Periodico di Matematica (IV) Vol. III (1) giugno 2021, pp. 105-124

Spunti di analisi non standard

Oltre i numeri reali

Luciano Corso*

*Presidente della Federazione Italiana Mathesis - Direttore di «MatematicaMente»; e_mail: lcorso@iol.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.040

Sunto: *L'articolo introduce i principi di base dell'analisi non-standard partendo dal campo ordinato e completo dei numeri reali. La perdita della proprietà archimedea permette di acquisire maggiori capacità operative e una più fluida esposizione analitica.*

Parole Chiave: *infinitesimo, infinito, campo ordinato, infinitamente vicino.*

Abstract: *Starting from the set of real numbers as an ordered and complete field, we introduce the concepts that lead to a new ordered numeric field where the property of Archimedes is lost, but greater analytical clarity and operational capacity are acquired.*

Keywords: *infinitesimal, infinite, ordered field, infinitely close.*

1 - Introduzione

Per arrivare a una sistemazione elementare del campo dei numeri iperreali, occorre partire o dal campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o dal campo ordinato e completo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Qui scegliamo questo secondo approccio. Introdurremo, poi, delle novità che potranno essere utili sia per una speculazione diversa dal punto di vista dell'analisi matematica standard, sia per una migliore comprensione di alcuni aspetti operativi del suo sviluppo analitico.

Si parte quindi da $\mathbb{R}$ e dalle sue caratteristiche fondamentali. Sappiamo che è un campo ordinato e completo; cioè: $\{\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, sup\}$, dove *sup* sta per estremo superiore; quindi, per ogni insieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato superiormente, c'è un estremo superiore (indicato appunto con «*sup*») [1][2].

2 – Da $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$

Ampliamo ora il sostegno del campo dei numeri reali per costruire un nuovo campo numerico che comprenda gli infinite-simi, $\mathbb{R}$ e gli infiniti e che sia un'estensione propria di $\mathbb{R}$ che risulti coerente rispetto a $\mathcal{L}$, struttura logica del linguaggio del primo ordine [10]. Per far ciò, occorre precisare la nozione di infinitesimo come un nuovo oggetto matematico [3][4][5].

Esso viene definito così: Si afferma che ε è un infinitesimo se

$$|\varepsilon| < a\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{oppure} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{n}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \qquad (1)$$

dove $\mathbb{R}^+ = \{a | a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Come è noto, de-finire un nuovo oggetto non significa che poi esso esista. Quindi occorre affermare, come assioma, che in $\mathbb{R}$ esteso almeno un $\varepsilon > 0$ esiste. Si dichiara, inoltre, che «0» è infinitesimo e che è l'unico numero reale a esserlo.

Definiamo la relazione « $\approx$ », cioè "… *infinitamente vicino a* …": dati due oggetti di questo nuovo insieme che stiamo costruendo, x e y, essi si dicono «infinitamente vicini» e si scrive

$$x \approx y, \tag{2}$$

se $|x - y| = \varepsilon$.

Il doppio *tilde* presente in (2) è una relazione di equivalenza e, quindi, ha le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{llll} 1) \ \forall x, & x \approx x & \textit{riflessiva} & \\ 2) \ \forall x, y, & x \approx y \rightarrow y \approx x & \textit{simmetrica} & \\ 3) \ \forall x, y, z, & x \approx y \, , y \approx z \rightarrow x \approx z. & \textit{transitiva} & (3) \end{array}$$

Come conseguenza della definizione di infinitesimo, c'è la definizione di infinito (nota: per convenzione, per indicare i due nuovi oggetti matematici, useremo rispettivamente le lettere greche minuscole e maiuscole). Se infatti, (1) definisce un infinitesimo, allora per ogni ε non nullo la seguente espressione definisce l'infinito corrispondente:

$$\Lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad dove\ \varepsilon\ \text{è}\ un\ infinitesimo\ non\ nullo. \tag{4}$$

Questi nuovi oggetti sono "numeri" appartenenti a $\mathbb{R}$ esteso, come vedremo tra breve; conveniamo di assegnare il simbolo $^*\mathbb{R}$ a questo nuovo insieme numerico costituito da $\mathbb{R}$, da infinitesimi e infiniti. Ogni $x \in {}^*\mathbb{R}$ o è della forma

$$x = a + \varepsilon, \tag{5}$$

con $a \in \mathbb{R}$, o è infinito.
Diciamo che «a» è la parte standard di x e scriviamo: $\mathrm{st}(x) = a$.

