

Un Modello per il Problema delle Due Buste

Aniello Buonocore* - Luigia Caputo*

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Università degli Studi di Napoli Federico II; aniello.buonocore@unina.it, luigia.caputo@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.037

Sunto: *In questo articolo, oltre ad analizzare il problema delle due buste ponendosi in un contesto formalizzato e aderente alla realtà si fornisce una possibile strategia per il cambio della busta inizialmente scelta basata sulla condizione generale di cambio che è diffusamente accettata. Il modello proposto generalizza l'enunciato del problema per rimarcare la necessità di avere una strategia per il cambio di busta.*

Parole Chiave: *Utilità attesa, condizione generale di cambio, strategia di cambio.*

Abstract: *In this article, in addition to analyzing the problem of the two envelopes in a formalized and adheres to reality context, a possible strategy for the exchange of the initially chosen envelope is provided, based on the general exchange condition that is widely accepted. The proposed model generalizes the statement of the problem to underline the need to have a strategy for the change of envelope.*

Keywords: *Expected utility, general exchange condition, switching strategy.*

1 - Introduzione

Sul problema delle due buste la letteratura, che comprende varianti e generalizzazioni, è molto ricca: sulla pagina di Wikipedia dal titolo *Two envelopes problem* si può trovare una bibliografia con 36 titoli. Uno di questi, il terzo, è a sua volta un elenco di contributi organizzati in ordine cronologico dal 1943 al 2019: guardando alle ultime annualità se ne può dedurre che l'interesse sull'argomento è ancora attuale visto che nell'ultima decade si contano quasi 40 articoli.¹

Nella formulazione del problema maggiormente utilizzata, una persona si trova a dover scegliere una tra due buste chiuse contenenti differenti importi di denaro di cui ella conosce solo che uno è il doppio dell'altro. Ma, prima di aprire la busta scelta per prendere l'importo ivi contenuto, ha ancora la facoltà di optare per l'importo contenuto nell'altra busta. Il problema richiede di individuare se sia più conveniente confermare la prima busta scelta oppure optare per l'altra.

La questione diventa subito intrigante se la persona si affida ad un ragionamento di carattere intuitivo (in seguito richiamato con \mathcal{R}_2) che induce a optare per l'altra busta:

se \mathcal{A} è la busta scelta inizialmente, x il suo contenuto e \mathcal{B} l'altra busta, la persona optando per \mathcal{B} vince un ulteriore importo pari ad x oppure perde $x/2$. Quindi, considerando che le due eventualità sono ugualmente probabili, l'importo atteso contenuto in \mathcal{B} :

$$y_{2,x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2x \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x. \quad (1)$$

¹ Si veda alla pagina:

https://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem

In altri termini, secondo \mathcal{R}_2 qualunque sia l'importo contenuto in \mathcal{A} , in \mathcal{B} è atteso un importo maggiore. Ma \mathcal{R}_2 non è corretto e per confutarlo si può ricorrere alla seguente semplice obiezione: detto y l'importo contenuto nella busta \mathcal{B} , l'applicazione dello stesso ragionamento porta ad attendere che in \mathcal{A} vi sia un importo maggiore di y . Alla stessa conclusione si perviene in (Nalebuff, 1989) dove, però, il problema viene formulato considerando due persone, Ali e Baba, che si contendono i due importi; si consiglia la lettura dell'articolo appena richiamato per l'inquadramento storico del problema e per la ricchezza dei fatti ivi riportati.

Tale contraddizione è nota come *paradosso delle due buste* e l'obiettivo dichiarato di molti autori che hanno affrontato il problema è quello di risolverla. Comunque, allo stato attuale è ampiamente riconosciuto che, a buste entrambe chiuse, la chiave di volta per la risoluzione corretta del problema è basata sul fatto che il loro contenuto non è deterministico.² Per illustrare tale semplice fatto alcuni autori hanno proposto idee alquanto sofisticate. In particolare, in (Markosian, 2011) si individua nella formulazione del principio fondamentale della teoria delle decisioni l'aspetto rilevante e se ne propone una modifica. Più recentemente, in (de Canson, 2017) vengono individuati due problemi di decisione apparentemente uguali ma che mediante un'opportuna rappresentazione matriciale si scoprono essere differenti.

