

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVI - Serie IV – volume III (1)
giugno 2021**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

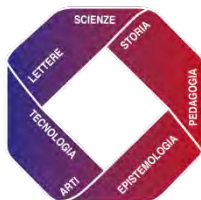
PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

**Fondato da Davide Besso,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXVI - Serie IV - Volume III (1)
Giugno 2021**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Alberto Trotta (Salerno)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra

Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616

luca.nicotra1949@gmail.com.

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2019 Edizioni AFSU -
Teramo - ISSN Online: 2612-6745
® Registrazione n.695/2019 del 19
luglio 2019 Tribunale di Teramo

Tutti i diritti riservati

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Segreteria di redazione:

Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)

catalani.giovanni@libero.it

Alberto Trotta (Salerno)

albertotrotta@virgilio.it

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, al prof. Giovanni Catalani giovannicatalani@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Alberto Trotta, (albertotrotta@virgilio.it) in copia word per il referaggio e successivamente se accettato preparato secondo il format della rivista.

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

INDICE

Articoli

Franco Eugeni	7
<i>La geometria proiettiva ed affine I: la via assiomatica e i piani finiti</i>	
Aniello Buonocore, Luigia Caputo	25
<i>Un Modello per il Problema delle Due Buste</i>	
Marco D'Errico	43
<i>L'insegnamento dei numeri naturali nella scuola secondaria di I grado</i>	
Luca Nicotra	63
<i>Vito Volterra: matematico universale</i>	
Luciano Corso	105
<i>Spunti di analisi non standard</i>	
Ferdinando Casolaro	125
<i>Decisione per integrali indefiniti</i>	
Corrado Valletta	135
<i>Renato Caccioppoli</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	141
<i>Norme per gli autori</i>	145

Spigolature sui numeri primi

1 - Nella corrispondenza di Eulero con Christian Goldbach, quest'ultimo formulò la famosa congettura che porta il suo nome, ancora oggi non dimostrata, asserente che ogni numero pari n da 4 in poi è somma di due primi, che assieme all'ipotesi di Riemann, e alla infinità o meno dei primi gemelli, rimangono problematiche indimostrate a più di un secolo dalla loro formulazione. Si noti che allo stato attuale la congettura di Goldbach è vera per $n < 2 \times 10^{18}$.

I migliori risultati in questa direzione sono dati dal Teorema di Chen:¹ *ogni numero pari sufficientemente grande è la somma o di due numeri primi, oppure di un primo e di un semiprimo (prodotto di due primi anche coincidenti).*

2 - Una lunga interessante sequenza di numeri composti è la seguente:

$$(n+1)! + 2, \dots, (n+1)! + m, \dots, (n+1)! + n + 1$$

che è una sequenza di numeri composti, perché essendo $m < n + 2$, segue che m è un divisore di $(n+1)! + m$. Si noti che la sequenza cresce e si allarga al crescere di n secondo $n!$.

3 - Già nel XVIII secolo era nota una curiosissima serie di numeri primi: 31, 331, 3.331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331. E poi? Basta: il numero successivo, 333.333.331, non è primo, essendo uguale a $17 \times 19.607.843$.

4 - Il numero primo 73.939.133 è molto particolare: rimuovendo una cifra per volta dalla destra si ottengono sempre e solo numeri primi: 7.393.913, 739.391, 73.939, 7.393, 739, 73, 7. È il numero primo più grande (tra quelli conosciuti finora, naturalmente) a godere di questa proprietà.

¹ Chen Jingrun (1933-1996) è stato uno dei più importanti e ultracelebrati matematici cinesi, dando importanti contributi alla teoria dei numeri.

La geometria proiettiva ed affine I : la via assiomatica e i piani finiti

Franco Eugeni*

*Già Professore Ordinario di Filosofia della Scienza. Presidente dell'AFSU



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.036

*Sunto: Iniziamo una serie di alcuni lavori divulgativi sulle basi della geometria, dei quali questo lavoro è il primo. Usualmente si presentano gli spazi proiettivi definiti sul campo reale o al più su un generico campo. Gli spazi affini si derivano da questi o si definiscono in modo indipendente. La via assiomatica conduce ad una visione più generale, seguendo quell'indirizzo che appare nell'opera fondamentale di Beniamino Segre: *Lectures on modern geometry*, nella quale viene introdotto il concetto di spazio grafico. In dimensione almeno tre, la nozione di spazio grafico (irriducibile) equivale, per isomorfismo, a quella di spazio proiettivo su un campo. In dimensione due, le cose sono ben differenti, l'assiomatica generale ridotta a dimensione due presenta una anomalia, oltre ai piani proiettivi costruiti su un campo, ve ne sono altri, che appaiono non coordinatizzabili su un campo. Gioca a riguardo un ruolo essenziale la validità o meno della cosiddetta "configurazione di Desargues". La validità della configurazione assicura che i relativi piani sono isomorfi ai piani su un campo, detti a riguardo "desarguesiani". Esistono tuttavia piani non desarguesiani. Si completa l'esposizione presentando il caso dei piani finiti, per i quali nascono problematiche di enorme interesse.*

Parole Chiave: : Assiomi – Spazi proiettivi su un campo – Campi di Galois – Teorema di Desargues –piani non desarguesiani.

Abstract: *The purpose of this first article is to construct a series of some divulgative paper on the basis of geometry. Usually the projective spaces is defined on the real field or at most on a generic field. Affine spaces are derived*

from these or are defined independently. The Assiomatic system leads to a more general vision, following that direction that appears in the fundamental work of Beniamino Segre: Lectures on modern geometry, in which the concept of graphic space is introduced. In at least three dimension, the notion of (irreducible) graphic space is equivalent, by isomorphism, to that of projective space on a field. In two dimension, the questions are very different, the general axiomatics of dimension two presents an anomaly, in addition to the projective planes built on a field, there are other types of planes, which appear not to be coordinated on a field. In this regard, the validity or not of the so-called "Desargues configuration" plays an essential role. The validity of the configuration ensures that the related planes are isomorphic to the planes over a field, called "desarguesian". However, there are non-Desarguesian plans. The paper is completed by presenting the case of finite planes, for which many problems of enormous interest arise.

Keywords: axioms, projective spaces over a field – Desargues Theorem – non desarguesian planes.

1 - Gli spazi proiettivi grafici

Sia S un insieme di elementi detti *punti*. Indichiamo con $\mathcal{B}$ un insieme di famiglie di parti di S denotate con:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \}$$

dove ciascuna famiglia $\mathcal{B}_d$ è detta la famiglia di sottospazi di dimensione d . La coppia $(S, \mathcal{B})$ è detta una *struttura geometrica*.

Una struttura geometrica $(S, \mathcal{B})$ si chiama uno *spazio proiettivo grafico* ¹di dimensione n (n intero con $n \geq 2$) se per essa valgono i seguenti assiomi:

I.- $\mathcal{B}_{-1} = \emptyset$, $\mathcal{B}_0$ è l'insieme i cui elementi sono quelli di S , pensati come sottospazi di dimensione 0, gli elementi di $\mathcal{B}_1$ sono chiamati *rette* gli elementi di $\mathcal{B}_2$ sono chiamati *piani*, gli

¹Cfr. Segre B.(1961) Chap.14, n.105. Nel volume tali strutture sono denominate solo spazi grafici, Cf. Ceccherini P.V., (1967).

elementi di $\mathcal{A}_d$ sono chiamati *sottospazi di dimensione d*, e gli elementi di $\mathcal{A}_{n-1}$ sono chiamati *iperpiani*.

II. Se il sottospazio $S_h \in \mathcal{A}_h$ è contenuto in $S_k \in \mathcal{A}_k$ allora è $h \leq k$, eguaglianza valendo se e solo se $S_h = S_k$.

III.- L'intersezione insiemistica $S_h \cap S_k$ di due sottospazi di rispettive dimensioni h, k è un sottospazio S_i di dimensione i , chiamato lo *spazio intersezione* di S_h ed S_k . Tale dimensione vale -1 se i due sottospazi sono disgiunti.

Nota. Da questo postulato segue che esiste uno ed un solo sottospazio di dimensione minima j detto lo *spazio join* (congiungente) S_j di S_h ed S_k , contenente i due dati sottospazi S_h ed S_k .

IV. Vale la relazione $h+k = i+j$ (relazione di Grassman).

Si prova che tali assiomi non sono indipendenti, ma tuttavia questo fatto non è di grande interesse perché è facile provare che essi sono compatibili potendo noi assegnare un modello numerico di spazio grafico denominato *spazio proiettivo numerico*² di dimensione n .

Sia K un campo finito o infinito. Definiamo l'insieme S come l'insieme delle $(n+1)$ -ple di elementi di K del tipo :

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

tali inoltre che per $(h=0, 1, \dots, n)$ e per $p \neq 0$ sia:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) = (y_0, y_1, \dots, y_n) \iff x_h = p y_h,$$

Chiamiamo sottospazio S_d di dimensione d ($d = 1, 2, \dots, n$ -

² Tali spazi nelle opere iniziali di Segre B. sono chiamati spazi lineari.

1) l'insieme delle $(n+1)$ -ple che sono soluzioni non nulle di un sistema lineare di $n-d$ equazioni in $n+1$ incognite del tipo:

$$a_{h0} x_0 + a_{h1} x_1 + \dots + a_{hn} x_n = 0$$

dove $h = 0, 1, \dots, n-d$, e la matrice dei coefficienti delle incognite ha caratteristica massima, ovvero esiste nella matrice un minore di ordine $n-d$ che non è nullo.

Tale struttura si può pensare derivata da uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$, nel quale due vettori sono dichiarati equivalenti se e solo se sono proporzionale. Da tale considerazione deriva facilmente la validità degli assiomi I/IV.

Ancora una idea da chiarire. Siano (S, B) ed (S', B') due spazi grafici con S ed S' privi di punti comuni. Definiamo una nuova struttura (S^*, B^*) dove:

$$S^* = S \cup S', \quad B^* = B \cup B' \quad (d > 1)$$

mentre la famiglia $(B_1)^*$ è formata dall'unione di B_1 con l'insieme dei 2-insiemi del tipo $\{x, y\}$ con $x \in S$ ed $y \in S'$. Si dimostra facilmente che (S^*, B^*) è ancora uno spazio grafico che prende il nome di *spazio proiettivo grafico riducibile*. Uno spazio non costruito in tal modo si chiama *irriducibile*.

L'inconveniente si supera aggiungendo agli assiomi I/IV il seguente:

V.- (assioma di Fano). Ogni retta dello spazio proiettivo grafico $(S, \mathcal{B})$ ha almeno tre punti.

Gli spazi grafici soddisfacenti I/V sono irriducibili.

Si può dimostrare³ il seguente notevole:

Teorema fondamentale. *Ogni spazio proiettivo grafico irriducibile di dimensione $n \geq 3$ è isomorfo ad uno spazio proiettivo numerico di ugual dimensione, su un opportuno campo.*

A partire dalla struttura geometrica è anche possibile definire la struttura di campo, ma ciò esula dalle nostre considerazioni poiché nel seguito limiteremo le nostre considerazioni al campo reale e ai campi di Galois.

Tale teorema non è più valido per $n = 2$ e per chiarire la cosa occorre enunciare il seguente classico:

Teorema di Desargues. *Sia $(S, \mathcal{B})$ uno spazio proiettivo grafico irriducibile di dimensione $n \geq 3$. Siano ℓ, m, n tre distinte rette concorrenti in un punto O . Siano dati i punti distinti*

$$A, A' \in \ell, B, B' \in m, C, C' \in n.$$

Siano

$$U = AB' \cap A'B, V = AC' \cap A'C, W = BC' \cap B'C,$$

allora U, V, W sono allineati.

La struttura geometrica $(\mathbf{D}, \mathcal{G})$ definita dai 10 punti

$$D = \{O, A, A', B, B', C, C', U, V, W\}$$

e dalla famiglia $\mathcal{G}$ formata dai 10 blocchi, ciascuno di 3 elementi

$$OAA' - OBB' - OCC' - AUB' - A'UB$$

$$AVC' - A'VC - BWC' - B'WC - UVW,$$

è chiamata configurazione simmetrica di Desargues e la si denota con il simbolo 10_3 . In questa struttura ogni blocco ha 3 punti e per ogni punto passano tre blocchi, come di immediata verifica visiva..

³ Per la dimostrazione cfr. Segre B. (1961), op.cit. Chap.14, n.107.

Nel caso degli assiomi I/V ridotti al caso di dimensione $n = 2$, il Teorema fondamentale (in dimensione $n \geq 3$) non sussiste più. Si può dimostrare che:⁴

Teorema fondamentale in dimensione 2. *Dato uno piano proiettivo grafico, se in esso oltre agli assiomi I/V vale anche la configurazione di Desargues per ogni sistema di punti $\{O, A, A', B, B', C, C', U, V, W\}$ allora il piano grafico è isomorfo ad un piano proiettivo numerico su un campo.*

N.B. La configurazione 10_3 di Desargues non è un piano proiettivo in quanto esistono coppie di punti come O ed U per i quali non passa alcun blocco della struttura ed esistono anche coppie di punto-blocco come O e UVW tali che per O passano tre blocchi OAA'- OBB'- OCC' "paralleli" o meglio "non- incidenti" al blocco dato.

Sia $(S, \mathcal{B})$ uno spazio proiettivo grafico e sia :

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \}$$

la famiglia dei sottospazi soddisfacenti gli assiomi I/V.

Fissiamo un iperpiano $H \in \mathcal{B}_{n-1}$. Definiamo una nuova struttura $(A, \mathcal{A})$, dove $A = S \setminus H$ e la famiglia:

$$\mathcal{A} = \{ \mathcal{A}_{-1}, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \}$$

è tale che :

$$\mathcal{A}_k = \{ S_k \setminus H, \forall S_k \in \mathcal{B}_k \}.$$

La struttura $(A, \mathcal{A})$, sopra definita si chiama Spazio affine grafico di dimensione n associato (o dedotto) dallo spazio proiettivo grafico.

⁴ Segre B. (1961), op.cit. chap.14, n.108.

