Periodico di Matematica (IV) Vol. III (1) giugno 2021, pp. 7-24

La geometria proiettiva ed affine I : la via assiomatica e i piani finiti

Franco Eugeni*

*Già Professore Ordinario di Filosofia della Scienza. Presidente dell'AFSU

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.036

Sunto: Iniziamo una serie di alcuni lavori divulgativi sulle basi della geometria, dei quali questo lavoro è il primo. Usualmente si presentano gli spazi proiettivi definiti sul campo reale o al più su un generico campo. Gli spazi affini si derivano da questi o si definiscono in modo indipendente. La via assiomatica conduce ad una visione più generale, seguendo quell'indirizzo che appare nell'opera fondamentale di Beniamino Segre: Lectures on modern geometry, nella quale viene introdotto il concetto di spazio grafico. In dimensione almeno tre, la nozione di spazio grafico (irriducibile) equivale, per isomorfismo, a quella di spazio proiettivo su un campo. In dimensione due, le cose sono ben differenti, l'assiomatica generale ridotta a dimensione due presenta una anomalia, oltre ai piani proiettivi costruiti su un campo, ve ne sono altri, che appaiono non coordinatizzabili su un campo. Gioca a riguardo un ruolo essenziale la validità o meno della cosiddetta "configurazione di Desargues". La validità della configurazione assicura che i relativi piani sono isomorfi ai piani su un campo, detti a riguardo "desarguesiani". Esistono tuttavia piani non desarguesiani. Si completa l'esposizione presentando il caso dei piani finiti, per i quali nascono problematiche di enorme interesse.

***Parole Chiave*: :** *Assiomi – Spazi proiettivi su un campo* – Campi di Galois – *Teorema di Desargues –piani non desarguesiani.*

Abstract: *The purpose of this first article is to construct a series of some divulgative paper on the basis of geometry. Usually the projective spaces is defined on the real field or at most on a generic field. Affine spaces are derived* *from these or are defined independently. The Assiomatic system leads to a more general vision, following that direction that appears in the fundamental work of Beniamino Segre: Lectures on modern geometry, in which the concept of graphic space is introduced. In at least three dimension, the notion of (irreducible) graphic space is equivalent, by isomorphism, to that of projective space on a field. In two dimension, the questions are very different, the general axiomatics of dimension two presents an anomaly, in addition to the projective planes built on a field, there are other types of planes, which appear not to be coordinated on a field. In this regard, the validity or not of the so-called "Desargues configuration" plays an essential role. The validity of the configuration ensures that the related planes are isomorphic to the planes over a field, called "desarguesian". However, there are non-Desarguesian plans. The paper is completed by presenting the case of finite planes, for which many problems of enormous interest arise.*

Keywords: *axioms, projective spaces over a field – Desargues Theorem – non desarguesian planes.*

1 - Gli spazi proiettivi grafici

Sia **S** un insieme di elementi detti *punti*. Indichiamo con $\mathscr{B}$ un insieme di famiglie di parti di **S** denotate con:

$$\mathscr{B} = \{ \mathscr{B}_{-1}, \mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n \}$$

dove ciascuna famiglia $\mathscr{B}_d$ è detta la famiglia di sottospazi di dimensione d. La coppia **(S , $\mathscr{B}$)** è detta una *struttura geometrica.*

Una struttura geometrica **(S , $\mathscr{B}$)** si chiama uno *spazio proiettivo grafico* [1]di dimensione n (n intero con n≥2) se per essa valgono i seguenti assiomi:

I.- $\mathscr{B}_{-1} = \emptyset$, $\mathscr{B}_0$ è l'insieme i cui elementi sono quelli di S, pensati come sottospazi di dimensione 0, gli elementi di $\mathscr{B}_1$ sono chiamati *rette* gli elementi di $\mathscr{B}_2$ sono chiamati *pian*i, gli

[1]Cfr. Segre B.(1961) Chap.14, n.105. Nel volume tali strutture sono denominate solo spazi grafici, Cf. Ceccherini P.V., (1967).

elementi di $\mathscr{B}_d$ sono chiamati *sottospazi di dimensione* d , e gli elementi di $\mathscr{B}_{n-1}$ sono chiamati *iperpiani.*

II. Se il sottospazio $S_h \in \mathscr{B}_h$ è contenuto in $S_k \in \mathscr{B}_k$ allora è $h \leq k$, eguaglianza valendo se e solo se $S_h = S_k$.