Siano $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, si confermano le seguenti proprietà di $\mathrm{st}(.)$ [dimostrazione omessa]

$$\mathrm{st}(x+y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$$
$$\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$$
$$\mathrm{st}(-x) = -\mathrm{st}(x)$$
$$\mathrm{st}(y) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{st}(x/y) = \mathrm{st}(x)/\mathrm{st}(y)$$
$$x < y \Longrightarrow \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$$
$$\mathrm{st}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \sqrt[n]{\mathrm{st}(x)}.$$

Infine, la parte standard di un infinitesimo è 0.

3 – Campo degli Iperreali

Verifichiamo se con l'introduzione di questi nuovi elementi è possibile arrivare a un nuovo campo numerico ordinato che chiameremo campo dei numeri iperreali: $^*\{\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\}$, dove l'asterico che precede le graffe, *{ }, riguarda tutti gli elementi dell'insieme e indica che stiamo trattando un campo numerico estensione naturale di $\mathbb{R}$ [3][4] [5]. Si dimostra che se questo campo esiste, esso manca di una importante proprietà: la proprietà archimedea.

Ci sono molti modi di esprimere l'assioma di Archimede, co-me è noto; esso può essere enunciato così:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a < b,\ \exists n \in \mathbb{N}_{>0}: na > b. \tag{6}$$

Nel campo degli iperreali l'assioma (6) non vale più.
Il problema è creato dalla presenza degli infinitesimi. Se ε e τ sono due infinitesimi positivi tali che $\varepsilon < \tau$ non è sempre vero che $n\varepsilon > \tau$, per almeno un $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Infatti, nel caso in

cui $\varepsilon = \tau^2$ l'assioma non tiene. La perdita della proprietà archimedea corrisponde alla mancata completezza di $^*\mathbb{R}$.

Infatti, l'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente, ma non ammette «*sup*» [5].

Vogliamo comunque che il nuovo insieme sia un campo ordinato. Per far ciò iniziamo a estendere le usuali operazioni in $\mathbb{R}$, «+» e «·», e le operazioni che danno gli elementi inversi per ogni $x \in {}^*\mathbb{R}$ rispetto a «+» e «·» (in quest'ultimo caso lo zero è escluso). È utile la seguente classificazione per tipi dei numeri iperreali:

- «0» è infinitesimo e parte standard di tutti gli infinitesimi
- infinitesimo non nullo (= *inn*)
- finito non infinitesimo (= *fni*)
- infinito (= *I*).

Partendo da questa, si possono costruire le seguenti tabelle [4], dove il simbolo « ? » indica che le ipotesi non sono sufficienti per esprimere una valutazione precisa del risultato e «*n.a.*» sta per «non ammesso»:

Operazioni binarie sui tipi di iperreali

SOMMA				
+	0	*inn*	*fni*	*I*
0	0	*inn*	*fni*	*I*
inn	*inn*	*inn* o 0	*fni*	*I*
fni	*fni*	*fni*	*fni* o 0	*I*
I	*I*	*I*	*I*	?