Ma anche nel caso in cui alla persona si concede, prima della scelta definitiva, l'ulteriore facoltà di aprire la busta \mathcal{A} (in tal caso l'importo ivi contenuto diventa deterministico) la (1)

² Così, gli importi contenuti nelle due buste essendo numeri aleatori andrebbero indicati con lettere maiuscole.

non è corretta. E qui la questione oltre a confermarsi intrigante diventa anche particolarmente spinosa e la discussione che si è sviluppata ha suscitato reazioni molto pungenti.

Ad esempio, nel 1995 il responsabile editoriale della rivista *Mathematics Magazine* ricevette la seguente lettera:

Dear Editor: "The Box Problem: To Switch or Not To Switch," by Brams and Kilgour (February 1995), makes a mountain out of a molehill, albeit an instructive mountain. The resolution of the problem, which is more a joke than a paradox, has nothing do with conditional probabilities of peculiar distributions. In fact, the weakness of the expected-value argument is that it is nonsense. Having picked a box containing $\$n$, calculating that the expected value of the other box is $(5/4)n$ involves evaluating an expression in n that simultaneously assumes that n is equal to both b and $2b$. It is not surprising that this leads to a peculiar result. Substituting the correct amounts for the occurrences of n in the averaging expression gives $(3/2)b$ as the expected value of the amount in the other box, exactly equal, of course, to the expected value of the box you've already picked.³

A tale lettera, gli autori dell'articolo ribatterono in questo modo:

Bill Mixon incorrectly interprets the box problem to be one in which the amount in the box you pick is "equal to both b and $2b$ ", so on average the amount you find is $3b/2$, and this is the same for both boxes. But in fact the problem states that you begin by choosing one box and find the amount, x , in it, with $x = b$ and $x = 2b$ equally probable. This equiprobability assumption is not the same as assuming that these two events are simultaneously true (a physical impossibility) --or, equivalently, that you choose one of the two boxes, containing either b or $2b$ at random, and don't open it-- which would, indeed, give you no reason to switch

³ Per l'autore della lettera, b rappresenta l'importo minimo contenuto nelle due buste.

to the second box. Rather, you open the first box and learn its contents, although, as we showed, the $5x/4$ expected-value calculation about the contents of the second box is erroneous. Instead, your expectation about the second box's contents depends on your prior distribution. For some prior distributions, you always do better switching --whatever amount you find in the first box-- which, if not a paradox, is not a joke either.⁴

Nel seguito è presentata un'analisi che, oltre a illustrare con maggiore dettaglio alcuni dei punti evidenziati nella lettera di Bill Mixon e nella risposta di Stevens J. Brams e D. Marc Kilgour, si spera possa aiutare a mettere in luce gli elementi rilevanti per la comprensione del paradosso.

2 - Il modello

La nostra analisi del problema è basata sul seguente modello riguardante gli aspetti aleatori dell'intera procedura.

- i) La procedura di scelta è intesa come ipotetico gioco tra un conduttore \mathcal{C} che sceglie gli importi da inserire nelle due buste e un giocatore \mathcal{G} che svolge il ruolo della persona del paragrafo precedente.
- ii) Con il termine *partita* si deve intendere ogni singola effettuazione del gioco; un giocatore è ammesso al gioco una sola volta, mentre il conduttore gioca tutte le partite.

⁴ Lettera e risposta sono pubblicate nella sezione "News and Letters", volume 68, fascicolo 4, pp. 322-324 di *Mathematics Magazine*.

- iii) Prima di ogni partita, \mathcal{C} si serve di un dispositivo aleatorio \mathcal{D}_C per determinare l'importo minimo I da inserire in una delle due buste.
- iv) Il numero aleatorio I è di tipo discreto e la sua distribuzione è completamente nota a \mathcal{C} .
- v) L'insieme S_I dei valori assumibili da I con probabilità non nulla è un sottoinsieme, limitato superiormente, di \mathbb{N} .
- vi) Il conduttore ottiene il secondo importo J raddoppiando I oppure, più in generale, moltiplicando I per un numero naturale $k \geq 2$: $J = kI$.⁵ L'insieme S_J dei valori assumibili da J con probabilità non nulla si ottiene moltiplicando per k gli elementi di S_I .
- vii) Il giocatore adotta un dispositivo \mathcal{D}_G per scegliere a caso una delle due buste. Per comodità, qui si assume che \mathcal{D}_G sia un generatore di numeri casuali: prefissata una delle due buste, \mathcal{G} sceglie l'altra se $\mathcal{D}_G > 1/2$.