III.- L'intersezione insiemistica $S_h \cap S_k$ di due sottospazi di rispettive dimensioni h,k è un sottospazio S_i di dimensione i, chiamato lo *spazio intersezione* di S_h ed S_k. Tale dimensione vale -1 se i due sottospazi sono disgiunti.

Nota. Da questo postulato segue che esiste uno ed un solo sottospa-zio di dimensione minima j detto lo *spazio join* (*congiungente*) S_j di S_h ed S_k , contenente i due dati sottospazi S_h ed S_k .

IV. Vale la relazione $h+k = i + j$ (relazione di Grassman).

Si prova che tali assiomi non sono indipendenti, ma tuttavia questo fatto non è di grande interesse perché è facile provare che essi sono compatibili potendo noi assegnare un modello numerico di spazio grafico denominato *spazio proiettivo numerico*[2] *di dimensione* n.

Sia K un campo finito o infinito. Definiamo l'insieme **S** come l'insieme delle (n+1)-ple di elementi di K del tipo :

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (0,0, \ldots,0)$$

tali inoltre che per (h= 0,1,…n) e per $\rho \neq 0$ sia:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \iff x_h = \rho\, y_h,$$

Chiamiamo sottospazio S_d di dimensione d (d = 1,2, …, n-

[2] Tali spazi nelle opere iniziali di Segre B. sono chiamati spazi lineari.

1) l'insieme delle (n+1)-ple che sono soluzioni non nulle di un sistema lineare di n-d equazioni in n+1 incognite del tipo:

$$a_{h0}\, x_0 + a_{h1}\, x_1 + \ldots + a_{hn}\, x_0 = 0$$

dove h = 0,1,…, n-d, e la matrice dei coefficienti delle incognite ha caratteristica massima, ovvero esiste nella matrice un minore di ordine n-d che non è nullo.
Tale struttura si può pensare derivata da uno spazio vettoriale vettoriale di dimensione n+1, nel quale due vettori sono dichiarati equivalenti se e solo se sono proporzionale. Da tale considerazione deriva facilmente la validità degli assiomi I/IV.
Ancora una idea da chiarire. Siano (S , B) ed (S′ , B′) due spazi grafici con S ed S′ privi di punti comuni. Definiamo una nuova struttura (S^* , B^*) dove:

$$S^* = S \cup S', \quad B^* = B \cup B' \ (d > 1)$$

mentre la famiglia $(B_1)^*$ è formata dall'unione di B_1 con l'insieme dei 2-insiemi del tipo {x,y} con $x \in S$ ed $y \in S'$. Si dimostra facilmente che (S^* , B^*) è ancora uno spazio grafico che prende il nome di *spazio proiettivo grafico riducibile*. Uno spazio non costruito in tal modo si chiama *irriducibile*.

L'inconveniente si supera aggiungendo agli assiomi I/IV il seguente:

V.- (assioma di Fano). Ogni retta dello spazio proiettivo grafico **(S , $\mathscr{B}$)** ha almeno tre punti.
Gli spazi grafici soddisfacenti I/V sono irriducibili.

Si può dimostrare[3] il seguente notevole:

Teorema fondamentale. *Ogni spazio proiettivo grafico irriducibile di dimensione* $n \geq 3$ *è isomorfo ad uno spazio proiettivo numerico di ugual dimensione, su un opportuno campo.*
A partire dalla struttura geometrica è anche possibile definire la struttura di campo, ma ciò esula dalle nostre considerazioni poiché nel seguito limiteremo le nostre considerazioni al campo reale e ai campi di Galois.
Tale teorema non è più valido per n = 2 e per chiarire la cosa occorre enunciare il seguente classico:

Teorema di Desargues. *Sia* $(S, \mathscr{B})$ *uno spazio proiettivo grafico irriducibile di dimensione* $n \geq 3$. *Siano* ℓ, m, n *tre distinte rette concorrenti in un punto* O. *Siano dati i punti distinti*

$$A, A' \in \ell,\quad B, B' \in m,\quad C, C' \in n.$$

Siano

$$U = AB' \cap A'B,\quad V = AC' \cap A'C,\quad W = BC' \cap B'C,$$

allora U,V,W *sono allineati*.
La struttura geometrica (**D,** $\mathscr{G}$) definita dai 10 punti

$$D = \{O, A, A', B. B', C, C', U, V, W\}$$

e dalla famiglia $\mathscr{G}$ formata dai 10 blocchi, ciascuno di 3 elementi

OAA' - OBB'- OCC'- AUB' -A'UB
AVC' - A'VC - BWC'- B'WC - UVW,

è chiamata configurazione simmetrica di Desargues e la si denota con il simbolo $\mathbf{10_3}$. In questa struttura ogni blocco ha **3** punti e per ogni punto passano tre blocchi, come di immediata verifica visiva..

---

[3] Per la dimostrazione cfr. Segre B. (1961), op.cit. Chap.14, n.107.

Nel caso degli assiomi I/V ridotti al caso di dimensione n = 2, il Teorema fondamentale (in dimensione n ≥3) non sussiste più. Si può dimostrare che:[4]

Teorema fondamentale in dimensione 2. *Dato uno piano proiettivo grafico, se in esso oltre agli assiomi* I/V *vale anche la configurazione di Desargues per ogni sistema di punti* {O, A,A',B. B', C,C', U,V,W} *allora il piano grafico è isomorfo ad un piano proiettivo numerico su un campo.*

N.B. La configurazione 10_3 di Desargues non è un piano proiettivo in quanto esistono coppie di punti come O ed U per i quali non passa alcun blocco della struttura ed esistono anche coppie di punto-blocco come O e UVW tali che per O passano tre blocchi OAA'- OBB'- OCC' "*paralleli*" o meglio "*non- incidenti* " al blocco dato.

Sia **(S , $\mathscr{B}$)** uno spazio proiettivo grafico e sia :

$$\mathscr{B} = \{ \mathscr{B}_{-1}, \mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n \}$$

la famiglia dei sottospazi soddisfacenti gli assiomi I/V.
Fissiamo un iperpiano **H** ∈ $\mathscr{B}_{n-1}$. Definiamo una nuova struttura (A, $\mathscr{R}$**)** , dove **A = S\H** e la famiglia:

$$\mathscr{R} = \{ \mathscr{R}_{-1}, \mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_n \}$$

è tale che :

$$\mathscr{R}_k = \{ S_k \setminus H \ , \ \forall\, S_k \in \mathscr{B}_k \}.$$

La struttura (A, $\mathscr{R}$ **)**.sopra definita si chiama Spazio affine grafico di dimensione n associato (o dedotto) dallo spazio proiettivo grafico.

[4] Segre B. (1961), op.cit. chap.14, n.108.

2 – Piani proiettivi e affini

Una struttura geometrica **(S , $\mathscr{B}$)** , dove $\mathscr{B}$ è una unica famiglia di parti dette rette, si dice che è un piano proiettivo[5] (grafico irriducibile) se per essa valgono i seguenti assiomi (dedotti dagli assiomi I/V):

1.- Due punti distinti sono contenuti in una ed una sola retta
2.- Due distinte rette si intersecano in esattamente un punto
3.- (Fano) Ogni retta possiede almeno 3 punti

Si prova che
Prop.1 *In un piano proiettivo due differenti rette sono equicardinali.*
Dim. Siano m ed m' due rette e sia C il punto comune ad m ed m'. Su m esistono due distinti punti A,B diversi da C ed analogamente su m' esistono due distinti punti A',B' diversi da C. Dal punto S comune ad AA' e BB' esterno alle rette m ed m' per proiezione otteniamo una biezione tra m ed m'. #

Prop.2.- *In un piano proiettivo esistono insiemi di quattro punti a tre a tre non allineati, ovvero come suol dirsi formano un 4 -arco.*
Dim. Si noti che i 4 punti A,A', B, B' costruiti nella precedente dimostrazione formano un 4- arco.#

