m + n) \end{aligned}$$

Verificandosi le precedenti ipotesi è possibile ricavare due insiemi completi I_1 e I_2 la cui differenza: $I = I_1 - I_2$, è un insieme completo, divisore dello zero.

Per il TH.1 gli insiemi $I_1 = [mA, - (m + n)B, nC]$ e $I_2 = [mM, - (m + n)N, nS]$ sono completi e quindi anche $I = I_1 - I_2$ è un insieme completo. Per la nota 1, b), successiva al th.1, si ha, qualunque sia il punto P dello spazio S: $P \cdot I_1 = m n (m + n)$ e $P \cdot I_2 = m n (m + n)$.
Essendo $P \cdot I = P \cdot (I_1 - I_2) = P \cdot I_1 - P \cdot I_2 = m n (m + n) - m n (m + n) = 0$. L'insieme I, è, quindi, un divisore dello zero.

NOTA. 14 Supponiamo che due punti corrispondenti, appartenenti, rispettivamente, agli insiemi J' e J'' , insiemi già definiti nel precedente teorema, siano coincidenti; ad esempio, risulti: $A \equiv M \equiv X$. In questo caso le J' e J'' possiamo riscriverle così:

$$I_1 = [mX, - (m + n)B, nC],$$

$$I_2 = [mX, - (m + n)N, nS]$$

La $I = I_1 - I_2$ diviene: $I = [-(m + n)B, nC, (m + n)N, - nS]$.
In questo caso si ottiene un divisore dello zero quaternario.

Applicazione 19 Sia $J = (A, B, C, D)$ l'insieme dei vertici del rettangolo $R(J)$ appartenenti al piano π . Trovare la distanza del punto P (non appartenente necessariamente a π) dal vertice A sapendo che $d(B, P) = \sqrt{10}$, $d(C, P) = \sqrt{26}$, $d(D, P) = \sqrt{41}$.

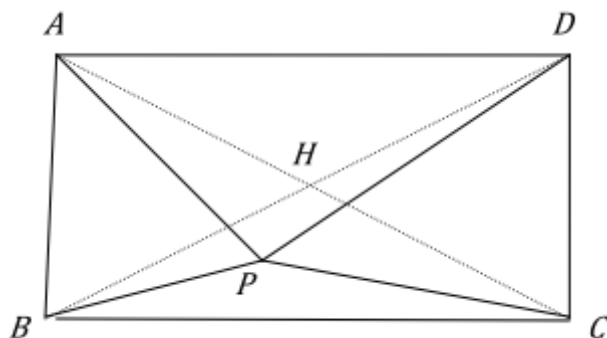


Fig. 29

(Assumiamo la seguente definizione di rettangolo: il rettangolo è un quadrilatero le cui diagonali si intersecano nel punto medio ed hanno stesso modulo). Essendo H il punto di intersezione delle diagonali $[A, C]$ e $[B, D]$, assegniamo agli elementi (A, H, C) e (B, H, D) i seguenti indici: (A_1, H_2, C_3) e (B_1, H_2, D_3) , evidenziando la congruenza dei due insiemi. Essendo $d(A, H) = d(H, C) = d(B, H) = d(H, D)$, gli insiemi $I' = (A, -2H, C)$ e $I'' = (B, -2H, D)$ sono completi ed hanno un punto materiale in comune pertanto, per il TH.10 e per la nota 8, l'insieme completo

$$I^0 = \text{rid.} \{ I' \cup [(-1)I''] \} = (A, C, -B, -D)$$

è un insieme quaternario, divisore dello zero. Si ha:

$$P \cdot I^0 = [d(P, A)]^2 + [d(P, C)]^2 - [d(P, B)]^2 - [d(P, D)]^2 = 0.$$

Posto $d(P, A) = x$, risulta

$$P \cdot I^0 = x^2 + 26 - 10 - 41 = 0 \quad \text{da cui } d(P, A) = 5.$$

Applicazione 20 Sia H il punto di intersezione delle diagonali $[B, D]$ e $[A, C]$ di un trapezio isoscele e risulti:

$d(A, H) = d(B, H) = n$, $d(D, H) = d(C, H) = m$, $d(A, B) = d$.
Calcolare $d(A, D)$ e $d(D, C)$.

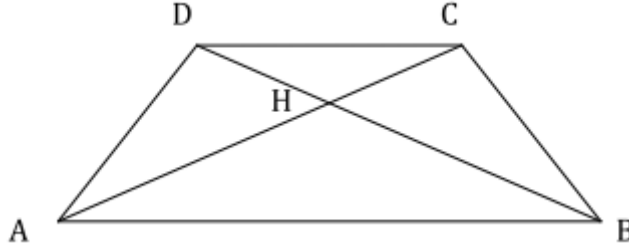


Fig. 30

Data la congruenza di $J' = (A_1, H_2, C_3)$ e $J'' = (B_1, H_2, D_3)$, per il TH.10, gli insiemi completi, aventi sostegno J' e J'' possono essere così rappresentati:

$$I' = [m A, -(m+n) H, n C] \text{ e } I'' = [m B, -(m+n) H, n D].$$

$$L'insieme completo $I^0 = \text{rid.}\{I' \cup [(-1)I'']\} =$$$

$$= (m A, -m B, n C, -n D) \text{ è un divisore dello zero.}$$

Per calcolare $d(A, D)$ sviluppiamo l'equazione

$$A \cdot I^0 = 0 : A \cdot I^0 = -m [d(A, B)]^2 + n [d(A, C)]^2 - n [d(A, D)]^2 = 0.$$

Posto $d(A, D) = x$, sostituendo si ha :

$$-m d^2 + n (n+m)^2 - n x^2 = 0$$

$$\text{da cui } d(A, D) = \sqrt{(m+n)^2 - \frac{d^2 \cdot m}{n}}.$$

Per calcolare $d(D, C)$ sviluppiamo l'equazione $D \cdot I^0$ da cui si ha:

$$m [d(D, A)]^2 - m [d(D, B)]^2 + n [d(D, C)]^2 = 0.$$

Posto $d(D, C) = y$, sostituendo, si ha :

$$m \left((m+n)^2 - \frac{m}{n} d^2 \right) - m (m+n)^2 + n y^2 = 0$$

$$\text{da cui } d(D, C) = \frac{m}{n} d.$$

Applicazione 21 Le lunghezze delle basi di un trapezio isoscele siano $d(A, B) = a$ e $d(D, C) = b$ con $a > b$. Trovare $d(P, A)$ sapendo che $d(P, B) = s$, $d(P, C) = k$, $d(P, D) = h$ (fig. 31).

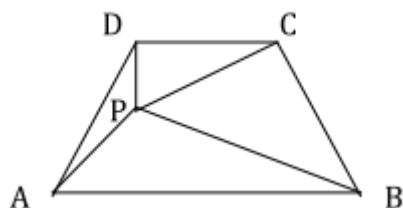


Fig. 31

Siano M e N le proiezioni ortogonali di D e C su $[A, B]$; sia H il punto medio di (A, B) . Si ha: $d(A, M) = d(N, B) = \frac{a-b}{2}$
 $d(M, H) = d(H, N) = \frac{b}{2}$, $d(A, H) = d(H, B) = \frac{a}{2}$.

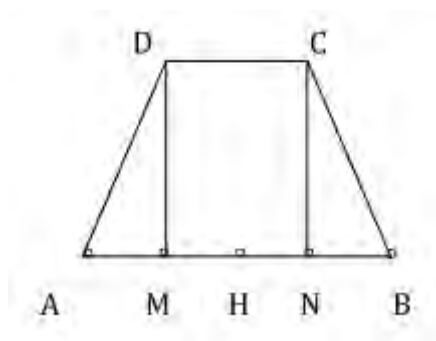


Fig. 32

Dalle precedenti relazioni si deduce che (A_1, M_2, H_3) e (B_1, N_2, H_3) sono congruenti, sostegno degli insiemi completi:

$$I' = \left(\frac{b}{2} A, -\frac{a}{2} M, \frac{a-b}{2} H \right) \text{ e } I'' = \left(\frac{b}{2} B, -\frac{a}{2} N, \frac{a-b}{2} H \right)$$

aventi in comune il punto materiale $\frac{a-b}{2} H$.

Dal TH.10, si ha che $I' \cup [(-1)I'']$ è un divisore dello zero:

$$I' \cup [(-1)I''] = \left(\frac{b}{2} A, -\frac{a}{2} M, \frac{a-b}{2} H, -\frac{b}{2} B, \frac{a}{2} N, -\frac{a-b}{2} H \right)$$

Riducendo si ha: $I_1^0 = (b A, -a M, -b B, a N)$.

Anche i punti (M, N, C, D) , essendo vertici di un rettangolo, come risulta dall'applicazione 17, sono di sostegno ad un insieme completo, divisore dello zero: $I_2^0 = (M, -N, C, -D)$.

E' facile dimostrare che l'unione di due insiemi completi, divisori dello zero, è un insieme completo, divisore dello zero; quindi, essendo $I^0 = I_1^0 \cup [a \cdot I_2^0] = (b A, -b B, a C, -a D)$ un insieme completo, divisore dello zero, si ha :

$$P \cdot (b A, -b B, a C, -a D) = b \cdot [d(P,A)]^2, -b \cdot [d(P,B)]^2, \\ a \cdot [d(P,C)]^2, -a \cdot [d(P,D)]^2 = 0$$

Posto $d(P,A) = x$, si ha : $b x^2 - b s^2 + a k^2 - a h^2 = 0$ da cui

$$d(P,A) = \frac{\sqrt{bs^2 - ak^2 + ah^2}}{b}$$

6 - Condizioni di completezza di un insieme del IV ordine

Th.11 L'insieme $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ contenga terne di punti non allineati, appartenenti al piano π sul quale sia fissato un qualsiasi sistema cartesiano ortonormale (O, x, y) , mediante il quale risulti:

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2), \quad P_3 = (x_3, y_3), \quad P_4 = (x_4, y_4)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme

$I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$, con $m_i \in \mathbb{R}$ sia completo, sono le seguenti :

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0 \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 = 0 \end{cases} \quad (6,1)$$

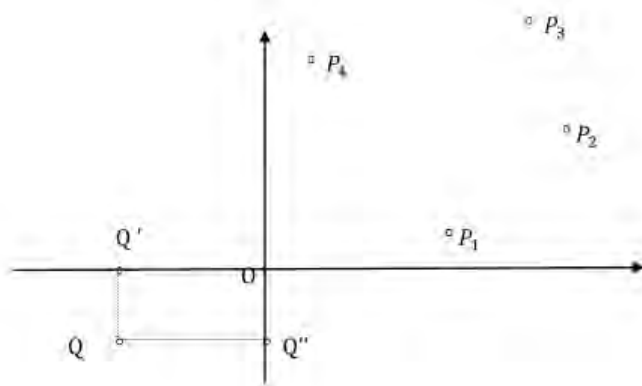


Fig. 33

Condizione necessaria

Affinchè I sia completo deve risultare: $O \cdot I = Q' \cdot I$

(6,2) essendo $Q' = (d,0)$ un qualsiasi punto sull'asse delle x.

Si ha, allora:

$$O \cdot I = m_1 [(x_1)^2 + (y_1)^2] + m_2 [(x_2)^2 + (y_2)^2] + m_3 [(x_3)^2 + (y_3)^2] + m_4 [(x_4)^2 + (y_4)^2]$$

$$Q' \cdot I = m_1 [(x_1 + d)^2 + (y_1)^2] + m_2 [(x_2 + d)^2 + (y_2)^2] + m_3 [(x_3 + d)^2 + (y_3)^2] + m_4 [(x_4 + d)^2 + (y_4)^2] =$$

$$= O \cdot I + 2d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) + d^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

Sostituendo $O \cdot I$ e $Q' \cdot I$ nella (6,2) si ha:

$$2d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) + d^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 0$$

Affinchè la precedente relazione risulti eguale a zero, essendo d l'ascissa di un qualsiasi punto sull'asse x, deve risultare: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0$ (6,3)

Analogamente, essendo $Q'' = (0, h)$ un qualsiasi punto sull'asse delle y , se I è completo, deve risultare:

$O \cdot I = Q'' \cdot I$. Procedendo come sopra si ricavano le seguenti condizioni:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 = 0 \quad (6,4)$$

Da (6,3) e (6,4) si ricava la tesi.

Condizione sufficiente

Procedendo a ritroso, nell'ipotesi che le (1) siano verificate, si ottiene: $O \cdot I = Q \cdot I$, essendo $Q = (d, h)$ un qualsiasi punto del piano.

Applicazione 22 Trovare le coordinate di H , punto di intersezione delle rette r e s , passanti, rispettivamente, per $A = (-3, -1)$, $B = (2, 4)$ e per $D = (4, 12)$, $C = (9, 2)$.

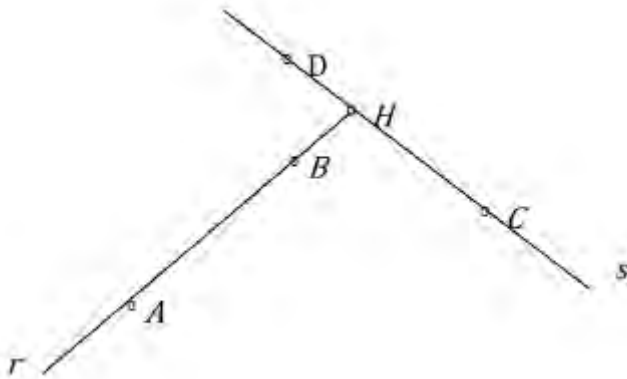


Fig. 34

Tenendo conto della nota 9 l'insieme completo con sostegno (A, B, C, D) è $[m \cdot A, n \cdot B, 1 \cdot C, -(m + n + 1) \cdot D]$ (6,5)

L'insieme I , essendo completo, per il TH.11 deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m \cdot (-3) + n \cdot 2 + 1 \cdot 9 - (m + n + 1) \cdot 4 = 0 \\ m \cdot (-1) + n \cdot 4 + 1 \cdot 2 - (m + n + 1) \cdot 12 = 0 \end{cases}$$

da cui
$$\begin{cases} m = 2 \\ n = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Sostituendo m e n nella (6,5) e moltiplicando per 2, si ha:

$$I = (4 \cdot A, -9 \cdot B, 2 \cdot C, 3 \cdot D).$$

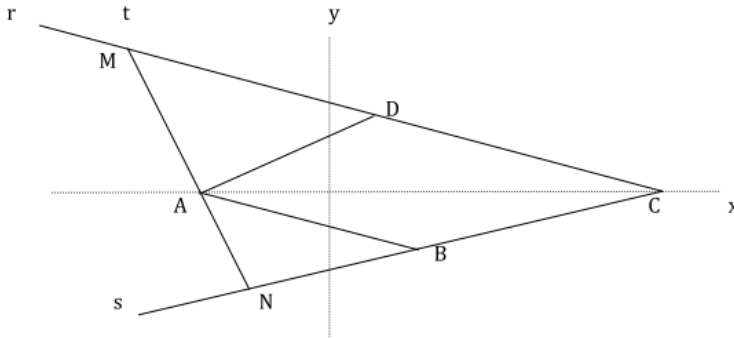
Indicato con $-5 \cdot Z$ il complementare di $2 \cdot C$ e $3 \cdot D$, essendo $I' = (2 \cdot C, -5 \cdot Z, 3 \cdot D)$ un insieme completo, Z risulta allineato con C e D . Poichè anche:

$I'' = \text{rid.}[I \cup (-1) \cdot I'] = (4 \cdot A, -9 \cdot B, 5 \cdot Z)$ è un insieme completo, Z è allineato con A e B pertanto coincide con il punto di intersezione H di r e s . Posto $H = (x, y)$, dalle condizioni di completezza di I' (oppure I'') si ha:

$$\begin{cases} 2 \cdot 9 - 5 \cdot x + 3 \cdot 4 = 0 \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot y + 3 \cdot 12 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

Applicazione 23 Le coordinate dei vertici di un quadrilatero $Q(A, B, C, D)$ sono $A = (-6, 0)$, $B = (2, -4)$, $C = (14, 0)$, $D = (2, 4)$. La retta t , passante per A , interseca in M e in N la r e la s , rette passanti, rispettivamente, per D e C e per B, C .

Sapendo che $\frac{d(M, A)}{d(A, N)} = 2$, trovare le coordinate di M e N .



Gli insiemi completi con sostegno (C,D,M) , (C,B,N) , (M,A,N) sono:

$$I_3 = [M, -3 A, 2 N)$$

$$I = ([3 A, -2 (1 + n)B, (m + 2 n) C - (1 + m)D]$$
$$\begin{cases} 3 \cdot (-6) - 2 \cdot (1+n) \cdot 2 + (m+2n) \cdot 14 - (1+m) \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 0 - 2 \cdot (1+n) \cdot (-4) + (m+2n) \cdot 0 - (1+m) \cdot 4 = 0 \end{cases}$$
$$n = \frac{1}{4} \quad , \quad m = \frac{3}{2}$$
$$I_1' = (2 \text{ M}, -5 \text{ D}, 3 \text{ C}).$$

posto $M = (x,y)$, si ha :
$$\begin{cases} 2 \cdot x - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 14 = 0 \\ 2 \cdot y - 5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ y = 10 \end{cases} \text{ e quindi } M = (-16, 10)$$

Procedendo in modo analogo , sostituendo $n = \frac{1}{4}$ in I_2 si ottiene: $N = (-1, -5)$

Bibliografia

Francia F. (1985). Insiemi di punti materiali. In *Archimede* N.1, Le Monnier.

Francia F. (2019). *Insiemi completi del terzo ordine*. In *Periodico di Matematica*, Vol. I (1-2).

Non si può capire il mondo fisico senza la matematica

«Se siamo interessati alla natura fondamentale del mondo fisico, o del mondo in generale, l'unico strumento a nostra disposizione è oggi il ragionamento matematico. Non credo quindi che si possano apprezzare pienamente (in verità, non credo neppure che si possano apprezzare granché) questi aspetti del mondo – il carattere di universalità delle leggi, le relazioni tra le cose – se non si capisce la matematica. Che io sappia, non c'è altra via; non abbiamo un modo per descrivere accuratamente questi aspetti o per cogliere le interrelazioni senza matematica».