2 – Piani proiettivi e affini

Una struttura geometrica $(S, \mathcal{R})$, dove $\mathcal{R}$ è una unica famiglia di parti dette rette, si dice che è un piano proiettivo⁵ (grafico irriducibile) se per essa valgono i seguenti assiomi (dedotti dagli assiomi I/V):

- 1.- Due punti distinti sono contenuti in una ed una sola retta
- 2.- Due distinte rette si intersecano in esattamente un punto
- 3.- (Fano) Ogni retta possiede almeno 3 punti

Si prova che

Prop.1 *In un piano proiettivo due differenti rette sono equicardinali.*

Dim. Siano m ed m' due rette e sia C il punto comune ad m ed m' . Su m esistono due distinti punti A, B diversi da C ed analogamente su m' esistono due distinti punti A', B' diversi da C . Dal punto S comune ad AA' e BB' esterno alle rette m ed m' per proiezione otteniamo una biezione tra m ed m' . #

Prop.2.- *In un piano proiettivo esistono insiemi di quattro punti a tre a tre non allineati, ovvero come suol dirsi formano un 4 -arco.*

Dim. Si noti che i 4 punti A, A', B, B' costruiti nella precedente dimostrazione formano un 4- arco.#

Un piano proiettivo sarà denotato con la lettera π e un esempio è dato dal piano proiettivo (numerico) desarguesiano, su un campo K , indicato con $PG(2.K)$, piano che

⁵ Nel seguito sotto intenderemo con la dicitura piano proiettivo che è grafico e irriducibile e preciseremo sempre quando è desarguesiano.

possiamo costruire, specializzando la definizione generale di spazio proiettivo numerico, come segue.

Chiamiamo *punti* le terne (x_0, x_1, x_2) di elementi del campo non tutti nulli e definiti a meno di un fattore. Chiamiamo *rette* le soluzioni non nulle delle equazioni:

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$$

dove (a, b, c) è un punto.

Nel caso che il piano proiettivo sia un piano finito con una retta⁶ di $q+1$ punti, il piano si denoterà con π_q e l'intero q si dirà l'*ordine* del piano. Se inoltre il piano proiettivo è desarguesiano allora il campo K finito è un campo di Galois⁷, denotato usualmente con $GF(q)$, e il piano proiettivo numerico corrispondente si denoterà con $PG(2, q)$.

Naturalmente nel caso dei piani grafici proiettivi occorre sempre contemplare il fatto che accanto ai piani proiettivi desarguesiani, che sono quelli costruiti su un campo, e per i quali, nel caso finito, q è la potenza di un primo, esistono anche i piani non desarguesiani⁸, per i quali, nel caso finito q potrebbe, a priori, non essere una potenza di un primo. Va solo osservato, che ad oggi non si è riusciti a dare esempi di piani non desarguesiani finiti aventi un ordine che non è potenza di un primo.

Teorema. *In un piano grafico proiettivo finito di ordine q , per ogni punto passano $q+1$ rette, nel piano ci sono q^2+q+1 punti e*

⁶ Per la proposizione 1 se una retta ha $q+1$ punti allora ogni retta ha $q+1$ punti.

⁷ L'indicazione $GF(q)$ sta per Galois Field di ordine q , dove q è il numero degli elementi del campo. Ricordiamo un campo finito o di Galois esiste se e solo se q è una potenza di un primo, e che due campi di Galois di egual ordine sono isomorfi.

⁸ A riguardo ci riferiamo ai lavori citati di Barlotti A (1971), Bose R.C. (1973), Eugeni F. (1996), Lombardo Radice L (1961), Rosati L.A. (1964), Moulton F.R. (1902), Tallini G. (2005), Segre B. (1959) e (1961),

altrettante rette.

Dim. Siano m e P una retta e un punto non appartenentesi. Da P passano esattamente $q+1$ rette incidenti m .

Sia ora Q un punto di m , su m ci sono q punti diversi da Q , e da Q escono q rette diverse da m , ciascuna avente q punti oltre Q . I punti del piano sono allora: $q(q+1) + 1$. Per dualità degli assiomi le rette sono in pari numero dei punti. #

Se un piano proiettivo è desarguesiano, cioè $\pi_q = PG(2, q)$, allora $q = p^h$. Dalla letteratura sappiamo che per ogni $q = p^h$ esiste esattamente un piano proiettivo $PG(2, q)$, per il resto, e per i casi bassi con $2 \leq q \leq 10$, sappiamo quanto segue.

Non esistono piani proiettivi di ordini $q = 6, 10$.

Per $q = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ esiste un solo piano proiettivo desarguesiano. Per $q = 9$ sappiamo che esistono, oltre a $PG(2, 9)$, esattamente tre piani, non desarguesiani, tra loro non isomorfi.

L'unico teorema noto che fornisce qualche indicazione è il:

Teorema di Bruck -Ryser. *Se $q = 1 + 4k$, oppure $q = 2 + 4k$ con $k \geq K$, ed esiste π_q , segue che q è somma di due quadrati.*

Da questo teorema, di non semplice dimostrazione, segue che quando $q = 6, 14, 21, 22, 26, 30$ non esistono piani proiettivi. Si è provato inoltre che per $q = 10, 12, 15, 18, 20, 24, 28$ il teorema di B&R non è applicabile.

La questione del piano d'ordine 10 è interessante. In passato molti autori hanno scritto interi lavori che iniziano con "se esiste il piano d'ordine 10 allora ...". Oggi si è provata la non esistenza di questo piano ma con una dimostrazione, di quelle che possono chiamarsi "un TECNOREMA", cioè una prova mediante Computer, eseguita in tempi molto lunghi

(sembra più di un anno) ma in maniera da costituire una esperienza ripetibile. L'eventuale esistenza di tale piano è stata ricondotta, facendo ricorso alla Teoria dei Codici, alla esistenza di un certo numero di configurazioni o combinazioni di punti in modo del tutto analogo a quanto fatto per il problema dei 4 colori. La non esistenza delle configurazioni è stata stabilita in modo esaustivo dal Computer. L'esame esaustivo diretto non era possibile poiché sarebbero occorsi secoli e secoli. Dunque sappiamo che il piano d'ordine 10 non esiste, indipendentemente dalla filosofia dell'accettare o meno una prova al computer. È vero che un tecnorema è un esperimento e quindi, almeno in teoria, si può, se si vuole, ripeterlo. E ben difficile stabilire dei confini filosofici in questi casi. Vi sono esempi di teoremi manuali che costituiscono di fatto una sorta di esperienza non ripetibile. Un esempio è il teorema di classificazione dei gruppi finiti sporadici, detto delle 15.000 pagine. Ciò dipende dal fatto che il corpo di tutti i lavori che hanno condotto negli anni al risultato consta di circa 15.000 pagine.

Per tornare alle nostre considerazioni, accanto ai piani proiettivi occorre considerare i piani grafici affini⁹. Di questi possiamo anche assegnare una assiomatica indipendente dal contesto fin qui svolto e precisamente dire che una struttura geometrica $(A, \mathcal{R})$, dove $\mathcal{R}$ è una famiglia di blocchi detti *rette*, è un piano affine se:

- 1.- *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*
- 2.- *Ogni retta ha almeno due punti ed esistono tre punti non appartenenti ad una stessa retta.*
- 3.- *Dati un punto P ed una retta r con P non appartenente ad*

⁹ Che chiameremo semplicemente affini.

r, esiste una ed una sola retta per *P* (detta la parallela) non avente punti in comune con *r* (l'unicità implica banalmente che la relazione di parallelismo è simmetrica e transitiva).

Un piano affine si denota α .

Naturalmente è sempre possibile immergere un piano affine α in un piano proiettivo secondo la seguente procedura.

Sull'insieme $\mathcal{R}$ delle rette del piano affine consideriamo la relazione $\approx$ di parallelismo-coincidenza, che è chiaramente una relazione di equivalenza, che per passaggio al quoziente definisce l'insieme quoziente $\mathcal{R}/\approx$ detto *insieme delle direzioni* del piano affine. Costruiamo ora un nuovo spazio geometrico $(S^\wedge, \mathcal{B}^\wedge)$ dove:

$S^\wedge$ è l'insieme dei punti del piano affine detti *punti propri* e delle direzioni dette *punti impropri*. Ovvero :

$$S^\wedge = A \cup (\mathcal{R}/\approx)$$

L'insieme $\mathcal{B}^\wedge$ è costituito dalle rette del piano affine dette *rette proprie*, a ciascuna delle quali è stata aggiunta la sua direzione come suo punto improprio, e da una nuova retta, detta *retta impropria*, formata dall'insieme di tutte le direzioni del piano, cioè $(\mathcal{R}/\approx)$. Lo spazio $(S^\wedge, \mathcal{B}^\wedge)$, definito sopra è un piano proiettivo ampliamento del piano affine dato. Naturalmente un piano affine $(A, \mathcal{R})$ si dirà desarguesiano o non desarguesiano secondo che tale sia il piano proiettivo $(S^\wedge, \mathcal{B}^\wedge)$, suo ampliamento.

Se il piano affine in esame è desarguesiano, rispetto ad un campo K , lo si denota con $AG(2,K)$ e si può presentare come segue. Un generico punto *P* del piano è rappresentato da:

$$P(x,y) , \quad \forall x,y \in K.$$

Una retta, $\forall a,b,c \in K$ con $(a,b) \neq (0,0)$, si rappresenta come insieme delle soluzioni di una equazione lineare del tipo:

$$a x + b y + c = 0.$$

Definiamo il vettore $\mathbf{u} = P_1P_2$, di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ quello di componenti $(x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}$, così che si può scrivere formalmente $P_1 = P_2 + \mathbf{u}$, relazione questa che esprime la *legge di traslazione*. Si osservi che l'insieme dei vettori aventi un primo estremo in un fissato punto Q costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Per quanto riguarda un *piano affine desarguesiano*, quindi a coordinate in un campo K , ai fini del suo ampliamento in un piano proiettivo desarguesiano "numerico", è possibile costruire una sua rappresentazione in *coordinate omogenee*. Consideriamo, per questo le terne (x_0, x_1, x_2) di elementi del campo K , non tutti nulli e definiti a meno di un fattore.

Poniamo ora se $P(x, y)$ è un punto di $AG(2, K)$ una corrispondenza tra tali punti detti *propri* e le terne con $x_0 \neq 0$, definita dalle:

$$x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0.$$

Se invece si considera la retta di $AG(2, K)$ di equazione:

$$a x + b y + c = 0$$

ad essa associamo la terna $(0, b, -a)$, strettamente connessa con la direzione della retta stessa, direzione detta *punto improprio*.

Dunque i punti impropri sono caratterizzati dall'equazione:

$$x_0 = 0.$$

detta equazione della retta impropria.

Ciò premesso $\forall a, b, c \in K$, dove (a, b, c) è un punto, chiamiamo *rette* le soluzioni non nulle delle equazioni:

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0.$$

Si noti che ora nell'ampliamento, la retta di equazione:

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$$

al variare del punto (a, b, c) rappresenta tutte le rette proprie ed improprie, e se $(a, b) \neq (0, 0)$ è soddisfatta da tutti i suoi punti propri e dall'unico punto improprio.

Trattiamo ora il caso dei *piani affini finiti*. Per via del fatto che un piano affine desarguesiano o no è immergibile in un piano proiettivo si ha che:

Teorema. *Sia dato un piano affine finito. Allora ogni retta ha q punti, da ogni punto escono $q+1$ rette, ci sono $q+1$ direzioni, e un fascio di rette parallele è formato da $q+1$ rette, infine il piano ha q^2 punti e contiene $q^2 + q$ rette.*

L'intero q , esprime il numero dei punti di una retta affine, si chiama *ordine del piano affine*. Un piano affine finito si denota con il simbolo α_q , e nel caso desarguesiano, nel quale il piano è a coordinate in un campo di Galois $GF(q)$, il piano affine desarguesiano corrispondente si denota con $AG(2,q)$, e la sua unicità per ogni ordine q è assicurata dall'unicità, a meno di isomorfismi del corrispettivo ampliamento proiettivo.

3 – Un esempio di piano non desarguesiano

Un modello di piano, nel quale non vale il teorema di Desargues, fu costruito da David Hilbert (1862-1943) nel 1901, per ragioni epistemologiche. Nel 1902 l'astronomo americano Forest Ray Moulton¹⁰ (1872-1952), riprendendo e semplificando l'idea di Hilbert, costruisce un nuovo modello, piuttosto semplice, che da lui prese il nome di *Piano di Moulton*. Tuttavia questo modello lo riportiamo per cronologia storica, ma in realtà non fa al nostro caso, in quanto il piano di Moulton non è un piano affine, mancando in esso l'unicità della parallela.

¹⁰ F.R. Moulton 1902.

I punti del piano di Moulton, sono le usuali coppie (x,y) di numeri reali. Le rette sono di due tipi:

Rette di I tipo ($m \leq 0$). Sono le rette del piano della ordinaria geometria di rispettive equazioni:

$$x=h, \quad y=mx+q \text{ con } m \leq 0.$$

Rette di II tipo o rette spezzate ($m > 0$). Le nuove rette sono:

$$y = \begin{cases} mx + q & \text{se } y \geq 0 \\ 2mx + 2q & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

che scriveremo semplicemente nella forma:

$$(y=mx+q, \text{ se } y \geq 0 - y=2mx+2q \text{ se } y < 0).$$

Notiamo che le due semirette della spezzata si raccordano nel punto $(-q/m, 0)$ dell'asse delle ascisse.

Si dimostra con qualche calcolo, ma agevolmente, che nel piano di Moulton valgono i primi due assiomi di piano affine. L'unica attenzione deve aversi quando i due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono tali che $y_1 > 0$ con $y_2 < 0$ e i due punti sono tali che la pendenza della retta $P_1 P_2$, del piano euclideo sottogiacente, è positiva. In tal caso considerati i due fasci euclidei:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{per } P_1$$

$$y - y_2 = 2m(x - x_2) \quad \text{per } P_2$$

è sufficiente imporre che per $y = 0$, le due rette abbiano la medesima ascissa. Ciò implica che:

$$2m(x_1 - x_2) = 2y_1 - y_2,$$

da cui m e la susseguente retta di II specie.

Tuttavia si prova facilmente che non vale l'assioma di unicità della parallela. Ad esempio dato il punto $A(1,0)$ e la retta di II specie $(y=x, y \geq 0 - y=2x, y < 0)$, dal punto A escono le infinite parallele di II specie:

$$(y = m x - m, y \geq 0 - y = 2m x - 2m, y < 0) \text{ con } \frac{1}{2} \leq m < 2.$$

Supporremo inoltre che il piano di Moulton, sia ampliato dalle direzioni delle rette di I specie e da quelle di II specie con $y \geq 0$, così che tutti i punti all'infinito compaiono una ed una sola volta, associate ad una retta..