Il modello, in primo luogo, rende evidente il fatto che l'importo vinto dal giocatore è il risultato di un duplice meccanismo aleatorio. Inoltre, indicati con X e Y gli importi contenuti nelle buste \mathcal{A} e \mathcal{B} , rispettivamente, l'importo complessivo S in gioco vale:

$$S = X + Y = I + J = I + kI = (k + 1)I. \quad (2)$$

Si osservi che è la (2) a imporre a \mathcal{C} di scegliere S_I limitato in quanto, in caso contrario, si potrebbe trovare nella situazione

⁵ L'utilità di k diventerà più chiara nel Paragrafo 5.

di dover azionare più volte \mathcal{D}_c : l'importo totale S determinato da \mathcal{D}_c potrebbe essere maggiore della disponibilità finanziaria M che egli è in grado di mettere in palio per ciascuna partita. Ne discende che $S_I = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$, con

$$m \in \mathbb{N}, \quad i_0 < i_1 < \dots < i_m \quad \text{e} \quad (k+1)i_m \leq M. \quad (3)$$

In questo modo \mathcal{C} si cautela anche da un secondo inconveniente: nel caso di S_I numerabile potrebbe risultare $\mathbb{E}(I) = \infty$.

3 - Giocatore completamente ignaro

In questo paragrafo il giocatore, indicato con \mathcal{G}_0 , non ha alcuna informazione nè sul contenuto delle due buste nè sulla distribuzione di I . Egli, tenendo conto delle posizioni fatte nell'introduzione e nella descrizione del modello, può solo dedurre che

$$X = S - Y, \quad (4)$$

$$Y = J \cdot 1_{\{X=I\}} + I \cdot 1_{\{X=J\}} = I + (k-1)I \cdot 1_{\{X=I\}}, \quad (5)$$

e che

$$\mathbb{P}(X = I, Y = J) = \frac{1}{2} \implies \mathbb{P}(X = I) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = J). \quad (6)$$

In virtù della (5) e della (6), \mathcal{G}_0 è anche in grado di determinare il valore atteso dell'importo della busta \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[Y|I] &= \mathbb{E}[I + (k-1)I \cdot 1_{\{X=I\}}|I] \\ &= I + (k-1)I \cdot \mathbb{E}(1_{\{X=I\}}) \\ &= I + (k-1)I \cdot \mathbb{P}(1_{\{X=I\}}) \\ &= I + (k-1)I \cdot \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}I. \end{aligned} \quad (7)$$

Ricordando la (2), la (4) e la (7) comportano che il valore atteso dell'importo della busta \mathcal{A} valga:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[X|I] &= \mathbb{E}_k[S - Y|I] = \mathbb{E}_k[(k + 1)I|I] - \bar{Y}_k \\ &= (k + 1)I - \frac{k + 1}{2}I = \frac{k + 1}{2}I.\end{aligned}\quad (8)$$

Si osservi che $\bar{Y}_2 = \bar{X}_2 = 3I/2$ corrisponde al valore $3b/2$ indicato da Bill Mixon con b corrispondente all'importo minimo.

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 1. La simmetria della situazione di gioco comporta l'equivalenza, sia in termini di probabilità che di valore atteso, tra gli importi delle due buste; inoltre \mathcal{G}_0 non ha alcuna indicazione sul valore della sua vincita.

4 - Giocatore che conosce l'importo della busta scelta

Il conduttore conosce la distribuzione di I e pertanto egli può considerare l'importo Y anche in un altro modo, ovvero in funzione di X . Infatti, se il giocatore con la sua scelta iniziale ricade sull'importo minimo, ovvero $X = I$, allora la coppia di importi che \mathcal{C} gli ha presentato è (X, kX) altrimenti è $(X, X/k)$. Pertanto,

$$\begin{aligned}Y &= kX \cdot 1_{\{X=I\}} + \frac{1}{k}X(1 - 1_{\{X=I\}}) \\ &= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k}X \cdot 1_{\{X=I\}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Di conseguenza, \mathcal{C} può anche valutare la media dell'importo della busta (chiusa) \mathcal{B} condizionato dall'importo nella busta (chiusa) \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_k[Y|X] &= \mathbb{E}_k \left[\frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k}X \cdot 1_{\{X=I\}} | X \right] \\
&= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}} | X] \\
&= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} X \cdot \mathbb{E}[1_{\{X=I\}} | X] \\
&= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} X \cdot \mathbb{P}[X = I | X].
\end{aligned} \tag{10}$$