(Richard Feynman, *Il piacere di scoprire*, Milano: Adelphi, 2020, p. 33)

Le congetture sulla forma dell'universo

Franco Eugeni * - Alberto Trotta**

* Già professore ordinario di Filosofia della Scienza.

** Professore di Matematica e Fisica presso IIS "S. Caterina da Siena-
Amendola" Salerno

***Sunto.** In questo articolo vengono riportate alcune delle tappe del percorso che è stato fatto da cosmologi, fisici teorici e matematici al fine di elaborare un modello teorico generale in grado di descrivere l'universo in modo unitario e coerente e di stabilirne la "forma".*

***Parole Chiave:** Universo, teorie, varietà differenziabili, dimensioni.*

***Abstract:** This paper is a report about conjectures and theories proposed by cosmologists, theoretical physicist and mathematicians in order to develop a general theoretical model, capable of describing the universe in a unitary and coherent way and of establishing its "shape".*

***Key words:** Universe, theories, differential manifolds, dimensions.*

1 - Introduzione

Enorme è la difficoltà di elaborare un quadro coerente dell'universo che tenga pienamente conto di una molteplicità di elementi quali ad esempio la gravitazione e la teoria quantistica. Nell'indagine sulle dimensioni nascoste dell'Universo, ci si chiede fino a che punto, possono spingersi i ricercatori, in assenza di una qualsiasi prova di carattere

fisico? La stessa domanda può essere posta ai teorici delle stringhe, impegnati a mettere a punto, una teoria completa della natura purtroppo in assenza di riscontri empirici. È come esplorare una caverna oscura e profonda senza avere la più pallida idea della sua conformazione. Cimentarsi in una esplorazione in condizioni così sfavorevoli può sembrare una follia.

2 - La ricerca ha inizio

Iniziamo la nostra esplorazione partendo da un lavoro (Bertotti, 1980, p. 33) del 1948 di Hermann Bondi e Tomas Gold, nel quale è stato asserito che le leggi della fisica non possono essere indipendenti dalla struttura dell'universo e viceversa la struttura dell'universo non può che dipendere dalle leggi della fisica, ne consegue che vi può essere una situazione stabile e autoperpetuantesi. In tal caso si può supporre che le proprietà e l'aspetto dell'universo siano le stesse non solo da posto a posto, ma anche da istante a istante, ipotesi che va sotto il nome di "*principio cosmologico perfetto*". Qui non staremo a sostenere che tale principio sia vero o se è una ipotesi di lavoro, ma affermiamo che se esso non vale, la scelta della variabilità delle leggi fisiche diventa così ampia che la cosmologia non può più essere ritenuta una scienza. In frangenti come questo la matematica può venirci in soccorso, visto che in passato il suo utilizzo ha comportato il raggiungimento di notevoli risultati. Cominciamo con lo studio dello spazio, la cosa apparentemente più ovvia e più evidente, ma che è forse la più misteriosa e difficile da intuire. È notorio che lo spazio fisico sia un ente dotato di proprietà,

quindi non un semplice contenitore e neppure un oggetto solo numerico. Nello spazio infatti si muovono le masse, si trasmette la luce ed esso ospita anche il fermento degli stati virtuali della meccanica quantistica. Inoltre ha la proprietà di potersi ripiegare su sè stesso rinchiudendosi. Altre proprietà sono quelle espresse nelle equazioni della relatività generale. Una fra tutte è la sua metrica: la quantità che determina la scala delle distanze. È la metrica infatti che definisce il tipo di geometria, che ha tale spazio e, applicandola, ci fornisce tutte le informazioni delle quali abbiamo bisogno per stabilirne la sua forma. Una volta che si è dotati della capacità di eseguire misure possiamo determinare con grande precisione la piattezza dello spazio, come pure la deviazione dalla piattezza ovvero la sua curvatura, che è la cosa più interessante di tutte. Cominciamo ad evidenziare che per molto tempo lo spazio fu ritenuto tridimensionale e che solo all'inizio del XX secolo si passò ad una concezione quadridimensionale aggiungendo alle tre dimensioni spaziali una dimensione temporale. Fu Einstein che abbandonata l'idea di un universo stazionario, che per un certo periodo l'aveva affascinato, con la teoria della relatività riuscì a rivoluzionare il nostro modo di concepire lo spazio e il tempo non più intesi come entità assolute, ma relative. Einstein diede una descrizione geometrica del tempo e dello spazio e la geometria di riferimento non fu né la geometria di Euclide né la geometria analitica di Dessestiones René ma la geometria differenziale di Gauss e di Riemann (la geometria delle varietà differenziabili a n dimensioni, con curvatura e metrica locali) la quale divenne la chiave della soluzione dei suoi problemi, trovandosi egli alle prese con l'idea di uno spazio curvo quadridimensionale, cioè di uno

spazio-tempo che non fosse parte o come suol dirsi “fosse immerso” in uno spazio più grande. Riemann avendo messo a punto una cornice concettuale esattamente come la concepiva Einstein, portò lo stesso Einstein a dichiarare, con una certa audacia, che la geometria di Riemann fosse in perfetto accordo con la fisica della gravità. Inoltre Einstein non solo riconobbe che lo spazio-tempo poteva essere descritto nei termini della geometria di Riemann, ma si rese conto che la sua stessa fisica poteva essere influenzata dalla geometria dello spazio-tempo. Così, proprio perché disponeva del tensore metrico di Riemann, stabilì la forma e le altre proprietà (la geometria, in altre parole) dello spazio-tempo, secondo questa nuova concezione e scrisse le sue equazioni facendo uso del calcolo tensoriale, al quale era stato introdotto da Grossman¹, e la sintesi tra geometria e fisica è rappresentata dalla famosa equazione di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

la quale costituisce il cuore della teoria generale della relatività ed esprime il fatto che la geometria dello spazio-tempo ($G_{\mu\nu}$, il tensore di curvatura di Einstein) è determinata dalla distribuzione della materia e dell'energia ($T_{\mu\nu}$, il tensore stress-energia), dove G è la costante di Newton che caratterizza l'intensità della gravità. In altri termini, la materia e l'energia dettano la curvatura dello spazio e questo mostra che la gravità, ovvero la forza che stabilisce la forma del cosmo su grande scala, può essere considerata una sorta d'illusione dovuta alla curvatura dello spazio e del tempo. Il tensore metrico della teoria Riemmaniana, non solo

descriveva la curvatura dello spazio-tempo, ma descriveva anche il campo gravitazionale della teoria di Einstein. A questo punto possiamo dire che mentre la relatività speciale aveva unificato spazio e tempo attraverso la definizione dello spazio-tempo, la successiva teoria generale della relatività unificava spazio e tempo con materia e gravità. Questa fu una svolta concettuale decisiva. Se ora prendiamo in esame uno spazio privo di massa, cosa possiamo dire in relazione all'equazione di campo di Einstein? Un caso speciale, proprio di tale questione, era stato considerato dal matematico Eugenio Calabi anche se vi si era accostato da una prospettiva puramente matematica.¹ La questione che affronta Calabi risulta essere intimamente legata alla teoria della relatività generale e alla domanda se può esserci gravità nel nostro Universo, anche se lo spazio è vuoto, ossia se è totalmente privo di materia, possiamo rispondere affermativamente solo se Calabi è nel giusto. Nel 1977 fu dimostrata la congettura di Calabi da Shing-Tung Yau (Yau, Nadis, 2019). Pertanto possiamo rispondere positivamente alla domanda : nel vuoto vi è gravità? La curvatura rende possibile la gravità in assenza di materia? E gli spazi di Calabi-Yau soddisfano l'equazione di Einstein in caso di assenza di materia? Tali spazi chiamati varietà di Calabi-Yau sono soluzioni delle equazioni differenziali di Einstein. È intuibile che per descrivere gli spazi di Calabi-Yau sono necessarie molte equazioni. Questi spazi sono delle varietà differenziabili a variabili complesse, di difficile intuizione², si dice che sono con spinore armonico non

¹ Le varietà iperkähler definite da Eugenio Calabi nel 1978.

² Per maggiori dettagli vedere l'argomento geometria differenziale in "Enciclopedia del Novecento"

nullo e sono privi di simmetria globale, ma sono dotati di simmetrie interne interessanti. Gli spazi di Calabi-Yau trovano applicazioni essenzialmente nell'ambito della fisica teorica e in particolare in un modello della teoria delle stringhe, che postula che l'universo debba avere una forma del tipo di un prodotto cartesiano $M \times V$ di due varietà, dove M è una varietà quadridimensionale (lo spazio-tempo) e V una varietà di Calabi-Yau compatta a tre dimensioni complesse (6 dimensioni reali).

Fu la ricerca di una nuova "teoria del tutto" che portò i teorici delle stringhe ad ipotizzare spazi del genere. Nel 1995, Edward Witten mostrò che tutte le cinque teorie delle stringhe (Yau, Steve, 2019) rappresentavano aspetti diversi di una medesima teoria sovrastante, che chiamò M-teoria non rivelando mai il significato della M . Tale teoria presenta la caratteristica di esistere in undici dimensioni che la distingue dalle cinque teorie delle stringhe che ne prevedono dieci. Sul numero delle dimensioni i fisici sono in disaccordo. Infatti alcuni affermano che le dimensioni siano dieci, altri propendono per undici. Inoltre il fisico Strominger ritiene che la nozione di dimensione non sia assoluta.

Perfino colui che è l'indiscutibile autore della M-teoria, lo stesso Witten, concede che le descrizioni dell'Universo in dieci o undici dimensioni siano entrambe corrette asserendo che non esista una teoria più fondamentale dell'altra e limitatamente ad alcuni fini una teoria potrebbe essere più utile dell'altra. Ormai la comunità dei fisici teorici ritiene che le teorie unificate siano possibili solo a condizione che lo spazio abbia dimensioni maggiori di quelle alle quali la vita quotidiana ci ha abituati. Come è noto le grandi teorie della

fisica del XX secolo sono state la teoria quantistica, la relatività ristretta, la relatività generale e la teoria quantistica dei campi. Le teorie ora menzionate sono legate l'una all'altra: la relatività generale fu costruita sulla base della relatività ristretta e la teoria quantistica dei campi si fonda sulla relatività ristretta e sulla teoria quantistica. Benché tali teorie abbiano avuto un notevole successo, non sono senza problemi. Si può però ritenere che la soluzione dei vari problemi che affliggono queste teorie, che prese a sé stanti sono incomplete, è teoricamente possibile nel momento in cui se ne trovi una nuova che le combini in modo appropriato. Sembra che la teoria delle stringhe possa essere una soluzione al nostro problema. In effetti tale teoria sembra anche accordarsi con tutto quello che sappiamo della fisica delle particelle e nello stesso tempo offre la possibilità di affrontare argomenti intrecciati con le nozioni di spazio e tempo: come ad esempio la gravità e i buchi neri. Il fisico Robert Dijkgraaf, dell'università di Amsterdam, sostiene che le "teorie di gauge" - come le equazioni di Yang-Mills che descrivono l'interazione nucleare forte - forniscono una rappresentazione fondamentale della natura e tali teorie sono strettamente connesse con quella delle stringhe (Yau, Steve, 2019). Questo è vero in virtù di tutte le dualità che sanciscono un'equivalenza tra la simmetria di campo e la geometria delle stringhe. Inoltre la suddetta teoria non solo quantizza la gravità, ma la prevede, così come afferma Edward Witten. Essa però, nonostante sia consistente dal punto di vista della matematica e non presenti contraddizioni, è sempre sottoposta a condizioni di fallibilità. Non vi è però alcun dubbio che nel corso della sua evoluzione abbia fornito alla matematica

nuove idee, dalle quali attingere, nuovi strumenti e nuovi orientamenti. La scoperta della simmetria speculare³, che ne è un esempio, ha creato un indotto di attività nel campo della geometria algebrica ed enumerativa. Una grande difficoltà nell'ambito della teoria delle stringhe e le varietà di Calabi-Yau è rappresentata dal problema dei "moduli" (Yau, Steve, 2019, p. 302), i quali determinano sia la forma, che la grandezza, di una qualsiasi varietà topologica provvista di fori. Il nodo qui è che se non c'è niente che limiti la grandezza e la forma della varietà di Calabi-Yau, ogni speranza di ricavare una fisica realistica a partire dalla geometria delle varietà topologiche, resterà frustrata. La pubblicazione di un lavoro⁴ conosciuto come KKL^T, dal nome dei suoi autori: Shamit Kachrun Renata Kallosch e Andrei Linde della Stanford University, nonché Sandip Trivedi del Tata Institute in India, è generalmente considerata la prima testimonianza di un modo coerente di stabilizzare tutti i moduli, sia quelli di forma che quelli di grandezza. La stabilizzazione di forma e di volume è di fondamentale importanza, se vogliamo dare una spiegazione all'inflazione cosmica, secondo la quale quasi tutte le caratteristiche dell'Universo osservabile sono il risultato di un periodo di crescita esponenziale, breve ma esplosivo al tempo del Big Bang. Tale crescita, secondo questa teoria, è alimentata dalla presenza del cosiddetto campo inflattivo, che fornisce l'energia positiva che governa l'espansione. Diciamo che sia la forma che il volume sono stabilizzati quando c'è qualcos'altro che contrasta l'espansione

³ Simmetria speculare, o simmetria a specchio è una simmetria che può sussistere su due varietà di Calabi-Yau.

o la compressione così come è stato spiegato da Raman Sundrum⁵ della John Hopkins University. Sono le “brane” (le brane sono un elemento essenziale della geometria delle stringhe), nello scenario presentato da KKLT, con il proposito di creare uno spazio-tempo compatto e stabile (tale risultato è stato ottenuto non in un sol modo, ma in diverse maniere), che rendono possibile un meccanismo finalizzato alla realizzazione di un modello dell’Universo che conosciamo, con gli strumenti dei quali disponiamo: un Universo influenzato in maniera notevole dall’inflazione. La pubblicazione di KKLT illustra come i moduli possano essere stabilizzati, dimostrando di conseguenza come una varietà di Calabi-Yau possa ridursi ad un insieme di forme stabili o quasi-stabili. Questo significa che è possibile considerare le cosiddette varietà di Calabi-Yau di specifica topologia, nonché stabilirne i modi con cui ciascuna di tali varietà possa essere equipaggiata di flussi e di brane, e procedere a una vera e propria enumerazione di tutte le possibili configurazioni. Il problema è che il numero di configurazioni possibili è elevato, arriva a 10^{500} , e trattasi di una cifra solo indicativa. Pertanto si può asserire che, in virtù della complessità topologica delle varietà di Calabi-Yau, le equazioni della teoria delle stringhe presentano un numero elevato di soluzioni. Ciascuna di esse corrisponde ad una diversa varietà di Calabi-Yau di geometria diversa, che a sua volta, comporta particelle diverse, costanti fisiche diverse e così via. Inoltre essendo le varietà di Calabi-

⁵ Fisico delle particelle che ha concentrato la sua ricerca sulle dimensioni dello spaziotempo, sulla supersimmetria, sulle brane (domini o strisce di varie dimensioni spaziali all’interno di uno spazio a più dimensioni).

Yau soluzioni delle equazioni di Einstein nel vuoto, ciascuna di esse implica modi diversi di incorporare flussi e brane e ciascun modo corrisponde ad un universo caratterizzato da uno stato di vuoto diverso e, pertanto, da un'energia del vuoto diversa.

3 - Esistono più universi?

La sorpresa in relazione a tutto questo è che un buon numero di fisici teorici ritengono che tutti questi possibili universi potrebbero di fatto esistere. Susskind ritiene che non ci sia modo di aggirare le soluzioni multiple della teoria delle stringhe. Alcuni fisici in origine avevano sperato che vi fosse una sola varietà di Calabi-Yau, la quale potesse caratterizzare le dimensioni nascoste della teoria delle stringhe. Ma si può già ritenere un risultato positivo il fatto che il numero possibile di varietà di Calabi-Yau sia finito e non infinito.

Un altro problema che si pongono i cosmologi è quello relativo al calcolo delle costanti e in particolare a quello inerente alla costante cosmologica. I cosmologi di oggi dimostrano di essere disposti ad accettare l'idea che costanti fondamentali, un tempo ritenute sacre e inviolabili, possano variare. La loro maggiore apertura è evidenziata dal modo in cui si sono viste nascere molte costanti nella teoria delle stringhe. Dalla vasta gamma di stati di vuoto che si rinviene in queste teorie emerge che vi sono innumerevoli "contratti" diversi delle costanti, che producono universi possibili coerenti. Le costanti appaiono oggi cose ordinarie che possono assumere ogni sorta di valore e variare se l'universo evolve da un vuoto all'altro, così che il loro rango risulta essere

abbassato nell'ambito cosmologico. Una costante fondamentale è la cosmologica, ma neanche di essa si può dire che sia determinata in maniera unica e completa.

Einstein introdusse il termine cosmologico Λ nella sua equazione di campo per creare un modello di universo statico ed equilibrare l'attrazione di gravità a scala cosmica. Ma poi l'abbandonò, quando divenne chiaro che l'universo è in espansione. Oggi i fisici teorici hanno introdotto nell'equazione di campo un nuovo termine cosmologico imposto dalla teoria quantistica secondo la quale lo spazio vuoto può possedere una piccola densità di energia.

Tale termine viene rappresentato nell'equazione dal seguente prodotto $\rho_{\text{VAC}} g_{\mu\nu}$, dove ρ_{VAC} rappresenta la densità di energia nel vuoto, mentre $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico spazio-temporale. Pertanto oggi come equazione di campo, si considera la seguente :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + \rho_{\text{VAC}} g_{\mu\nu}).$$

In tempi molto recenti i fisici Douglas Shaw e John D. Barrow hanno affrontato il problema in maniera completamente nuova (Barrow, 2011), aggiungendo a quelle trovate da Einstein un'altra equazione, la quale fa sì che la costante cosmologica si comporti come una forma di energia soggetta all'occorrenza a variazioni e questo ci consente di fare una predizione precisa dell'attuale grandezza della curvatura spaziale dell'universo visibile: la curvatura dovrebbe essere positiva e il valore osservabile della sua energia effettiva dovrebbe essere -0,0056. Le attuali osservazioni dimostrano che questa energia di curvatura è

compresa tra $-0,0056$ e $+0,0084$. L'attuale paradigma della costante cosmologica ci fornisce un quadro di un universo inflattivo che ai primordi ha subito un'espansione accelerata e che ha previsto con efficacia una speciale configurazione di variazioni minime, osservabili nella radiazione di fondo residua, dei primi stadi di espansione dell'Universo. Mediante i super computer che simulano la complessità degli ammassi di galassie e le osservazioni compiute con i nuovi telescopi, si è riusciti a mappare un universo che è comprensibile, ma sconcertante, ossia un universo che è membro di un multiuniverso costituito da universi reali dotati di proprietà diverse.