Tutto ciò chiarito, mostriamo che nel piano di Moulton, ampliato nel modo indicato, non vale il Teorema di Desargues.

Siano $O = Y^\infty$, $A(-1,1)$, $B(0,2)$, $C(1,1)$, $A'(-1,-1)$, $B'(0,0)$, $C'(1,-1)$.
 BC e $B'C'$ si incontrano in $U^\infty(0,1,-1)$, AC ed $A'C'$ si incontrano in X^∞ .

Dunque per l'allineamento AB ed $A'B'$ dovrebbero incontrarsi in un punto all'infinito. Ma la retta AB essendo di II specie ha la forma: $(y = -x+2, y \geq 0 - y = -2x + 4, y < 0)$, pertanto la retta $A'B'$ che ha la forma $(y = (1/2)x, y \geq 0 - y = x, y < 0)$ incontra AB nel punto $(-4,-4)$ che è invece proprio.

Esempi significativi di piani affini e proiettivi non desarguesiani provengono dalla teoria delle fibrazioni.

Sia dato uno spazio proiettivo reale $PG(3, \mathbb{R})$, chiamiamo fibrazione totale $\mathcal{F}$ una famiglia di rette a due a due disgiunte, che ricoprono lo spazio. Una siffatta fibrazione si può costruire immergendo lo spazio proiettivo assegnato nel suo complessificato. Nel complessificato fissiamo due rette complesse e coniugate, e congiungiamo ciascun punto di una delle due rette con il punto coniugato sull'altra. Otteniamo in tal modo una famiglia di rette che è una fibrazione totale che chiamiamo regolare, come ogni altra costruita in tal modo.

Consideriamo ora uno spazio affine di dimensione 4 sui reali, cioè un $AG(4, \mathbb{R})$. Sul suo iperpiano improprio che è un $PG(3, \mathbb{R})$, sia data una fibrazione totale e regolare $\mathcal{F}$. Si dimostra che :

Teorema. *Lo spazio geometrico $(S, \mathcal{A})$ dove S è l'insieme dei punti di $AG(4, \mathbb{R})$ e $\mathcal{A}$ è la famiglia dei piani di $AG(4, \mathbb{R})$ passanti per le rette della fibrazione totale $\mathcal{F}$, è un piano affine desarguesiano se e solo se $\mathcal{F}$ è regolare. Si può passare alla struttura proiettiva chiamando punti all'infinito le rette di $\mathcal{F}$ e retta impropria la stessa $\mathcal{F}$.*

Il problema di costruire piani non desarguesiani è ricondotto a costruire fibrazione di uno spazio 3-dimensionale, non regolari.

Si può ottenere una fibrazione non regolare, da una regolare, con la seguente procedura¹¹: siano $\ell.m.n$ tre rette della fibrazione, dunque a du a due sghembe tra loro. Il luogo delle rette che si appoggiano alle tre rette date costituiscono una famiglia R_1 o *regolo*, che riempiono una quadrica rigata, e formata interamente da rette della fibrazione data. Ma essendo, come noto una quadrica doppiamente rigata, esiste un secondo *regolo* R_2 che riempie l'intero spazio occupato dalla quadrica. Se consideriamo la nuova fibrazione

$$\mathcal{F}' := (\mathcal{F} \setminus R_1) \cup R_2$$

ottenuta, come suol dirsi, per *ribaltamento dei regoli*, otteniamo una nuova fibrazione totale, ma non regolare e quindi con essa costruiamo che un piano affine non desarguesiano.

Quanto detto si può estendere ai piani proiettivi finiti desarguesiani, ricordando che dato $GF(q)$ e una sua estensione quadratica $GF(q^2)$ ci teroviamo davanti a qualcosa di analogo al rapporto campo reale e ampliamento complesso, anche perché l'applicazione $x \Rightarrow x^q, \forall x \in GF(q)$,

¹¹ Cf. Barlotti A. (1971), Bose R.C (1973), Tallini G.(2005). Tale procedura è suggerita dalla ben nota rappresentazione reale su uno spazio 4-dimensionale del piano proiettivo complesso.

ha tutte le proprietà per potersi chiamare coniugio in un campo di Galois. Ne segue che in una estensione di uno spazio proiettivo finito $\text{PG}(3, q)$ nel suo complessificato $\text{PG}(3, q^2)$ se fissiamo due rette complesse e coniugate, e congiungiamo ciascun punto di una delle due rette con il punto coniugato sull'altra, otteniamo anche in tal caso una fibrazione totale e regolare di $\text{PG}(3, q)$, e tutto continua a valer anche nel caso finito¹².

¹² Si vedano a riguardo Barlotti (1971, Bose (1973) , Cerasoli et alii (1988) p.63.

Bibliografia

BARLOTTI A.,(1971). *Alcuni procedimenti per la costruzione di piani grafici non desarguesiani*, Conf. Sem. Mat.Univ. Bari,127, pp.1-17.

BOSE R.C. (1973). On a representartion of Hughes plane, *Proc. Of the international Conerence on projective planes*, Washington University Press, pp.27-58.

CECCHERINI P.V. (1967). *Sulla nozione di spazio grafico*, Rend. Mat. Univ. Roma pp.78-98.

CERASOLI M., EUGENI F., PROTASI M. (1988). *Elementi di Matematica discreta*, Bologna, Ed. Zanichelli.

EUGENI F. (1996). La matematica discreta attraverso i problemi, in: *Cento anni di Matematica – Atti del Convegno “Mathesis Centenario”*, Roma, Ed. FF.Palombi -Editori pp.84-102.

HIRSHFELD J.W.P. (1979). *Projective geometry over finite fields*, Oxford, Clarendon Press.

LOMBARDO RADICE L. (1961). Non-desarguesian finite graphic planes, in Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry*, Roma, Ed Cremonese (Appendice).

MOULTON F.R. (1902). A simple non-desarguesian plane geometry, in *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.3, n.2, American Mathematical Society.

ROSATI L.A. (1964). *Su una nuova classe di piani grafici*, Ricerche Mat. 13 pp.1-17.

SEGRE B. (1959). Le geometrie di Galois, *Annali di Matematica pura ed applicata*, serie IV, tomo XLVIII, pp. 1-96, Bologna, Ed. Zanichelli.

SEGRE B. (1961). *Lectures on modern geometry*, Roma, Ed Cremonese (CNR – Monografie Matematiche).

TALLINI G.(2005). *Lezioni di Geometria Combinatoria*, Bologna, Ed. Pitagora.

Un Modello per il Problema delle Due Buste

Aniello Buonocore* - Luigia Caputo*

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli".Università degli Studi di Napoli Federico II; aniello.buonocore@unina.it, luigia.caputo@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.037

Sunto: *In questo articolo, oltre ad analizzare il problema delle due buste ponendosi in un contesto formalizzato e aderente alla realtà si fornisce una possibile strategia per il cambio della busta inizialmente scelta basata sulla condizione generale di cambio che è diffusamente accettata. Il modello proposto generalizza l'enunciato del problema per rimarcare la necessità di avere una strategia per il cambio di busta.*

Parole Chiave: *Utilità attesa, condizione generale di cambio, strategia di cambio.*

Abstract: *In this article, in addition to analyzing the problem of the two envelopes in a formalized and adheres to reality context, a possible strategy for the exchange of the initially chosen envelope is provided, based on the general exchange condition that is widely accepted. The proposed model generalizes the statement of the problem to underline the need to have a strategy for the change of envelope.*

Keywords: *Expected utility, general exchange condition, switching strategy.*

1 - Introduzione

Sul problema delle due buste la letteratura, che comprende varianti e generalizzazioni, è molto ricca: sulla pagina di Wikipedia dal titolo *Two envelopes problem* si può trovare una bibliografia con 36 titoli. Uno di questi, il terzo, è a sua volta un elenco di contributi organizzati in ordine cronologico dal 1943 al 2019: guardando alle ultime annualità se ne può dedurre che l'interesse sull'argomento è ancora attuale visto che nell'ultima decade si contano quasi 40 articoli.¹

Nella formulazione del problema maggiormente utilizzata, una persona si trova a dover scegliere una tra due buste chiuse contenenti differenti importi di denaro di cui ella conosce solo che uno è il doppio dell'altro. Ma, prima di aprire la busta scelta per prendere l'importo ivi contenuto, ha ancora la facoltà di optare per l'importo contenuto nell'altra busta. Il problema richiede di individuare se sia più conveniente confermare la prima busta scelta oppure optare per l'altra.

La questione diventa subito intrigante se la persona si affida ad un ragionamento di carattere intuitivo (in seguito richiamato con $\mathcal{R}_2$) che induce a optare per l'altra busta:

se $\mathcal{A}$ è la busta scelta inizialmente, x il suo contenuto e $\mathcal{B}$ l'altra busta, la persona optando per $\mathcal{B}$ vince un ulteriore importo pari ad x oppure perde $x/2$. Quindi, considerando che le due eventualità sono ugualmente probabili, l'importo atteso contenuto in $\mathcal{B}$:

$$y_{2,x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2x \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x. \quad (1)$$

¹ Si veda alla pagina:

https://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem

In altri termini, secondo $\mathcal{R}_2$ qualunque sia l'importo contenuto in $\mathcal{A}$, in $\mathcal{B}$ è *atteso* un importo maggiore. Ma $\mathcal{R}_2$ non è corretto e per confutarlo si può ricorrere alla seguente semplice obiezione: detto y l'importo contenuto nella busta $\mathcal{B}$, l'applicazione dello stesso ragionamento porta ad attendere che in $\mathcal{A}$ vi sia un importo maggiore di y . Alla stessa conclusione si perviene in (Nalebuff, 1989) dove, però, il problema viene formulato considerando due persone, Ali e Baba, che si contendono i due importi; si consiglia la lettura dell'articolo appena richiamato per l'inquadramento storico del problema e per la ricchezza dei fatti ivi riportati.

Tale contraddizione è nota come *paradosso delle due buste* e l'obiettivo dichiarato di molti autori che hanno affrontato il problema è quello di risolverla. Comunque, allo stato attuale è ampiamente riconosciuto che, a buste entrambe chiuse, la chiave di volta per la risoluzione corretta del problema è basata sul fatto che il loro contenuto non è deterministico.² Per illustrare tale semplice fatto alcuni autori hanno proposto idee alquanto sofisticate. In particolare, in (Markosian, 2011) si individua nella formulazione del principio fondamentale della teoria delle decisioni l'aspetto rilevante e se ne propone una modifica. Più recentemente, in (de Canson, 2017) vengono individuati due problemi di decisione apparentemente uguali ma che mediante un'opportuna rappresentazione matriciale si scoprono essere differenti.

Ma anche nel caso in cui alla persona si concede, prima della scelta definitiva, l'ulteriore facoltà di aprire la busta $\mathcal{A}$ (in tal caso l'importo ivi contenuto diventa deterministico) la (1)

² Così, gli importi contenuti nelle due buste essendo numeri aleatori andrebbero indicati con lettere maiuscole.

non è corretta. E qui la questione oltre a confermarsi intrigante diventa anche particolarmente spinosa e la discussione che si è sviluppata ha suscitato reazioni molto pungenti.

Ad esempio, nel 1995 il responsabile editoriale della rivista *Mathematics Magazine* ricevette la seguente lettera:

Dear Editor: "The Box Problem: To Switch or Not To Switch," by Brams and Kilgour (February 1995), makes a mountain out of a molehill, albeit an instructive mountain. The resolution of the problem, which is more a joke than a paradox, has nothing do with conditional probabilities of peculiar distributions. In fact, the weakness of the expected-value argument is that it is nonsense. Having picked a box containing $\$n$, calculating that the expected value of the other box is $(5/4)n$ involves evaluating an expression in n that simultaneously assumes that n is equal to both b and $2b$. It is not surprising that this leads to a peculiar result. Substituting the correct amounts for the occurrences of n in the averaging expression gives $(3/2)b$ as the expected value of the amount in the other box, exactly equal, of course, to the expected value of the box you've already picked.³

A tale lettera, gli autori dell'articolo ribatterono in questo modo:

Bill Mixon incorrectly interprets the box problem to be one in which the amount in the box you pick is "equal to both b and $2b$ ", so on average the amount you find is $3b/2$, and this is the same for both boxes. But in fact the problem states that you begin by choosing one box and find the amount, x , in it, with $x = b$ and $x = 2b$ equally probable. This equiprobability assumption is not the same as assuming that these two events are simultaneously true (a physical impossibility) --or, equivalently, that you choose one of the two boxes, containing either b or $2b$ at random, and don't open it-- which would, indeed, give you no reason to switch

³ Per l'autore della lettera, b rappresenta l'importo minimo contenuto nelle due buste.

to the second box. Rather, you open the first box and learn its contents, although, as we showed, the $5x/4$ expected-value calculation about the contents of the second box is erroneous. Instead, your expectation about the second box's contents depends on your prior distribution. For some prior distributions, you always do better switching --whatever amount you find in the first box-- which, if not a paradox, is not a joke either.⁴

Nel seguito è presentata un'analisi che, oltre a illustrare con maggiore dettaglio alcuni dei punti evidenziati nella lettera di Bill Mixon e nella risposta di Stevens J. Brams e D. Marc Kilgour, si spera possa aiutare a mettere in luce gli elementi rilevanti per la comprensione del paradosso.

2 – Il modello

La nostra analisi del problema è basata sul seguente modello riguardante gli aspetti aleatori dell'intera procedura.

- i) La procedura di scelta è intesa come ipotetico gioco tra un conduttore $\mathcal{C}$ che sceglie gli importi da inserire nelle due buste e un giocatore $\mathcal{G}$ che svolge il ruolo della persona del paragrafo precedente.
- ii) Con il termine *partita* si deve intendere ogni singola effettuazione del gioco; un giocatore è ammesso al gioco una sola volta, mentre il conduttore gioca tutte le partite.

⁴ Lettera e risposta sono pubblicate nella sezione "News and Letters", volume 68, fascicolo 4, pp. 322-324 di *Mathematics Magazine*.