MOLTIPLICAZIONE				
·	0	*inn*	*fni*	*I*
0	0	0	0	0
inn	0	*inn*	*inn*	?
fni	0	*inn*	*fni*	*I*

I	0	?	*I*	*I*

INVERSO RISPETTO ALLA SOMMA (OPPOSTO)				
x	0	*inn*	*fni*	*I*
$-x$	0	$-$*inn*	$-$*fni*	$-I$

Rispetto alla somma l'elemento neutro è lo «0» e rispetto al prodotto il neutro è «1»; non esiste l'inverso dello «0» rispetto alla moltiplicazione.
Poi, continuiamo a eseguire estensioni elementari (cioè che soddisfano tutti gli enunciati del linguaggio che sono veri quando vengono interpretati negli enti che si intendono estendere). In particolare, si otterranno le estensioni elementari degli insiemi, delle relazioni e delle funzioni, in una parola dell'intera struttura. L'assioma di estensione afferma che tra le tante possibili diverse estensioni elementari ne considereremo una a cui faremo sempre riferimento, che sarà detta estensione naturale.
Possiamo arrivare a confrontare due numeri iperreali.
Definizione: Dati 2 iperreali x e y, si dice che x è infinitamente più piccolo di y se $x/y \approx 0$. Se $x/y \approx 1$, allora si dice che x e y sono indistinguibili. Da $x/y \approx 1$, si ottiene

$$\frac{x}{y} - 1 \approx 0, \qquad \frac{x-y}{y} \approx 0, \qquad \frac{y-x}{x} \approx 0\,. \tag{7}$$

Per come stiamo costruendo $^*\mathbb{R}$, ogni numero reale esteso $x \in {}^*\mathbb{R}$ descrive un insieme numerico costituito da una parte standard «a» di x e da una nube di iperreali infinitamente vicini a x. Chiamiamo «monade» la parte standard e la sua nube di iperreali infinitamente vicini; formalmente scriviamo che se x è un numero iperreale, allora l'insieme degli iperreali infinitamente vicini a x forma con x una monade; cioè:

$$\text{mon}(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx x\}. \tag{8}$$

Si noti che il concetto di monade è diverso da quello di intorno di un punto, come è facilmente verificabile.

4 – Estensionalità e «transfert»

È necessario a questo punto fissare bene due passaggi chiave di tutta l'argomentazione che abbiamo fin qui fatta e anche di quella che si dovrà fare in seguito per il completamento organico elementare dell'analisi non standard. Teniamo presente che i due principi che enunceremo costituiscono l'essenza dell'analisi non standard.

La prima idea da fissare bene è l'*estensionalità*; la seconda è la *trasferibilità*.

Per *principio di estensione* dell'analisi non standard si intendono le seguenti proprietà:

- Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, e più in generale per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$, esiste un soprainsieme ${}^*A \supseteq A$, chiamato iperestensione o estensione non-standard di A.
  Se A è infinito, si richiede che l'estensione ${}^*A \supseteq A$ sia propria.
- Per ogni funzione reale $f: A \longrightarrow B$, dove $A, B \subseteq \mathbb{R}$, o dove più in generale $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^k$, esiste un'estensione ${}^*f: {}^*A \longrightarrow {}^*B$, chiamata iperestensione o estensione non-standard di f.

Questo principio ci permette di disporre di tutti gli oggetti matematici che abbiamo studiato in analisi standard, là dove l'analisi riguardi le proprietà elementari di questi oggetti.

Il nuovo campo $^*\mathbb{R}$ rispetta, in sostanza, tre precise condizioni:
(1) Le relazioni d'ordine su $\mathbb{R}$, per esempio $x < y$, sono sottoinsiemi delle relazioni d'ordine in $^*\mathbb{R}$, estensione naturale di $\mathbb{R}$.
(2) Gli infinitesimi, ε, e gli infiniti, Λ, diventano oggetti di $^*\mathbb{R}$ e si estendono loro tutte le proprietà di campo ordinato; diventando così, di fatto, numeri.
(3) Le funzioni f in n variabili in $\mathbb{R}$ con tutte le loro caratteristiche elementari e le regole che ne definiscono i contenuti sono un sottoinsieme delle regole che danno lo stesso significato all'estensione delle f , $^*f$ in $^*\mathbb{R}$, qualunque sia lo sviluppo diverso in $^*\mathbb{R}$ rispetto a $\mathbb{R}$ [3].
Estendere, in sostanza, significa che dopo aver ben definito le caratteristiche di $^*\mathbb{R}$ si estendono a esso tutte le strutture analitiche fondamentali su oggetti elementari che abbiamo trovato in $\mathbb{R}$; cioè, considerato un oggetto matematico A situato in una struttura di $\mathbb{R}$ esso ha una sua estensione naturale $^*A$ in una struttura di $^*\mathbb{R}$. L'estensione non è univoca e, a parità di oggetti e strutture matematiche di partenza, possono verificarsi, per estensione, diversi risultati finali.
Per esempio, per il principio di estensione le funzioni trigonometriche e le funzioni trascendentali in $\mathbb{R}$ sono estendibili in $^*\mathbb{R}$.