Si supponga ora che \mathcal{C} consenta al giocatore \mathcal{G}_0 di aprire la busta \mathcal{A} prima della decisione di optare o meno per l'altra e che si verifichi l'evento $\{X = x\}$, con x valore assumibile con probabilità non nulla o da I oppure da J . A questo punto, l'analisi deve tenere conto di questo *condizionamento*: l'insieme dei valori assumibili da I è diventato l'insieme $\{x/k, x\}$. Per rimarcare questa informazione aggiuntiva, il giocatore sarà indicato con \mathcal{G}_1 .

Allora, tenendo conto che per la (6) le alternative $\{X = I\}$ e $\{X = J\}$ sono equiprobabili, il teorema di Bayes consente a \mathcal{C} di ottenere:

$$\begin{aligned}
x \in S_I \cup S_J, \quad p_{k,x} &:= \mathbb{P}[X = I | X = x] = \frac{\mathbb{P}(X = I, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X = x | X = I]}{\mathbb{P}[X = x | X = I] + \mathbb{P}[X = x | X = J]} \\
&= \frac{\mathbb{P}(I = x)}{\mathbb{P}(I = x) + \mathbb{P}(J = x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(I = x)}{\mathbb{P}(I = x) + \mathbb{P}(I = x/k)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

In definitiva, dalle (10) e (11) si evince che:

$$x \in S_I \cup S_J, \quad \mathbb{E}_k[Y|X = x] = x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2 - 1}{k} p_{k,x} \right). \tag{12}$$

La (12) consente a \mathcal{C} , che conosce $p_{k,x}$, di calcolare il valore medio dell'altro importo quando egli sa che in una delle due buste c'è l'importo x . Invece, \mathcal{G}_1 conosce solo che tale valore medio è compreso nell'intervallo $[x/k, kx]$ e non può sostituire $p_{k,x}$ con $1/2$ per affermare, ragionamento erroneo \mathcal{R}_k , che:

$$\begin{aligned} x \in S_I \cup S_J, \quad \mathbb{E}_k[Y|X=x] &\equiv y_{k,x} := x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= x \frac{1/k + k}{2} > x. \end{aligned} \quad (13)$$

Si osservi che per $k=2$, la (13) fornisce il risultato del ragionamento erroneo \mathcal{R}_2 .

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 2. *Il giocatore \mathcal{G}_1 si trova nelle stesse condizioni di \mathcal{G}_0 con l'unica informazione aggiuntiva che egli sa che il minimo importo contenuto nelle due buste o vale x (con probabilità $p_{k,x}$ a lui non nota) oppure vale x/k .*

5 - Distribuzioni paradossali per l'importo minimo?

Nel caso del giocatore che ha la possibilità di aprire la busta \mathcal{A} la situazione può essere posta in maniera alternativa al seguente modo: il conduttore oltre a regalare a \mathcal{G}_1 l'importo x gli offre anche l'opportunità di partecipare ad una lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ a cui si accede pagando x e che, in virtù della (12), ha come guadagno atteso:

$$\begin{aligned} x \in S_I \cup S_J, \quad g_{k,x} &:= \mathbb{E}_k[Y|X=x] - x \\ &= x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2-1}{k} p_{k,x} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= x \frac{k-1}{k} [(k+1)p_{k,x} - 1].$$

In (Broome, 95) una distribuzione per l'importo minimo I che rende il guadagno atteso positivo per ogni importo x è detta essere *paradossale* e l'autore ne fornisce il seguente esempio.