- iii) Prima di ogni partita, $\mathcal{C}$ si serve di un dispositivo aleatorio $\mathcal{D}_\mathcal{C}$ per determinare l'importo minimo I da inserire in una delle due buste.
- iv) Il numero aleatorio I è di tipo discreto e la sua distribuzione è completamente nota a $\mathcal{C}$.
- v) L'insieme S_I dei valori assumibili da I con probabilità non nulla è un sottoinsieme, limitato superiormente, di $\mathbb{N}$.
- vi) Il conduttore ottiene il secondo importo J raddoppiando I oppure, più in generale, moltiplicando I per un numero naturale $k \geq 2$: $J = kI$.⁵ L'insieme S_J dei valori assumibili da J con probabilità non nulla si ottiene moltiplicando per k gli elementi di S_I .
- vii) Il giocatore adotta un dispositivo $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ per scegliere a caso una delle due buste. Per comodità, qui si assume che $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ sia un generatore di numeri casuali: prefissata una delle due buste, $\mathcal{G}$ sceglie l'altra se $\mathcal{D}_\mathcal{G} > 1/2$.

Il modello, in primo luogo, rende evidente il fatto che l'importo vinto dal giocatore è il risultato di un duplice meccanismo aleatorio. Inoltre, indicati con X e Y gli importi contenuti nelle buste $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rispettivamente, l'importo complessivo S in gioco vale:

$$S = X + Y = I + J = I + kI = (k + 1)I. \quad (2)$$

Si osservi che è la (2) a imporre a $\mathcal{C}$ di scegliere S_I limitato in quanto, in caso contrario, si potrebbe trovare nella situazione

⁵ L'utilità di k diventerà più chiara nel Paragrafo 5.

di dover azionare più volte $\mathcal{D}_C$: l'importo totale S determinato da $\mathcal{D}_C$ potrebbe essere maggiore della disponibilità finanziaria M che egli è in grado di mettere in palio per ciascuna partita. Ne discende che $S_I = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$, con

$$m \in \mathbb{N}, \quad i_0 < i_1 < \dots < i_m \quad \text{e} \quad (k+1)i_m \leq M. \quad (3)$$

In questo modo $\mathcal{C}$ si cautela anche da un secondo inconveniente: nel caso di S_I numerabile potrebbe risultare $\mathbb{E}(I) = \infty$.

3 – Giocatore completamente ignaro

In questo paragrafo il giocatore, indicato con $\mathcal{G}_0$, non ha alcuna informazione nè sul contenuto delle due buste nè sulla distribuzione di I . Egli, tenendo conto delle posizioni fatte nell'introduzione e nella descrizione del modello, può solo dedurre che

$$X = S - Y, \quad (4)$$

$$Y = J \cdot 1_{\{X=I\}} + I \cdot 1_{\{X=I\}} = I + (k-1)I \cdot 1_{\{X=I\}}, \quad (5)$$

e che

$$\mathbb{P}(X = I, Y = J) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(X = I) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = J). \quad (6)$$

In virtù della (5) e della (6), $\mathcal{G}_0$ è anche in grado di determinare il valore atteso dell'importo della busta $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[Y|I] &= \mathbb{E}[I + (k-1)I \cdot 1_{\{X=I\}}|I] \\ &= I + (k-1)I \cdot \mathbb{E}(1_{\{X=I\}}) \\ &= I + (k-1)I \cdot \mathbb{P}(1_{\{X=I\}}) \\ &= I + (k-1)I \cdot \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}I. \end{aligned} \quad (7)$$

Ricordando la (2), la (4) e la (7) comportano che il valore atteso dell'importo della busta $\mathcal{A}$ valga:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[X|I] &= \mathbb{E}_k[S - Y|I] = \mathbb{E}_k[(k+1)I|I] - \bar{Y}_k \\ &= (k+1)I - \frac{k+1}{2}I = \frac{k+1}{2}I.\end{aligned}\tag{8}$$

Si osservi che $\bar{Y}_2 = \bar{X}_2 = 3I/2$ corrisponde al valore $3b/2$ indicato da Bill Mixon con b corrispondente all'importo minimo.

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 1. *La simmetria della situazione di gioco comporta l'equivalenza, sia in termini di probabilità che di valore atteso, tra gli importi delle due buste; inoltre $\mathcal{G}_0$ non ha alcuna indicazione sul valore della sua vincita.*

4 – Giocatore che conosce l'importo della busta scelta

Il conduttore conosce la distribuzione di I e pertanto egli può considerare l'importo Y anche in un altro modo, ovvero in funzione di X . Infatti, se il giocatore con la sua scelta iniziale ricade sull'importo minimo, ovvero $X = I$, allora la coppia di importi che $\mathcal{C}$ gli ha presentato è (X, kX) altrimenti è $(X, X/k)$. Pertanto,

$$\begin{aligned}Y &= kX \cdot 1_{\{X=I\}} + \frac{1}{k}X(1 - 1_{\{X=I\}}) \\ &= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k}X \cdot 1_{\{X=I\}}.\end{aligned}\tag{9}$$

Di conseguenza, $\mathcal{C}$ può anche valutare la media dell'importo della busta (chiusa) $\mathcal{B}$ condizionato dall'importo nella busta (chiusa) $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_k[Y|X] &= \mathbb{E}_k \left[\frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k}X \cdot 1_{\{X=I\}} | X \right] \\
 &= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}} | X] \\
 &= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} X \cdot \mathbb{E}[1_{\{X=I\}} | X] \\
 &= \frac{1}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k} X \cdot \mathbb{P}[X = I | X].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Si supponga ora che $\mathcal{C}$ consenta al giocatore $\mathcal{G}_0$ di aprire la busta $\mathcal{A}$ prima della decisione di optare o meno per l'altra e che si verifichi l'evento $\{X = x\}$, con x valore assumibile con probabilità non nulla o da I oppure da J . A questo punto, l'analisi deve tenere conto di questo *condizionamento*: l'insieme dei valori assumibili da I è diventato l'insieme $\{x/k, x\}$. Per rimarcare questa informazione aggiuntiva, il giocatore sarà indicato con $\mathcal{G}_1$.

Allora, tenendo conto che per la (6) le alternative $\{X = I\}$ e $\{X = J\}$ sono equiprobabili, il teorema di Bayes consente a $\mathcal{C}$ di ottenere:

$$\begin{aligned}
 x \in S_I \cup S_J, \quad p_{k,x} &:= \mathbb{P}[X = I | X = x] = \frac{\mathbb{P}(X = I, X = x)}{\mathbb{P}[(X = x)]} \\
 &= \frac{\mathbb{P}[X = x | X = I]}{\mathbb{P}[X = x | X = I] + \mathbb{P}[X = x | X = J]} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(I = x)}{\mathbb{P}(I = x) + \mathbb{P}(J = x)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(I = x)}{\mathbb{P}(I = x) + \mathbb{P}(I = x/k)}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

In definitiva, dalle (10) e (11) si evince che:

$$x \in S_I \cup S_J, \quad \mathbb{E}_k[Y|X = x] = x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2 - 1}{k} p_{k,x} \right). \tag{12}$$

La (12) consente a $\mathcal{C}$, che conosce $p_{k,x}$, di calcolare il valore medio dell'altro importo quando egli sa che in una delle due buste c'è l'importo x . Invece, $\mathcal{G}_1$ conosce solo che tale valore medio è compreso nell'intervallo $[x/k, kx]$ e non può sostituire $p_{k,x}$ con $1/2$ per affermare, ragionamento erroneo $\mathcal{R}_k$, che:

$$\begin{aligned} x \in S_I \cup S_J, \quad \mathbb{E}_k[Y|X=x] &\equiv y_{k,x} := x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= x \frac{1/k + k}{2} > x. \end{aligned} \quad (13)$$

Si osservi che per $k=2$, la (13) fornisce il risultato del ragionamento erroneo $\mathcal{R}_2$.

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 2. *Il giocatore $\mathcal{G}_1$ si trova nelle stesse condizioni di $\mathcal{G}_0$ con l'unica informazione aggiuntiva che egli sa che il minimo importo contenuto nelle due buste o vale x (con probabilità $p_{k,x}$ a lui non nota) oppure vale x/k .*

5 - Distribuzioni paradossali per l'importo minimo?

Nel caso del giocatore che ha la possibilità di aprire la busta $\mathcal{A}$ la situazione può essere posta in maniera alternativa al seguente modo: il conduttore oltre a regalare a $\mathcal{G}_1$ l'importo x gli offre anche l'opportunità di partecipare ad una lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ a cui si accede pagando x e che, in virtù della (12), ha come guadagno atteso:

$$\begin{aligned} x \in S_I \cup S_J, \quad g_{k,x} &:= \mathbb{E}_k[Y|X=x] - x \\ &= x \left(\frac{1}{k} + \frac{k^2-1}{k} p_{k,x} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= x \frac{k-1}{k} [(k+1)p_{k,x} - 1].$$

In (Broome, 95) una distribuzione per l'importo minimo I che rende il guadagno atteso positivo per ogni importo x è detta essere *paradossale* e l'autore ne fornisce il seguente esempio.

Esempio 1. Con N numero aleatorio avente distribuzione geometrica di parametro $1/3$ sull'insieme dei numeri naturali, si considerino gli importi $I = 2^N$ e $J = 2I$ (quindi I ha supporto numerabile e media infinita). Con $k = 2$, dalla (11) e dalla (14) si ottiene:

$$p_{2,2^0} = \frac{1/3}{1/3 + 0} = 1 \Rightarrow g_{2,2^0} = 1, \quad (15)$$

e

$$\begin{aligned} n \geq 1, \quad p_{2,2^n} &= \frac{1/3 \cdot (2/3)^n}{1/3 \cdot (2/3)^n + 1/3 \cdot (2/3)^{n-1}} = \frac{2}{5} \Rightarrow g_{2,2^n} \\ &= \frac{2^n}{10}. \end{aligned} \quad (16)$$

Broome, conclude affermando che il giocatore che conosce l'importo della busta $\mathcal{A}$ deve scegliere l'importo contenuto nella busta $\mathcal{B}$ in quanto il guadagno atteso di $\mathcal{L}_{k,x}$ è positivo per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1. In base alla conclusione di Broome, l'esistenza di distribuzioni paradossali per I aggiungerebbe paradosso a paradosso: il giocatore non avrebbe nemmeno bisogno di aprire la busta $\mathcal{A}$ scelta a caso per optare senza indugio per l'importo contenuto in $\mathcal{B}$.

Brams e Kilgour, ragionando allo stesso modo di Broome, alla fine della loro risposta alla lettera di Bill Mixon, affermano che ci sono leggi di probabilità per l'importo minimo I che per ogni valore di S_I inducono a optare per l'importo contenuto

nell'altra busta. Ma la questione non si chiude certamente così. Infatti, lo stesso Broome riconosce che la distribuzione da lui considerata per l'importo minimo I ha media infinita. Qui si fa osservare che, invece, tutto dipende dal fatto che S_I non è limitato e pertanto I può essere, con probabilità non nulla, una qualsiasi potenza di 2. Se, invece, fissato un numero naturale m , si condiziona l'importo minimo I in modo che per

$$n > m, \quad \mathbb{P}(I = 2^n) = 0, \quad (17)$$

allora, indicata con $c_{2,m}$ la nuova costante di normalizzazione, la (15) permane, la (16) è valida per $n = (1, 2, \dots, m)$ e in più, dal momento che l'importo minimo assume il valore $m + 1$ con probabilità nulla, dalla (11) e dalla (14) si ha:

$$p_{2,2^{m+1}} = \frac{0}{0 + 1/3 \cdot (2/3)^n} = 0 \Rightarrow g_{2,2^{m+1}} = -2^m. \quad (18)$$

Risulta allora evidente che, in generale, limitando l'importo determinato dal dispositivo $\mathcal{D}_c$ c'è almeno un valore di x per il quale il guadagno atteso è negativo. Per l'analisi che si sta svolgendo si ottiene così il seguente risultato.

Risultato 3. *Il modello descritto nel Paragrafo 2 postula la limitatezza di S_I e pertanto esclude l'esistenza di distribuzioni paradossali per l'importo minimo.*

6 – La condizione generale di cambio

In questo paragrafo si suppone che il giocatore, indicato con $\mathcal{G}_2$, oltre a conoscere il valore x contenuto nella busta A sia in grado di valutare $p_{k,x-}$ alla stregua di $\mathcal{C}$: è solo in questa situazione che ha senso porsi il problema della determinazione di un criterio per il cambio della busta. Allora, in (Brams &

Kilgour, 95) la condizione $G_{2,x} > 0$ è riportata in termini di $p_{2,x}$:

$$g_{2,x} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_2[Y|X = x] - x > 0 \Leftrightarrow p_{2,x} > \frac{1}{3}. \quad (19)$$

L'ultima disuguaglianza viene denominata dagli autori *condizione generale di cambio* (CGC) dell'importo deterministico x con l'importo aleatorio Y_x .⁶ Risulta agevole verificare che per un generico k la (19) diventa:

$$g_{k,x} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_k[Y|X = x] - x > 0 \Leftrightarrow p_{k,x} > \frac{1}{k+1}. \quad (20)$$

Qui si indicherà come condizione generale di cambio (CGCk) una qualsiasi delle tre condizioni nella (20). Si osservi che la CGCk relativa a $p_{k,x}$ suddivide (0,1) in tre sottointervalli per ciascuno dei quali si possono fare differenti conclusioni:

1) se

$$0 \leq p_{k,x} \leq \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow -x \frac{k-1}{k} \leq g_{k,x} \leq 0,$$

allora G_2 rifiuta di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ e quindi accetta l'importo x ;

2) se

$$\frac{1}{2} \leq p_{k,x} \leq 1 \Leftrightarrow x \frac{(k-1)^2}{2k} \leq g_{k,x} \leq x(k-1),$$

allora G_2 accetta di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ e quindi opta l'importo Y_x ;

3) se

$$\frac{1}{k+1} < p_{k,x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < g_{k,x} < x \frac{(k-1)^2}{2k},$$

⁶ Con Y_x si deve intendere l'importo della busta $\mathcal{B}$ noto che nella busta $\mathcal{A}$ c'è l'importo x .

la CGCk impone a G_2 di partecipare di partecipare a $\mathcal{L}_{k,x}$ anche nei casi in cui la probabilità di vincita dell'importo kx è molto minore di $1/2$.

I primi due punti sono ovvi e non lasciano adito a dubbi. Il terzo individua l'intervallo critico $\frac{1}{k+1} < p_{k,x} < \frac{1}{2}$ che, a nostro parere, necessita di ulteriori approfondimenti.

La condizione generale di cambio è largamente ritenuta valida e comunemente accettata da numerosi autori come base per i loro contributi, ma qui si fa notare che essa è eccessivamente sbilanciata a favore del cambio. Infatti, il punto 3) evidenzia che la CGCk non differenzia tra i valori di $p_{k,x}$ nell'intervallo critico, per cui ci potrebbero essere delle istanze nelle quali G_2 opta per Y_x sulla base di un guadagno atteso irrisorio rispetto a x .