La seconda idea da fissare è quella del «*transfert*» o trasferibilità. Il principio afferma che ogni enunciato esprimibile nel linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine adatto ad esprimere le proprietà dei numeri reali (combinazioni di equazioni, disuguaglianze, ecc. tra termini reali) è valido per i numeri reali se e solo se è valido anche quando è interpretato nella struttura degli iperreali. L'idea di questo principio risale a Leibniz che, però, non riuscì a darne una formalizzazione soddisfacente. Oggi, dopo gli sviluppi moderni della logica matematica, è possibile definire correttamente il concetto.

Formalmente, *per principio di transfert o di Leibniz* dell'analisi non-standard si intende la seguente proprietà:

Consideriamo n insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ e k funzioni $f_1, f_2, \dots, f_k$. Sia data una proprietà elementare P e supponiamo che essa sia valida per gli $A_i\ \forall i = 1, \dots n$, e per le $f_j\ \forall j = 1, \dots k$, allora essa è valida per $A_i\ \forall i = 1, \dots n$, e per le $f_j\ \forall j = 1, \dots k$, se e solo se P è valida per ${}^*A_i\ \forall i = 1, \dots n$, e per le ${}^*f_j\ \forall j = 1, \dots k$, in ambiente non-standard. Si ha:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n, f_1, f_2, \dots, f_k) \Leftrightarrow P({}^*A_1, {}^*A_2, \dots, {}^*A_n, {}^*f_1, {}^*f_2, \dots, {}^*f_k).$$

Ciò comporta che una funzione reale e la sua estensione iperreale naturale hanno esattamente le stesse proprietà esprimibili nel linguaggio $\mathcal{L}$ adatto ai reali. In questo modo viene definita con precisione la richiesta di Leibniz che i nuovi numeri (quelli comprendenti anche gli infinitesimi e gli infiniti) avrebbero dovuto avere esattamente tutte le stesse proprietà dei numeri allora accettati (sostanzialmente i reali), specificando che si tratta delle proprietà esprimibili nel linguaggio $\mathcal{L}$ [3][4][10]. Per un approccio più organico di questi due concetti si veda anche [10] e [12].

Abbiamo così esaurito la sistemazione della struttura del campo ordinato degli iperreali. La loro esistenza la possiamo accettare per costruzione. Per quanto riguarda l'unicità, c'è una variante rispetto a $\mathbb{R}$. Il campo: ${}^*\{\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\}$ non è unico [prova omessa].

5 – Definizione di limite in NSA

Premettiamo che in analisi non-standard la determinazione di un limite si riconduce sostanzialmente al calcolo di valori di funzioni per tutti gli iperreali infinitamente vicini a dove si vuole calcolare il limite. Quindi, in base alle proprietà degli iperreali, è possibile con coerenza e rigore calcolare i limiti classici di una funzione reale di variabile reale. Dato il concetto fondamentale per l'analisi standard che stiamo trattando, è tuttavia opportuno un confronto tra la definizione di limite in analisi standard (che qui diamo per nota) e quella data in analisi non-standard.

Si dice che L è il limite della funzione $f(x)$ per x tendente a $c \in \mathbb{R}$ se si verifica che

$$\forall x, (x \approx c \land x \neq c) \rightarrow {}^*f(x) \approx L. \qquad (9)$$

Se non c'è alcun L che soddisfa la definizione, diciamo che il limite non esiste. La sintassi è identica a quella classica:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L\,,$$

ma la semantica cambia decisamente. In analisi non-standard il calcolo di un limite passa dalla determinazione della parte standard della funzione nei punti iperreali infinitamente vicini a c, ma diversi da c, ricordando che gli infiniti non hanno parte standard.