Un piano proiettivo sarà denotato con la lettera $\boldsymbol{\pi}$ e un esempio è dato dal piano proiettivo (numerico) desargue-siano, su un campo K, indicato con $PG(2.K)$, piano che

[5] Nel seguito sotto intenderemo con la dicitura piano proiettivo che è grafico e irriducibile e preciseremo sempre quando è desarguesiano.

possiamo costruire, specializzando la definizione generale di spazio proiettivo numerico, come segue.
Chiamiamo *punti* le terne (x_0, x_1, x_2) di elementi del campo non tutti nulli e definiti a meno di un fattore. Chiamiamo *rette* le soluzioni non nulle delle equazioni:

$$a\, x_1, + b\, x_2 + c x_0 = 0$$

dove (a , b, c) è un punto.
Nel caso che il piano proiettivo sia un piano finito con una retta[6] di q+1 punti, il piano si denoterà con π_q e l'intero q si dirà l'*ordine* del piano Se inoltre il piano proiettivo è desarguesiano allora il campo K finito è un campo di Galois[7], denotato usualmente con GF(q), e il piano proiettivo numerico corrispondente si denoterà con PG(2,q).
Naturalmente nel caso dei piani grafici proiettivi occorre sempre contemplare il fatto che accanto ai piani proiettivi desarguesiani, che sono quelli costruiti su un campo, e per i quali, nel caso finito, q è la potenza di un primo, esistono anche i piani non desarguesiani[8], per i quali, nel caso finito q potrebbe, a priori , non essere una potenza di un primo. Va solo osservato, che ad oggi non si è riusciti a dare esempi di piani non desarguesiani finiti aventi un ordine che non è potenza di un primo.

Teorema. *In un piano grafico proiettivo finito di ordine* q, *per ogni punto passano* q+1 *rette, nel piano ci sono* q^2+q+1 *punti e*

[6] Per la proposizione 1 se una retta ha q+1 punti allora ogni retta ha q+1 punti.
[7] L'indicazione GF(q) sta per Galois Field di ordine q , dove q è il numero degli elementi del campo. Ricordiamo un campo finito o di Galois esiste se e solo se q è una potenza di un primo,e che due campi di Galois di egual ordine sono isomorfi
[8] A riguardo ci riferiamo ai lavori citati di Barlotti A (1971), Bose R.C. (1973), Eugeni F. (1996), Lombardo Radice L (1961),. Rosati L.A. (1964), Moulton F.R. (1902), Tallini G.(2005), Segre B. (1959) e (1961),

altrettante rette.

Dim. Siano m e P una retta e un punto non appartenentesi. Da P passano esattamente q+1 rette incidenti m.

Sia ora Q un punto di m, su m ci sono q punti diversi da Q, e da Q escono q rette diverse da m, ciascuna avente q punti oltre Q. I punti del piano sono allora: $q(q+1)+1$. Per dualità degli assiomi le rette sono in pari numero dei punti.#

Se un piano proiettivo è desarguesiano, cioè π_q.= PG(2,q), allora $q=p^h$. Dalla letteratura sappiamo che per ogni $q=p^h$ esiste esattamente un piano proiettivo PG(2,q), per il resto, e per i casi bassi con $2\leq q\leq 10$, sappiamo quanto segue.

Non esistono piani proiettivi di ordini q = 6,10.

Per q =2,3,4,5,7,8 esiste un solo piano proiettivo desarguesiano. Per q=9 sappiamo che esistono, oltre a PG(2,9), esattamente tre piani, non desarguesiani, tra loro non isomorfi.

L'unico teorema noto che fornisce qualche indicazione è il:

Teorema di Bruck -Ryser. *Se* $q = 1+4k$, *oppure* $q = 2+4k$ con $k\geq K$, *ed esiste* π_q, segue *che* q *è somma di due quadrati.*

Da questo teorema, di non semplice dimostrazione, segue che quando q = 6, 14, 21, 22,26,30 non esistono piani proiettivi. Si è provato inoltre che per q = 10,12,15,18,20,24,28 il teorema di B&R non è applicabile.