Esempio 2. Con $k = 100$ e $x = 500$ si supponga che G_2 abbia valutato che per ogni coppia del tipo $(500, 50000)$ ce ne sono 99 del tipo $(5, 500)$ ovvero che $p_{100,500} = 1/100$. Allora, dal momento che $1/100 > 1/101 = 1/(k+1)$, applicando la condizione generale di cambio, G_2 rinuncia a 500 per vincere 50000 con probabilità $1/100$ oppure 5 con probabilità $99/100$. In più, si noti che dalla (14) risulta $g_{100,500} = 4,95$. Riassumendo, G_2 rischia di perdere 495 con probabilità $99/100$ in virtù del fatto che il guadagno atteso vale $0,0099x$.

D'altra parte, c'è ancora un'obiezione che può essere mossa alla CGCk: un criterio basato sul guadagno atteso della lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ che senso ha per G_2 che è ammesso solo per una volta ad essa? Allora, nel tentativo di attenuare l'applicazione della condizione generale di cambio si propone la seguente modifica: G_2 accetta di partecipare alla lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ con probabilità

$$q_{k,x} = \frac{p_{k,x} - \frac{1}{k+1}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}}. \quad (21)$$

In (McDonnell & Abbott, 2009) sono proposte strategie di cambio basate sull'importo x della busta aperta.

Esempio 3. Con le posizioni fatte nell'Esempio 2, ovvero $k = 100$, $x = 500$ e $p_{100,500} = 1/100$ risulta

$$q_{k,x} = \frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{101}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{101}} = \frac{1}{4950} \cong 2 \cdot 10^{-4}.$$

dalla quale si evince che la condizione generale di cambio verrebbe applicata con probabilità estremamente piccola. Ben diversa è la situazione descritta nell'Esempio 1 nella quale $k = 2$, $x = 2^n$, $n \neq 0$ e $p_{2,x2^n} = 0,4$. Infatti, in tal caso, risulta

$$q_{2,2^n} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{2}{5} = 0,4,$$

che porterebbe ad applicare la condizione generale di cambio quattro volte su dieci.

Da un punto di vista operativo la modifica proposta richiede che $\mathcal{G}_2$ azioni ancora una volta il suo generatore di numeri casuali $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$.

Si riassume il tutto nel seguente risultato.

Risultato 4. Il giocatore $\mathcal{G}_2$ accetta l'importo x se $q_{k,x} \leq 0$; invece, egli applica la condizione generale di cambio se $q_{k,x} \geq 1$. Inoltre, quando $p_{k,x} \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathcal{G}_2$ accetta di partecipare alla lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ con probabilità $q_{k,x}$; in altri termini $\mathcal{G}_2$ applica la condizione generale di cambio con una probabilità che tiene conto sia della posizione di $p_{k,x}$ rispetto all'estremo inferiore dell'intervallo critico che

dell'ampiezza di quest'ultimo. In quest'ultimo caso, egli applica la condizione generale di cambio se $\mathcal{D}_G < q_{k,x}$.

7 - Uno sguardo al problema dalla parte del conduttore

Se il giocatore non è in grado di determinare la probabilità $p_{k,x}$ l'analisi sopra sviluppata non è a lui di alcun beneficio, ovvero ci si ritrova nel caso del giocatore $\mathcal{G}_1$. Invece, il conduttore che conosce la legge di I e gioca tutte le partite, potrebbe pensare di sfruttarla nel tentativo di limitare le uscite dal suo capitale iniziale. Ma ciò non è possibile.

In primo luogo, si osservi che quando $\mathcal{C}$ osserva l'importo x contenuto nella busta aperta dal giocatore è sì in grado di valutare il segno di $g_{k,x}$ e quindi stabilire se la lotteria $\mathcal{L}_{k,x}$ è a lui favorevole o meno ma in quel momento egli non è in grado di modificare il corso della partita: spetta al giocatore decidere se partecipare o meno alla lotteria.

D'altra parte, nel modello da noi proposto è già stato visto che non esistono distribuzioni paradossali (c'è almeno un valore di x che cambia il segno di $g_{k,x}$) e questo toglie al conduttore qualsiasi speranza di determinare una distribuzione per l'importo I che gli potrebbe garantire un vantaggio medio. A conferma di ciò, posto

$$G_{k,X} := \mathbb{E}_k[Y|X] - X, \quad (22)$$

per la (14) risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_{k,X}) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}_k[Y|X] - X\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}_k[Y|X]\} - \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}\left\{\frac{X}{k} + \frac{k^2 - 1}{k} \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}}|X]\right\} - \mathbb{E}(X), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X=I\}}|X]\}, \\
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X=I\}}), \\
&= \frac{1-k}{k} \mathbb{E}(X) + \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{\mathbb{E}(I)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue dalla (2), dal fatto che in media gli importi delle due buste sono equivalenti per cui,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k+1}{2} \mathbb{E}(I), \quad (22)$$

e dall'essere certi di non incorrere nella forma $\infty - \infty$.

Bibliografia

BRAMS S. J., KILGOUR D. M. (1995). The Box Problem: To Switch or Not To Switch, *Mathematics Magazine*, vol. **68**(1), pp 27 – 34.

BROOME J. (1995). The Two-Envelope Paradox, *Analysis*, vol. **55**(1), pp 6 – 11.

de CANSON C. (2017). The Paradox of the Two Envelopes, published online at: <https://www.lse.ac.uk/philosophy/wp-content/uploads/2017/03/Two-Envelope-Paradox.pdf>.

MARKOSIAN N. (2011). A Simple Solution to the Two Envelope Problem. *Logos & Episteme*, vol. **II** (3), pp 347 – 357.

MCDONNELL M. D., ABBOTT D. (2009). Randomized switching in the two-envelope problem. *Proc. R. Soc. A*, vol. **465**, pp 3309 – 3332.

NALEBUFF B. (1989). The Other Person's Envelope is Always Greener, *Journal of Economic Perspectives*, vol. **3** (1), pp 171 – 181.



L'insegnamento dei numeri naturali nella scuola secondaria di I grado

Marco D'Errico *

*IC Puccini4cd; marco.derrico1@posta.istruzione.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.038

Sunto: *Vengono descritte esperienze e strategie didattiche relative all'insegnamento dei numeri naturali nella scuola secondaria di primo grado. In particolare farò riferimento a lezioni affrontate con le classi prime ed a come questo nucleo tematico faccia da ponte verso altri argomenti trattati nel triennio. La scelta dell'argomento parte proprio dal fatto che esso costituisce un nucleo tematico fondante della matematica del primo ciclo (ma non solo). Inoltre attraverso lo studio dei numeri naturali può essere dato allo studente un approccio alla matematica che sia motivante ed interessante.*

Parole Chiave: *numeri naturali, didattica, operazioni.*

Abstract: *Didactic experiences and strategies relating to the teaching natural numbers in lower secondary school are described. In particular, I will refer to lessons addressed with the first classes and to how the thematic nucleus serves as a bridge towards other topics covered in the three-year period. The choice of the topic starts precisely from being a fundamental thematic core of first cycle mathematics (but not only). Furthermore, studying the natural numbers a motivating and interesting approach to mathematics can be given to the student.*

Keywords: *natural numbers, didactics, operations.*

1 - Introduzione

Questo articolo è frutto della mia esperienza relativa all'insegnamento dei numeri naturali nella scuola secondaria di I grado (AA.VV. 2012). Nel corso della trattazione farò anche riferimento ad alcune esperienze di insegnamento nella scuola primaria durante progetti PON.

Nella scuola secondaria di primo grado, le competenze matematiche vanno costruite muovendosi in contesti motivanti, per fornire agli allievi esperienze cognitive significative, mantenendo una relazione costante anche con le altre discipline che lo studente si trova ad affrontare.

Uno dei nodi cruciali nel processo di apprendimento in matematica è proprio costituito dal concetto di numero e, potremmo dire che le esperienze significative relative a questo nucleo tematico sono, di volta in volta legate all'introduzione dei vari insiemi numerici. Le competenze che si costruiscono negli alunni rispetto a questo nucleo tematico sono legate ai diversi significati di numero che essi incontrano nelle loro esperienze extrascolastiche e scolastiche. In definitiva i numeri naturali sono stati creati dalla mente umana per contare gli oggetti di vari insiemi pur non avendo i numeri stessi nessun riferimento concreto alle singole caratteristiche degli oggetti contati.

Comprendere questa astrazione è compito di studi più evoluti. Per un bambino i numeri sono collegati ad oggetti concreti ed al linguaggio che dà i nomi e simboli ai singoli numeri. Una delle prime esperienze che gli studenti fanno a scuola rispetto ai numeri, inoltre, è quello di utilizzarli nelle operazioni aritmetiche e nel risolvere situazioni problematiche. Rispetto a questo punto è importante però che

l'alunno comprenda il significato delle operazioni e la valenza che le stesse hanno nella risoluzione di problemi (Castelnuovo, 2017; D'Amore, 1999). Modificare i metodi di insegnamento facendo in modo che i bambini siano partecipi attraverso l'uso di materiali concreti, favorendo la discussione matematica in classe tra pari e con l'insegnante, consente agli alunni di comprendere le procedure e quindi di modificare la percezione che si ha della matematica (Gasca, 2016).

L'approccio che viene illustrato in questo articolo è quello di far fare agli alunni inizialmente esperienze, per passare poi ad occasioni di riflessione e di studio su numeri e operazioni (ricercare regolarità, individuare numeri che soddisfino a condizioni date, metodi di scrittura e di rappresentazione, anche attraverso le diverse tappe di sviluppo nella storia dell'umanità).

2 - A cosa servono i numeri naturali

Cos'è un numero naturale? Rispondere a questa domanda non è affatto semplice per uno studente di prima media (e talvolta non lo è nemmeno per un adulto di cultura media). Per lo studente può essere un concetto noto ed intuitivo e probabilmente in questo stadio della sua crescita culturale ciò è sufficiente. Ed è quello che solitamente dico agli studenti durante le prime lezioni del primo anno. D'altronde non si conoscono documenti che ci possano testimoniare dove e quando sia nata l'idea di numero naturale e come si sia sviluppato il modo di nominare e rappresentare i numeri. E' tuttavia ragionevole supporre che la creazione del concetto di numero sia stata una delle prime manifestazioni

dell'intelligenza dell'uomo, determinata, ovunque ci fosse un insediamento sociale per quanto primitivo, dall'esigenza di memorizzare ed esprimere l'intuizione della quantità (AA. VV. 2001). «I numeri sono stati creati dalla mente umana per contare gli oggetti dei vari insiemi e non hanno, in effetti, alcun riferimento alle caratteristiche fisiche degli oggetti contati. La matematica nacque per vari aspetti della vita quotidiana dell'uomo, quella via da sempre legata strettamente a necessità di sopravvivenza e socializzazione, ai tempi eroici per la pastorizia e per l'agricoltura» (Eugeni, 1969). Possiamo iniziare a sottolineare però che i numeri sono presenti nelle diverse culture e che rappresentano pertanto (come la musica) un linguaggio universale (Frank, 2018). Come tali sono legati quindi alla vita quotidiana degli uomini. Possono evocare emozioni quando sono legati ad esempio a notizie date dai giornali, possono orientare le masse, possono aiutarci a fare previsioni (ad esempio a prevedere quando si uscirà dal confinamento generato dal covid-19). Tuttavia i numeri esistono al di là del contesto a cui fanno riferimento ed in cui sono usati.

Ma possiamo tentare di rispondere insieme agli studenti ad altre due domande: chi sono e quanti sono i numeri naturali?; a cosa servono i numeri naturali?. Quando pongo la prima domanda agli alunni di prima gli sguardi diventano un tantino perplessi. Non tanto per la parola numeri ma per quella che viene subito dopo. Basta cambiare la domanda in: quali sono i numeri? Subito segue un coro: 1, 2, 3, 4....

Se chiedo quanti sono spesso la risposta che mi è capitato di ascoltare è 10 (risposta che mette in evidenza la confusione tra

cifre e numeri e le loro relazioni rispetto alla rappresentazione dei numeri nelle diverse basi).

Quello che mi limito a fare in queste prime lezioni dunque è quello di portare gli alunni a capire che i numeri naturali sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e così via. Questo per abituarli a capire cosa è un numero naturale e di conseguenza capire cosa non lo è.

Quindi, facendo un piccolo viaggio nel tempo, affronto quali sono state le rappresentazioni dei numeri nel corso della storia dell'umanità: le prime come asticelle, la numerazione romana e le sue caratteristiche fino all'introduzione del sistema posizionale decimale, proveniente dall'Asia e la relativa distinzione tra cifra (un simbolo, dunque una nozione di tipo linguistico) e numero (un concetto, dunque una nozione di tipo matematico).

La nostra rappresentazione si dice posizionale perché uno stesso simbolo acquista diversi significati a seconda della posizione che occupa nella scrittura del numero: ad esempio il simbolo (cifra) 5 ha il significato di cinque unità nella scrittura 35 e di cinque centinaia nella scrittura 3544. Le cifre, nel sistema a base 10, sono appunto dieci: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (come le dita delle mani). Se le prendiamo singolarmente, quelle da 1 fino a 9 rappresentano i primi 9 numeri. Per i numeri da 10 in poi occorrono più cifre accostate fra loro. Lo zero nella storia è arrivato molto più tardi delle altre cifre dopo essere stato osteggiato anche per motivi religiosi-filosofici, ed è arrivato appunto come cifra e non come numero (Seife, 2000).

Per capire quanti sono questi numeri facciamo il gioco chi dice il numero più grande vince. Gli alunni si accorgono ben

presto che basta aggiungere 1 al numero appena detto e che quindi al gioco si può non finire mai di giocare (questo consente di accennare già in prima a scritture algebriche del tipo $n + 1$). Ovvero che i numeri naturali non posso mai finire di contarli perché se esistesse un numero n più grande di tutti, a questo basterebbe aggiungere 1 per creare quello che chiamiamo il successivo e così via. A questo punto però introduco e discuto con la classe sul fatto che se consideriamo un orologio, all'interno di esso l'aritmetica si fa con soli 12 numeri. Il fatto stesso di usare segni e linguaggio parlato per indicare numeri diversi conduce ad partire una parentesi sul modo diverso di indicare e chiamare i numeri nel corso della storia dell'umanità.