5.1 Esempio. A tale proposito consideriamo un limite classico e confrontiamo il diverso approccio alla verifica dell'enunciato. Si verifichi che

$$\lim_{\theta \to 0}[\sin(\theta)/\theta] = 1.$$

In *analisi standard*, il controllo della tesi si fa partendo dalla geometria (Figura 1); confrontando le aree OQQ', OQP', OPP' si trova

$$\frac{1}{2}\sin\theta \cdot \cos\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

e dividendo tutto per $\frac{1}{2} \cdot \sin\theta$ si ottiene:

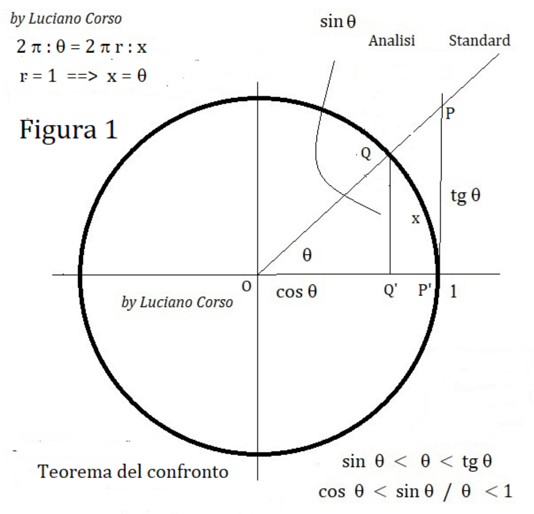
$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

e poi si arriva a

$$\cos\theta < \sin(\theta)/\theta < \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Si passa quindi al limite per $\theta \to 0$, e si deve tener conto che la dimostrazione del $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ impone la complicata procedura dell'ε, δ. Poi, si deve applicare il teorema del confronto dei limiti di funzioni e si ha:

$$\lim_{\theta\to 0}\cos(\theta) \le \lim_{\theta\to 0}(\sin\theta/\theta) \le 1.$$

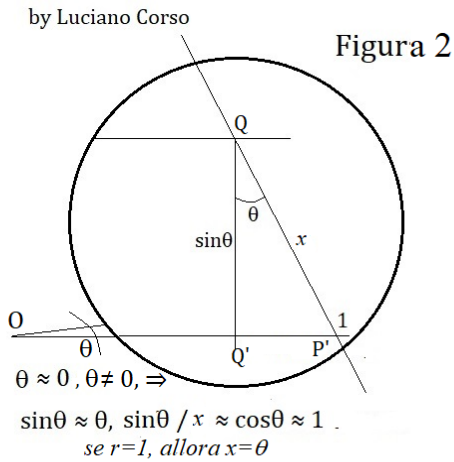


Poiché $\lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 1$, allora $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

In *analisi non-standard*, la verifica si può effettuare così (si veda la figura 2). Dal centro O del cerchio, si fanno uscire 2 raggi infinitamente vicini OP' e OQ che, nella zona del punto P' fortemente ingrandita, appaiono nettamente separati, ma le loro intersezioni P' e Q con la circonferenza sono di fatto infinitamente vicine. θ è l'angolo tra OP', asse delle ascisse, e OQ. L'arco x della circonferenza, quando il raggio r = 1, ha lunghezza uguale a θ. Nell'ingrandimento appare che x è la misura del tratto infinitesimo $\widehat{\mathrm{QP}'}$ della circonferenza che è infinitamente vicino alla misura della sua corda |QP'|; $\sin\theta$ è la misura del tratto infinitesimale |QQ'|; così,

$$(\theta \approx 0, \theta \neq 0) \Rightarrow \sin\theta \approx \theta , [\sin\theta / \theta \approx \cos\theta], [\cos\theta \approx 1].$$

Da cui l'asserzione è vera. La dimostrazione non-standard sostituisce al teorema del confronto la più immediata transitività della relazione "$\approx$".