4 - Conclusioni

Ancora lunga e tortuosa è la strada da percorrere per poter comprendere la struttura dell'universo, i suoi costituenti e tutte le multiformi leggi che lo governano. Riteniamo però che quanto finora è stato fatto contribuirà in maniera significativa al raggiungimento dell'obiettivo e che la geometria, come la intendiamo oggi sia destinata a cedere il passo ed essere sostituita da qualcosa di più potente, che attualmente non conosciamo. Questo sarebbe un formidabile salto epistemologico che segnerebbe una nuova era. Al fine di sondare l'universo al livello delle dimensioni nascoste o delle singole stringhe avremmo bisogno di una geometria applicabile su larga scala, come anche su scala ridotta. Molti fisici teorici ritengono che la geometria nella prospettiva della fisica, potrebbe essere un fenomeno "emergente", e non un fenomeno inerente ai fondamenti stessi della fisica. Del resto

come è noto il campo di riferimento della geometria ha subito continue trasformazioni nel corso dei secoli. Anche se non sappiamo quali possano essere i possibili sviluppi futuri siamo certi che essa nel futuro sarà più utile di quanto non lo sia oggi.

Bibliografia

Barrow John D. (2011). *The Book of Universes* Traduzione di Serra. Laura. Ristampa del 2018. Milano: Mondadori.

Battiston R. (2019). *La prima luce del cosmo*, Milano: Mondadori.

Bertotti B. (1980). *Introduzione a....La cosmologia*. Firenze: Le Monnier.

Gamov George (1966). *Trent'anni che sconvolsero la fisica*. Torino: Zanichelli.

Hawking Stephen W., Penrose Roger (2017). *The Nature of Space and Time*. Traduzione di Sosio Libero. Milano: BUR Rizzoli.

Yau Shing-Tung, Nadis Steve (2019). *The Shape Inner Space*. Traduzione di Piga Claudio. Milano: il Saggiatore.

«Le Scienze» edizione italiana di «Scientific American» (2004). Numero speciale numero 435 (novembre 2004). *L'eredità di Einstein*.

Kachru Shamir, Kallosh Renata, Linde Andrei, Trivedi Sandip (2003). De Sitter Vacua in String Theory. In *Physical Review D* 68.

La scienza per un matematico

«La scienza non è semplice riflesso di un ordine delle cose fuori di me, anzi è costruzione della realtà per opera della mente; ma la costruzione si fa sempre in funzione dei dati sperimentali, sicché i principi che, in un certo grado di sviluppo dell'evoluzione scientifica, traducono certe esigenze della nostra comprensione, evolvono essi stessi per accordarsi con una più larga realtà» (Federigo Enriques, Il significato della storia del pensiero scientifico, 1934/1936, ristampa Barbieri 2004, p. 22).

«... la corrispondenza fra i concetti scientifici e la realtà sensibile rimane sempre una corrispondenza approssimata, ma il valore obiettivo della razionalità del sapere consiste in ciò che il processo della scienza è un processo di approssimazioni successive illimitatamente perseguibile». (Federigo Enriques, Scienza e razionalismo, Zanichelli, 1912, p. 114).

La scienza per un fisico

«... il pensiero scientifico, che non è fatto di certezze acquisite: è un pensiero in movimento continuo, la cui forza è proprio la capacità di rimettere sempre in discussione ogni cosa e ripartire, di non aver paura di sovvertire un ordine del mondo per cercarne uno più efficace, e poi rimettere ancora tutto in discussione, sovvertire tutto di nuovo. Non aver paura di ripensare il mondo è la forza della scienza. [...] La realtà si ridisegna in continuazione in forme via via più efficaci. Il coraggio di reinventare in profondità il mondo: questo è il fascino sottile della scienza».

(Carlo Rovelli, Helgoland, Adelphi, 2020, pp. 82-83).

Funzioni $\mathfrak{J}$ -monotone e loro applicazioni alla didattica dell'Analisi Matematica

Antonio Maturo* Pierpaolo Palka**

* Mathesis Abruzzo; via Pianacci 24, Montesilvano, e_mail
antomato75@gmail.com

** Dipartimento di Ingegneria; Viale Pindaro 29, Pescara, e_mail p.palka@unich.it

Sunto. Si introduce il nuovo concetto di funzione $\mathfrak{J}$ -monotona. Vengono enunciati alcuni teoremi su tali funzioni. Infine, la teoria svolta viene utilizzata per fornire un nuovo itinerario didattico per presentare la teoria dei limiti di funzioni.

Parole chiave: Funzioni $\mathfrak{J}$ -monotone. Limiti di funzioni. Continuità.

Abstract. The new concept of $\mathfrak{J}$ -monotone function is introduced. Some theorems on these functions are stated. Finally, the developed theory is used to provide a new didactic itinerary to present the theory of limits of functions.

Keywords: $\mathfrak{J}$ -monotone functions. Limits of functions. Continuous functions.

1 - Introduzione

Un problema comune ai docenti degli ultimi anni delle Scuole Medie Superiori e a quelli del primo anno di Università è la necessità di introdurre in maniera efficace il concetto di limite e mostrare come da esso dipende la comprensione degli altri concetti di Analisi Matematica.

La pratica didattica mostra come le varie definizioni di limite, anche quando sono apprese e ripetute correttamente dagli studenti, appaiono loro come qualcosa di “estraneo” rispetto al loro modo di intendere la Matematica

Alcuni dei difetti principali delle definizioni usuali sono

(a) *la non costruttività*. Le definizioni non forniscono un criterio per individuare il limite di una funzione. Esse forniscono semplicemente un modo, piuttosto difficoltoso, per verificare che un certo elemento l , trovato non si sa come, è il limite. È significativo il fatto che spesso gli studenti le chiamano “le dimostrazioni del limite”.

(b) *la staticità*. Le definizioni non fanno capire il ruolo della variabile x e della funzione $f(x)$: esse sono statiche e non dinamiche, in quanto non si vede bene come varia $f(x)$ per x che tende a x_0 .

(c) *la difficoltà di visualizzazione*. Le usuali rappresentazioni geometriche del concetto spesso inducono gli studenti a dare interpretazioni particolari. La conseguenza è che non viene compreso l’aspetto generale. Spesso il concetto di limite viene banalizzato. Ad esempio, sono molto frequenti certe dannose rappresentazioni che fanno sembrare che il limite deve essere necessariamente $f(x_0)$ a meno di strane pignolerie da parte dell’insegnante.

(d) *la mancanza di generalità*. In genere, invece di dare una sola definizione di limite, se ne danno tante di tipo particolare. Ciò porta non solo ad un aumento del numero di definizioni ma anche a far perdere di vista l’essenza del concetto.

(e) *la non applicabilità a tutte le funzioni*. Le funzioni appaiono divise in due classi, quelle *privilegiate* che hanno il limite e quelle *non rilevanti* che sono prive di limite.

Le difficoltà presenti nella definizione di limite si riflettono, poi, sul concetto di funzione continua.

In alcuni lavori del nostro gruppo di ricerca (Maturo, Varone, 1994, 1995) sono stati messi in evidenza alcuni errori presenti nei testi scolastici nel presentare la definizione di funzione continua ed è stato dimostrato che la classe delle funzioni soddisfacenti alle definizioni date in tali testi è molto diversa da quella delle funzioni continue.

Negli ultimi anni, tenuto conto delle notevoli proprietà delle funzioni monotone sia per quanto riguarda i loro limiti che le loro proprietà di continuità, abbiamo sperimentato, nel primo anno dei corsi di laurea in Architettura, un itinerario per presentare il concetto di limite in passi successivi, iniziando dalle funzioni numeriche monotone di variabile reale per finire con le funzioni fra spazi topologici.

I risultati emersi agli esami sono stati soddisfacenti. Infatti, la circostanza di partire da definizioni più pratiche, ma non meno generali di quelle classiche, ha permesso di ottenere una assimilazione dei concetti visibilmente superiore da parte degli studenti.

2 - Funzioni $\mathfrak{I}$ -Monotone e loro Limiti

Si propone il seguente itinerario di lavoro:

1. si definiscono dapprima l'insieme $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gli estremi inferiore e superiore dei suoi sottoinsiemi ed il concetto di punto di accumulazione. Si chiamano *numeriche* le funzioni a valori in $\mathbb{R}^{\wedge}$;
2. si definiscono i limiti destro e sinistro per le funzioni monotone definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\wedge}$;

3. si generalizzano e si unificano le precedenti definizioni introducendo il nuovo concetto di funzione numerica $\mathfrak{I}$ -monotona e quello di limite di tale funzione;
4. si danno le definizioni di limite minimo, limite massimo e limite per le funzioni numeriche definite in spazi metrici;
5. si estendono, per quanto possibile, le definizioni date a funzioni fra spazi topologici.

Nella pratica didattica è opportuno trattare prima il caso particolare delle funzioni monotone definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ perché tali funzioni possono essere rappresentate graficamente in maniera efficace e senza dar luogo a false interpretazioni.

In questo lavoro, sia per brevità sia per limitarci a presentare concetti nuovi, ci occuperemo del caso più generale delle funzioni numeriche $\mathfrak{I}$ -monotone che definiamo prima in riferimento agli spazi metrici e successivamente per gli spazi topologici.

Sia (S, d) uno spazio metrico e siano f una funzione numerica definita in un sottoinsieme X di S e x_0 un punto di accumulazione per X . Indichiamo con $\mathfrak{I}$ la famiglia dei cerchi di centro x_0 .

Definizione 2.1 Diciamo che la funzione f è $\mathfrak{I}$ -crescente in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I - \{x_0\}) \cap X, d(x_1, x_0) < d(x_2, x_0) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (2.1)$$

Intuitivamente, se x , diverso da x_0 , si avvicina a x_0 , la $f(x)$ cresce, non necessariamente in senso stretto.

È facile verificare la seguente

Proposizione 2.2 Se la funzione f è $\mathfrak{I}$ -crescente in x_0 , allora, per ogni coppia I_1 e I_2 di intorni di x_0 soddisfacenti la (2.1), si ha:

$$\sup f((I_1 - \{x_0\}) \cap X) = \sup f((I_2 - \{x_0\}) \cap X). \quad (2.2)$$

Tenuto conto della proposizione 2.2 si può dare la seguente

Definizione 2.3 Sia f una funzione $\mathfrak{I}$ -crescente in x_0 e sia I un intorno di x_0 soddisfacente la (2.1). Diciamo *limite monotono* della f in x_0 il numero

$$\text{lm}(f, x_0) = \sup f((I - \{x_0\}) \cap X). \quad (2.3)$$

Definizione 2.4 Diciamo che la funzione f è $\mathfrak{I}$ -decrescente in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I - \{x_0\}) \cap X, d(x_1, x_0) < d(x_2, x_0) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (2.4)$$

Intuitivamente, se x , diverso da x_0 , si avvicina a x_0 , la $f(x)$ decresce. È facile verificare la seguente

Proposizione 2.5 Se la funzione f è $\mathfrak{I}$ -decrescente in x_0 , allora, per ogni coppia I_1 e I_2 di intorni di x_0 soddisfacenti la (2.3) si ha che

$$\inf f((I_1 - \{x_0\}) \cap X) = \inf f((I_2 - \{x_0\}) \cap X). \quad (2.5)$$

Tenuto conto della proposizione 2.5 diamo la seguente

Definizione 2.6 Sia f una funzione $\mathfrak{I}$ -decrescente in x_0 e sia I un intorno di x_0 soddisfacente la (2.3). Diciamo *limite monotono* della f in x_0 il numero

$$\text{lm}(f, x_0) = \inf f((I - \{x_0\}) \cap X). \quad (2.6)$$

Definizione 2.7 Una funzione f si dice $\mathfrak{I}$ -monotona in x_0 se è $\mathfrak{I}$ -crescente o $\mathfrak{I}$ -decrescente in x_0 .

Si possono dimostrare facilmente i seguenti

Teorema 2.8 (*Della restrizione*) Sia f una funzione $\mathfrak{I}$ -monotona in x_0 e sia f_Y la restrizione di f ad un sottoinsieme Y di X avente x_0 come punto di accumulazione. Allora anche f_Y è $\mathfrak{I}$ -monotona in x_0 e risulta

$$\text{lm}(f, x_0) = \text{lm}(f_Y, x_0). \quad (2.7)$$

Teorema 2.9 Siano f , definita in un insieme X , e g , definita in un insieme Y , due funzioni $\mathfrak{I}$ -monotone in x_0 e sia $Z = \{x \in X \cap Y : f(x) = g(x)\}$. Se x_0 è di accumulazione per Z allora

$$\text{lm}(f, x_0) = \text{lm}(g, x_0). \quad (2.8).$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui $S = \mathbb{R}^+$. Se $f(x)$ è una funzione definita in $\mathbb{R}$, strettamente crescente e limitata, si pone

$$f(-\infty) = \inf f(\mathbb{R}) \text{ e } f(+\infty) = \sup f(\mathbb{R}).$$

Ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ si ottiene una metrica in $\mathbb{R}^+$. Un esempio si ottiene ponendo $f(x) = \arctg x$, un altro ponendo $f(x) = x/(1+x^2)^{1/2}$.

Ogni funzione monotona definita in un insieme X che ha x_0 come punto di accumulazione e come estremo inferiore o superiore è una funzione $\mathfrak{I}$ -monotona rispetto alla famiglia dei cerchi di centro x_0 .

Se l'insieme X , di definizione della funzione f , è tale che x_0 è di accumulazione sia per $X_s = X \cap (-\infty, x_0)$ che per $X_d = X \cap (x_0, +\infty)$ allora la f è $\mathfrak{I}$ -monotona, rispetto ai cerchi di centro x_0 , se assume valori uguali in punti equidistanti da x_0 , rispetto alla metrica d .

In generale, se sono monotone la restrizione f_s della f ad X_s e quella, f_d , a X_d ed x_0 è di accumulazione sia per X_s che per X_d , sono definiti i

limiti $\text{lm}(f_s, x_0)$ e $\text{lm}(f_d, x_0)$ e si dicono, rispettivamente, *limite sinistro* e *destro* della f in x_0 .

3 - Limiti di Funzioni Numeriche

Sia (S, d) uno spazio metrico e sia f una funzione numerica definita in un insieme X contenuto in S .

Per ogni $x \in X$ indichiamo con C_x il cerchio chiuso di centro x_0 e raggio uguale a $d(x, x_0)$ e poniamo $D_x = C_x \cap (X - \{x_0\})$.

Definizione 3.1 Diciamo *estremo inferiore monotono* di f la funzione $\alpha(x) = \inf f(D_x)$ e diciamo *estremo superiore monotono* di f la funzione $\beta(x) = \sup f(D_x)$.

Dalla definizione precedente segue il

Teorema 3.2 Per ogni $x \in X$ si ha

- (a) $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$;
- (b) $\alpha(x)$ è $\mathfrak{I}$ -crescente in x_0 ;
- (c) $\beta(x)$ è $\mathfrak{I}$ -decescente in x_0 ;
- (d) $\text{lm}(\alpha, x_0) \leq \text{lm}(\beta, x_0)$.

In base al teorema precedente possiamo dare la

Definizione 3.3 Diciamo *minimo limite* della $f(x)$ per x che tende ad x_0 il numero

$$\min \lim(f, x_0) = \text{lm}(\alpha, x_0) \quad (3.1)$$

diciamo *massimo limite* della $f(x)$ per x che tende ad x_0 il numero

$$\max \lim(f, x_0) = \text{lm}(\beta, x_0) \quad (3.2)$$

Se $\min \lim(f, x_0) = \max \lim(f, x_0)$ tale valore comune, indicato con $\lim(f, x_0)$ si dice *limite* della funzione $f(x)$ per x che tende ad x_0 .

Si possono facilmente dimostrare i seguenti

Teorema 3.4 Se la f è $\mathfrak{I}$ -monotona in x_0 allora esiste $\lim(f, x_0)$ ed è uguale a $\text{lm}(f, x_0)$.

Teorema 3.5 (*Limiti di una restrizione*) Sia Y un sottoinsieme di X avente x_0 come punto di accumulazione e siano f_Y , α_Y e β_Y , rispettivamente, le restrizioni di f , α e β ad Y .

Allora α_Y e β_Y sono, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore monotono di f_Y e risulta

$$(a) \quad \forall x \in Y, \alpha(x) \leq \alpha_Y(x) \leq f_Y(x) \leq \beta_Y(x) \leq \beta(x);$$

$$(b) \quad \min \lim (f, x_0) \leq \min \lim (f_Y, x_0) \leq \max \lim (f_Y, x_0) \leq \max \lim (f, x_0).$$

In particolare, se esiste $\lim (f, x_0)$ allora esiste anche $\lim (f_Y, x_0)$ ed i due limiti sono uguali.

Un'applicazione immediata dei teoremi precedenti si ha per $S=\mathbb{R}^\wedge$ ed f funzione monotona tale che x_0 è di accumulazione sia per $X_s = X \cap (-\infty, x_0)$ che per $X_d = X \cap (x_0, +\infty)$. Supponiamo, per fissare le idee, che la f sia crescente. In maniera analoga si ragiona se essa è decrescente. Il minimo limite della f in x_0 è $\text{lm}(f_s, x_0)$, limite sinistro della f in x_0 , il massimo limite è $\text{lm}(f_d, x_0)$, limite destro della f in x_0 . Se tali limiti sono uguali il valore comune è il limite della f in x_0 .

Chiamiamo *intorno* di un insieme A qualunque insieme I che contiene un aperto contenente A . In seguito, indichiamo con $\Delta(A)$ la famiglia degli intorni di un insieme A .