Ma passiamo alla seconda domanda: a cosa servono i numeri naturali?. Le risposte date durante la lezione fatta quest'anno in due prime sono: a contare, a misurare, a fare le addizioni ma anche le divisioni ma queste io le odio, a calcolare, a vedere quanto sono alto, a fare i problemi. Di solito le risposte propendono verso un uso scolastico dei numeri piuttosto che ad esperienze reali (punteggi alla playstation, maneggiare soldi etc.).

Se parliamo di numeri naturali, è importante far capire ai ragazzi che gli usi principali che facciamo di questi oggetti matematici sono riconducibili a tre scopi principali:

Contare oggetti: date le risposte ricevute dai ragazzi è utile chiarire che questo non è equivalente a misurare quantità; per fare ciò infatti non bastano i soli numeri naturali. Gli propongo di misurare infatti con un righello i bordi di un foglio A4 per fare accorgere loro che le misure non

corrispondono a numeri naturali. La funzione cardinale dei numeri naturali è molto importante e ci porta al legame con le operazioni e le loro proprietà.

Ordinare: le classifiche di campionato di serie A di solito aiutano molto a rendere il senso di questa funzione. I numeri naturali sono messi in un ordine fisso, e questo consente, abbinando diversi numeri a diversi oggetti, di attribuire anche a questi oggetti un ordine. Questa funzione dei numeri naturali si chiama ordinale.

Etichettare: per attribuire numeri di telefono, codici a barre, carte di credito etc.

Come esercizio propongo quindi di cercare esempi sull'uso dei numeri naturali per contare, per ordinare o per mettere etichette.

Sul punto riguardante il contare è utile fare una riflessione insieme ai ragazzi su cosa possiamo contare. Di solito le cose che vediamo e che tocchiamo nella loro interezza sono quelle più semplici da contare. Possono esserci casi in cui contare risulta difficile o pressoché impossibile quanto inutile (la sabbia di una spiaggia, le stelle del cielo, i chicchi di riso in un barattolo). In alcuni di questi casi si può usare un'abilità che deve essere educata nei bambini sin dalla scuola primaria ovvero quella di stimare ovvero fornire un valore approssimativo ed allo stesso tempo attendibile della quantità difficile da contare in modo diretto (ad esempio gli atomi presenti nell'universo così come spiegato nel testo divulgativo di Paenza, 2005).

Con i bambini della scuola primaria ho provato a fare questo esercizio usando proprio i chicchi di riso dati a ciascuno in quantità che potessero essere contate dopo aver stimato il risultato. Preventivamente avevo fatto vedere loro due immagini alla lim entrambe contenenti 30 palline. Nel primo caso le palline erano sparpagliate, nel secondo caso ordinate (fig. 1).

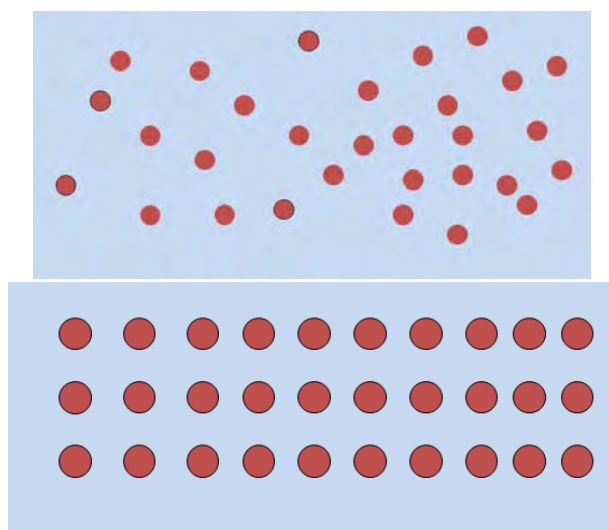


Fig. 1 - Contare a colpo d'occhio.

Le hanno contate velocemente nel primo caso dando più che una stima un risultato preciso. Nel secondo caso invece chi ha stimato a colpo d'occhio ha dato un valore molto più elevato del numero effettivo motivando la risposta così: mi sembravano molte di più. Il gruppo di ragazzini che poi ha dato buoni risultati anche nella stima dei chicchi di riso ha detto che ha provato a contare velocemente le palline raggruppando quelle vicine a tre a tre.

È utile far notare ai ragazzi ciò che hanno già messo in pratica senza saperlo: per contare è utile mettere in ordine le cose da contare o suddividerle in gruppi, contare i gruppi. Queste strategie comprendono molte nozioni e proprietà matematiche tra cui spicca l'uso dell'addizione e della moltiplicazione e le loro proprietà su cui tornerò più avanti.

A questo punto procedo con un'esperienza-problema. Ammettiamo che il padrone di un cinema non conosca i numeri e pertanto non sappia quante persone sono in attesa di entrare nella sala e quanti posti contiene la sala stessa. Il padrone del cinema interpretato da un alunno è alla porta ed il resto della classe attende fuori l'aula. Potrà il padrone far entrare il numero esatto di spettatori rispetto alle poltrone disponibili senza saper contare? La risposta non sempre è immediata. Ma dopo qualche minuto di esitazione il padrone della sala o qualcuno tra gli spettatori suggerisce di abbinare ogni spettatore ad una sedia fino ad esaurimento delle poltrone. In questo caso l'insegnante deve intervenire opportunamente iniziando ad instradare l'alunno nella relazione tra linguaggio, rappresentazione e significato in matematica. (Chiellini A., Giannarelli R., 1962).

3 - I numeri naturali e le operazioni

Il passaggio successivo che mi propongo di esaminare è legare i numeri naturali con le operazioni. In questo specifico momento è importantissimo tenere in considerazione il significato di queste ultime relativamente ai numeri naturali ma anticipare che questi significati possono cambiare quando si introdurranno altri tipi di numeri.

Sommare due numeri naturali corrisponde all'azione di mettere insieme oggetti distinti (concreti, astratti etc.). Si osservi che apprendere a calcolare le somme coincide in parte con imparare a contare correttamente ossia stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vocaboli numerali cardinali e gli oggetti da contare (Gasca, 2016). Per alunni di scuola secondaria di I grado le proprietà possono essere riconosciute valide a partire dall'esperienza. La proprietà commutativa (fig. 2) si può far comprendere facendo esempi, ma anche con disegni oppure a parole o anche usando il linguaggio algebrico ($a + b = b + a$; $a + b = c$ e $b + a = c$) e considerando i contesti in cui non è valida (ad esempio nella sottrazione tra due numeri).

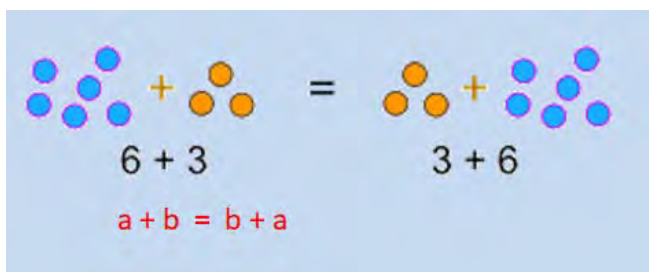


Fig. 2 - Rappresentazione grafica ed algebrica della proprietà commutativa dell'addizione.

La proprietà associativa invece va intesa come possibile commutazione dell'ordine in cui eseguire due addizioni ed anche qui va mostrato quando non è possibile applicarla. In sostanza bisogna far comprendere che l'uso combinato e ripetuto delle due proprietà consente la libertà di operare con gli addendi, spostandoli e aggregandoli come ci sembra più

opportuno a seconda della situazione che stiamo considerando o del calcolo che ci troviamo ad eseguire.

Con i numeri naturali la sottrazione corrisponde all'azione del togliere, ma anche il significato di operazione inversa dell'addizione. Un esempio per comprendere la proprietà invariante è l'invariare (appunto) degli anni tra due persone col passare del tempo. Un ragazzo di 10 anni ed uno di 15 anni hanno 5 anni di differenza. Fra 7 anni il primo avrà 17 anni ed il secondo 22 ma la differenza di età sarà sempre di 5 anni. E se torniamo indietro nel tempo di 3 anni, il primo si ritrova ad avere 7 anni ed il secondo 12 anni mantenendo sempre una differenza di età di 5 anni. In sostanza per un alunno del primo anno della scuola secondaria di I grado è importante che sappia riconoscere la proprietà e sappia attribuirle il nome appropriato per poterne parlare.

È opportuno a questo punto iniziare a fare esercizi che consentano di riconoscere regolarità (ci sono delle cose che restano invariate malgrado altre cambino). Questo tipo di esercizi potrà essere molto utile riprenderli più volte ad esempio quando si introdurrà in terza il linguaggio algebrico per consentire agli alunni di dimostrare ciò che l'esperienza diretta gli ha mostrato negli anni precedenti. Un esempio di esercizio può essere quello di fare la somma di tre numeri consecutivi e cercare regolarità nei risultati ottenuti ripetendo l'esercizio più volte con terne diverse. Altro esempio è sommare i dieci numeri consecutivi o i primi n numeri dispari. Questo aiuta ad introdurre alcuni modelli concreti di numeri (Israel e Gasca, 2012): i numeri triangolari ed i numeri quadrati (fig. 3).

Ad esempio: troviamo la somma dei primi dieci numeri dispari.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Posso procedere nel modo classico: $1 + 3 = 4$ e poi $4 + 5 = 9$ e poi $9 + 7 = 16$ e così via.

Procedendo in questo modo possiamo addirittura rappresentare le somme indicate come una configurazione a pallini. Ad esempio possiamo disegnare ogni numero della somma con dei pallini e vedere se possiamo organizzarli in figure geometriche:



Fig. 3 - Numeri quadrati.

I numeri che rappresentano i risultati sono detti numeri quadrati perché le loro somme assumono configurazioni quadrate.

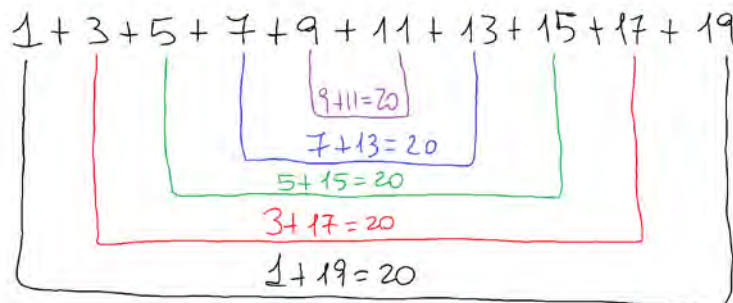
Cosa si può notare rispetto ai risultati di queste somme?

Sono il risultato di 2×2 , 3×3 , 4×4 , ...

Ma se la proprietà commutativa la studiamo vuole dire che è utile. Pertanto applichiamola al caso richiesto in modo che ci

semplifichi il lavoro di trovare la somma richiesta. E tra l'altro in un modo molto originale.

Sommiamo il primo numero con l'ultimo, poi il secondo con il penultimo, poi il terzo con il terzultimo e così via come indicato in figura:



Innanzitutto troviamo una regolarità: tutte le somme così organizzate danno come risultato 20.

Per trovare la somma finale allora basterà sommare il numero 20 cinque volte: $20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100$ (ovvero fare una moltiplicazione, operazione che vedremo più avanti: $20 \times 5 = 100$).

Abbiamo cambiato l'ordine dei numeri (addendi) e associato le somme in modo diverso: questo ci fa usare anche la nuova proprietà ASSOCIATIVA.

Infatti abbiamo associato prima $1 + 19 = 20$, poi $2 + 18 = 20$ e così via. Abbiamo sostituito ad ogni somma il risultato (20) e poi addizionato tutti i risultati ($20 + 20 + 20 + 20 + 20$).

Per esempio se voglio calcolare $30 + 22 + 40$ posso svolgere prima $20 + 40 = 60$ e poi aggiungere a 60 il numero 22: $22 + 60 = 82$.

La moltiplicazione consiste nel prendere un certo numero di cose un certo numero di volte, (cose alla volta $\times$ volte = cose). Quindi uno dei fattori esercita il ruolo di volte. Da quante file è composta l'aula in cui siamo adesso? Ed in ogni fila quanti posti ci sono? Allora il numero di posti è quello di ogni fila moltiplicato per le file.

Ad esempio: nell'aula ci sono 5 file da 4 posti ciascuna, il numero dei posti è uguale a 4 (posti alla volta) $\times$ 5 volte = 20 posti. Ma se entro in un'aula con 4 file da 5 posti ciascuno il numero di posti è uguale a $5 \times 4 = 20$. Sicuramente quello che è cambiata è la disposizione dei banchi (i posti alla volta e il numero di volte per cui bisogna moltiplicarlo). Pur essendo il risultato finale lo stesso, il significato delle due operazioni è sostanzialmente diverso (fig. 4).

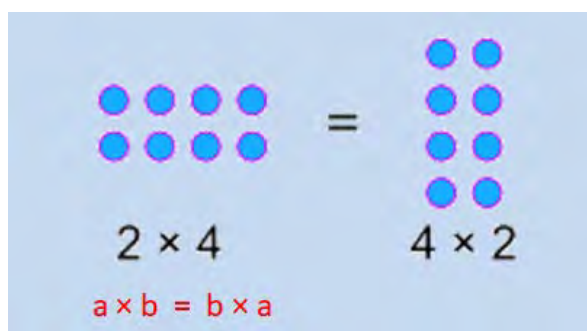


Fig. 4 - Rappresentazione grafica ed algebrica della proprietà commutativa della moltiplicazione.

Questo esempio ci introduce la proprietà commutativa per cui valgono le stesse considerazioni fatte quando l'abbiamo introdotta per l'addizione. Vale la stessa cosa per la proprietà associativa.

Ma la moltiplicazione gode anche della proprietà distributiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione (fig. 5) che ci consente di trasformare prodotti in somme (o differenze). Questa proprietà è molto comoda nel calcolo scritto e mentale quando si superano i numeri ad una sola cifra. Ma si vedrà che ha anche un'importanza quando si dovrà giustificare agli studenti la regola della moltiplicazione dei segni.



Fig. 5 - Rappresentazione grafica della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

La divisione è un modo diverso di vedere la moltiplicazione. Bisogna sottolineare però l'importanza del dividere in parti uguali. Anche la divisione, nel dominio dei numeri naturali, non sempre si può svolgere. Su questo fatto riguardante la divisione e la sottrazione si basa il significato dell'introduzione di altri tipi di numeri quando i numeri naturali diventano insufficienti a rispondere ad esigenze interne alla matematica.