Attenzione! Il cerchio è la lente di un microscopio ideale e non la circonferenza goniometrica di figura 1. I 2 raggi OP' e OQ di figura 1 sono stati volutamente separati anche se sono quasi coincidenti. Il segmento Q'P' è un infinitesimo di ordine superiore e l'immagine andrebbe vista con un microscopio nel microscopio.

Facciamo altri notevoli esempi.

5.2 Esempio. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} .$$

In base alla definizione (9) di limite, $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Per $x < 0$, il limite è un infinito negativo; per $x > 0$, il limite è un infinito positivo. Sappiamo che, in analisi standard, perché il limite esista, il limite destro e quello sinistro devono esistere ed essere uguali; quindi in analisi standard questo limite non esiste. In analisi non-standard, il limite per $x \to 0$ di questa funzione non esiste in quanto si può osservare che l'estensione non-standard di $1/x$ calcolata in un infinitesimo negativo dà un infinito negativo, mentre se la stessa funzione viene calcolata in un infinitesimo positivo dà come risultato un infinito positivo. Quindi il limite non esiste.

5.3 Esempio. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ .$$

In questo caso $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Però, per $x < 0$ il limite è un infinito positivo e per $x > 0$ il limite è un infinito positivo. Perciò in analisi standard il limite esiste ed è $+\infty$. Analogamente, in analisi non-standard il limite esiste in quanto $\forall x \approx 0, 1/x^2$ è un infinito positivo.

5.4 Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \ .$$

Anche in questo caso $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Per $x < 0$, il limite è -1; mentre per $x > 0$ il limite è $+1$. Poiché i due limiti non coincidono, si conclude che il limite non esiste.

5.5 Esempio. Facciamo un altro esempio di calcolo del limite. Sia *f*(*x*) una funzione così definita $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.
Si calcoli il

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$$

La variabile *x* è della forma $1/\varepsilon = \Lambda$, dove Λ è un infinito positivo. Si ha:

$$\mathrm{st}\left[\frac{\left(\sqrt{\Lambda+1} - \sqrt{\Lambda-1}\right)\left(\sqrt{\Lambda+1} + \sqrt{\Lambda-1}\right)}{\left(\sqrt{\Lambda+1} + \sqrt{\Lambda-1}\right)}\right] =$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{\Lambda + 1 - \Lambda + 1}{\left(\sqrt{\Lambda + 1} + \sqrt{\Lambda - 1}\right)}\right) = 0.$$

Allo scopo di comprendere meglio il miglioramento interpretativo dovuto all'uso degli iperreali, invece dei reali, faremo ora una comparazione tra il metodo dell'analisi standard e quello non-standard nello studio della continuità di una funzione in un punto. Con riferimento alla continuità di una funzione in un punto [4], il vantaggio dell'uso dell'analisi non-standard è evidente. L'esempio (5.6) sarà illuminante.
Per l'*analisi standard*, una funzione f definita in un insieme **X** di $\mathbb{R}$ si dice continua in un punto x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{10}$$

5.6 Esempio: Per rendersi conto della difficoltà operativa di questa espressione, proviamo a verificare se la funzione $f(x) = x^2$ è continua in un punto x_0 del suo dominio $\mathbf{X} = \mathbb{R}$. Seguiamo un approccio meccanico e privo di espedienti. Si parte cercando di verificare se esiste un intorno $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 che rispetti le soluzioni della disequazione

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Sappiamo che, in analisi standard, sia ε sia δ sono quantità finite, per quanto esse possano essere arbitrariamente piccole. Si procede così (con $x_0 \neq 0$):

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < +\varepsilon,$$

$$\begin{cases} x^2 - x_0^2 < \varepsilon \\ x^2 - x_0^2 > -\varepsilon. \end{cases}$$