La questione del piano d'ordine 10 è interessante. In passato molti autori hanno scritto interi lavori che iniziano con "se esiste il piano d'ordine 10 allora …". Oggi si è provata la non esistenza di questo piano ma con una dimostrazione, di quelle che possono chiamarsi "un TECNOREMA", cioè una prova mediante Computer, eseguita in tempi molto lunghi (sembra più di un anno) ma in maniera da costituire una esperienza ripetibile. L'eventuale esistenza di tale piano è stata ricondotta, facendo ricorso alla Teoria dei Codici, alla esistenza di un certo numero di configurazioni o combinazioni di punti in modo del tutto analogo a quanto fatto per il problema dei 4 colori. La non esistenza delle configurazioni è stata stabilita in modo esaustivo dal Computer. L'esame esaustivo diretto non era possibile poiché sarebbero occorsi secoli e secoli. Dunque sappiamo che il piano d'ordine 10 non esiste, indipendentemente dalla filosofia dell'accettare o meno una prova al computer. È vero che un tecnorema è un esperimento e quindi, almeno in teoria, si può, se si vuole, ripeterlo. E ben difficile stabilire dei confini filosofici in questi casi. Vi sono esempi di teoremi manuali che costituiscono di fatto una sorta di esperienza non ripetibile. Un esempio è il teorema di classificazione dei gruppi finiti sporadici, detto delle 15.000 pagine. Ciò dipende dal fatto che il corpo di tutti i lavori che hanno condotto negli anni al risultato consta di circa 15.000 pagine.

Per tornare alle nostre considerazioni, accanto ai piani proiettivi occorre considerare i piani grafici affini[9]. Di questi possiamo anche assegnare una assiomatica indipendente dal contesto fin qui svolto e precisamente dire che una struttura geometrica (A, $\mathscr{R}$) , dove $\mathscr{R}$ è una famiglia di blocchi detti *rette*, è un piano affine se:

1.- *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*

2.- *Ogni retta ha almeno due punti ed esistono tre punti non appartenenti ad una stessa retta.*

3.- *Dati un punto P ed una retta r con P non appartenente ad*

[9] Che chiameremo semplicemente affini.

r, esiste una ed una sola retta per P (detta la parallela*) non avente punti in comune con r (l'unicità implica banalmente che la relazione di parallelismo è simmetrica e transitiva).*

Un piano affine si denota α.

Naturalmente è sempre possibile immergere un piano affine α in un piano proiettivo secondo la seguente procedura.

Sull'insieme $\mathscr{R}$ delle rette del piano affine consideriamo la relazione ≈ di parallelismo-coincidenza, che è chiaramente una relazione di equivalenza, che per passaggio al quoziente definisce l'insieme quoziente $\mathscr{R}/\approx$ detto *insieme delle direzioni* del piano affine. Costruiamo ora un nuovo spazio geometrico (S^, $\mathscr{R}$^) dove:

S^ è l'insieme dei punti del piano affine detti *punti propri* e delle direzione dette *punti impropri*. Ovvero :

$$S\text{\^{}} = A \cup (\mathscr{R}/\approx)$$

L'insieme $\mathscr{R}$^ è costituito dalle rette del piano affine dette *rette proprie,* a ciascuna delle quali è stata aggiunta la sua direzione come suo punto improprio, e da una nuova retta, detta *retta impropria,* formata dall'insieme di tutte le direzioni del piano, cioè ($\mathscr{R}/\approx$). Lo spazio (S^, $\mathscr{R}$ ^), definito sopra è un piano proiettivo ampliamento del piano affine dato. Naturalmente un piano affine (A, $\mathscr{R}$) si dirà desarguesiano o non desarguesiano secondo che tale sia il piano proiettivo (S^, $\mathscr{R}$ ^) , suo ampliamento.