A questo proposito propongo solitamente il problema del trasporto dei bambini:

In una scuola ci sono 630 bambini. Per portarli in gita si noleggiavano dei pullman da 50 posti. Quanti pullman occorrono?

Le discussioni in merito sono sempre accese e portano a notevoli spunti di riflessione. C'è chi esegue e consegna il risultato di un calcolo corretto ma chiaramente lontano dal contesto reale. Quando si accorgono che non si possono tagliare i bambini qualcuno mi ha anche risposto: allora la gita non si può fare. A sottolineare quanto si consideri il calcolo uno strumento tanto infallibile e potente da non essere più considerato a servizio della risoluzione del problema ma il problema stesso. Riporto testualmente alcune delle risposte date da alcuni alunni:

A: Ho fatto 630 diviso 50 e mi trovo 12 col resto di 30, allora prendiamo 12 autobus e salgono 600 bambini e poi restano 30 bambini che prendono un altro autobus e quindi resta un autobus solo con 30 bambini. Quindi alla fine prenderei 13 pullman;

L: Prof. io ho fatto 630 per 50 e mi è venuto 31500. Gli chiedo: quindi devi prendere 31500 pullman, giusto? Risposta: eh si prof.;

C: Prof. io fatto la stessa cosa di A. Gli chiedo:ovvero? Risponde:ho fatto 630 diviso 50. Riprendo:e quanto ti viene? Risponde:12,30 Gli chiedo:quindi quanti pullman devi prendere? Risposta:12.

X: ho fatto 630 diviso 50 e mi viene 12,30 e quindi in 12,30 c'è il resto e quindi 30 bambini restano fuori quindi prendo 13 autobus.

M: ho fatto semplicemente 630 per 50 e viene 31500 ma non so se è giusto oppure no perché ho sentito le altre risposte. Chiedo: quanti pullman prendi quindi? M: 31500 ... ma non so se ci vanno fuori scuola.

N: (alunna DSA certificata che all'inizio dell'anno mi ha detto di odiare la matematica e che poi mi ha detto che scoprendo che un poco le piace): Ho fatto 50, 50, 50 e così via fino ad arrivare a 600 e mi venivano 12 pullman e però ne prendiamo 13 perché restano fuori 30 bambini e così li buttiamo lì dentro.

Riflettiamo alla fine su quanto spazio occuperebbero 31500 autobus. I ragazzi trovano che la curva di uno stadio può contenere circa 20.000 persone. Così arrivano a capire quanto sia effettivamente difficile reperire 31500 autobus per una gita.

Ma da dove viene la scelta di usare la moltiplicazione? Un alunno risponde che ha fatto così perché bisognava mettere 50 alunni per ogni pullman quindi devo moltiplicare.

La divisione, inoltre, porta al concetto di divisibilità e su questo si basa poi l'introduzione di particolari numeri naturali: i numeri primi.

4 - Conclusioni

Concludo questo articolo raccontando l'aneddoto che in parte lo ha ispirato. Anni fa durante un incontro con studenti del primo anno di liceo scientifico, realizzato nell'ambito di un progetto che non aveva a che fare con la matematica ma con la geologia, per motivi che adesso non ricordo bene ad un certo punto dissi: voi sapete che esistono i numeri naturali e poi... ed un ragazzo rispose: quelli artificiali. Dopo un inevitabile sorriso iniziale, approfondendo il discorso, mi resi conto che i ragazzi sapevano operare con i vari insiemi numerici ma non avevano nessuna cognizione del perché gli stessi fossero stati introdotti e le differenze tra gli stessi. Ogni volta che parlo in

classe di un insieme numerico il ricordo a questo episodio è presente perché nella mia piccola esperienza didattica ho notato quanto sia importante sia dal I ciclo parlare dell'esigenza di introdurre nuove categorie di numeri, quanto questo sia stato importante nella storia dell'umanità e come cambino i significati delle operazioni, ad esempio, in base all'insieme numerico considerato.

Ho tentato di riassumere in questo articolo delle considerazioni che si basano sulla mia attività di insegnamento nella scuola secondaria di I grado relativa ai numeri naturali riportando esempi, attività ed i confronti diretti con gli alunni. I punti che mi sembra opportuno evidenziare sono:

Occorre riflettere con gli alunni di prima della scuola secondaria di I grado soprattutto su chi sono, quanti sono ed a cosa servono i numeri naturali;

occorre far comprendere che la scrittura di un numero è legata alla rappresentazione che usiamo (decimale, binaria etc.);

occorre far comprendere il significato delle operazioni che si possono fare con essi ed il fatto che quando si introdurranno nuovi numeri queste operazioni potrebbero assumere significati diversi.

Bibliografia

AA.VV. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.

AA.VV. (2001). *Matematica 2001*.

CASTELNUOVO E. (2017). *Didattica della matematica*. Torino: UTET.

CHIELLINI A.-GIANNARELLI R. (1962). *L'esame orale di matematica*. Roma: Vecchi Editrice- III edizione.

D'AMORE B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

EUGENI F. (1969). *Dai numeri naturali ai numeri ipercomplessi*, www.afsu.it/settori/matematica.

FRANK A.B., DI MARTINO P., NATALINI R., ROSOLINI G. (2016). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori.

GASCA A. M. (2016). *Numeri e forme*. Bologna: Zanichelli.

ISRAEL G. , GASCA A. M. (2012). *Pensare in matematica*. Bologna: Zanichelli.

PAENZA A. (2005). *Non si può dividere per zero*. Torino: Bollati Boringhieri.

SEIFE C. (2000). *Zero*. Torino: Bollati Boringhieri.

I quadrati latini

Una matrice quadrata nella quale ogni riga ed ogni colonna siano una permutazione dei numeri $1, 2, \dots, n$, (eventualmente $a_1, a_2, \dots, a_n$) si chiama un *quadrato latino d'ordine* n . Il nome fu dato da Eulero per il fatto che egli era solito indicare la prima riga con lettere latine.

Un quadrato latino si può riguardare come una *generalizzazione dei gruppi finiti*, in quanto un quando un quadrato latino si può assumere come la tavola di composizione di un struttura algebrica meno ricca dei gruppi, denominata quasigruppo.

Un quasigruppo è una struttura algebrica $(S, \cdot)$, dove S è un insieme finito e tale che le equazioni di 1° grado $a \cdot x = b$, ed $y \cdot a = b$, $\forall a, x, y, b \in S$, con coefficiente sia a destra, che a sinistra hanno una unica soluzione. Un quasigruppo con elemento neutro si chiama coppia e un coppia associativo è un gruppo finito). Si noti che, poiché esistono gruppi finiti di ogni cardinalità, esistono anche quadrati latini di ogni ordine. È noto che fissato n esistono esattamente $n!(n-1)!(n-2)! \dots 3! 2! 1!$ quadrati latini di ordine n .

Esempio. Considero la matrice “quadrato latino d'ordine 5” seguente

*	1	2	3	4	5
1	3	4	5	1	2
2	5	1	2	3	4
3	2	3	4	5	1
4	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5

Notiamo che :

$2 \cdot 3 = 2$, $3 \cdot 2 = 3$, non esiste elemento neutro, e le equazioni:

$5 \cdot x = 2$, (ha soluzione $x = 2$) mentre $y \cdot 5 = 2$ (ha soluzione $y = 1$).

Vito Volterra: *matematico universale*

Luca Nicotra*

*Ingegnere e giornalista scientifico. Direttore responsabile del «Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.039

Sunto: *Vito Volterra, definito da Judith R. Goodstein “an Extraordinary Mathematician”, è stato uno dei più grandi matematici del suo tempo. Matematico universale, avendo abbracciato, al pari di Henri Poincaré, il dominio della matematica pura, applicata e della fisica matematica, è stato certamente in ambito internazionale la figura dello scienziato più rappresentativo dell’Italia all’estero nella prima metà del secolo XX, tanto da essere chiamato “Mister Italian Science” dai giornali americani. Ma fu anche un grande organizzatore e promotore di istituzioni scientifiche (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Società Italiana di Fisica, Società Italiana per il Progresso delle Scienze, ecc.), e culturali in genere (Enciclopedia Italiana, ecc.), nonché un bibliofilo, cultore di letteratura, arte e storia della scienza. Fu un convinto assertore del ruolo della scienza come fattore di crescita sociale, culturale ed economica. Operò sempre per il bene della scienza e dell’Italia. Antifascista irriducibile, rimase fedele alle sue idee, al costo del sacrificio di tutte le innumerevoli cariche accademiche di cui era titolare. Il fascismo tentò di cancellarne la memoria.*

Parole Chiave: *Vito Volterra, equazioni integrali, biomatematica, teoria dell’elasticità.*

Abstract: *Vito Volterra, defined by Judith R. Goodstein as “an Extraordinary Mathematician” was one of the greatest Italian mathematicians. Universal mathematician, like Henri Poincaré, having embraced the domain of pure, applied mathematics and mathematical physics, he was certainly the figure of the most repre-*

sentative scientist of Italy abroad in the first half of the twentieth century, so much so that he called "Mister Italian Science" by American newspapers. But he was also a great organizer and promoter of scientific institutions (National Research Council, Italian Physics Society, Italian Society for the Progress of Sciences, etc.), and cultural institutions in general (Italian Encyclopedia, etc.), as well as a bibliophile, literature lover, art and history of science. He was a firm believer in the role of science as a factor of social, cultural and economic growth. He always worked for the good of science and Italy. An irreducible anti-fascist, he remained faithful to his ideas of him, at the cost of sacrificing all the innumerable academic offices he held. Fascism tried to erase his memory.

Keywords: Vito Volterra, integral equations, biomathematics, theory of elasticity.

1 - La vita: fra scienza, impegno sociale e antifascismo

Vito Volterra è il matematico dell'unità d'Italia, essendo nato il 3 maggio 1860 ad Ancona, dunque un giorno prima dell'inizio della Spedizione dei Mille, che con il suo esito portò



Fig. 1 – Vito Volterra nel 1890.

all'effettiva realizzazione dell'unità, ufficialmente proclamata l'anno dopo, il 17 marzo del 1861. È stato, come Jules Henri Poincaré (1854-1912), un matematico universale, avendo abbracciato il dominio della matematica pura, della matematica applicata e della fisica matematica.

All'età di appena due anni rimase orfano del padre Abramo e visse l'infanzia quasi nella pover-

tà. Si prese cura di lui e della madre un fratello di questa, Alfonso Almagià, che lavorava per una compagnia ferroviaria a Terni, dove quindi Vito e la madre si trasferirono nel 1863. Ma nel 1865 lo zio Alfonso fu assunto come funzionario alla Banca d'Italia per un breve periodo a Torino e poi a Firenze dove quindi lo raggiunsero Vito e la madre. A Firenze Vito trascorse la sua infanzia e compì i suoi studi, manifestando una spiccata attitudine per la matematica e la fisica, tanto che ad appena undici anni aveva già letto la *Geometria* di Adrien Marie Legendre e due anni dopo, nell'ambito della meccanica razionale, si cimentava con il difficile "problema dei tre corpi", di cui propose un'originale soluzione approssimata. Vito studiò alla "Scuola Tecnica Dante Alighieri" e in seguito all'Istituto Tecnico "Galileo Galilei" di Firenze, dove il suo precoce talento matematico fu riconosciuto dal suo insegnante di matematica Cesare Arzelà (1847-1912). Avrebbe sospeso gli studi per le difficili condizioni economiche, che lo avrebbero costretto ad accettare un lavoro nella banca dove lavorava lo zio Alfonso, se non fosse stato per l'aiuto economico dello zio Edoardo Almagià, laureato in matematica applicata e ingegneria civile, che aveva intuito le eccezionali doti matematiche di Vito. All'Istituto Tecnico "Galileo Galilei" Vito aveva come docente di fisica il celebre fisico Antonio Roiti (1843-1921), poi professore all'Università di Firenze, il quale, riconosciute anch'egli le eccezionali doti scientifiche del giovane, lo aiutò materialmente offrendogli un posto di assistente preparatore presso l' "Istituto di Studi Superiori, Pratici e di Perfezionamento" di Firenze nel 1877.¹ Grazie a tali aiuti, nel 1878 Vito

¹ Fondato nel 1859, intorno al 1923 diverrà l'attuale Università degli Studi di Firenze.

potè iscriversi alla Facoltà di Scienze Naturali dell'Università di Firenze. L'anno dopo, nell'autunno del 1879, vinse il difficile concorso d'ammissione alla "Scuola Normale Superiore" di Pisa, dove studiò fisica e matematica, entrando in contatto i maggiori rappresentanti della scuola matematica italiana dell'epoca: Ulisse Dini, Enrico Betti, Riccardo Felici furono, infatti, i suoi maestri. Prima ancora di laurearsi, Vito pubblicò tre importanti lavori, uno di fisica matematica (*Sul potenziale di un' elissoide eterogenea sopra sè stessa*) e due di analisi matematica (*Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue* e *Sui principii del calcolo integrale*) che assunsero una notevole importanza nello sviluppo della storia dell'integrazione.



Fig. 2 - Fotografia di Vito Volterra con autografo: «Muoiono gli imperi, ma i teoremi di Euclide conservano eterna giovinezza».

Pisa aveva ospitato, e ospitava, molti dei matematici risorgimentali, che con le loro ricerche avevano fortemente contribuito all'affermazione della scuola matematica italiana in ambito internazionale e avevano combattuto, con le idee e materialmente, per l'unità d'Italia (Enrico Betti aveva combattuto come volontario a Curtatone). Primeggiavano nell'analisi e nella fisica matematica. Particolarmente copiosi furono i loro contributi all'idrodinamica e alla teoria dell'elasticità (Eugenio Beltrami, Carlo Alberto Castiglia-

no, Crotti, Luigi Federico Menabrea, Enrico Betti), che tanta importanza riveste nella Scienza delle Costruzioni.

Vito Volterra assimilò in pieno sia il patriottismo dei maestri sia il loro indirizzo fisico-matematico, confermandosi lungo tutta la sua carriera scientifica “matematico universale” al pari del grande Henri Poincaré, elargendo generosi e fondamentali contributi tanto nelle matematiche pure quanto in quelle applicate e nella fisica matematica.