Senza perdita di generalità assumiamo $\varepsilon < x_0^2$ e, in tal caso, il sistema è soddisfatto per

$$x \in \left(-\sqrt{x_0^2+\varepsilon}, -\sqrt{x_0^2-\varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{x_0^2-\varepsilon}, \sqrt{x_0^2+\varepsilon}\right);$$

sicché $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
con $\delta = \min\left\{\sqrt{x_0^2+\varepsilon} - |x_0|,\ |x_0| - \sqrt{x_0^2-\varepsilon}\right\}$, è l'intorno di x_0 cercato. Se $x_0 = 0$, non ci sono difficoltà e si determina facilmente l'intervallo $I = (-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon})$. In ogni caso ciò conferma l'esistenza di almeno un δ, per ogni ε.

In *analisi non-standard*, il concetto di continuità di una funzione in un punto si dimostra con una procedura più semplice, con un vantaggio sia sul piano formale, sia su quello operativo. Convenendo di indicare con f (senza asterisco) anche l'estensione naturale di una funzione reale f all'ambiente $^*\mathbf{R}$, diciamo che f è continua nel punto reale x_0 se

$$\forall x \text{ iperreale, } x \approx x_0 \text{ implica } f(x) \approx f(x_0)\,. \tag{11}$$

Allora, poiché i numeri iperreali infinitamente vicini a x_0 si scri- vono nella forma $x = x_0 + \varepsilon$, dove ε è un infinitesimo, la conti-nuità di $f(x) = x^2$ in x_0 si dimostra così

$$f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = (x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2 = \varepsilon\,(2x_0 + \varepsilon) \approx 0,$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il prodotto di un infinitesimo per una quantità finita è un infinitesimo. Pertanto, come si voleva dimostrare, $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(x_0)$ se x è infinitamente vicino a x_0.

Al di là degli aspetti tecnici delle procedure di calcolo, rimane il fatto che la definizione *standard* di continuità impone la fatica (non sempre sopportabile) di esibire un δ esplicito (finito!), mentre la definizione *non-standard* richiede solo di riconoscere che una certa differenza è un infinitesimo.

6 – Microscopi, telescopi e grand'angoli

La didattica dell'analisi non-standard usa anche strumenti visivi di notevole importanza per aiutare l'intuizione degli studenti. I supporti visivi che evidenziano per mezzo di immagini ciò che accade nell'infinitamente piccolo e nell'infinitamente grande sono microscopi e telescopi ideali a infiniti ingrandimenti. Il loro uso impone molta cautela e tuttavia costituisce un utile mezzo per chiarire idee che possono essere spesso fraintese. Le figure 2 e 3 già dimostrano come funzio-

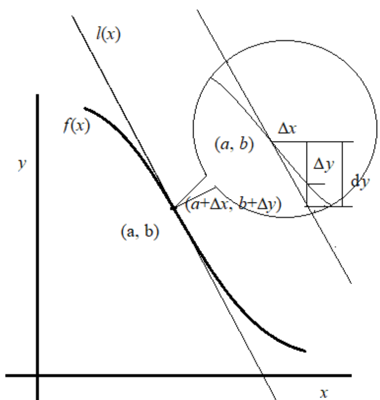


Figura 3

nano i microscopi. Facciamo qualche ulteriore esempio nelle figure 4 e 5. La figura 3 presenta l'ingrandimento di $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ e del differenziale $dy = f'(a)dx$, dove $dx = \Delta x$. La retta $l(x)$ è tangente nel punto (a, b) alla curva di equazione $y = f(x)$.

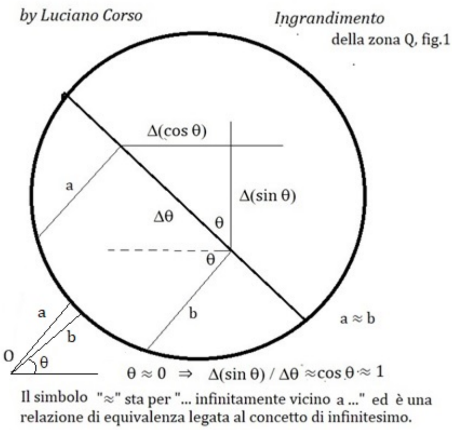


Figura 4

La figura 4 rappresenta un ingrandimento fatto con un microscopio ideale. A partire dalla figura 1, con un microscopio a infiniti ingrandimenti, si riesce a definire bene ciò che appare vicino al punto Q di figura 1. Si nota che i due raggi *a* e *b* risultano paralleli nell'ingrandimento dell'infinitamente piccolo.