Se il piano affine in esame è desarguesiano, rispetto ad un campo K, lo si denota con AG(2,K) e si può presentare come segue. Un generico punto P del piano è rappresentato da:

$$P(x,y) \;\; , \;\; \forall\, x,y \in K.$$

Una retta, ∀a,b,c $\in Kcon$ (a,b)≠(0,0), si rappresenta come insieme delle soluzioni di una equazione lineare del tipo:

$$a\,x + b\,y + c = 0.$$

Definiamo il vettore **u** = P_1P_2, di estremi $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2\ (x_2,y_2)$ quello di componenti $(x_2 - x_1)\ \mathbf{i} + (y_2 - y_1)\ \mathbf{j}$, così che si può scrivere formalmente $P_1 = P_2 + \mathbf{u}$, relazione questa che esprime la *legge di traslazione*. Si osservi che l'insieme dei vettori aventi un primo estremo in un fissato punto Q costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Per quanto riguarda un *piano affine desarguesiano*, quindi a coordinate in un campo K, ai fini del suo ampliamento in un piano proiettivo desarguesiano"numerico", è possibile costru-ire una sua rappresentazione in *coordinate omogenee.* Consi-deriamo, per questo le terne (x_0, x_1, x_2) di elementi del campo K, non tutti nulli e definiti a meno di un fattore.

Poniamo ora se P (x,y) è un punto di AG(2,K) una corrispondenza tra tali punti detti *propri* e le terne con $x_0 \neq 0$, definita dalle:

$$x = x_1/x_0 \qquad , \quad y = x_2/\,x_0.$$

Se invece si considera la retta di AG(2.K) di equazione:

$$a\,x + by + c = 0$$

ad essa associamo la terna (0, b,-a), strettamente connessa con la direzione della retta stessa, direzione detta *punto improprio.* Dunque i punti impropri sono caratterizzati dall'equazione:

$$x_0 = 0\ .$$

detta equazione della retta impropria.

Ciò premesso $\forall a,b,c \in K$, dove (a , b, c) è un punto, chiamiamo *rette* le soluzioni non nulle delle equazioni:

$$a\,x_1, + b\,x_2 + cx_0 = 0\ .$$

Si noti che ora nell'ampliamento, la retta di equazione:

$$a\,x_1, + b\,x_2 + cx_0 = 0$$

al variare del punto (a,b,c) rappresenta tutte le rette proprie ed improprie, e se $(a,b) \neq (0,0)$ è soddisfatta da tutti i suoi punti propri e dall'unico punto improprio.

Trattiamo ora il caso dei *piani affini finiti*. Per via del fatto che un piano affine desarguesiano o no è immergibile in un piano proiettivo si ha che:

Teorema. *Sia dato un piano affine finito. Allora ogni retta ha* q *punti, da ogni punto escono* q+1 *rette, ci sono* q+1 *direzioni, e un fascio di rette parallele è formato da* q+1 *rette, infine il piano ha* q^2 *punti e contiene* $q^2 + q$ *rette*.

L'intero q, esprimente il numero dei punti di una retta affine, si chiama *ordine del piano affine*. Un piano affine finito si denota con il simbolo α_q, e nel caso desarguesiano, nel quale il piano è a coordinate in un campo di Galois GF(q), il piano affine desarguesiano corrispondente si denota con AG(2,q), e la sua unicità per ogni ordine q è assicurata dall'unicità, a meno di isomorfismi del corrispettivo ampliamento proiettivo.

3 – Un esempio di piano non desarguesiano

Un modello di piano, nel quale non vale il teorema di Desargues, fu costruito da David Hilbert (1862-1943) nel 1901, per ragioni epistemologiche. Nel 1902 l'astronomo americano Forest Ray Moulton[10] (1872-1952), riprendendo e semplificando l'idea di Hilbert, costruisce un nuovo modello, piuttosto semplice, che da lui prese il nome di *Piano di Moulton*. Tuttavia questo modello lo riportiamo per cronologia storica, ma in realtà non fa al nostro caso, in quanto il piano di Moulton non è un piano affine, mancando in esso l'unicità della parallela.

[10] F.R. Moulton 1902.