Esempio 1. Con N numero aleatorio avente distribuzione geometrica di parametro $1/3$ sull'insieme dei numeri naturali, si considerino gli importi $I = 2^N$ e $J = 2I$ (quindi I ha supporto numerabile e media infinita). Con $k = 2$, dalla (11) e dalla (14) si ottiene:

$$p_{2,2^0} = \frac{1/3}{1/3 + 0} = 1 \Rightarrow g_{2,2^0} = 1, \quad (15)$$

e

$$\begin{aligned} n \geq 1, \quad p_{2,2^n} &= \frac{1/3 \cdot (2/3)^n}{1/3 \cdot (2/3)^n + 1/3 \cdot (2/3)^{n-1}} = \frac{2}{5} \Rightarrow g_{2,2^n} \\ &= \frac{2^n}{10}. \end{aligned} \quad (16)$$

Broome, conclude affermando che il giocatore che conosce l'importo della busta \mathcal{A} deve scegliere l'importo contenuto nella busta \mathcal{B} in quanto il guadagno atteso di $\mathcal{L}_{k,x}$ è positivo per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1. In base alla conclusione di Broome, l'esistenza di distribuzioni paradossali per I aggiungerebbe paradosso a paradosso: il giocatore non avrebbe nemmeno bisogno di aprire la busta \mathcal{A} scelta a caso per optare senza indugio per l'importo contenuto in \mathcal{B} .

Brams e Kilgour, ragionando allo stesso modo di Broome, alla fine della loro risposta alla lettera di Bill Mixon, affermano che ci sono leggi di probabilità per l'importo minimo I che per ogni valore di S_I inducono a optare per l'importo contenuto

nell'altra busta. Ma la questione non si chiude certamente così. Infatti, lo stesso Broome riconosce che la distribuzione da lui considerata per l'importo minimo I ha media infinita. Qui si fa osservare che, invece, tutto dipende dal fatto che S_I non è limitato e pertanto I può essere, con probabilità non nulla, una qualsiasi potenza di 2. Se, invece, fissato un numero naturale m , si condiziona l'importo minimo I in modo che per

$$n > m, \quad \mathbb{P}(I = 2^n) = 0, \quad (17)$$

allora, indicata con $c_{2,m}$ la nuova costante di normalizzazione, la (15) permane, la (16) è valida per $n = (1, 2, \dots, m)$ e in più, dal momento che l'importo minimo assume il valore $m + 1$ con probabilità nulla, dalla (11) e dalla (14) si ha:

$$p_{2,2^{m+1}} = \frac{0}{0 + 1/3 \cdot (2/3)^n} = 0 \Rightarrow g_{2,2^{m+1}} = -2^m. \quad (18)$$

Risulta allora evidente che, in generale, limitando l'importo determinato dal dispositivo \mathcal{D}_c c'è almeno un valore di x per il quale il guadagno atteso è negativo. Per l'analisi che si sta svolgendo si ottiene così il seguente risultato.

Risultato 3. *Il modello descritto nel Paragrafo 2 postula la limitatezza di S_I e pertanto esclude l'esistenza di distribuzioni paradossali per l'importo minimo.*

6 - La condizione generale di cambio

In questo paragrafo si suppone che il giocatore, indicato con \mathcal{G}_2 , oltre a conoscere il valore x contenuto nella busta A sia in grado di valutare p_{k,x_-} alla stregua di \mathcal{C} : è solo in questa situazione che ha senso porsi il problema della determinazione di un criterio per il cambio della busta. Allora, in (Brams &

Kilgour, 95) la condizione $G_{2,x} > 0$ è riportata in termini di $p_{2,x}$:

$$g_{2,x} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_2[Y|X = x] - x > 0 \Leftrightarrow p_{2,x} > \frac{1}{3}. \quad (19)$$

L'ultima disuguaglianza viene denominata dagli autori *condizione generale di cambio* (CGC) dell'importo deterministico x con l'importo aleatorio Y_x .⁶ Risulta agevole verificare che per un generico k la (19) diventa:

$$g_{k,x} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_k[Y|X = x] - x > 0 \Leftrightarrow p_{k,x} > \frac{1}{k+1}. \quad (20)$$

Qui si indicherà come condizione generale di cambio (CGC $_k$) una qualsiasi delle tre condizioni nella (20). Si osservi che la CGC $_k$ relativa a $p_{k,x}$ suddivide (0,1) in tre sottointervalli per ciascuno dei quali si possono fare differenti conclusioni:

1) se

$$0 \leq p_{k,x} \leq \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow -x \frac{k-1}{k} \leq g_{k,x} \leq 0,$$

allora G_2 rifiuta di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ e quindi accetta l'importo x ;

2) se

$$\frac{1}{2} \leq p_{k,x} \leq 1 \Leftrightarrow x \frac{(k-1)^2}{2k} \leq g_{k,x} \leq x(k-1),$$

allora G_2 accetta di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ e quindi opta l'importo Y_x ;

3) se

$$\frac{1}{k+1} < p_{k,x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < g_{k,x} < x \frac{(k-1)^2}{2k},$$

⁶ Con Y_x si deve intendere l'importo della busta \mathcal{B} noto che nella busta \mathcal{A} c'è l'importo x .

la CGCk impone a \mathcal{G}_2 di partecipare di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ anche nei casi in cui la probabilità di vincita dell'importo kx è molto minore di $1/2$.

I primi due punti sono ovvi e non lasciano adito a dubbi. Il terzo individua l'intervallo critico $\frac{1}{k+1} < p_{k,x} < \frac{1}{2}$ che, a nostro parere, necessita di ulteriori approfondimenti.

La condizione generale di cambio è largamente ritenuta valida e comunemente accettata da numerosi autori come base per i loro contributi, ma qui si fa notare che essa è eccessivamente sbilanciata a favore del cambio. Infatti, il punto 3) evidenzia che la CGCk non differenzia tra i valori di $p_{k,x}$ nell'intervallo critico, per cui ci potrebbero essere delle istanze nelle quali \mathcal{G}_2 opta per Y_x sulla base di un guadagno atteso irrisorio rispetto a x .

Esempio 2. Con $k = 100$ e $x = 500$ si supponga che \mathcal{G}_2 abbia valutato che per ogni coppia del tipo $(500, 50000)$ ce ne sono 99 del tipo $(5, 500)$ ovvero che $p_{100,500} = 1/100$. Allora, dal momento che $1/100 > 1/101 = 1/(k+1)$, applicando la condizione generale di cambio, \mathcal{G}_2 rinuncia a 500 per vincere 50000 con probabilità $1/100$ oppure 5 con probabilità $99/100$. In più, si noti che dalla (14) risulta $g_{100,500} = 4,95$. Riassumendo, \mathcal{G}_2 rischia di perdere 495 con probabilità $99/100$ in virtù del fatto che il guadagno atteso vale $0,0099x$.

D'altra parte, c'è ancora un'obiezione che può essere mossa alla CGCk: un criterio basato sul guadagno atteso della lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ che senso ha per \mathcal{G}_2 che è ammesso solo per una volta ad essa? Allora, nel tentativo di attenuare l'applicazione della condizione generale di cambio si propone la seguente modifica: \mathcal{G}_2 accetta di partecipare alla lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ con probabilità

$$q_{k,x} = \frac{p_{k,x} - \frac{1}{k+1}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}}. \quad (21)$$

In (McDonnell & Abbott, 2009) sono proposte strategie di cambio basate sull'importo x della busta aperta.

Esempio 3. Con le posizioni fatte nell'Esempio 2, ovvero $k = 100$, $x = 500$ e $p_{100,500} = 1/100$ risulta

$$q_{k,x} = \frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{101}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{101}} = \frac{1}{4950} \cong 2 \cdot 10^{-4}.$$

dalla quale si evince che la condizione generale di cambio verrebbe applicata con probabilità estremamente piccola. Ben diversa è la situazione descritta nell'Esempio 1 nella quale $k = 2$, $x = 2^n$, $n \neq 0$ e $p_{2,x2^n} = 0,4$. Infatti, in tal caso, risulta

$$q_{2,2^n} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{2}{5} = 0,4,$$

che porterebbe ad applicare la condizione generale di cambio quattro volte su dieci.

Da un punto di vista operativo la modifica proposta richiede che \mathcal{G}_2 azioni ancora una volta il suo generatore di numeri casuali $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$.

