Periodico di Matematica (IV) Vol. III (1) giugno 2021, pp. 125-134

Decisione per integrali indefiniti

Uno strano caso di integrale "quasi" non calcolabile elementarmente

Ferdinando Casolaro*

*Mathesis Napoli "Aldo Morelli"; ferdinando.casolaro@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.041

Sunto: *Utilizzando un teorema di Liouville su problemi di decisioni per integrali indefiniti (Casolaro 1991), si propone una dimostrazione della non integrabilità per via elementare della funzione di Gauss e si riporta un particolare esempio di integrale che, in generale, non è calcolabile elementarmente ma, con la variazione di una semplice costante additiva ad uno dei fattori dell'espressione analitica, si riscontra un unico caso di esistenza della primitiva.*

Parole chiave: *Integrazione, decisione, esponenziali, logaritmi.*

Abstract: *Using a Liouville theorem on decision problems for indefinite integrals (Casolaro 1991), a proof of the non-integrability of the Gauss function is proposed and we report a particular example of an integral which, in general, cannot be calculated elementarily but, with the variation of a simple additive constant to one of the factors of the analytic expression, we find a only case of existence of the primitive.*

Keywords: *Integration, decision, exponentials, logarithms.*

1 - Introduzione

Nell'ultimo decennio del secolo scorso, sono stati pubblicati alcuni risultati relativi a problemi di decisione per integrali indefiniti (Casolaro 1991, Casolaro 1993), utilizzando un algoritmo che consente di decidere a priori se la primitiva di una funzione data sia esprimibile mediante funzioni elementari. Tale problema - insolubile per integrali qualsiasi - aveva caratterizzato gli studi di alcuni matematici nel XIX secolo.

In particolare, il francese Joseph Liouville (1809-1882) aveva enunciato due teoremi che, relativamente all'integrabilità di alcune classi di funzioni, assicurano l'esistenza di primitive delle funzioni razionali espresse analiticamente da funzioni elementari, a meno di problemi operativi legati alla scomposizione del polinomio al denominatore (Casolaro 1999).

Successivamente, nella seconda metà del XX secolo, il matematico statunitense Henry Risch1 ha sviluppato due algoritmi (il primo nel 1968, il secondo nel 1976) che permettono di decidere per le classi di funzioni del tipo $f\left[x, e^{R(x)}, \lg S(x)\right]$, con R(x) e S(x) funzioni razionali della variabile x (Casolaro 1991).

Con l'utilizzo dell'algoritmo di Risch e l'applicazione delle formule di Eulero,

$$sen\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \qquad tg\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

che esprimono le funzioni goniometriche mediante esponenziali nel campo complesso, l'autore di questa nota ha am-

1 Robert Henry Risch (1939) è un matematico americano che ha lavorato sull'algebra informatica ed è noto per i risultati sulle proprietà algebriche delle funzioni elementari e per il suo lavoro sull'integrazione simbolica da cui nasce l'algoritmo di Risch.

pliato l'applicazione dell'algoritmo di Risch anche a funzioni che si presentano sotto forma razionale o irrazionale di sen x, cos x e tg x (Casolaro 1993).

Per uno studio più esaustivo ed anche ordinato delle questioni in oggetto, è opportuno classificare le funzioni mediante particolari strutture, i campi differenziali (Pessa E., Rizzi B. 1990), per i cui dettagli rimandiamo alla bibliografia (Casolaro, Iorio, Prosperi 2009).

Ai fini di questo lavoro, ci limiteremo ad enunciare solo il primo teorema di Liouville, rimandando alla bibliografia gli ulteriori approfondimenti del tema in oggetto.

2 - Interpretazione del 1° teorema di Liouville

Primo teorema di Liouville - Siano g(x) e h(x) funzioni razionali, con g(x) non riducibile ad una costante[2]. Allora se

$$\int e^{g(x)}\, h(x)\, dx$$

è esprimibile mediante funzioni elementari, si deve avere:

$$\int e^{g(x)}\, h(x)\, dx = e^{g(x)}\, r(x) \qquad (2.1)$$

dove r(x) è ancora una funzione razionale di x.