A partire dalle definizioni date si può dimostrare facilmente il seguente

Teorema 3.6 Risulta $l_1 = \min \lim (f, x_0)$ e $l_2 = \max \lim (f, x_0)$ se e solo se valgono le seguenti proprietà

$$(P1) \quad \forall I \in \Delta([l_1, l_2]), \exists J \in \Delta(x_0): x \in (J - \{x_0\}) \cap X \Rightarrow f(x) \in I;$$

$$(P2) \quad \forall a \in (l_1, l_2), \forall J \in \Delta(x_0), \exists x_1, x_2 \in (J - \{x_0\}) \cap X: f(x_1) < a < f(x_2).$$

Dal teorema precedente segue il

Teorema 3.7 Risulta $\ell = \lim (f, x_0)$ se e solo se vale la seguente proprietà

$$\forall I \in \Delta(\ell), \exists J \in \Delta(x_0): x \in (J - \{x_0\}) \cap X \Rightarrow f(x) \in I. \quad (3.3)$$

La (3.3) è una formula che ha significato anche per funzioni non numeriche. Allora dal teorema 3.7 siamo indotti a dare la seguente *definizione generale di limite*.

Definizione 3.8 Siano S e T due spazi topologici, $X \subseteq S$, $Y \subseteq T$, sia x_0 un punto di accumulazione per X e sia f una funzione di X in Y . Diciamo che $f(x)$ ha limite ℓ per x che tende a x_0 se è verificata la (3.3).

Con l'itinerario considerato la definizione generale di limite è un punto di arrivo. Nel frattempo, gli studenti hanno assimilato tutti i più importanti aspetti relativi al concetto di limite per le funzioni numeriche e sono pronti ad assimilare eventuali generalizzazioni.

Nella Scuola Media Superiore la definizione 3.8 può evidentemente essere omessa. Nell'Università essa è comunque un importante completamento della teoria svolta e permette di trovare facilmente risultati molto generali (cfr. ad es. Maturo, 1986).

Nella Scuola Media Superiore, se si considerano solo funzioni ad una sola variabile si può anche evitare di introdurre il concetto di

spazio metrico. Penso, però, che si debba comunque introdurre $R^\wedge$ e operare tenendo presente (anche senza nominarla esplicitamente) la struttura di spazio metrico di $R^\wedge$. In particolare, è opportuno dare una definizione unica di limite minimo, limite massimo e limite sia se x_0 ed i limiti sono finiti sia se uno o più di essi sono infiniti.

Se x_0 è un punto di R si può utilizzare la metrica euclidea. Allora le funzioni $\mathfrak{I}$ -monotone considerate sono simmetriche rispetto alla retta $x=x_0$.

4. Ulteriori Sviluppi della Teoria

Il concetto di funzione $\mathfrak{I}$ -monotona si può estendere anche agli spazi topologici. Indichiamo, da ora in poi, con (S, A) uno spazio topologico e con x_0 un punto di S . Introduciamo la seguente

Definizione 4.1 Diciamo che una famiglia $\mathfrak{I}$ di intorni di x_0 è una *base locale ordinata* per x_0 se si verificano le seguenti proprietà

$$(BO1) \quad \forall I \in \Delta(x_0), \exists J \in \mathfrak{I}: J \subseteq I;$$

$$(BO2) \quad \forall I, J \in \mathfrak{I}, J \subseteq I \text{ o } I \subseteq J.$$

Definizione 4.2 Siano f una funzione numerica definita in un sottoinsieme X di S e x_0 un punto di accumulazione per X . Sia $\mathfrak{I}$ una base locale ordinata per x_0 .

Diciamo che la funzione f è $\mathfrak{I}$ -crescente in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I - \{x_0\}) \cap X, \forall A, B \in \mathfrak{I}, A \subset B, x_1 \in A, x_2 \in B - A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (4.1)$$

Diciamo che f è $\mathfrak{I}$ -decrescente in x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x_1, x_2 \in (I - \{x_0\}) \cap X, \forall A, B \in \mathfrak{I}, A \subset B, x_1 \in A, x_2 \in B - A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (4.2)$$

Infine, diciamo che f è $\mathfrak{I}$ -monotona in x_0 se essa è $\mathfrak{I}$ -crescente o $\mathfrak{I}$ -decrecente.

Le definizioni di funzione $\mathfrak{I}$ -crescente o $\mathfrak{I}$ -decrecente considerate nel paragrafo 2 si ottengono come casi particolari assumendo come base locale ordinata in x_0 la famiglia dei cerchi di centro x_0 . Ripetendo, con le ovvie modifiche, la teoria svolta nel paragrafo 2 si definiscono i limiti per le funzioni $\mathfrak{I}$ -monotone con $\mathfrak{I}$ base locale ordinata qualsiasi di x_0 .

In particolare si possono estendere la proposizione 2.2 e la definizione 2.3 e si può osservare che il limite monotono $l(f, x_0)$ non varia al variare dell'intorno I e della base locale ordinata $\mathfrak{I}$ soddisfacenti la condizione (4.1) o (4.2).

Si può infine estendere al caso in cui S è uno spazio topologico ed $\mathfrak{I}$ una base locale ordinata di x_0 anche la teoria svolta nel paragrafo 3.

Bibliografia

Maturo Antonio (1986). *Spazi topologici, limiti e funzioni continue*, Pescara: Libreria dell'Università.

Maturo Antonio, Varone Giuseppina (1994). *I concetti intuitivi di analisi matematica presenti sui testi scolastici: fino a che punto si identificano con quelli rigorosi?* Il caso delle funzioni continue, in Atti del Convegno N.R.D. "FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE: come perchè quando, con quali strumenti insegnare l'Analisi nei diversi ordini di scuola", Siena, 10-12 Marzo 1994, pp.101-106.

Maturo Antonio, Varone Giuseppina (1995). Su una particolare classe di funzioni numeriche: le funzioni pseudo-continue. In «*Periodico di matematiche*», 1, 1995, pp.11-22.

Maturo Antonio (2020). Una analisi critica sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica. In *Dall'intuizione ai concetti: metodologie per elaborare percorsi didattici e modelli matematici*, Collana "Quaderni APAV", n. 5, pp. 81-92.

La fisica quantistica: mappa e non territorio

Non c'è un mondo quantistico. C'è solo un'astratta descrizione quantistica. È sbagliato pensare che il compito della fisica sia descrivere come la Natura è. La fisica si occupa solo di quanto possiamo dire della Natura.

Niels Bohr, conferenza tenuta nel 1927 a Como e pubblicata in Niels Bohr, *The Quantum Postulate and the Recent Development of Tomic Theory*, «Nature», 121, 1928, pp. 580-590.

ELIANO PESSA (1946-2020)

Ricordo di un caro amico: omaggio a tre voci

Giordano Bruno*, Franco Eugeni[^], Alberto Trotta[°]

* Presidente del CdL in Design del prodotto e della moda, Universitas Mercatorum; giordano.bruno@unimercatorum.it.

[^]Già professore ordinario di discipline matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'AFSU; eugenif3@gmail.com.

[°] Docente I.I.S.S. "S. Caterina Amendola" Salerno; albertotrotta@virgilio.it.

Sunto: *Un omaggio a tre voci in ricordo di Eliano Pessa. Laureato in Fisica, con formazione post laurea presso il mitico gruppo del prof. Caianello, diventa prima Associato di Istituzioni di Matematica, e poi per merito dei suoi studi sistemici in psicologia ottiene la cattedra di Ordinario di Psicologia generale. Particolarmente esperto e amante delle montagne, non appena libero dai suoi molteplici impegni ha scalato quelle più alte in vari luoghi del mondo, dimostrando grande preparazione, resistenza e passione.*

Parole Chiave: Eliano Pessa

Abstract: *A three voices homage in memory of Eliano Pessa. Graduated in Physics, with post-graduate training at the mythical group of Prof. Caianello, he became first Associate of Institutions of Mathematics, and then thanks to his systemic studies in psychology he obtained the chair of General Psychology. Particularly expert and lover of the mountains, as soon as free from its multiple commitments has climbed the highest ones in various places in the world, demonstrating great preparation, resistance and passion.*

Keywords: Eliano Pessa



Eliano Pessa

Giordano Bruno

Una grande cordialità e disponibilità all'ascolto, nonostante i suoi molteplici impegni di studioso e di uomo che amava raggiungere "vette" in svariati campi: quello della fisica, quello della matematica, quello della psicologia, e non da ultimo quelle maestose delle montagne tanto amate. Questa è la prima immagine che affiora alla mia mente se penso a Eliano.

Lo conobbi per l'amicizia che mi legava a Bruno Rizzi e Franco Eugeni, e mi affascinò subito per il suo ampio sapere e la sua naturale gentilezza.

Ricordo con estremo piacere gli incontri che in genere avvenivano nello studio di Bruno Rizzi, a cui partecipava Eliano insieme a Franco, si discuteva di teoria dei numeri, di relatività e teoria dei quanti, di geometrie non euclidee e dei più sva-

riati argomenti di carattere scientifico. Molto spazio, poi, veniva dato alla didattica, un interesse particolarmente condiviso che veniva portato avanti nella Mathesis, antica e importante Società di Scienze Matematiche e Fisiche.

Eliano era sempre disponibile a dare una mano per l'organizzazione di congressi, convegni, seminari, instancabile e nello stesso tempo allegro, curioso di tutto, ed estremamente dinamico.

Poi, di punto in bianco non appena gli era possibile si dileguava. Chissà dove sarà andato questa volta Eliano, mi chiedevo? E regolarmente, dopo un po' di tempo, arrivava una magnifica cartolina, che illustrava i meravigliosi e lontani luoghi in cui si recava.

Successivamente Eliano ha costituito un importante sodalizio con Gianfranco Minati, fondatore e presidente dell'Associazione italiana della ricerca sui sistemi (AIRS), e anche in quell'ambito ha dato un contributo decisivo sia nell'organizzazione che nella condivisione delle sue conoscenze che gli permettevano di produrre ricerche di altissimo valore scientifico.

Eliano, allora e per quanto mi riguarda, ha innescato un processo di conoscenze personali che hanno dato una svolta alla mia vita, culturalmente, socialmente e soprattutto umanamente.

Aveva fatto entrare nel mondo dell'AIRS Alberto Trotta, di cui nel frattempo ero diventato amico.

Alberto aveva cominciato a parlarmi di Sistemica e mi aveva invitato ad andare con lui ad assistere ad uno dei Congressi triennali che quella Associazione organizza.

Se non ricordo male era il secondo, dal titolo *Emergence in Complex Cognitive, Social and Biological Systems* e si tenne a Castel Ivano (Tn) nel 2001.

Sono trascorsi, ormai, quasi vent'anni da quel mio primo Congresso AIRS, e ho sempre cercato, quando ho potuto, di partecipare ai successivi e alle altre iniziative dell'Associazione in tutto questo lungo periodo.

Ogni incontro con gli amici dell'AIRS è stato sempre per me un elemento di letizia, oltre che di apprendimento e approfondimento, e questo in fin dei conti è merito di Eliano.

Un riconoscimento affettuoso devo ancora ad Eliano, perché nonostante ci vedessimo poco, faceva apparire i nostri incontri come il prosieguito di un dialogo e di un'amicizia mai interrotta.

Grazie amico mio.

Franco Eugeni

Conobbi Eliano nei primi anni '70, non era ancora laureato e accompagnò un mio studente di matematica, allora avevo il Corso di Matematiche Complementari a Matematica a L'Aquila, studente che venne per chiedermi la tesi. Mi colpì subito il fatto che Eliano, allora studente di fisica, masticava molto, ma molto bene la matematica, tanto che nella piacevolissima discussione che ne seguì, progettammo il progetto di tesi del suo amico assieme.

Agli inizi degli anni '80 ritrovo Eliano a Roma, che aveva il Corso di Istituzioni di Matematica a Psicologia a Roma, collaborava con il gruppo del Prof. Caianello ed aveva iniziato una

collaborazione con il mio fraterno amico Bruno Rizzi, collaborazione che fruttò una ventina di lavori di Matematica applicata, a mio avviso, di spessore e di interesse.

Nel 1986-87 Bruno Rizzi ed io avevamo vinto la Cattedra di 1° fascia, Bruno in Matematica Generale ed io in Istituzioni di Matematiche. Con Eliano e Luigia Berardi iniziammo a frequentare anche l'ambiente dei matematici dell'economia, sempre alla ricerca di spunti culturali anche differenti e se si vuole anche di possibilità concorsuali.

Eliano un giorno venne da me a L'Aquila, avevo dei cuccioli di pastore tedesco, e ne prese uno.

Poco dopo vinse la Cattedra di Psicologia generale, campo dove si era distinto tanto quanto quello della Matematica e fu chiamato a Pavia.

Dire qualcosa sulla figura di Eliano è cosa difficile, il suo sorriso perenne, che a volte disorientava coloro che non lo conoscevano, i suoi interessi in molte direzioni, con una caratteristica, ovunque primeggiava naturalmente, affabilmente, umilmente, con un atteggiamento quasi devoto, anzi proprio devoto su ognuno dei suoi interessi. Se un interesse c'era, era effettivo e definitivo.

Rimpiango solo una cosa : non averlo incontrato in questi ultimi 10 anni.

Alberto Trotta

Eliano Pessa nacque a Portogruaro (Venezia) il 19 settembre 1946, veneto di nascita e reatino di adozione, perché il padre

professor Giuseppe Pessa da Portogruaro si era trasferito a Rieti avendo ricevuto un incarico in una scuola di questa città.

Eliano si laureò in fisica presso l'Università di L'Aquila e si perfezionò in astrofisica e fisica teorica presso l'università La Sapienza di Roma, con la tesi *Sulla teoria di un campo scalare quantizzato in un universo del tipo Bianchi I*. Frequentò la federazione universitaria Cattolica Italiana "FUCI" di cui era presidente Don Lorenzo Chiarelli, e nel contempo conobbe la futura moglie e mise su famiglia.

Iniziò ad insegnare, prima presso l'ITIS di Rieti e poi presso l'università "La Sapienza" di Roma.

Appassionato di alpinismo nel periodo della sua permanenza lavorativa a Rieti e a Roma mantenne i contatti con il gruppo di alpinisti reatini e si distinse anche in questo campo scalando alcune vette di notevole altezza tra le quali il vulcano Pissis m. 6862 (nelle Ande Argentine) il vulcano Parinacota m. 6342 (nelle Ande Cilene) nel Pamir del Kirghisistan il Pik Lenin m. 7134, nel Pamir Cinese il Muztaghata m. 7546.

Eliano si è dimostrato una persona di grande spessore, sia per le sue qualità umane che per le sue notevoli conoscenze e competenze in vari ambiti disciplinari.

Ebbe molti incarichi di natura accademica. Dal 1977 al 1983 la facoltà di Magistero dell'università "La Sapienza" di Roma gli conferì l'incarico per l'insegnamento di Istituzioni di Matematica. Dal 1983 al 1987 divenne professore associato di ruolo di Istituzioni di Matematica presso la facoltà di Psicologia della stessa università e poi, sempre presso la stessa facoltà, dal 1987 al 2000 divenne professore associato di Teoria dei Sistemi e Intelligenza Artificiale. Dal 1992 al 2000 fu membro del Comitato Scientifico, Istituto Internazionale di Alti Studi

Scientifici “E.R Caianiello”., Vietri sul Mare , Salerno. Dal 2000 divenne professore ordinario di Psicologia Generale, corso di laurea in Psicologia, facoltà di Lettere, all’Università di Pavia. Nel 2000 diventò Membro del consiglio Direttivo dell’Associazione Italiana per la Ricerca sui Sistemi e dal 2002 al 2003 fu docente di “Modelli di Reti Neurali” presso la Scuola Avanzata di Formazione Integrata (SAFI) all’Università di Pavia dove, dal 2006 al 2009, ricoprì la carica di Direttore presso il Centro Interdipartimentale di Scienze Cognitive. Dal 2010 fu docente di Modelli di Elaborazione Cognitiva corso di laurea in Psicologia presso l’università di Pavia e membro del comitato dei referee di varie riviste scientifiche, tra queste «International Journal of General Systems», «International Journal of Theoretical Physics».

Nel corso della sua vita è stato insignito di vari premi e fra i tanti ha ricevuto la “Medaglia Majorana” nel 2008 per il lavoro *Phase Transitions in Biological Matter*” pubblicato su «Electronic Journal of Theoretical Physics» , 2007 , 4 N. 16, pp. 167-230.

La sua attività di ricerca, contenuta in oltre 200 pubblicazioni, riguarda tematiche quali i fondamenti teorici della Meccanica Quantistica, Le Reti Neurali, la Robotica, l’Intelligenza Artificiale, gli studi teorici e sperimentali sulla memoria a lungo termine, l’analisi di fattori globali e locali nella percezione visiva, i modelli dei processi attentivi e di categorizzazione, la teoria quantistica dei campi, la Computazione Quantistica, i Modelli quantistici della memoria, la Teoria Generale dei Sistemi e i modelli dell’Auto-Organizzazione nei Sistemi Complessi, campi in cui congiunse la sua compe-

tenza nell'ambito della fisica e della matematica con l'interesse per i problemi cognitivi .

Ha collaborato e cooperato con molte persone e in molte pubblicazioni e opere è coautore.

Alcune delle persone con le quali ha maggiormente lavorato sono il presidente dell'AIRS (Associazione Italiana Ricerca Sui Sistemi) Gianfranco Minati, il professore Bruno Rizzi che fu presidente nazionale della Mathesis, Mario Abram e M. P. Penna(membri dell'AIRS).

Dai suoi libri pubblicati si evidenzia la vasta conoscenza in vari campi e qui di seguito se ne riportano alcuni: E. Pessa, *Algoritmi, automi, reti nervose*, Kappa, Roma 1985; E. Pessa, *Stabilità e auto-organizzazione, introduzione alla teoria dei sistemi*, Veschì, Roma, 1985; E. Pessa, *Intelligenza artificiale teorie e sistemi*, Bollati Boringhieri, Torino, 1992; E. Pessa, *Reti neurali e processi cognitivi*, Di Renzo, Roma, 1993; M. P. Penna, E. Pessa, *La rappresentazione della conoscenza, introduzione alla psicologia dei processi cognitivi*, Armando , Roma 1994; G. Minati, E. Pessa (Eds.), *Emergence in Complex, Cognitive, Social, and Biological Systems*, Kluwer, New York, 2002; G. Minati , E. Pessa, M. Abram (Eds.), *Systems of Emergence Research and Development*, Springer, Berlin, 2006; G. Minati, E. Pessa, A. Abram (Eds) *Processes of emergence of systems and systemic properties -Towards a general theory of emergence*. World Scientific, Singapore, 2008; G. Minati, M.R. Abram, E. Pessa *Towards a Post-Bertalanffy Systemics*, Springer, Berlin, 2015; G. Minati, M. R. Abram, E. Pessa, *Systemics of Incompleteness and Quasi-System*, Springer, Berlin, 2018; G. Minati, E. Pessa, *From Collective Beings To Quasi-Systems*, Springer, Berlin, 2018.