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 4. Il giocatore \mathcal{G}_2 accetta l'importo x se $q_{k,x} \leq 0$; invece, egli applica la condizione generale di cambio se $q_{k,x} \geq 1$. Inoltre, quando $p_{k,x} \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}\right)$, \mathcal{G}_2 accetta di partecipare alla lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ con probabilità $q_{k,x}$; in altri termini \mathcal{G}_2 applica la condizione generale di cambio con una probabilità che tiene conto sia della posizione di $p_{k,x}$ rispetto all'estremo inferiore dell'intervallo critico che

dell'ampiezza di quest'ultimo. In quest'ultimo caso, egli applica la condizione generale di cambio se $\mathcal{D}_G < q_{k,x}$.

7 - Uno sguardo al problema dalla parte del conduttore

Se il giocatore non è in grado di determinare la probabilità $p_{k,x}$ l'analisi sopra sviluppata non è a lui di alcun beneficio, ovvero ci si ritrova nel caso del giocatore \mathcal{G}_1 . Invece, il conduttore che conosce la legge di I e gioca tutte le partite, potrebbe pensare di sfruttarla nel tentativo di limitare le uscite dal suo capitale iniziale. Ma ciò non è possibile.

In primo luogo, si osservi che quando \mathcal{C} osserva l'importo x contenuto nella busta aperta dal giocatore è sì in grado di valutare il segno di $g_{k,x}$ e quindi stabilire se la lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ è a lui favorevole o meno ma in quel momento egli non è in grado di modificare il corso della partita: spetta al giocatore decidere se partecipare o meno alla lotteria.

D'altra parte, nel modello da noi proposto è già stato visto che non esistono distribuzioni paradossali (c'è almeno un valore di x che cambia il segno di $g_{k,x}$) e questo toglie al conduttore qualsiasi speranza di determinare una distribuzione per l'importo I che gli potrebbe garantire un vantaggio medio. A conferma di ciò, posto

$$G_{k,x} := \mathbb{E}_k[Y|X] - X, \quad (22)$$

per la (14) risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_{k,x}) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}_k[Y|X] - X\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}_k[Y|X]\} - \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}\left\{\frac{X}{k} + \frac{k^2 - 1}{k} \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}}|X]\right\} - \mathbb{E}(X), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}}|X]\}, \\
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X=I\}}), \\
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{\mathbb{E}(I)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue dalla (2), dal fatto che in media gli importi delle due buste sono equivalenti per cui,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k+1}{2} \mathbb{E}(I), \quad (22)$$

e dall'essere certi di non incorrere nella forma $\infty - \infty$.

Bibliografia

BRAMS S. J., KILGOUR D. M. (1995). The Box Problem: To Switch or Not To Switch, *Mathematics Magazine*, vol. **68**(1), pp 27–34.

BROOME J. (1995). The Two-Envelope Paradox, *Analysis*, vol. **55**(1), pp 6–11.

de CANSON C. (2017). The Paradox of the Two Envelopes, published online at: <https://www.lse.ac.uk/philosophy/wp-content/uploads/2017/03/Two-Envelope-Paradox.pdf>.

MARKOSIAN N. (2011). A Simple Solution to the Two Envelope Problem. *Logos & Episteme*, vol. **II** (3), pp 347–357.

MCDONNELL M. D., ABBOTT D. (2009). Randomized switching in the two-envelope problem. *Proc. R. Soc. A*, vol. **465**, pp 3309–3332.

NALEBUFF B. (1989). The Other Person's Envelope is Always Greener, *Journal of Economic Perspectives*, vol. **3** (1), pp 171–181.



Anno VIII, N. 15 giugno 2021

ARTE SCIENZA

Platone e la matematica. Parte II
di Antonio Fontana, Agnese Ilaria Telsoni, Carlo Toffalori

*Dorothy Nevile Lees:
una vita per Edward Gordon Craig*
di Amalia Imperato

Le armonie celesti e il metodo scientifico
di Stefano Isola

I quadri matematici di Mario Dell'Agata
di Anna Maria Dell'Agata

*Quando Duce faceva rima con luce:
la costruzione del mito tramite i mass media*
di Antonio Castellani

Parva Naturalia. Parte II
di Carlo Francou

La Letteratura minore nel Novecento
di Franco Eugeni

Il parto della donna e altre imperfezioni naturali
di Isabella De Paz e Ferdinando Gargiulo

A lezione dagli alberi
di Luigi Campanella

The Reign of King Edward the Third
di Luca Nicotra

Stato e società cristiani in Vladimir Solov'ëv
di Massimiliano Mirto

ISSN 2385-1961