Una significativa conseguenza di questo teorema si può formulare come segue:

Date due funzioni razionali g(x) ed h(x) soddisfacenti alle ipotesi del primo teorema di Liouville, l'integrale al primo membro della (2.1) è esprimibile mediante funzioni elementari

[2] Se g(x) = costante, il problema si riduce alla semplice integrazione di una funzione razionale.

se e solo se esistono due polinomi p(x) e q(x) $\left[con\ r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\right]$,

primi tra loro, tali da soddisfare la relazione:

$$p(x)\,q'(x) = \left[p'(x) + g'(x)\,p(x) - h(x)\,q(x)\right]q(x) \qquad (2.2)$$

Dim. - Se l'integrale $\int e^{g(x)}\,h(x)\,dx$ è esprimibile mediante funzioni elementari, per il primo teorema di Liouville, deve esistere una funzione razionale $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tale che:

$$\int e^{g(x)}\,h(x)\,dx = e^{g(x)}\,\frac{p(x)}{q(x)} \qquad (2.3)$$

con *p(x)* e *q(x)* polinomi sul campo complesso.

Derivando ambo i membri della (2.3) si ha:

$$e^{g(x)}h(x) = e^{g(x)}g'(x)\,\frac{p(x)}{q(x)} + e^{g(x)}\,\frac{p'(x)q(x) - q'(x)\,p(x)}{q^2(x)},$$

cioè

$$h(x)\,q^2(x) = g'(x)\,p(x)\,q(x) + p'(x)\,q(x) - q'(x)\,p(x)$$

da cui la (2.2).

$$p(x)\,q'(x) = \left[p'(x) + g'(x)\,p(x) - h(x)\,q(x)\right]q(x)$$

3 - Applicazione del teorema di Liouville alla funzione gaussiana

È ben noto, dalla teoria del calcolo delle probabilità, che la distribuzione normale, è rappresentata dall'integrale definito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (3.1)

noto come "integrale di Gauss" e la sua rappresentazione grafica è detta "gaussiana", in quanto calcolato per la prima volta da Gauss.

Il risultato della (3.1) si ottiene dallo sviluppo in serie della funzione integranda in quanto mai è stato possibile calcolare la primitiva.

Utilizzando il teorema di Liouville con l'espressione (2.2), vogliamo dimostrare che non esiste alcuna primitiva esprimibile elementarmente della $f(x)=e^{-x^2}$.

Teorema - L'integrale di Gauss

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

non è esprimibile mediante funzioni elementari.

Dim. – Con riferimento alla (2.3), applicando la (2.2)

$$p(x)\,q'(x)=\left[p'(x)+g'(x)\,p(x)-h(x)\,q(x)\right]q(x)$$

con $g(x)=-x^2,\quad h(x)=1$, si ha:

$$p(x)\,q'(x)=p'(x)q(x)-2x\,p(x)q(x)-q^2(x) \qquad (3.2)$$

Sia m il grado di p(x) ed r il grado di q(x), con m ≥ 0, r ≥ 0; ne consegue che i gradi dei tre polinomi al secondo membro della (3.2) sono rispettivamente:

m+r-1; m+r+1; 2r.

Siccome il grado del polinomio al primo membro è m+r-1, uguale al grado del primo addendo del polinomio al secondo membro ma minore del grado del secondo addendo, per il principio di identità dei polinomi, il termine di ordine massimo del secondo polinomio al secondo membro deve annullarsi col termine di ordine massimo del terzo polinomio; quindi, deve valere l'uguaglianza:

m+r+1 = 2r

cioè:

m+1 = r. (3.3)

Poiché la (3.3) vale per qualunque scelta di r, varrà in particolare per r = 1.

Ciò comporta che $p(x)$ e $q(x)$ abbiano la forma:

$p(x) = c;$ $q(x) = ax+b$ (3.4)

con a, c, entrambi non nulli per ipotesi.