Tra i tanti articoli pubblicati in alcune riviste o atti di convegni o congressi se ne ricorda qualcuno: E. Pessa, B. Rizzi, *Noise- induced transitions in economic dynamical models*, in M. Galeotti, L. Geronazzo, F. Gori (Eds) *Non-linear Dynamics in Economics and Social Sciences*. Pitagora, Bologna 1988 pp. 259-269; E. Pessa, B. Rizzi *Sulla formulazione matematica dei modelli economici di tipo morfogenetico*, in «*Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali*», (1/2) 1987, pp.65; E. Pessa *La Matematica per la vita Artificiale*, in G. Bruno, A. Trotta (a.c.) *Conoscere Attraverso La matematica: Linguaggio, Applicazioni e Connessioni Interdisciplinari*, Mathesis, Roma 2005 pp. 555-467; E. Pessa, A. Trotta, *Matematica e sistemica*, in «*Periodico di matematiche*», numero 3 del 2008, pp. 105-123.

Oltre alle sue tante opere nel campo delle pubblicazioni Eliano ha vissuto con grande intensità la sua vita e il 22 marzo 2020 dopo una lunga malattia è deceduto a Foligno.

Ora si avverte la sua assenza ed è grande almeno per noi amici la sensazione di vuoto che ha lasciato. Arnaldo Millesimi, evidenzia un aspetto importante della figura di Eliano, al termine del suo articolo su “Il Messaggero” del 26 /03/2020 scrive: «Eliano ha vissuto in punta di piedi, per non calpestare quelli degli altri, e in punta di piedi se n’è andato».

Del mio carissimo amico ora voglio ricordare la sua disponibilità, la sua attenzione verso gli altri, la sua lungimiranza, la sua determinazione e le sue notevoli competenze in molti campi. È stato un maestro, formatore di generazioni di studiosi e precursore di teorie – come quelle statistiche basate sulle reti neurali – ancor oggi all’avanguardia. Il suo insegnamento nella vita mi accompagnerà sempre e non lo dimenticherò mai.

La fisica quantistica: il velo della Natura che non si svela ...

«Le cose di cui parlerò le insegniamo agli studenti degli ultimi anni di università: ora, voi pensate che io riuscirò a spiegarle in modo da farvele capire? Ebbene, no, non le capirete. Perché, allora, farvi perdere del tempo? Perché tenervi qui seduti, se non sarete in grado di capire ciò che dirò? Per convincervi a non andar via solo perché questa conferenza vi risulterà incomprensibile, vi dirò che anche i miei studenti di fisica non capiscono queste cose. E non le capiscono perché non le capisco nemmeno io. Il fatto è che non le capisce nessuno.

[...] Un altro motivo per cui potreste pensare di non seguire quello che racconterò è che mentre io descriverò come funziona la Natura, voi non capirete perché la Natura funziona funzioni così. Ma questo non lo capisce nessuno, e quindi io non ve lo so spiegare». Dalle: Lezioni di Richard Feynman sull'elettrodinamica quantistica tenute all'University of California Los Angeles.

[...] accettare la Natura per quello che è: assurda. Per me parlare di questa assurdità è un divertimento, perché la trovo incantevole».

(Lezioni sull'elettrodinamica quantistica tenute da Richard Feynman alla University of California nel 1985, pubblicate in Richard Feynman, *QED*, Milano: Adelphi, 1989, p. 24,25).

Vincenzo Di Marcello *(1941-2020)*

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di discipline matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle scienze Umane;
eugenif3@gmail.com

Sunto: *Ricordo di Vincenzo Di Marcello.*

Parole Chiave: *Vincenzo Di Marcello*

Abstract: *In memory of Vincenzo Di Marcello.*

Keywords: *Vincenzo Di Marcello*

È scomparso un amico caro, nel tempo di “corona virus”, quando noi, isolati dalla pandemia, non abbiamo potuto trascorrere qualche tempo assieme.

Rimane il rimpianto della perdita. La nostra è stata una conoscenza di lunga data e una collaborazione da un lato scientifica ma anche di amicizia simpatica e sincera.

Tornando indietro nel tempo, Vincenzo è stato anche mio studente. Infatti a Teramo, nel 1969, funzionava una Libera Università, al tempo non riconosciuta, che aveva creato Scienze Politiche, poi riconosciuta nell'ambito dell'Università di Chieti e Scienze Statistiche libera. Io ebbi inizialmente il corso di Calcolo delle Probabilità, per poi passare ad Analisi

Matematica 1. Questa Libera Università era nata grazie all'intervento del Sindaco di Teramo, il prof. Carino Gambacorta, illustre figura di studioso e storico. Vincenzo, al tempo era un perito industriale, molto impegnato nella nascente informatica. Lavorava presso la locale "Olivetti". Fu uno degli allievi di questa Università del Consorzio di Enti locali, con tutti i rischi che si potevano correre a livello di riconoscimenti. Al momento del passaggio allo stato delle università abruzzesi, i percorsi didattici del Corso di Statistica furono riconosciuti dall'Università di Roma "La Sapienza", che fece ripetere loro la tesi di laurea, davanti ad una loro Commissione. Quindi Vincenzo si laureò in Scienze Statistiche all'Università di Roma "La Sapienza". Non molto tempo dopo vinse il Concorso nella Scuola secondaria e si trovò ad insegnare Matematica Applicata negli Istituti per Ragionieri. Fu più o meno in quel periodo che iniziò la nostra collaborazione scientifica.

Nel 1998 approntammo in collaborazione il volume : V. Di Marcello-F. Eugeni-D. Tondini, *Matematica , un approccio*, Casa Ed. Edilgrafital, pp.265. Questo volume è stato adottato per oltre 10 anni nel corso di Matematica per Veterinaria, ed è sperimentale, nel senso che si presenta uno studio di funzioni, non già su tutto l'asse reale, ma su una striscia $(-a, +a)$, abbastanza ampia. Allo scopo non si studiano i limiti, le derivate sono definite assiomaticamente e le funzioni da studiare sono classificate per famiglie (polinomiali, razionali fratte, esponenziali e logaritmi delle precedenti). Si tratta di un esperimento di un corso con il sistema della "Didattica breve". Il volume è reperibile in www.afsu.it/libri/libri_tecnici.

Nel frattempo Vincenzo, sempre preso da molteplici iniziative e spirito imprenditoriale, aveva messo in piedi una attività commerciale, assieme ai figli, attualmente curata dal figlio, mentre la figlia è diventata preside di scuole superiori.

Nel 1999 Vincenzo ed io organizzammo assieme il Congresso Nazionale della Mathesis a Teramo con la collaborazione di Italo D'Ignazio, Nicola Settepanella, Luca Tallini, Raffaele Mascella, Danilo Pelusi, Fernando Di Gennaro e altri. Il convegno fu in realtà un enorme successo, con 270 partecipanti sui 3 giorni, 50 autorità scolastiche e visitatori con presenza e saluti, 14 Conferenze generali, circa 100 comunicazioni tenute in 10 sezioni parallele. Sono state organizzate da Vincenzo Di Marcello due visite guidate ai Laboratori del Gran Sasso (10 piccoli pulman da 7 posti l'uno) e all'Osservatorio Astronomico di Teramo (3 gruppi di 30 persone). Vincenzo si fece interamente carico della raccolta degli interventi al Congresso, del seguire i lavori tipografici, della creazione della copertina, la correzione delle bozze e la stampa finale, presso la casa editrice Edilgrafital. L'opera finale consta di due volumi editi negli "Atti del Congresso Nazionale della Mathesis - Teramo 1999, 20/23 Ottobre":

- Volume 1 (a cura di V. Di Marcello-F.Eugeni - F.Mercanti - A. Maturo -N. Settepanella - L.Tallini).
- Volume 2 (a cura di V. Di Marcello - F.Eugeni) dedicato alle conferenze e comunicazioni di studiosi del gruppo di ricerca Marche-Abruzzi.

In particolare il volume 2 si apre con l'articolo di V.Di Marcello, *Vincenzo Cerulli e il suo Osservatorio*, dedicato appunto alla nascita dell'Osservatorio astronomico della città

di Teramo, che era di fatto la presentazione fatta ai gruppi di visitatori..

Un altro interessante evento fu l'organizzazione di un Convegno a Colleferro, nel 2006, sotto l'iniziativa del Prof. Salvatore Furneri, allora Preside a Nettuno, e di Franco Eugeni, dal titolo: *Le identità e i saperi*, fu un vero successo in quanto parteciparono, tra gli oltre 20 relatori, personaggi del calibro di Giacinto Auriti (ex Preside di Facoltà), Maria Luisa Bassi (Direttore di Dipartimento), Franco Eugeni (Direttore di Dipartimento), Diana Le Quesne (Direttrice di Master), Ezio Sciarra (Preside di Facoltà), Francesco Zaccaria (Preside di Facoltà). Tra gli altri fu presentato il lavoro: Eugeni F.-Di Marcello V. (2006). *L'evoluzione del pensiero logico: le teorie assiomatiche e la complessità del mondo attuale in alcuni aspetti della comunicazione*.

Il volume degli Atti, con una presentazione di Maria Luisa Bassi, fu curato da Vincenzo Di Marcello ed edito nello stesso anno dalla Edilgrafital, Teramo. Il volume sarà a breve recuperato in: www.afsu.it/libri/libritecnici.

Interessante anche la collaborazione che Vincenzo ebbe con il Prof. Francesco Zaccaria, che era stato per lunghi anni Preside della Facoltà di Scienze Politiche a Teramo. Nel 2002 si trasferì presso l'Università Telematica "Pio V", associata con "La Sapienza" di Roma e volle Vincenzo come docente di Informatica, presso quella Università, dove la collaborazione continuò anche dopo la scomparsa di Francesco Zaccaria, avvenuta nel 2002.

Vincenzo fu molto attivo sia nell'ambito dell'Accademia Picena Aprutina dei Velati (APAV) che della successiva Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), una sua

recensione sul libro *Che cos'è la matematica?*, di Richard Courant, Herbert Robbins, è apparsa nel «Periodico di Matematica», (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019, rivista rinata esattamente 100 anni dopo la sua chiusura.

Dopo il mio pensionamento ci siamo visti di rado, Vincenzo ha fatto molta attività con il Rotary Club, del quale ha assunto anche la Presidenza e poi la malattia che lo ha condotto a trascorrere molto tempo a Verona. Di tanto in tanto ci siamo sentiti per telefono. Ha collaborato con il primo numero della rivista «Bollettino dell'AFSU». Poi la malattia ce lo ha portato via pochissimi mesi dopo la scomparsa di altri nostri grandi amici e collaboratori quali il prof. Giuseppe Manuppella (la cui commemorazione è nel precedente numero della Rivista), e Giuseppe Simone.

Personalmente rimpiango solo di aver saputo la notizia con molto ritardo e per questo posso solo affidarmi a queste brevi note che mostrano un collega con una personalità fortemente attiva, lontano da ogni forma di alterigia e supponenza, un forte senso dell'amicizia e della correttezza. Con il suo pacato senso della comprensione degli altri lo vogliamo ricordare.

Con me lo ricordano: Pina Capoferri, Ferdinando Casolaro, Silvana D'Andrea, Aladino De Paulis, Fernando Di Gennaro, Salvatore Furneri, Giovanni Grelli, Stefano Innamorati, Diana Eugeni Le Quesne, Raffaele Mascella, Enrico Massetti, Antonio Maturo, Danilo Pelusi, Eugenio Ponte, Teresa Rossi, Ezio Sciarra, Luca Tallini.

La scienza, l'esclusa dalla società

«E credo che la scienza sia rimasta un fenomeno marginale perché noi scienziati stiamo ad aspettare che qualcuno ci ponga domande o ci inviti a spiegare la teoria di Einstein a gente che non capisce neppure la meccanica newtoniana, mentre nessuno ci invita mai ad attaccare le guargioni miracolose né ci chiede cosa pensa oggi la scienza dell'astrologia.

Penso che dovremmo soprattutto scrivere sui giornali. Chi crede nell'astrologia, dovrà imparare un poco di astronomia. E chi crede nel potere terapeutico della preghiera studierà i rudimenti della medicina, per seguire le varie argomentazioni, e un poco di biologia. Inevitabilmente la scienza diventerebbe importante. Ho letto da qualche parte che la scienza è una buona cosa a patto che rispetti la religione, ed è stata la chiave che mi ha fatto capire il problema.

Finché la scienza non attacca la religione, non c'è bisogno di occuparsene e nessuno ha modo di imparare. Così può rimanere esclusa dalla società, eccezion fatta per le sue applicazioni, e restare pertanto isolata. E allora noi facciamo sforzi tremendi per cercare di spiegare cose a chi non desidera affatto impararle. Ma se quelli vogliono difendere il loro punto di vista dovranno capire almeno un poco qual è il nostro. Per cui suggerisco – forse scorrettamente o forse sbagliando completamente – che siamo troppo ben educati».

(Richard Feynman, *Il piacere di scoprire*, Milano: Adelphi, 2020, pp. 121-122).

Richard Feynman è stato uno dei più grandi fisici teorici del Novecento e anche un originalissimo divulgatore scientifico. Ricevette nel 1965 il Premio Nobel per la fisica, per i suoi contributi all'elettrodinamica quantistica.

Gaetano Briganti

13 novembre 1941 - 25 giugno 2020

Ferdinando Casolaro, Maria Talamo, Renata
Santarossa, Antonio Fontana, Ivano Casolaro

Sunto: Nel ricordo del carissimo amico prof. Gaetano Briganti, recentemente scomparso all'età di 78 anni, Ferdinando Casolaro ne delinea il profilo professionale di docente di Fisica e di uomo di Scienza, oltre all'elevato profilo umano che ha lasciato un vuoto in tutti coloro che hanno avuto il piacere di conoscerlo ed apprezzarne le qualità. Seguono alcuni commenti di allievi e colleghi che si sono sentiti gratificati nel lasciare un proprio pensiero.

Parole Chiave: Gaetano Briganti, Fisica, Insegnamento, Mathesis.

Abstract: In memory of his dear friend Professor Gaetano Briganti, who recently passed away at the age of 78, Ferdinando Casolaro outlines his professional profile as a Physics teacher and a man of Science, in addition to the high human profile that has left a void in all those who have had the pleasure of knowing him and appreciating his qualities. Here are some comments from students and colleagues who felt gratified to leave their own thoughts.

Keywords: Gaetano Briganti, Physics, Teaching, Mathesis.

Ferdinando Casolaro

Il 25 giugno 2020 è venuto a mancare ai suoi affetti il prof. Gaetano Briganti, figura storica della sezione Mathesis di Napoli, professore di Fisica per oltre 40 anni nella Scuola secondaria di secondo grado e scienziato che ha lasciato un

segno indelebile sia negli allievi, che si sono pregiati del suo insegnamento, che nei colleghi della Scuola e dell'Università che hanno avuto il piacere di conoscere ed apprezzare la sensibilità umana e le qualità di uomo di scienza.



Il Professor Briganti premiato da Zichichi per un suo risultato.

Ho conosciuto Gaetano all'inizio degli anni 'Novanta' presentatomi da una collega e amica comune, la prof.ssa Maria Talamo, a cui avevo chiesto se conoscesse un valido professore di Fisica per seguire alcuni studenti che dovevano sostenere gli esami di Fisica 1 e Fisica 2 nei corsi di studio in Matematica ed in Ingegneria.

È nata subito una profonda amicizia, maturata sulla condivisione di valori comuni, ed è iniziata una collaborazione scientifica nell'ambito dell'associazione

Mathesis, dove il sottoscritto era consigliere nazionale e, successivamente, Gaetano è stato eletto consigliere della sezione di Napoli, presieduta dal prof. Aldo Morelli, con sede al Dipartimento di Matematica dell'Università Federico II.

Particolarmente significativi alcuni suoi articoli che ha pubblicato nel Periodico di Matematiche, organo della Mathesis. Ne cito due in particolare:

- il primo, "Misura della massa gravitazionale e inerziale di un corpo campione" (Periodico di Matematiche 2004, pagine 27-44) per l'originalità che testimonia la genialità dell'uomo di scienza. In tale lavoro presenta una semplice procedura sperimentale - realizzabile anche con metodi approssimati - con la quale viene descritta l'attrezzatura didattica per lo studio gravitazionale e inerziale.

- il secondo "Joann Jacob Balmer" (Periodico di Matematiche n.4 - 2004, pagine 61-77), da cui emerge l'impegno di studioso-storico e di didatta dove riusciva a promuovere l'esigenza divulgativa ai docenti ed agli studenti con la ricerca pura nel presentare i risultati di uno scienziato che, pur avendo lasciato risultati importanti, è poco conosciuto nell'ambiente scientifico, Joann Jacob Balmer.

Infatti, nel sunto introduttivo dell'articolo Gaetano Briganti così si esprime:

Quasi nessuna notizia è riportata nei testi in uso nei licei e nemmeno nei testi universitari circa l'opera svolta dal prof. Joann Jacob Balmer.

Nel presentare ai miei allievi la crisi della Fisica Classica nelle evidenze sperimentali non spiegabili con i

Modelli teorici della Meccanica newtoniana, dell'Elettromagnetismo di Maxwell, della Termodinamica di Carnot e della Statistica di Maxwell e Boltzmann, ho scelto di iniziare menzionando gli strani fenomeni che la nuova tecnica spettroscopica di fine secolo XIX aveva messo in evidenza relativamente allo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno. Ciò per non perdere la memoria di un'epoca in cui era possibile svolgere ricerche sia sperimentali sia teoriche nelle scuole superiori ed era ancora possibile, per un insegnante preparato, dare contributi di originalità e fondamentali per lo sviluppo di nuove interpretazioni e di nuove concezioni.



Patrimonio dei giovani docenti delle ultime generazioni è stato il volume pubblicato con l'editore Liguori nel 2001:

Fisica per i concorsi a cattedre.

Soluzioni ragionate dei problemi assegnati ai concorsi negli ultimi 15 anni, dove di ogni problema ne dà la soluzione con le motivazioni teoriche in ogni passaggio.