Il grafico delle serie a segno alterno

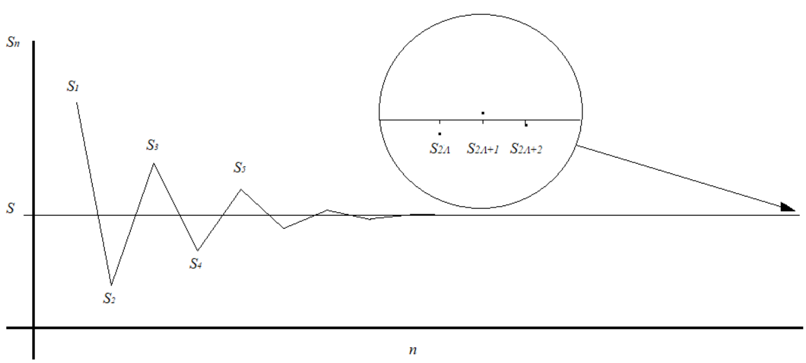


Figura 5

Figura 5. Siamo in presenza di una serie a termini di segno alterno. Il grafico mostra un ingrandimento telescopico della serie in presenza di indici Λ, per tutti i Λ interi infinitamente grandi e positivi.

Bibliografia

[1] Apostol Tom M. (1985), Calcolo – vol. I – Analisi 1, ed. Boringhieri, Torino.

[2] Rudin W. (1991), Analisi Matematica, ed. McGraw-Hill, Milano.

[3] Keisler H. J. (1982), Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach, Second Edition, Copyright 2000 by H. Jerome Keisler, Revised 2012, www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-08-18-20.pdf

[4] A cura del gruppo NSA di Verona (2017), MatematicaMente ISSN 2037-6367, nn. 205, 207, 210, 211, 216, 217, Verona.

[5] Di Nasso M., *Numeri infinitesimi e l'analisi non standard* http://www.dm.unipi.it/~ dinasso.

[6] Ferro R. (2015), *Ritorno all'analisi infinitesimale*, Atti del convegno di Verona - V Giornata di Studio – Mathesis sez. di Verona - UNIVR– ed. Matematicamente.it, Lecce.

[7] Goldoni G. (2015), *Strumenti ottici per un approccio ad alcuni teoremi di analisi*, Atti del convegno di Verona - V Giornata di Studio – Mathesis sez. di Verona - UNIVR– ed. Matematicamente.it, Lecce.

[8] Benci V. (2015), *Infinitesimi in natura*, Atti del convegno di Venezia 30-09-2017, VII Giornata nazionale di Analisi non Standard, Mathesis sez. Venezia, ed. Matematicamente.it, Lecce.

[9] Benci V. (2019), *L'infinito in Matematica tra Scienza e Filosofia*, in MatematicaMente nn. 251 e 253, Verona.

[10] Robinson A. (2013), Analisi Non Standard (trad. Franco Bedini), Aracne editrice srl, Roma, ISBN 978-88-548-6427-6.

[11] A cura di Zambelli D. e Stecca B., Autori vari (2019), Atti della IX Giornata nazionale di NSA, Verona, ISBN 9791220064477.l

[12] Di Nasso M. (2019), *I fondamenti dell'Analisi Non Standard*, Atti della IX Giornata nazionale di NSA, Verona, 5 - 10 - 2019. ISBN 9791220064477.l

[13] Ferro R. (2019), *L'analisi non standard e nozioni di infinito in matematica*, Educare alla razionalità. Tra logica e didattica della matematica, pagg 91–123, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.