Pertanto, il primo membro della (3.2), $p(x)q'(x)$, deve essere di grado zero, cioè una costante.

Sostituendo le (3.4) nelle (3.2) si ha:

$$c \cdot a = 0 \cdot (ax+b) - 2x \cdot c(ax+b) - (ax+b)^2$$

da cui:

$$-2acx^2 - 2bcx - a^2x^2 - 2abx - b^2 = c \cdot a$$

$$a(2c+a)x^2 + 2b(c+a)x + b^2 + c \cdot a = 0$$

che, per il principio di identità dei polinomi, impone:

$$\begin{cases} 2c + a = 0 \\ 2b(c+a) = 0 \\ b^2 + c \cdot a = 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

Poiché a e c sono entrambi non nulli, dalla terza equazione si evince che anche b risulta essere diverso da zero, per cui dalle prime due equazioni si ha contemporaneamente

$$\begin{cases} a = -2c \\ a = -c \end{cases}$$

che, da c ≠ 0, è un assurdo da cui si evince che l'integrale di Gauss non è esprimibile mediante funzioni elementari.

4 - Lo "∞-1". Il quasi-sempre "non integrabile"

La (2.2) ci permette di decidere sull'integrabilità di classi di funzioni espresse da integrali della forma $\int e^{g(x)} h(x)\,dx$.

Di seguito si presenta un esempio di funzione - in generale non integrabile elementarmente - in cui variando solo una costante additiva in uno dei fattori dell'espressione analitica si ottiene l'integrale di una funzione esprimibile mediante funzioni elementari.

Teorema - L'integrale $\int \left(\frac{x-n}{x} \right)^2 e^x \, dx$ è esprimibile mediante funzioni elementari solo nel caso in cui $n = 2$ (oltre, ovviamente, al caso banale di $n = 0$).

Dim. - Con $g(x) = x,\ h(x) = \left(\frac{x-n}{x} \right)^2$ nella (2.1), la (2.2) diventa:

$$p(x)\,q'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q(x) - \left(\frac{x-n}{x} \right)^2 q^2(x)$$

cioè:

$$x^2 p(x)\,q'(x) = x^2 p'(x)q(x) + x^2 p(x)q(x) - (x-n)^2 q^2(x) \qquad (4.1)$$

Sia m il grado di p(x) ed r il grado di q(x); ne consegue che i gradi dei tre polinomi al secondo membro della (2.2) sono rispettivamente:

m+r+1; *m+r+2;* *2r+2.*

Siccome il grado del polinomio al primo membro è m+r+1, uguale al grado del primo addendo del polinomio al secondo membro ma minore del grado del secondo addendo, per il principio di identità dei polinomi, il termine di ordine massimo del secondo polinomio al secondo membro deve annullarsi col termine di ordine massimo del terzo polinomio. Quindi, deve valere l'uguaglianza:

$$m+r+2 = 2r+2 \qquad (4.2)$$

da cui:

$m = r, \qquad \forall m \in N; \qquad \forall r \in N$.

Poiché la (4.2) vale per qualunque scelta di m ed r, varrà particolarmente per $m = r = 1$. Ciò comporta che $p(x)$ e $q(x)$ abbiano la forma:

$p(x) = ax+b; \qquad q(x) = cx+d \qquad (4.3)$

con a, c, entrambi non nulli per ipotesi.