Il prof. Briganti è stato socio della Società Italiana di Fisica (S.I.F.) e Direttore del

Dipartimento di Fisica all'ITI A. Volta.

Di seguito il pensiero di una collega e amica che ha condiviso con Gaetano gran parte del percorso professionale all'I.T.I. A. Volta, la prof.ssa Maria Talamo.

Seguono messaggi di colleghi che hanno sentito il dovere di ricordarlo con parole proprie.

Maria Talamo

Come potrei non rivolgere il mio pensiero a Gaetano Briganti, come potrei non pescare nella memoria la gioia che ho provato ascoltandolo; Gaetano ha lasciato in me e, ritengo, in quanti hanno avuto la fortuna di incontrarlo, una traccia indelebile e un modello incorruttibile di umiltà e preparazione critica e profonda.

Ci siamo conosciuti all'Istituto "A. Volta" di Napoli, dove entrambi insegnavamo, negli anni 90, e siamo entrati da subito in sintonia perché accomunati dal modo di intendere la didattica, "l'altro", e dall'amore per le discipline scientifiche e per l'insegnamento; lui, poi, mi ha "preso per mano" e collaborando nella stesura di alcuni lavori mi ha aperto la mente e insegnato tanto.

Ho avuto in dono da lui, con una dedica di cui vado fiera, la copia di un testo che ha scritto: "Fisica per i concorsi a cattedre -Soluzioni ragionate dei problemi assegnati ai concorsi negli ultimi 15 anni" rileggendolo mi colpiscono diverse cose che descrivono bene il Prof. Briganti studioso, insegnante, uomo e che ora sento di condividere.

La sua scelta della frase di Albert Einstein: "Sai che i tuoi desideri più vivi si realizzeranno solo se sarai capace di amore e di comprensione per uomini, animali, piante e stelle, così che ogni gioia sarà la tua gioia e ogni dolore il tuo dolore" che era, secondo me, il modo in cui Gaetano intendeva l'esistenza.

La sua motivazione nella compilazione di questo testo come di ogni suo lavoro divulgativo è stata quella di mettere al servizio i suoi talenti, infatti scrive: "aiuto ai miei futuri colleghi più giovani" per costruire "una pista" per trovare una soluzione ai problemi "ragionata", "una guida per ...

seminare l'ombra del dubbio, non su ciò che si è trovato, ma sul modo con il quale si è trovato" fornendo così un metodo oggettivo e riproducibile per affrontare i problemi.

La sua religiosità sincera e profonda e per dirla con le sue parole : "... come a persona più degna di tutte rivolgo il mio grazie al Padre comune che pur offrendoci gli strumenti della ragione ha consentito la conoscenza di Sé con i soli strumenti del cuore".

Gaetano M. Briganti si laurea in Fisica presso l'Ateneo Napoletano nel 1968.

Durante l'ultimo periodo universitario viene in contatto con i movimenti cattolici di base e quindi, dopo aver sostenuto l'esame di Laurea, entra in una comunità operaia di tipo monastico, nella quale rimane per circa tre anni sostenendo anche gli esami del biennio Filosofico-Teologico della Facoltà di Teologia dei Capodimonte.

Nel 1972 inizia la sua attività di docente di Fisica e Laboratorio.

Nel 1976/77 è esercitatore presso l'Istituto di Fisica del Politecnico di Napoli ; nel 1978 ottiene la cattedra di Fisica negli Istituti statali di II grado. Nello stesso anno è consulente e progettista nella Solar Energy System ; nel 1979 è direttore tecnico della Coop Energetica e partecipa a numerose trasmissioni telefoniche e televisive con esponenti del WWF. Nel 1986 collabora alla pagina scientifica del Mattino di Napoli. Attualmente è socio del S.I.F. , Mathesis e A.I.F. e collabora a progetti di ricerca didattica con Istituzioni Universitarie, Enti di ricerca Pubblica e Istituti Statali di II grado.

Renata Santarossa

Ho conosciuto il prof. Gaetano Briganti 23 anni fa, persona molto vicina al prof. Ferdinando Casolaro a cui mi ero rivolta per far preparare mia figlia all'esame di fisica da sostenere alla facoltà di Farmacia dell'Università di Napoli. Al professore Gaetano Briganti va il mio grazie dal più profondo del cuore per essersi preso cura di mia figlia guidandola, con dedizione e competenza, allo studio della fisica. Inizialmente ho cominciato a conoscere Gaetano attraverso alcuni dettagli che mi venivano riferiti proprio da mia figlia: uno studioso della fisica a tutto tondo che riusciva a rendere semplici anche i concetti più complessi. La pazienza, la calma, la cortesia erano le prime virtù che riconosceva in lui, con il tempo però ha cominciato a conoscere e ad apprezzare anche le altre qualità umane che percepiva dietro i suoi silenzi e le sue riflessioni. Ricordo con quanto stupore mia figlia mi raccontava di quando capitava che la lezione si prolungasse più del dovuto e si faceva buio, allora Gaetano non le permetteva di uscire da sola, la accompagnava personalmente alla stazione.

Finalmente, in occasione di uno dei tanti incontri della Mathesis organizzati dal prof. Morelli presso il dipartimento di Matematica a Monte Sant'Angelo, ho avuto il piacere di conoscere personalmente Gaetano. Mi è sembrato di conoscerlo già, ho ricordato tutto ciò che mi aveva detto mia figlia, non si sbagliava, ho riconosciuto in lui la serietà, che diventava autorevolezza e sicurezza allo stesso tempo, una personalità che si presentava convinta e convincente. Un uomo con una grande carica umana, premuroso, molto legato alla famiglia e, come tanti genitori, spesso in pena per il figliolo di cui non sempre condivideva le scelte.

Sono proprio questi i valori che apprezziamo di più e che ci aiutano a coltivare nel tempo il ricordo dell'amico Gaetano.

Antonio Fontana

Sento il dovere di dedicare un pensiero al Prof. Gaetano M. Briganti, insigne Fisico e gran "signore". Ricordo con profondo affetto il caro professore, che ha contribuito fortemente alla mia formazione di docente, guidandomi con perizia e con garbo nel percorso che mi ha portato a costruire su solide basi la mia preparazione di insegnante.

Ivano Casolaro

Non dimenticherò mai il bagaglio prezioso di competenze trasmesse dal prof. Gaetano Briganti, che mi hanno reso padrone di una disciplina come la Fisica che mai avrei immaginato potesse affascinarmi in tal misura.

E ciò anche perché il Professore ha sempre unito la passione e il genio scientifico con quella enorme umanità che lo rendeva un punto di riferimento insostituibile, prima ancora che un professore, per coloro che hanno avuto la fortuna di conoscerlo pregandosi del suo insegnamento.

A proposito di una lettera di Renata Santarossa

Vincenzo Iorfida

Da tempo un aspetto è molto chiaro: l'ausilio della tecnologia, anche a seguito del suo continuo sviluppo, ha imposto una importante svolta nel sistema della comunicazione, contribuendo in modo significativo alle modificazioni degli assetti relazionali nella società, nelle istituzioni tutte e soprattutto nelle attività educative scolastiche di ogni ordine e grado, caratterizzando qualsiasi forma di relazione sociale anche tra docenti, docenti e studenti, studenti e studenti.

Oggi nella didattica, come in ogni forma di comunicazione, il termine preponderante è "connessione", inteso, oltre che come rapporto tra due o più processi, anche in ogni altra accezione del termine. All'interno dei percorsi di formazione, nei processi di conoscenza e di apprendimento, l'ausilio del feedback ed il ruolo che esso può assumere, attraverso l'utilizzo di tecnologie smart-device, immerge il discente in una nuova dimensione didattica partecipativa, circolare e autoformante.

L'utilizzo delle tecnologie nella didattica caratterizza e arricchisce sempre di più in modo specifico ed articolato l'insegnamento delle singole discipline, in modo interdisciplinare ma anche multidisciplinare, *connettendo* al "vecchio sapere" i "nuovi saperi" in modo contestualizzato,

attraverso un processo di compattazione dimensionale dello spaziotempo e attraverso uno spazio antropologico strettamente individualizzato e arricchito di nuovi significati.

È questa probabilmente una didattica innovativa che valorizza anche il lavoro del nuovo docente, e che pone al centro di ogni progettazione didattica l'interazione costante, la riflessione e la valutazione del coinvolgimento dei singoli percorsi di apprendimento che vanno oltre il sapere del singolo docente.

Il nuovo docente è colui che, attraverso nuovi ambienti di apprendimento, induce il singolo discente, oltre che ad una comprensione articolata e complessa su più livelli, anche ad un processo continuo di riflessione critica e di interazione non presenti nella didattica "tradizionale", e che a sua volta restituisce al docente una serie di dati che permettono di valutare meglio, in modo più omogeneo il processo educativo.

In tutto questo, la funzione del nuovo docente è quella di guida, nelle nuove necessità educative, del percorso di crescita formativa personale ed individualizzata del discente caratterizzata da competenze trasversali, oltre ad essere parte fondamentale, integrante ed esclusiva del processo comunicativo e progettuale della classe.

Fondamentale è il riferimento al dualismo che si può creare fra realtà e mondo virtuale dove si ha la possibilità di scoprire nuovi mondi mai esplorati da vicino, come i modelli subatomici, e nuovi spazi multidimensionali, che regalano e *connettono* il singolo individuo anche attraverso un aspetto emozionale che lo rende autore concreto delle proprie conquiste conoscitive.

Riconvertire i metodi tradizionali di insegnamento non è un processo semplice e spontaneo, così come introdurre la tecnologia nell'insegnamento non può essere un processo di integrazione indolore, poiché si rischia di cadere in un atteggiamento banale e ambiguo oltre che depistante per la formazione del discente.

Un utilizzo "istintivo" della tecnologia compromette il raggiungimento di quei risultati di eccellenza che oggi rappresentano un obiettivo primario, innescando un processo di esclusione che non darà la possibilità di vivere nella società del futuro, learning society, la propria cittadinanza in maniera consapevole, attiva e responsabile eludendo ogni processo innovativo, per molti aspetti più naturale, di apprendimento che mette in stretta connessione gli attuali modelli di conoscenza e che consente di sviluppare, nell'individuo, una nuova capacità di apprendere e di elaborare nuove informazioni e nuovi saperi. Una tematica questa che merita una maggiore attenzione poiché soltanto attraverso un confronto costante e continuo sarà possibile trovare nuove strategie valide e renderle applicabili nelle differenti e caratterizzanti realtà dell'intero territorio nazionale.

La costruzione della scienza

«...la conoscenza di un reale implica sempre il coordinamento di dati convenientemente associati. In altre parole la realtà non è un dato puro ma qualcosa di costruito mercè l'attività razionale coordinatrice». (Federigo Enriques, Scienza e razionalismo, Bologna:Zanichelli, pp.19-20, 1912).

«La conoscenza volgare si attacca soprattutto alle condizioni subiettive;[...]L'opposto avviene nella conoscenza scientifica. Il fatto è concepito, non per riguardo a noi stessi, ma in relazione ai fatti che lo circondano; si dimenticano in questo caso, almeno nell'enunciare il risultato, le condizioni subiettive sotto le quali esso si rivela ai sensi, per riferirsi alle condizioni obiettive del suo sussistere. Un tal modo di considerare i fatti aggiunge loro qualcosa che la conoscenza volgare lascia nell'ombra. Onde un fatto scientifico cresce, per così dire, di una moltitudine di fatti bruti in esso contenuti; guadagna in generalità mentre riassume in se stesso nuovi rapporti più estesi». (Federigo Enriques, Problemi della scienza, Bologna:Zanichelli, 1906, pp.101-102).

«Non possiamo contentarci della pura e semplice esperienza. No, questo è impossibile; equivarrebbe a disconoscere completamente il vero carattere della scienza. Lo scienziato deve ordinare; la scienza si fa coi fatti, come una casa si fa con le pietre; ma un cumulo di fatti è tanto poco una scienza, quanto un mucchio di pietre una casa. [...] I fatti bruti non ci possono dunque bastare; ecco perché ci occorre la scienza ordinata o generalizzata». (Henri Poincaré, La scienza e l'ipotesi, Firenze: La Nuova Italia, 1950, pp. 137-138).

“Helgoland” di Carlo Rovelli

Luca Nicotra*

* Ingegnere. Presidente dell’Associazione “Arte e Scienza”, Direttore responsabile di: «Periodico di Matematica», «Bollettino dell’Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «ArteScienza»;
luca.nicotra1949@gmail.com.

Sunto: Recensione del libro “Helgoland” di Carlo Rovelli.

Parole Chiave: Carlo Rovelli, “Helgoland”.

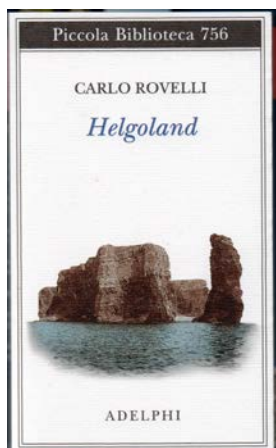
Abstract: Review of the book “Helgoland” by Carlo Rovelli.

Keywords: Carlo Rovelli, “Helgoland”.

Helgoland, che significa “Isola Sacra”, è il nome dell’isola del Mare del Nord, praticamente spoglia di vegetazione e battuta da forti venti, dove nel giugno 1925 il giovane Werner Heisenberg si era rifugiato, per trovare sollievo all’allergia ai pollini.

L’ultima fatica di divulgatore scientifico del nostro grande fisico teorico Carlo Rovelli è *Helgoland*, un libretto di circa 225 pagine in formato tascabile (17,5x10,5 cm) pubblicato nella collana “Piccola Biblioteca Adelphi”, benemerita per rendere di-

sponibili centinaia di opere di grande rilievo culturale a prezzi economici.



Richard Feynman pensava che nella nostra società la scienza sia rimasta un fenomeno marginale, perché gli scienziati stanno ad aspettare di essere «invitati a spiegare la teoria della Relatività di Einstein a gente che, invece, non capisce neppure la meccanica newtoniana». Aveva perfettamente ragione! La gente pretende di poter capire la scienza soltanto quando ha notizia di qualche scoperta

“sensazionale”, senza preoccuparsi di avere nessuna conoscenza propedeutica. Si può leggere una poesia o un romanzo senza dover aver letto tutte le precedenti opere dello stesso autore, ma non si può capire un risultato scientifico senza aver compreso quelli che, dal punto di vista logico, lo precedono. Oppure si interessa alla scienza quando essa afferma qualcosa in contrasto con la religione. Altro motivo di interesse verso la scienza da parte del pubblico generico è costituito dalle sue applicazioni: la tecnologia. Ma si può comprendere la tecnologia senza la scienza che ne è la matrice? Feynman, invece, auspicava che gli scienziati prendessero loro stessi l’iniziativa di parlare di scienza, anche se non “invitati” a farlo, scrivendo sui giornali, così come in realtà fanno i letterati, i filosofi, i cultori dell’arte, tutti i personaggi, insomma, che *l’establishment* culturale di ogni parte del mondo considera i soli veri “attori” della cultura. E lui, *in primis*, ha dato l’esempio più luminoso, dedicando parte delle sue energie alla diffusione della cono-

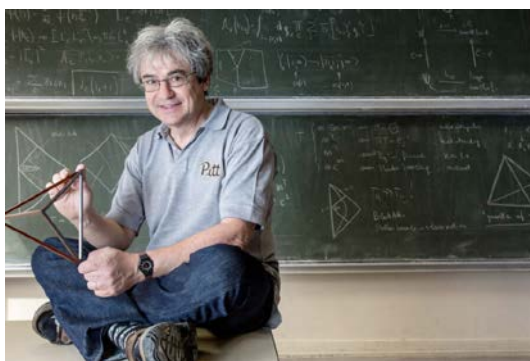
scienza della fisica fra i non addetti ai lavori, con originalissime opere di divulgazione scientifica di grande spessore culturale.

Carlo Rovelli, uno dei maggiori fisici teorici contemporanei, è il nostro "Feynman", uno dei cervelli italiani che il Bel Paese non ha saputo trattenere e che al lavoro di ricerca sa accostare con passione ed entusiasmo un grande lavoro di divulgazione scientifica. Dopo "La Sapienza" di Roma, ha insegnato in varie università fuori d'Italia: l'"Imperial College" a Londra e le Università di Pittsburgh e Yale negli Stati Uniti dal 1990 al 2000. Dal 2000 è professore ordinario di Fisica Teorica all'Università di Aix-Marseille in Francia, dove dirige il gruppo di ricerca in gravità quantistica del "Centre de Physique Théorique". Membro dell'"Institut universitaire de France" e dell'"Académie internationale de philosophie des sciences", è impegnato in prima persona, come cofondatore assieme all'americano Lee Smolin e all'indiano Abhay Ashtekar, nel filone frontieristico di ricerche sulla "gravità quantistica a loop", una teoria unificata in cui possono coesistere senza contraddizioni le forze elettromagnetica, debole e forte, descritte dal Modello Standard secondo i principi della meccanica quantistica, e la forza gravitazionale, descritta dalla Relatività Generale. Si occupa anche di storia e filosofia della scienza: all'Università di Pittsburgh ha insegnato come Affiliated Professor nel Dipartimento di Storia e Filosofia della Scienza.

Rovelli ha accolto in pieno l'incitamento di Feynman: scrive di scienza su vari quotidiani nazionali e stranieri: regolarmente sul "Corriere della Sera", in particolare con il supplemento "La Lettura", sul supplemento culturale de "Il Sole 24 Ore", e saltuariamente su "La Repubblica", sul "Guardian" e sul "Financial Times". Dal 2004 si dedica con grande successo

ad opere di divulgazione scientifica: *Che cos'è il tempo? Che cos'è lo spazio?* (Di Renzo Editore, 2004), *Che cos'è la scienza. La rivoluzione di Anassimandro* (Mondadori, 2009), *La realtà non è come ci appare. La struttura elementare delle cose* (Raffaello Cortina, 2014), *Sette brevi lezioni di fisica* (Adelphi, 2014), tradotto in ben 41 lingue, *L'ordine del tempo* (Adelphi, 2017), grazie al quale nel 2019 la rivista «Foreign Policy» lo ha inserito nella lista dei 100 migliori pensatori del mondo («Global Thinkers»).