I punti del piano di Moulton, sono le usuali coppie (x,y) di numeri reali. Le rette sono di due tipi:
Rette di I tipo ($m \le 0$). Sono le rette del piano della ordinaria geometria di rispettive equazioni:

$$x=h, \qquad y=mx+q \text{ con } m \le 0).$$

Rette di II tipo o *rette spezzate* ($m>0$). Le nuove rette sono:

$$y = \begin{Bmatrix} mx + q & \text{se } y \geq 0 \\ 2mx + 2q & \text{se } y < 0 \end{Bmatrix}$$

che scriveremo semplicemente nella forma:

$$(y=mx+q, \text{ se } y \ge 0 \ - \ y=2mx+2q \text{ se } y<0).$$

Notiamo che le due semirette della spezzata si raccordano nel punto $(-q/m, 0)$ dell'asse delle ascisse.
Si dimostra con qualche calcolo, ma agevolmente, che nel piano di Moulton valgono i primi due assiomi di piano affine. L'unica attenzione deve aversi quando i due punti $P_1(x_1,y_1)$ e P_2 (x_2,y_2) sono tali che $y_1>0$ con $y_2<0$ e i due punti sono tali che la penden-za della retta P_1 P_2 , del piano euclideo sottogiacente, è positiva. In tal caso considerati i due fasci euclidei:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \qquad \text{per } P_1$$
$$y - y_2 = 2m\,(x - x_2) \qquad \text{per } P_2$$

è sufficiente imporre che per $y = 0$, le due rette abbiano la medesima ascissa. Ciò implica che:

$$2\,m\,(x_1 - x_2) = 2\,y_1 - y_2,$$

da cui m e la susseguente retta di II specie.
Tuttavia si prova facilmente che non vale l'assioma di unicità della parallela. Ad esempio dato il punto A(1,0) e la retta di II specie $(y=x\ ,\ y \ge 0 - y=2x,\ y<0)$, dal punto A escono le infinite parallele di II specie:

$$(y = m\,x - m,\ y \ge 0 - y = 2m\,x - 2m,\ y < 0) \text{ con } \tfrac{1}{2} \le m < 2\ .$$

Supporremo inoltre che il piano di Moulton, sia ampliato dalle direzioni delle rette di I specie e da quelle di II specie con $y \geq 0$, così che tutti i punti all'infinito compaiono una ed una sola volta, associate ad una retta..

Tutto ciò chiarito, mostriamo che nel piano di Moulton, amplia-to nel modo indicato, non vale il Teorema di Desargues.

Siano O = $Y\infty$, A(-1,1), B(02), C(1,1), A'(-1,-1), B'(0,0) C'(1,-1).

BC e B'C' si incontrano in $U\infty(0,1,-1)$,AC ed A'C' si incontrano in $X\infty$.

Dunque per l'allineamento AB ed A'B' dovrebbero incontrarsi in un punto all'infinito. Ma la retta AB essendo di II specie ha la forma: ($y = -x+2$, $y \geq 0$ – $y = -2x + 4$, $y<0$) , pertanto la retta A'B' che ha la forma ($y= (1/2)x$, $y \geq 0$ -, $y = x$, $y<0$) incontra AB nel punto (-4,-4) che è invece proprio.

Esempi significativi di piani affini e proiettivi non desarguesiani provengono dalla teoria delle fibrazioni.

Sia dato uno spazio proiettivo reale PG(3,$\mathbb{R}$), chiamiamo fibrazione totale $\mathscr{F}$ una famiglia di rette a due a due disgiunte, che ricoprono lo spazio. Una siffatta fibrazione si può costruire immergendo lo spazio proiettivo assegnato nel suo comples-sificato. Nel complessificato fissiamo due rette complesse e coniugate, e congiungiamo ciascun punto di una delle due rette con il punto coniugato sull'altra. Otteniamo in tal modo una famiglia di rette che è una fibrazione totale che chiamiamo regolare, come ogni altra costruita in tal modo.

Consideriamo ora uno spazio affine di dimensione 4 sui reali, cioè un AG(4, $\mathbb{R}$). Sul suo iperpiano improprio che è un PG(3,$\mathbb{R}$), sia data una fibrazione totale e regolare $\mathscr{F}$. *Si dimostra che :*

Teorema. *Lo spazio geometrico (S, $\mathscr{B}$) dove S è l'insieme dei punti di* AG(4, $\mathbb{R}$) *e $\mathscr{B}$ è la famiglia dei piani di* AG(4, $\mathbb{R}$) *passanti per le rette della fibrazione totale $\mathscr{F}$, è un piano affine desarguesiano s e solo se $\mathscr{F}$ è regolare. Si può passare alla struttura proiettiva chiamando punti all'infinito le rette di $\mathscr{F}$. e retta impropria la stessa $\mathscr{F}$.*

Il problema di costruire piani non desarguesiani è ricondotto a costruire fibrazione di uno spazio 3-dimensionale, non regolari.