Sostituendo i valori (4.3) nella (2.2), risulta:

$$\left(a - c^2\right)x^4 + \left(ad + bc - 2cd + 2c^2n\right)x^3 + \left(ad + bd - d^2 + 4cdn - c^2n^2\right) +$$
$$+ \left(2nd^2 - 2n^2cd\right)x - d^2n^2 \ = \ bcx^2$$

Per il principio di identità dei polinomi, deve dunque risultare:

$$\begin{cases} ac - c^2 = 0 \\ ad + bc - 2cd + 2c^2n = 0 \\ ad + bd - d^2 + 4cdn - c^2n^2 = bc \\ 2nd^2 - 2n^2cd = 0 \\ d^2n^2 = 0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

Dalla prima equazione $c(a-c) = 0$, con $c \neq 0$, si ha: $a = c$; dalla quinta equazione, essendo $n \neq 0$[3], risulta $d = 0$. Pertanto, le prime tre equazioni del sistema (3.4) si riducono a:

$$\begin{cases} a = c \\ bc + 2c^2n = 0 \\ -c^2n^2 = bc \end{cases} \qquad (4.5)$$

da cui risulta:

$$\begin{cases} b = -2nc \\ b = -n^2c \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 2n = n^2$$

relazione verificata solo per $n = 2$.

[3] Se n = 0, si ha il banale integrale della funzione esponenziale

Precisamente la (2.2), che è condizione necessaria e sufficiente affinché sia calcolabile elementarmente l'integrale $\int\left(\frac{x-n}{x}\right)^2 e^x\,dx$, è verificata solo per n = 2.

Del resto, per n = 2, dalla (4.5) si ha:

$$\begin{cases} a = c \\ b = -4c \end{cases}$$

che, con d = 0, a meno di una costante moltiplicativa che non influisce sul calcolo della primitiva, ci dà i valori di a, b, c, d della (4.3).

Per semplicità, ponendo $c = a = 1$, quindi

$p(x) = x - 4;$ $\qquad\qquad$ $q(x) = x$

si vede immediatamente che, con $h(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$, è verificata la (2.2) con l'identità:

$$x - 4 = \left[1 + 1\cdot(x-4) - \frac{(x-2)^2}{x^2}\cdot x\right]\cdot x$$

Sostituendo nella (2.3) [equivalente alla (2.1)]

$$h(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2, \qquad\qquad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-4}{x}$$

risulta:

$$\int\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^x dx = e^x\,\frac{x-4}{x} \qquad (4.6)$$

con il secondo membro primitiva della funzione integranda, a meno di una costante additiva.

Infatti, derivando il secondo membro della (4.6), si verifica il risultato:

$$\frac{d}{dx}e^x\,\frac{x-4}{x} = e^x\,\frac{x-4}{x} + e^x\,\frac{x-x+4}{x^2} = e^x\left[\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right] = e^x\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$$

che è la funzione integranda al primo membro.

In questo procedimento, l'applicazione del primo teorema di Liouville ci ha permesso di calcolare addirittura la primitiva della funzione. In generale ciò non è possibile, in quanto procedimenti basati su tale teorema non hanno natura costruttiva, nel senso che non consentono di determinare la forma esplicita della funzione. In alcuni casi generalizzati, però, gli algoritmi di Risch permettono di determinare la primitiva della funzione integranda nel caso in cui esiste. Di ciò non ci occuperemo, in quanto esula dalla trattazione elementare di questo lavoro.

Bibliografia

PESSA E., RIZZI B. (1990). "L'integrazione indefinita delle funzioni trascendenti elementari". «*Periodico di Matematiche*» n. 2-1990. Pagine 3-32.

CASOLARO Ferdinando (1991). "Decisione per integrali indefiniti; funzioni non integrabili". *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Matematica moderna ed insegnamento"* - Cattolica 22-26 aprile 1991 - pagine 68-86.

CASOLARO Ferdinando (1993), "Il problema dell'integrazione indefinita". «*Ratio Mathematica*» n. 4, 1992. Pp. 29-38.

CASOLARO Ferdinando (1999), "*Integrali*. *300 esercizi sull'integrazione indefinita*. Ed. Masson 1997, ristampa Zanichelli 1999, pp. 219- 232.

CASOLARO F., IORIO L., PROSPERI R.(2009) "*Le applicazioni della matematica da Eulero ad oggi, nel III centenario della nascita di Leonhard Euler (1707 - 2007)*". Ed. Rotas - Chieti, 2009; pag.117-127.