Nel 1994 ha introdotto la meccanica quantistica relazion-



Carlo Rovelli.

le (Relational quantum mechanics), una interpretazione della meccanica quantistica basata sull'idea che gli stati quantistici sono sempre relativi a un osservatore. Una sua esposizione divulgativa è contenuta proprio nel suo ultimo capolavoro di divulgazione scientifica: *Helgoland*.

Il libro è diviso in due parti concettuali, che possono essere viste come i due atti di una rappresentazione teatrale dedicata a quella che viene da lui stesso definita «forse la più grande rivoluzione scientifica di tutti i tempi»: la scoperta della fisica quantistica. Una terza parte è dedicata a riflessioni filosofiche e a mostrare che in fondo alcuni aspetti della meccanica quan-

tistica, in particolar modo quello relazionale, non costituiscono una novità totale.

Il primo atto (la prima parte) vede come attori i protagonisti di questa straordinaria rivoluzione del pensiero scientifico: Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Max Born, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Pascual Jordan, Paul Dirac, Erwin Schrödinger, tutti impegnati (ognuno in modo diverso) a far nascere la nuova fisica quantistica, che quindi, come giustamente Rovelli osserva, è «opera di squadra». Il primo atto si chiude in maniera quasi pirandelliana, lasciando nel pubblico l'idea confusa di un comportamento della Natura al di fuori dell'umana comprensione, strano, bizzarro e imprevedibile, comprensibile soltanto in termini probabilistici. Ma è una probabilità soggettiva, una *de Finetti probability*, come dicono gli americani, o una probabilità oggettiva? Questo è il dilemma: è la nostra conoscenza incompleta che è accessibile soltanto in termini probabilistici, o è Dio che gioca a dadi, per usare una celebre espressione einsteniana? O, se volete, la probabilità riguarda la "mappa" o il "territorio", per dirla con Alfred Korzybski, ovvero la nostra rappresentazione del mondo o la Natura in sé? Insomma: il primo atto lascia il pubblico in un completo stato confusionale. Bisogna veramente, come diceva Richard Feynman, «accettare la Natura per quello che è: assurda»? In questi termini, la "narrazione" della fisica quantistica ha proprio il sapore dei drammi pirandelliani.

Il secondo atto (la seconda parte), invece, vede sulla scena proprio l'Autore del libro: il fisico Carlo Rovelli, impegnato a recitare il suo copione: l'esposizione delle idee a fondamento della sua interpretazione relazionale degli stati quantistici, in grado di far «uscire dalla confusione».

Ma perché intitolare un libro, che vuole raccontare la nascita e le idee della fisica quantistica, all'isola dove Heisenberg, appena ventitreenne, trascorse appena qualche giorno?

In realtà, l'idea del "*quantum*", che è alla base della fisica quantistica e dal quale essa stessa trae il nome, fu introdotta da Max Planck 25 anni prima del soggiorno di Heisenberg ad Helgoland, come puro artificio matematico per spiegare un comportamento dell'energia nel corpo nero, inspiegabile dalla fisica allora conosciuta, che sarà poi etichettata come "fisica classica". Nel 1900 Planck aveva trovato una formula¹ che riusciva a spiegare la distribuzione, fra le diverse frequenze, della radiazione elettromagnetica emessa dal corpo nero.² Ma, per rendere conto delle "strane"³ risultanze sperimentali fu "obbligato" ad ammettere un'ipotesi alla quale lui stesso non dava valore reale, ma soltanto quello di un "artificio" per "far tornare i conti": l'energia poteva assumere soltanto valori multipli interi di un valore minimo (*quantum*), proporzionale alla frequenza secondo una costante che indicò con la lettera *h* (poi detta "costante di Planck").⁴ Una ipotesi, dunque, che co-

¹ $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3 c^2}{(e^{h\nu/kT} - 1)}$ è la radianza del corpo nero, ovvero l'energia emessa per unità di superficie e di angolo solido, funzione della frequenza ν e della temperatura assoluta T .

² Il corpo nero è un corpo ideale che assorbe tutta l'energia incidente e quindi (per il principio di conservazione dell'energia) la irradia tutta, ma "trasformata". Sperimentalmente realizzabile con ottima approssimazione con un corpo cavo nel quale sia praticato un foro di dimensioni piccolissime e riscaldato a diverse temperature.

³ Perché non spiegabili con la teoria ondulatoria della radiazione elettromagnetica, fino ad allora l'unica ritenuta valida.

⁴ $h = 6,62607015 \times 10^{-34}$ Js. Spesso, nei calcoli, è più conveniente far comparire la pulsazione ω che è legata alla frequenza ν dalla relazione $\omega = 2\pi \nu$. Per esempio il quanto di energia di una radiazione elettromagnetica $\varepsilon = h\nu$

stituiva un vero "attentato" alla saldezza della teoria ondulatoria: l'energia associata a una radiazione elettromagnetica di frequenza ν , emessa dalle pareti del corpo nero, non può assumere infiniti valori variabili con continuità (come vorrebbe la teoria ondulatoria della luce) ma soltanto valori multipli interi del quanto di energia $\varepsilon = h\nu$ associato a quella frequenza, cioè $E = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Cinque anni dopo, il 18 marzo 1905, Albert Einstein, in uno dei suoi 6 storici articoli pubblicati in quel *mirabilis annus* nella prestigiosa rivista «Annalen der Physik», dal titolo *Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce*, riprese l'idea di Planck del quanto di energia, dandogli però un significato reale: il "quanto di luce", chiamato successivamente "fotone" nel 1926 da Gilbert Lewis. Einstein, nello stesso articolo, distinse i fenomeni di assorbimento ed emissione della luce da quelli di propagazione ed estese a tutti i corpi la modalità di assorbimento e trasformazione della luce per quanti, intuita da Planck soltanto per il corpo nero. L'idea della quantizzazione della radiazione elettromagnetica permise ad Einstein di spiegare le strane leggi dell'effetto fotoelettrico, scoperte dal fisico Philipp Eduard von Lenard ma non interpretabili con la teoria ondulatoria della luce. Per Einstein,

si può esprimere anche come $\varepsilon = \omega \hbar / 2\pi$. Per evitare di scrivere molte volte $\hbar / 2\pi$, Heisenberg scriveva $\hbar$ (essendo $\hbar = h / 2\pi$), detta costante di Planck ridotta poi utilizzata anche da Dirac. Dal 20 maggio 2019, la costante di Planck è la costante utilizzata per definire il chilogrammo ed è una delle costanti universali, presente in tutte le quantizzazioni di grandezze fisiche. Essa esprime il cosiddetto "quanto d'azione".

quindi, la radiazione elettromagnetica nei fenomeni di interazione con la materia (assorbimento ed amissione) perdeva il carattere ondulatorio e continuo fino ad allora ritenuto il solo valido, per assumere un carattere discreto, granulare, proprio di particelle o corpuscoli, ma lo conservava nei fenomeni di propagazione: nasceva quello che Feynman chiamava lo stato confusionale della fisica, ovvero il dualismo onda-corpuscolo della natura della luce. Tuttavia, lo stesso Einstein rilevava che le osservazioni ottiche della propagazione della luce si riferivano a valori medi e non istantanei, lasciando quindi trapelare la possibilità di arrivare ad affermare la sola natura corpuscolare della luce, d'altra parte già intuita da Isaac Newton e confermata poi dalla meccanica quantistica.

Per tali ragioni si può dire che i padri della fisica quantistica sono Planck ed Einstein, responsabili del suo periodo "prenatale", mentre Bohr, Born, Heisenberg, Pauli, Jordan, Dirac e Schrödinger sono stati i fisici che l'hanno effettivamente fatta nascere. *Helgoland* narra proprio le mirabili vicende che portarono quei fisici (la maggior parte dei quali giovanissimi) a creare nella fisica la seconda grande rivoluzione dopo la Relatività einsteiniana, gettando le basi per lo sviluppo della meccanica quantistica. L'inizio di questo sviluppo si deve proprio alle straordinarie intuizioni avute dal ventitreenne Heisenberg nell'isola di Helgoland, per spiegare lo strano comportamento degli elettroni nel modello di atomo ideato da Bohr, che però era in grado di spiegare e prevedere le proprietà chimiche degli elementi: gli elettroni per non cadere nel nucleo attratti dalle cariche positive dei protoni "dovevano" orbitare su determinate orbite a determinate distanze dal nucleo e con determinate energie, e potevano soltanto "saltare" da un'orbita

all'altra. Bohr aveva incaricato Heisenberg di scoprire la "misteriosa" nuova forza e la nuova legge del moto che poteva spiegare questo strano comportamento. «Heisenberg – scrive Rovelli – si era immerso nel problema. Ne aveva fatto la sua ossessione. Aveva provato di tutto, anche lui, come gli altri. Niente funzionava». A questo punto, ecco il lampo di genio. Il positivismo scommetteva tutto sul dato empirico, che identificava con il risultato scientifico. Federigo Enriques criticò questo assunto, che chiamò "fatto brutto" e gli contrappose il "fatto scientifico" come interpretazione e ordinamento del puro dato empirico alla luce di idee già validate o nuove. Il giovane Werner seguì questo secondo approccio, dando maggior peso, però, all'idea positivista del valore in sé del dato empirico. Perché? I risultati sperimentali non potevano essere interpretati nel contesto tradizionale dell'elettrone pensato come corpuscolo in moto lungo una traiettoria: era necessaria un'altra concezione dell'elettrone giustificata proprio dal puro dato sperimentale. In questo caso l'esperienza, unica fonte di verità per tutti i fisici, a partire da Leonardo da Vinci, obbligava a modificare il sistema di idee già acquisito. Heisenberg poté uscire da quell'*impasse* perché ebbe il coraggio e la spregiudicatezza propri del genio e dell'età giovanile. Comprese che era necessario attenersi soltanto a ciò che poteva essere "veramente" osservato (l'ampiezza e la frequenza della luce⁵ emessa dall'elettrone nel salto da un'orbita a un'altra più interna), cioè prese alla lettera il *dictat* positivista, ma capì anche che il dato empirico suggeriva una nuova concezione dell'elettrone, radi-

⁵ Il termine "luce", in tutto il libro di Rovelli e anche qui, viene usato nell'accezione più generale di "radiazione elettromagnetica" e non riferito soltanto allo spettro visibile.

calmente diversa da quella voluta dalla meccanica newtoniana. È questa l'idea nuova, fortemente positivista: limitarsi "strettamente" all'osservabile, con una teoria che rinunci a descrivere ciò che accade fra una osservazione e l'altra. E questo significava abbandonare l'uso delle variabili⁶ descrittive del moto dell'elettrone, che in realtà non può essere osservato nella sua interezza, sostituendole con matrici di numeri che, invece, definiscono lo stato dell'elettrone in ciascuna orbita. La matrice contiene nelle righe i valori relativi alle orbite di partenza e nelle colonne quelli relativi alle orbite di arrivo. L'intensità della luce emessa nel salto dall'orbita 3 all'orbita 1, per esempio, si troverà nella casella all'incrocio fra la terza riga e la prima colonna.

Questo è tutto quanto quello che realmente si può dire ed è soltanto l'inizio oscuro del cammino lungo il quale incontriamo tutti gli altri citati grandi protagonisti di questa avventura, che al concetto di una teoria basata unicamente sull'"osservabile" e sulla "granularità", aggiungeranno la terza caratteristica della fisica quantistica: la possibilità di fornire soltanto la "probabilità" di osservare una cosa o l'altra.

Molti scienziati si sono cimentati meritoriamente con successo nella divulgazione, ma esiste una grande differenza di stile e di risultato nel farlo: rendere divulgativo ciò che è opera degli specialisti, oppure saper anche "raccontare" la scienza. Carlo Rovelli è fra questi ultimi: ha il dono non soltanto di rendere comprensibile a un largo pubblico la fisica, ma anche quello di saperla "raccontare", creando passione e interesse.

⁶ Posizione, velocità, energia, frequenza della radiazione emessa ...

“Il bocciato” di Ferdinando Casolaro

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di discipline matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle scienze Umane;
eugenif3@gmail.com

Sunto: Recensione del libro “Il bocciato” di Ferdinando Casolaro.

Parole Chiave: Ferdinando Casolaro, “Il Bocciato”.

Abstract: Review of the book “Il bocciato” by Ferdinando Casolaro.

Keywords: Ferdinando Casolaro, “Il Bocciato”

Questo simpatico volumetto del Prof. Ferdinando Casolaro è uno sguardo attento alla vita italiana, a cominciare dagli occhi di un ragazzino di otto anni, che sembra uscito dalla penna di quel Vamba, al secolo Luigi Bertelli, autore de *Il giornalino di Giamburrasca*, sul quale si sono consolati dai loro guai ragazzi di tante generazioni e così bene interpretato nel teatro televisivo degli anni '70 da una giovanissima Rita Pavone, nei panni di Giamburrasca. Il giornalino era certamente consolatorio, perché qualunque guaio poteva essere capitato a qualcuno di noi, Giamburrasca ne aveva combinate di più. Così il piccolo Ferdinando di otto anni ne aveva combinate di più.

Scrive Ferdinando nella prefazione, parlando di sè in terza persona :

... la prima bocciatura [Ferdinando] l'ha subìta all'età di otto anni quando frequentava la terza elementare e, per un episodio inizialmente banale, fu espulso dalla scuola. Fortunatamente fu riammesso due giorni dopo per poi essere rimandato a settembre a riparare in italiano.

Doveva essere il 1954 , da un semplice calcolo fatto da me, calcolo che talvolta perfino noi matematici riusciamo a fare, la scuola era una scuola intransigente, su un modello di ragazzi diremmo oggi “allineati e coperti”, una scuola, se vogliamo, avente come modello di studente quell’Enrico del Cuore di De Amicis. E a questo ragazzo, pur bravo e allineato, il padre scrive sul diario:

Si, caro Enrico, lo studio ti è duro, come ti dice tua madre: non ti vedo ancora andare a scuola con quell'animo risoluto e con quel viso ridente, ch'io vorrei. (E. De Amicis, Cuore, 1° messaggio del Padre ad Enrico.)

E per concludere:

Coraggio dunque piccolo soldato dell'immenso esercito. I tuoi libri son le tue armi, la tua classe è la tua squadra, il campo di battaglia è la terra intera, e la vittoria è la civiltà umana. Non essere un soldato codardo, Enrico mio. Tuo Padre.



Queste frasi erano di un tempo apparentemente indefinito, dopo forse quel 1886, data di uscita del libro *Cuore*. Alcuni critici sostengono che il libro è un testo essenzialmente laico, dove si sostituiscono il cattolicesimo degli italiani con la religione laica della Patria al primo posto e la Chiesa con lo Stato sabaudo, da poco diventato Italia. È un meccanismo

sociale che scambia il religioso convinto con il cittadino corretto, i Comandamenti con la morale borghese e del nascente socialismo, il Vangelo con le Leggi dello stato da rispettare al disopra di ogni cosa, i santi erano esattamente gli eroi di guerra, meccanismi tutti ai quali De Amicis aderì convinto. In questo contesto Enrico, forse di due o tre anni più grande del piccolo Ferdinando di otto anni, si evolve sotto il rigido controllo dei genitori, dei maestri, degli zii, dei parenti e degli amici di famiglia. È quanto dice ancora Ferdinando, quando scrive: «In quel periodo, però, [Ferdinando] aveva dovuto subire bocciature anche in ambito familiare (da quegli zii che sanno tutto loro) e, successivamente, nei rapporti sociali con i coetanei ed in altri percorsi di vita, anche professionali».

Ed io qui capisco Ferdinando, anche io ho dovuto subire, però da padre, tentativi di parenti che sapevano tutto loro, tentativi di governare loro i miei figli, che personalmente ho educato in maniera sghemba con quella morale, forse sana al tempo di De Amicis, ma certamente non adatta a quella creatività che oggi, da adulti, i miei figli hanno. Racconto un episodio, successo a casa mia, ma che con le medesime valenze sarebbe potuto accadere a casa Casolaro. Era ospite a casa mia il famoso Prof. Albrecht Beutelspacher, con il quale ho lavorato assieme per anni. Albrecht scrisse un libro, sui periodi trascorsi a casa nostra, periodi in cui lavoravamo sulla teoria dei *blocking sets*. Scrive 40 anni fa: «Diana è la figlia quattordicenne di Franco, quando lei rientra a casa da scuola, nulla è come prima, noi viviamo la scuola con lei, il padre non parla con lei di Matematica, ma si occupa dei Temi d'Italiano».

E ancora: «Gianluca il figlio di sette anni chiede cosa sono i *blocking sets*. Io tra me rido, Franco non può spiegare. Ma Franco dice: vedi... sono come un piatto di pasta con gli spaghetti, che sono le rette, su ogni spaghetti vi è del pomodoro e non vi è, esprimendo l'idea che le rette dovevano avere punti di due colori».

Forse a quel tempo Ferdinando non ebbe difensori, allora, lo ricordo da studente un tantino più vecchio di lui, i genitori erano spudoratamente dalla parte dei Professori, con la P maiuscola, al contrario di oggi. Infatti, mi risulta che oggi i genitori sono spudoratamente dalla parte dei figli, contro gli insegnanti, per loro non più Professori.

Umberto Eco, da quel grande indagatore dei tempi mutevoli, in *Diario minimo*, felice volumetto la cui lettura sarebbe da fare a scuola, negli affreschi che fornisce di quel

mondo che va dal 1950 al 1980, scrive *L'elogio a Franti*. Ricordo che Franti era il modello, sempre nel "libro Cuore", del ragazzo "per male", da bocciare. Ma cosa faceva Franti, in una classe di oggi sarebbe forse stato uno dei migliori, ma nel rapporto melenso, di quella scuola autoritaria e socialmente selettiva, era il peggiore, faceva stupidaggini, ma di testa sua. È classificato da Eco, nella sua bonaria trasgressività, come l'unico personaggio vivo dell'opera deamicisiana.

Ma tornando a Ferdinando, cosa successe di lui dopo?