Si può ottenere una fibrazione non regolare, da una regolare, con la seguente procedura[11]: siano $\ell.m.n$ tre rette della fibrazione, dunque a du a due sghembe tra loro. Il luogo delle rette che si appoggiano alle tre rette date costituiscono una famiglia R_1 o *regolo*, che riempiono una quadrica rigata, e formata interamente da rette della fibrazione data. Ma essendo, come noto una quadrica doppiamente rigata, esiste un secondo *regolo* R_2 che riempie l'intero spazio occupato dalla quadrica. Se consideriamo la nuova fibrazione

$$\mathscr{F}' := (\mathscr{F} \setminus R_1) \cup R_2$$

ottenuta , come suol dirsi , *per ribaltamento dei regoli*, otteniamo una nuova fibrazione totale, ma non regolare e quindi con essa costruiamo che un piano affine non desarguesiano.

Quanto detto si può estendere ai piani proiettivi finiti desarguesiani, ricordando che dato GF(q) e una sua estensione quadratica GF(q^2) ci teroviamo davanti a qualdcosa di analogo al rapporto campo reale e ampliamento complesso, anche perché l'applicazione $x \Rightarrow x^q$, $\forall x \in$ GF(q),

[11] Cf. Barlotti A. (1971), Bose R.C (1973), Tallini G.(2005). Tale procedura è suggerita dalla ben nota rappresentazione reale su uno spazio 4-dimensionale del piano proiettivo complesso.

ha tutte le proprietà per potersi chiamare coniugio in un campo di Galois. Ne segue che in una estensione di uno spazio proiettivo finito PG(3,q) nel suo complessificato PG(3, q^2) se fissiamo due rette complesse e coniugate, e congiungiamo ciascun punto di una delle due rette con il punto coniugato sull'altra, otteniamo anche in tal caso una fibrazione totale e regolare di PG(3,q), e tutto continua a valer anche nel caso finito[12].

[12] Si vedano a riguardo Barlotti (1971, Bose (1973) , Cerasoli et alii (1988) p.63.

Bibliografia

BARLOTTI A.,(1971). *Alcuni procedimenti per la costruzione di piani grafici non desarguesiani*, Conf. Sem. Mat.Univ. Bari,127, pp.1-17.

BOSE R.C. (1973). On a representartion of Hughes plane, *Proc. Of the international Conerence on projective planes*, Washington University Press, pp.27-58.

CECCHERINI P.V. (1967). *Sulla nozione di spazio grafico*, Rend. Mat. Univ. Roma pp.78-98.

CERASOLI M., EUGENI F., PROTASI M. (1988). *Elementi di Matematica discreta*, Bologna, Ed. Zanichelli.

EUGENI F. (1996). La matematica discreta attraverso i problemi, in: *Cento anni di Matematica – Atti del Convegno "Mathesis Centenario*", Roma, Ed. FF.Palombi -Editori pp.84-102.

HIRSHFELD J.W.P. (1979). Projective geometry over finite fields, Oxford, Clarendon Press.

LOMBARDO RADICE L. (1961). Non-desarguesian finite graphic planes, in Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry,* Roma, Ed Cremonese (Appendice).

MOULTON F.R. (1902). A simple non-desarguesian plane geometry, in *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.3, n.2, American Mathematical Society.

ROSATI L.A. (1964). *Su una nuova classe di piani grafici*, Ricerche Mat. 13 pp.1-17.

SEGRE B. (1959). Le geometrie di Galois, *Annali di Matematica pura ed applicata,* serie IV, tomo XLVIII, pp. 1-96, Bologna, Ed. Zanichelli.

SEGRE B. (1961). *Lectures on modern geometry,* Roma, Ed Cremonese (CNR – Monografie Matematiche).

TALLINI G.(2005). *Lezioni di Geometria Combinatoria,* Bologna, Ed. Pitagora.