Andando alle conclusioni, direi che fu un ottimo studente universitario, laurea brillante con un relatore che lo avrebbe preso come assistente, cosa che lui non accettò, poiché voleva mettere su famiglia, cosa che fece. La sua vita di famiglia, a parte le banali critiche di ogni famiglia, è stata estremamente positiva. Una moglie intelligente, due figli di gran lunga migliori di quel banale Enrico, incontrato alcune righe fa, un matrimonio che dura da più di quarant'anni, il figlio e la figlia ottimamente laureati, oggi con le loro famiglie, e due genitori presenti sempre, come saggi nonni, non certo nella forma di quei saputi zii, che il piccolo Ferdinando aveva dovuto subire. Ferdinando negli anni ha raccolto accanto a sè tanti amici e allievi, ed io che scrivo sono uno di questi, amici che non solo lo stimano, questo è facile, ma apprezzano questa sua duplicità di persona modesta nella forma, ma fermo e risoluto nelle sue opinioni. In ogni caso, l'amico Ferdinando nonostante questo suo giamburresco esordio, oggi, da professore in pensione può vantare un curriculum di professore di Scuola Superiore invidiabile, arricchito da 30 anni di insegnamento contemporaneo nell'Università e nella formazione dei docenti, da più di 100 lavori pubblicati su

riviste nazionali e internazionali, invitato a tenere Conferenze in varie Università, in Italia e all'estero, sempre disponibile ad andare a parlare nelle Scuole e in Associazioni culturali e anche membro di due Accademie culturali, delle quali fa parte del ristretto direttivo. Insieme a me e Luca Nicotra è anche curatore di due riviste, che fanno parte di un complesso di sette riviste, che coprono vari campi. Tra le due, da noi tre curate, la rinata (dopo 100 anni) rivista «Periodico di Matematica», quella chiusa nel 1918 e riaperta nel 2019, che fu un vanto allora, ma che anche oggi aspira ad un ruolo interessante. A queste nostre due riviste è associato il sito www.afsu.it della nostra "Accademia di Filosofia delle Scienze Umane", nel quale si possono trovare interessanti sezioni:

L'Archivio del «Periodico di Matematica» (1886-1918), completo e scaricabile, curato dal prof. Antonio Lungo.

Nei *Personaggi della matematica* sono particolarmente curate le opere di Federico Enriques e Bruno de Finetti.

Nella sezione *Bollettino di Bibliografia di Testi Scolastici di Matematica*, dedicata ai libri scolastici, trovate le copertine, l'indice e l'introduzione di tutti quei matematici di grande livello che sulla fine del '900 hanno scritto libri di Geometria, di Algebra, di Aritmetica, che sono comunque un patrimonio della nostra cultura.

In conclusione il "bocciato" è andato ben oltre le aspettative dei suoi "bocciatori", sempre nostri colleghi di allora, prigionieri anche loro di un modello del quale forse non avevano compreso le parti oscure!

Profili biografici degli Autori

Giordano Bruno (Roma) – gibrun84@gmail.com

Docente di Sistemica presso l'ISIA di Roma. Ha insegnato Analisi Matematica e Calcolo delle probabilità e statistica nella Facoltà di Ingegneria dell'Università "Sapienza" di Roma. Successivamente è stato Direttore dell'Istituto Superiore delle Industrie Artistiche della sede di Roma e di quella di Pescara. È Presidente della Fondazione "MORFE'", che si occupa di diffondere la cultura del design e favorisce la creazione di start-up. È presidente onorario dell'associazione "Arte e Scienza" e direttore onorario del periodico «ArteScienza». Esperto e divulgatore della Teoria dei Sistemi, ha organizzato mostre e convegni nei settori della matematica applicata e del design.

Ferdinando Casolaro (Napoli) – ferdinando.casolaro@gmail.com

Professore a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell'Università del Sannio. E' autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche e vari libri. Fa parte dell'Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico) della rivista "Science & Philosophy", e Socio fondatore del "Periodico di Matematica" nella sua nuova rinascita 100 anni dopo la sospensione del 1918. E' Presidente della sezione di Napoli della Mathesis, Società di Matematica e Fisica, di cui è stato Segretario nazionale ed ha fatto parte del Consiglio Direttivo nel periodo 2003-2014.

Ivano Casolaro (Napoli)

È docente di Matematica e Fisica a tempo indeterminato presso il Liceo "Cicerone" di Formia e professore a contratto di Analisi Matematica per il corso di Laurea in Scienze dell'Architettura presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli Federico II dove, negli anni accademici dal 2008-2009 al 2011-2012 è stato Cultore sulla cattedra di Matematica Generale del prof. Luciano Basile. Negli stessi anni ha tenuto contratti di *attività didattiche integrative* per l'insegnamento di Analisi

Matematica presso il Dipartimento di Architettura "L. Vanvitelli" della Seconda Università di Napoli e presso il Dipartimento di Scienze dell'Università del Sannio. Nell'anno accademico 2016-17, è stato docente del corso di "Matematica di base" per studenti del primo anno del Corso di Laurea in Ingegneria presso l'Università di Udine, città in cui era in servizio. È autore di pubblicazioni di carattere didattico.

Antonio Della Rocca (Napoli) - dellaroccaantonio77@gmail.com

Antonio della Rocca (1944), laureato in Ingegneria elettrotecnica (UniniNapoli- Federico II), dirigente ENEL e responsabile della Direzione Acquisti e Appalti della soc. SOGIN Spa, (gruppo ENEL). Autore con A. Trotta di *Alcune proprietà significative dei numeri primi gemelli* in «Periodico di Matematiche» (n.2, 2008).

Franco Eugeni (Teramo) - eugenif3@gmail.com

Coordinatore PHD. Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Logica e Filosofia della Scienza in varie Università (Modena, L'Aquila, Chieti, Milano, Roma). È stato presidente nazionale della Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", direttore di dipartimento e delegato rettorale per la Didattica. È membro onorario della "Romanian Society for Fuzzy Systems" a Iasi. Direttore dei periodici telematici «Ratio Mathematica», «Eiris (Epistemologia dell'Informatica e Ricerca Sociale)», «SEM Bollettino dell'AFSU, Vol. I (1), 2018. (Skills for Economic Management)», «Divulgazione della Scienza e della Filosofia». È stato Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV, fondata nel 1598). È presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). È condirettore dei periodici «Science & Philosophy» e «Bollettino dell'AFSU» ed è fondatore della rinata rivista "Periodico di Matematica", dopo 100 anni dalla sua chiusura nel 1918. È membro dei Consigli Scientifici delle Riviste «Italian J. of Applied Mathematics» e «J. of Interdisciplinary Mathematics». È stato membro dei Consigli Scientifici dei «Rendiconti di Matematica» e del «Journal of Optimization and Economic Science». È Commendatore della Repubblica e professore onorario nell'Università A. Cuza di Iasi (Romania). Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Antonio Fontana (Camerino) - antonio.fontana@unicam.it) - Professore di Matematica e Fisica presso il liceo scientifico "G. Mercalli" di Napoli, attualmente è dottorando in Computer Science and Mathematics presso l'Università di Camerino. È autore di pubblicazioni su riviste di settore riguardanti la didattica della matematica.

Franco Francia (La Spezia) - franco.francia40@virgilio.it

Nato a Fivizzano (Ms) il 21/03/1940, il prof. Franco Francia si iscrisse a fisica presso l'università di Pisa. Si laureò presso l'università di Ferrara e insegnò matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G. Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali* - Archimede - N.1 anno 1985 casa editrice LE MONNIER. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

Antonio Maturo (Pescara) - antomato75@gmail.com

Già Professore Ordinario di Metodi Matematici per l'Economia, presso l'Università G. d'Annunzio di Chieti-Pescara, è stato per circa 20 anni Delegato di Facoltà e di Dipartimento per i rapporti internazionali. È stato Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali. Chief Editor delle riviste Ratio Mathematica fino al 2017, Science & Philosophy, Ratio Sociologica, Journal of Social Housing. È condirettore del Bollettino dell'AFSU. Associate editor di varie riviste italiane e straniere. Autore di circa 170 pubblicazioni scientifiche e vari libri. I suoi interessi di ricerca riguardano i modelli decisionali in condizioni di incertezza, la probabilità soggettiva, la logica fuzzy, la didattica della matematica, le geometrie finite e le geometrie join. Ulteriori dettagli sull'attività di ricerca sono in vari siti internet. Ad esempio, il sito Research Gate.

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Ingegnere meccanico e giornalista pubblicista. Autore di circa 300 articoli, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui *Bruno de*

Finetti: un matematico scomodo (Livorno:Belforte, 2008), la prima biografia mondiale del grande scienziato. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore e nel settore dei sistemi di guerra elettronica. Esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Pierpaolo Palka

È ricercatore, dal 2001, presso la Facoltà di Architettura dell'Università degli Studi di Chieti-Pescara "Gabriele d'Annunzio", dove dal 2003 tiene il corso di Istituzioni di matematica I e Informatica. Ha realizzato il rilievo 3D di Palazzo Litta a Milano in collaborazione con la Facoltà di Architettura dell'Università degli Studi di Ferrara. Ha brevettato: Fotorad, software per il rilievo d'architettura (2004); RilArch, software per il disegno automatico (2006); Fotorad Gis in Web. Oggi è docente di Disegno Digitalizzato e rappresentazione del Territorio presso la facoltà di Ingegneria delle Costruzioni dell'Università degli Studi di Chieti-Pescara "Gabriele d'Annunzio".

Maria Talamo (Napoli)

Laureata in matematica nel 1980 con 110 e lode, è docente di matematica in ruolo dal 1984 quale vincitrice di concorso. Ha partecipato alla Scuola di Perfezionamento in Didattica della matematica e al Dottorato in matematica, ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica presieduto dal Prof. A. Morelli. Ha al Corso di Didattica della matematica in ambito SISS, è membro del direttivo Mathesis di Napoli, è responsabile provinciale delle Olimpiadi di matematica Giochi di Archimede. Ha prodotto diverse pubblicazioni e presentato relazioni ad alcuni congressi organizzati dalla Mathesis, dalla SISM e da altri enti.

Alberto Trotta (Salerno) - albertotrotta@virgilio.it

Professore di Matematica e Fisica nelle Scuole Secondarie. Ha partecipato, specialmente come relatore a numerosi congressi nazionali indetti dalla Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", della quale è stato presidente di sezione. Membro dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). – Segretario di Redazione.

Renata Santarossa (Napoli) - santarossa.renata@gmail.com

Laureata in matematica e specializzata in "Teorie e tecniche per l'impiego dei calcolatori elettronici" (Politecnico di Napoli). È stata docente di matematica e fisica, dal 2001 è stata supervisore alla SISS per l'abilitazione all'insegnamento della matematica e fisica dell'Università di Napoli. Ha fatto parte della Commissione MIUR per le Indicazioni Nazionali (2000), e coautrice del testo La matematica per il cittadino. Dal 2009 dirigente scolastico in regione Lombardia e nello stesso ruolo ha tenuto corsi di formazione per il MIUR. Docente a contratto presso le università della Calabria e Napoli. I suoi articoli su riviste scientifiche internazionali riguardano problematiche di didattica della matematica.

L'indefinibilità del reale

...vista da un drammaturgo

«Io sono realmente come mi vede lei. — Ma ciò non toglie, cara signora mia, che io non sia anche realmente come mi vede suo marito, mia sorella, mia nipote e la signora qua — ... Vi vedo affannati a cercar di sapere chi sono gli altri e le cose come sono, quasi che gli altri e le cose per se stessi fossero così o così». (Luigi Pirandello, *Così è se vi pare*)

«La realtà che ho io per voi è nella forma che voi mi date; ma è realtà per voi e non per me; la realtà che voi avete per me è nella forma che io vi do; ma è realtà per me e non per voi; e per me stesso io non ho altra realtà se non nella forma che riesco a darmi. E come? Ma costruendomi, appunto». (Luigi Pirandello, *Uno, nessuno e centomila*).

...vista da un fisico teorico

«Il mondo si frantuma in un gioco di punti di vista, che non ammette un'unica visione globale. È un mondo di prospettive, di manifestazioni, non di entità con proprietà definite o fatti univoci. Le proprietà non vivono sugli oggetti, sono ponti fra oggetti. Gli oggetti sono tali solo in un contesto, cioè solo rispetto ad altri oggetti, sono nodi dove si allacciano ponti. Il mondo è un gioco prospettico, come di specchi che esistono solo nel riflesso di uno nell'altro.

La grana fine delle cose è questo strano lieve mondo, dove le variabili sono relative, il futuro non è determinato dal presente. Questo fantasmatico mondo di quanti è il nostro mondo». (Carlo Rovelli, *Helgoland*, Adelphi, 2020, p. 95).

Norme per gli autori

Vengono qui riportate le principali norme editoriali che devono essere applicate dagli Autori per la redazione degli articoli. Una versione dettagliata ed esauriente è consultabili nel sito dell'AFSU.

VIRGOLETTE

A) Si scrivono tra virgolette basse o caporali all'interno del testo (« ») (« si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 174 sul tastierino numerico; » si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 175 sul tastierino numerico) :

- le citazioni quando non troppo lunghe (da valutarsi caso per caso) e inserite in modo tale da integrare lo stesso testo (parole fatte proprie dall'Autore);
- i discorsi diretti;
- le testate di periodici («L'Espresso»).

Ricordiamo che il punto fermo va generalmente fuori dalle virgolette (».), anche se all'interno c'è già un punto interrogativo, esclamativo o i puntini di sospensione; va invece all'interno delle virgolette quando la citazione o il discorso diretto (specie in narrativa) non è introdotto dai due punti, ovvero quando la citazione o la frase è preceduta da un punto.

B) Si scrivono tra virgolette alte o doppi apici (" "):

- le citazioni all'interno di citazioni. Esempio: Platone scrisse: «Un giorno Socrate disse: "Questo è un uomo"»;
- le parti pensate quando vanno distinte dal discorso diretto. Esempio: "Devo andare via" pensò Luigi tra sé e sé mentre intanto le diceva: «Resta, parliamo ancora»;
- le parole o frasi evidenziate in quanto:
- usate in senso ironico o prescindendo dal loro significato letterale (esempio: i "poveri" statunitensi possiedono soltanto un'automobile ciascuno);
- usate per esprimere un concetto particolare (il concetto di "rinascita", l'idea del "bello");
- di uso comune alle quali si vuole dare una particolare enfasi (da usare con moderazione);
- espressioni figurate o gergali (sciopero "a singhiozzo");
- le testate dei quotidiani ("la Repubblica");
- titoli di capitoli o parti di libri citati (nel capitolo "Aristotele nel Medioevo" parleremo di...);
- titoli di convegni, seminari, conferenze o interventi;

- denominazioni aggiunte a scuole, associazioni, musei, ecc. (il Conservatorio di Musica “Giuseppe Verdi”, il Circolo culturale “Cesare Pavese”, il liceo statale “Giacomo Leopardi”, l’ospedale “Sandro Pertini”, ecc.; ma: l’Accademia di Brera, il Teatro alla Scala).

C) Le virgolette singole o apici semplici (‘ ’) non si usano mai, a eccezione della citazione all’interno di un discorso già tra apici doppi o di una scelta specifica e coerente in se stessa da parte dell’autore, specie se esperto di italianistica o linguistica.

D) Per esprimere minuti e secondi si usano le stanghette dritte (Bartali giunse a 1'45" da Coppi).

E) Per gli apici doppi e l’apice singolo (quest’ultimo ricorrente prevalentemente come apostrofo o elisione) utilizzare quelli tipografici o aggraziati, e non le stanghette dritte (“ ” e non " "; ’ e non ').

SOTTOLINEATO

Il sottolineato non si usa mai; se c’è va sostituito con il corsivo. Non utilizzare mai insieme corsivo e sottolineato.

GRASSETTO

Il grassetto non si usa mai nel corpo testo, eventualmente soltanto nei titoli.

CORSIVO

Si scrivono in corsivo:

- i titoli di libri (italiani o stranieri), articoli di giornale e di rivista, brani poetici, racconti, opere d'arte, brani musicali, film, trasmissioni radiofoniche e televisive;
- le parole straniere quando non sono di uso comune nella lingua italiana (esempi: *Weltanschauung*, *cherchez la femme*; ma: film, festival, computer (da notare che la punteggiatura che segue il corsivo resta in tondo!);
- le denominazioni scientifiche delle scienze naturali;
- in alcuni contesti particolari, termini tecnici o specialistici;
- i titoli di brani musicali, tranne l'indicazione strumentale e il numero d'opera. Esempi: Sonata in la minore per pianoforte K. 310; Quinta Sinfonia in do minore op. 67; Sonata quasi una fantasia in do minore Al chiaro di luna per pianoforte n. 14 op. 27 n. 2 (N.B.: i vari elementi del titolo seguono sempre l'ordine indicato in questi esempi). I sottotitoli e le arie vanno in corsivo con l'iniziale maiuscola quando non sono quelli originali. Esempi: *Patetica*, *La donna è mobile*;
- i nomi propri di aeroplani, navi e divisioni militari.

PAROLE STRANIERE

Le parole straniere entrate nell'uso comune vanno in tondo e non prendono la desinenza del plurale. Esempi: i film, i box, i pub e non: i films, i boxes, i pubs.

CONGIUNZIONI "E", "ED"

Si usa sempre "e" ma si usa "ed" davanti a parola che inizia con "e".

PREPOSIZIONI "A" "AD"

Si usa sempre "a" ma si usa "ad" soltanto davanti a parola che inizia con "a".

RIFERIMENTI A NOTE

I numeri di rimando alle note devono essere scritti come apici di seguito al termine cui si riferiscono se non vi sono segni di punteggiatura. In caso contrario, devono essere scritti come apici di seguito al segno di punteggiatura. Esempi:

coltura¹

coltura;¹

coltura,¹

coltura:¹

coltura.¹

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

I riferimenti bibliografici seguono lo standard APA (Autore, anno di pubblicazione). I riferimenti bibliografici nel testo comprendono entro la parentesi tonda il cognome dell'autore e l'anno di pubblicazione:

(Eugeni & Ruscio, 2004)

Nella bibliografia posta a fine articolo, invece:

Eugeni Franco, Ruscio Edoardo (2004). *Carlo Forti, allievo di Niccolò Fergola, ingegnere sul campo*. Teramo, Edilgrafital.

Lo standard APA prevede, nella bibliografia, l'indicazione del cognome dell'autore seguito dalla iniziale puntata del nome. Per evitare casi di omonimia (per es. Raffaele Bombelli, Rocco Bombelli) e per maggiore informazione nelle ricerche bibliografiche che si intendessero seguire, preferiamo indicare per esteso anche i nomi degli autori come nell'esempio sopra riportato..

Per maggiori dettagli si rimanda alle norme di citazioni bibliografiche APA consultabile nel sito dell'AFSU.