Nel 1882 si laureò con lode in fisica con Enrico Betti, discutendo una tesi d'idrodinamica (*Sopra alcuni problemi di idrodinamica*) che conteneva alcuni importanti risultati già trovati da George Gabriel Stokes (1819-1903), ma da Volterra indipendentemente ricavati. L'anno successivo, esortato a parteciparvi dai suoi docenti pisani, vinse il concorso per la cattedra di Meccanica Razionale all'Università di Pisa, risultando primo. A ventitrè anni, dunque, Vito Volterra era già professore universitario. Nel 1887 ricevette la prestigiosa medaglia d'oro per le matematiche dalla “Società dei XL”, per i suoi lavori d'analisi matematica. Nel 1888 fu eletto socio corrispondente dell'“Accademia Nazionale dei Lincei” e membro della “Société Mathématique de France”. Nel 1891 fu nominato Cavaliere dell'Ordine della Corona d'Italia ed eletto membro del “Circolo Matematico di Palermo”, di cui nel 1894 entrerà poi nel consiglio direttivo. Il “Circolo Matematico di Palermo”, fondato da Giovan Battista Guccia nel 1884, è la più antica associazione matematica italiana. Ai primi del Novecento, con i suoi 924 soci, di cui ben 618 stranieri, e la sua rivista internazionale «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», il Circolo era la più importante organizzazione matematica in-

ternazionale, come dichiarò Poincaré nel 1908 sulla rivista parigina «Le Temps».

Nel 1892 Volterra ebbe l'incarico per l'insegnamento della Fisica Matematica, sostituendo Betti che era morto in quell'anno, divenendo anche preside della Facoltà di Scienze a Pisa. L'anno dopo, nel 1893, riceve l'invito da parte di Corrado Segre (1863–1924)² ad occupare, all'Università di Torino, le cattedre di Meccanica Razionale e Meccanica Superiore lasciate vacanti dal trasferimento di Siacci a Napoli, come Volterra stesso comunica a Ulisse Dini in una lettera (Guerraggio, Pao-
loni, 2008-2011):

Stimatissimo Professore, sono venuto a cercarla più volte in questi giorni ma non sono mai riuscito a trovarla. Vorrei raccontarvi una notizia che ho ricevuto l'altro giorno da Segre, cioè che la Facoltà di Torino mi ha chiamato lì per succedere a Siacci, che va a Napoli. Questa notizia mi è arrivata inaspettatamente, e ho scritto a Torino dicendo che trattandosi di una questione di importanza avrei voluto aspettare finché non avessi avuto il tempo di riflettere su di essa.

Dini vorrebbe trattenerlo a Pisa, ma Volterra viene convinto dall'amico Roiti ad accettare l'invito di Segre.

Nel 1894 fu eletto “uno dei XL” della “Società Italiana delle Scienze”, l'anno dopo fu nominato socio dell’“Accademia delle Scienze di Torino”. Nel 1895 ricevette la Medaglia per la Matematica dall’ “Accademia Nazionale dei Lincei” di cui diventerà socio nazionale nel 1899. Nel 1897 partecipò al primo Congresso Internazionale dei Matematici a Zurigo e tre anni

² Corrado Segre, con Eugenio Bertini e Luigi Cremona è considerato il fondatore della scuola italiana di geomeria algebrica.

dopo, nel 1900, al secondo tenutosi a Parigi Volterra fu invitato da Poincaré a tenere una delle quattro lezioni plenarie, dal titolo *Betti, Brioschi, Casorati - Trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse*.

Nel 1900, la morte del grande Eugenio Beltrami aveva reso vacante la cattedra di Fisica Matematica a Roma. Volterra fu chiamato a ricoprirla, grazie anche all'appoggio del fisico Pietro Blaserna. Questi, nel 1877, aveva riformato il vecchio "Regio Istituto di Fisica" creando il nuovo "Istituto di Fisica" di via Panisperna, destinato qualche decennio dopo, con i "ragazzi di Corbino", ad occupare un posto d'onore negli annali di storia della fisica. Furo-



Fig. 3 - Vito Volterra.

no, infatti, Volterra e Blaserna a volere a Roma il palermitano Orso Mario Corbino nella cattedra di Fisica complementare, dopo la morte del suo titolare Alfonso Sella, figlio di Quintino.

A Roma, l'11 luglio del 1900 Vito sposa la cugina Virginia Almagià, figlia dello zio Edoardo, che lo aveva sostenuto economicamente negli anni difficili della sua adolescenza a Pisa. Con il trasferimento a Roma, gli impegni di Volterra, fino ad allora soltanto accademici, si ampliano nella sfera politica e sociale. Frequenta le personalità più autorevoli del mondo politico e tecnocrate che orbita attorno alle figure di Francesco Nitti e Giovanni Giolitti. Nel 1903 entra a far parte, assieme a Valentino Cerruti (1850-1909) e Stanislao Cannizzaro (1826-

1910), della “Commissione per l’ordinamento del Politecnico di Torino” e nel 1905 riceve da Giolitti la nomina a senatore del Regno d’Italia per alti meriti scientifici. Si rafforza sempre di più la sua convinzione che la scienza possa essere fattore di crescita sociale, economica e culturale, in piena sintonia con la



Fig. 4 - Vito Volterra in divisa di ufficiale durante la Prima Guerra Mondiale.

concezione positivista, molto forte specialmente in Francia, Paese con il quale Volterra ebbe sempre un rapporto molto stretto e intenso. Furono particolarmente intense le sue amicizie e relazioni con i matematici francesi Henri Poincaré, Emile Picard, Emile Borel, Paul Painlevé e Joseph Pérès e anche con Marie Curie, conosciuti durante il suo viaggio a Parigi del 1888 e nei successivi. Fin da giovanissimo, Volterra si premurò di avere relazioni con il mondo scientifico internazionale.

Volterra, infatti, non era il tipo di matematico isolato, dedito unicamente alla ricerca, bensì era un infaticabile animatore d’iniziative culturali (non soltanto scientifiche) e non trascurava occasione per relazionare l’Italia con gli ambienti scientifici internazionali più qualificati, attraverso lo scambio di ricercatori tra le comunità scientifiche di paesi diversi, mostrando un’incredibile modernità di vedute sulla politica scientifica. Durante tutta la sua vita compì numerosi viaggi in tutta Europa, in Canada (1909), negli Stati Uniti d’America (1909, 1912 e 1919), in Argentina (1910), incontrando i maggio-

ri scienziati dell'epoca. Negli Stati Uniti ebbe modo di visitare il "Massachusetts Institute of Technology" (MIT), la "Jonhs Hopkins University", la "Yale University" e la "Columbia University". Volterra fu certamente il primo in Italia a comprendere l'importante ruolo che stavano assumendo gli Stati Uniti d'America nella comunità scientifica internazionale. Fin dal 1887, aveva intrapreso contatti accademici con i più eminenti scienziati austriaci e tedeschi dell'epoca, quali Georg Cantor, Max Planck, Erwin Schrodinger. In particolare, ebbe rapporti d'amicizia con Felix Klein e David Hilbert. Nell'estate del 1901 lo troviamo nel Regno Unito a Londra, a Oxford e a Cambridge dove ha modo di conoscere il sistema universitario britannico, l'anno dopo, nel 1902 in Germania a Berlino e quindi in Danimarca, Norvegia e Svezia, dove incontra il suo caro amico Gustav Mittag-Leffler, già conosciuto a Pisa nel 1880 e rivisto nel 1888 in occasione di un comune viaggio in Svizzera. Nel 1904 ritorna in Inghilterra. Nel 1907 viene eletto preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

La sua fama di scienziato dilaga ormai in tutta Europa, come dimostrano gli importanti riconoscimenti che gli vengono tributati da accademie di diversi Paesi. Viene nominato membro dell'"Institut de France" (l'equivalente francese dell'"Accademia Nazionale dei Lincei") nel 1904, membro onorario della "London Mathematical Society" nel 1907, membro dell'"Accademia Imperiale di Pietroburgo" e dell'"Accademia delle Scienze di Stoccolma" nel 1908, della "Royal Society" di Londra nel 1910 e dell'"Academy of Science" di Washington nel 1911, su indicazione dell'astronomo George Ellery Hale. Nel 1913 fu nominato membro anche della "Royal Society" di Edimburgo. Ricevette anche numerose

lauree *honoris causa* da Università di tutto il mondo: di Parigi, di Cambridge (1904), di Edimburgo, di Oslo, di Oxford, di Stoccolma e di Christiana, Worcester e della Clark University in Massachusetts negli USA (1909).

A metà del 1909, a Bruxelles, Volterra fa la conoscenza dell'astronomo americano George Ellery Hale, che rivedrà nel settembre dello stesso anno in America e nei successivi viaggi negli Stati Uniti d'America del 1912 e 1919. Con Hale stringerà una duratura amicizia, consolidata dalla condivisione delle stesse idee su molti argomenti e in particolare da un comune impegno nel legare lo sviluppo economico dei propri Paesi ai progressi della ricerca scientifica, con uno stretto rapporto fra ricerca universitaria e industria. Nello stesso anno 1909 Volterra invita Hale a Roma a tenere una conferenza all'Istituto di Fisica di via Panisperna. Nel 1915 Hale promuoverà la creazione negli USA del "National Research Council", che qualche anno dopo, nel 1919, darà spunto a Volterra di riproporlo per l'Italia con il "Consiglio Nazionale delle Ricerche".

La "Società dei XL" volle Volterra come presidente dal 1919 al 1920.

Volterra fu socio nazionale dell'"Accademia delle Scienze di Torino", socio corrispondente delle Accademie di Modena e di Bologna, socio corrispondente del "Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere", presidente della "Accademia Nazionale dei Lincei" dal 1923 al 1926.

Di forti sentimenti patriottici, allo scoppio della Prima Guerra Mondiale fu favorevole all'ingresso in guerra dell'Italia ed egli stesso, all'età di cinquantacinque anni, si arruolò volontario col grado di tenente nell'arma del Genio, dove più poteva essere utile con le sue altissime capacità scienti-

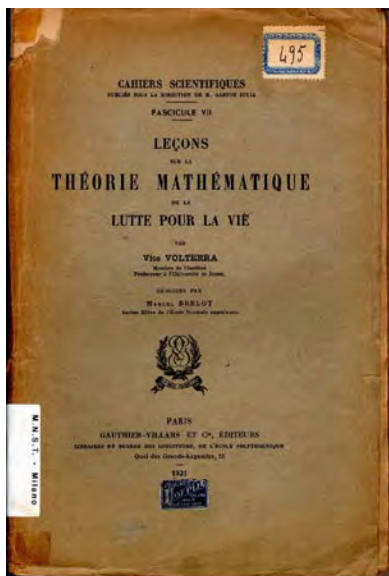
fiche e il suo spiccato spirito organizzativo. Si occupò di dirigibili, a livello sia teorico sia costruttivo, ottimizzandone le prestazioni, sostituendo l'idrogeno (infiammabile) con l'elio. Si dedicò al calcolo balistico per i pezzi d'artiglieria imbarcati sui dirigibili e sviluppò anche ricerche sulle rilevazioni fototelemetriche, per le quali più volte fu operativo in zona di guerra, guadagnandosi sul campo la promozione a capitano e l'assegnazione della Croce di Guerra.

Durante la Prima Guerra Mondiale, il governo francese aveva compreso l'importanza di trarre vantaggio dalle scoperte scientifiche a favore dei problemi della difesa nazionale, creando a tale scopo un'organizzazione interalleata specifica, il "Comité Interalliés des Inventiones" (Comitato Interalleato delle Invenzioni). L'iniziativa incontrò il pieno favore di Volterra, che nel 1917 realizzò una versione italiana di quella organizzazione: l' "Ufficio Invenzioni e Ricerche" del Ministero per le Armi e Munizioni, di cui fu direttore.

Finita la guerra, la cooperazione scientifica fra i paesi vincitori continuò e Volterra, nel febbraio 1919 a Bruxelles, fu tra i promotori, con l'astronomo americano George Ellery Hale, dell' "International Research Council" (Consiglio Internazionale delle Ricerche) di cui Hale fu presidente e Volterra vicepresidente.

Frutto dell'alta considerazione di cui Volterra godeva nel mondo scientifico internazionale, fu la sua nomina nel 1919 a membro del prestigioso "Bureau international de poids et mesures" (Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure), di cui nel 1921 assunse la presidenza, che mantenne fino alla morte (1940). All'estero la sua fama di scienziato fu enorme, tanto

da venire chiamato dai giornali statunitensi *"Mister Italian Science"*.



Fin dalle sue prime manifestazioni, Vito Volterra non esitò a mostrarsi contrario all'indirizzo politico del Fascismo. La sua elezione a presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, nel 1923, pochi mesi dopo la marcia su Roma, oltre ad essere motivata dagli alti suoi meriti scientifici, aveva anche un chiaro significato politico.

L'Accademia aveva mostrato un notevole carattere d'indipendenza nei riguardi del governo. Proprio in quei mesi, una commissione lincea, promossa da Volterra e presieduta dal grande matematico veneziano Guido Castelnuovo, era impegnata nella stesura di un progetto di riforma contrapposto a quello di Giovanni Gentile. L'elezione di Volterra, di cui erano ben note le idee antifasciste e l'opposizione alle direttive fasciste nel campo culturale, rappresentava pertanto la volontà dell'Accademia di affermare la propria autonomia verso il nuovo governo. Nel 1925, superando i contrasti personali avuti con Benedetto Croce sul tema del valore della scienza, Volterra espresse pubblicamente il suo dissenso, aderendo al "Manifesto Croce" degli intellettuali antifascisti. In parlamento confermò la sua posizione politica contro il regime, schierandosi con i senatori dell'opposizione e aderendo all' "Unio-

ne nazionale delle forze liberali e democratiche", capeggiata da Giovanni Amendola. Era l'inizio del declino della vita politica e pubblica di Volterra: d'ora in avanti il Fascismo lo annovererà fra i più temibili nemici, per la sua enorme autorevolezza scientifica e integrità morale. Lo scontro immediato e diretto non era praticabile, perché avrebbe suscitato troppo clamore. Il regime lavorerà dietro le quinte, ricorrendo ad ogni



Fig. 5 - Vito Volterra nel suo studio assieme alla moglie Virginia Almagià.

mezzo per affossare gradualmente la figura del grande scienziato, prima creando i presupposti per allontanarlo ufficialmente dalle sue numerose cariche accademiche e poi imponendo a tutte le orga-

nizzazioni culturali e scientifiche nazionali d'ignorarne le attività e la presenza.

Insofferente del carattere indipendente dell'"Accademia Nazionale dei Lincei", Mussolini, il 7 gennaio del 1926, fondò una nuova Accademia interamente da lui controllata: l'"Accademia d'Italia", che minacciava di conglobare in sé quella dei Lincei, come, infatti, avvenne alcuni anni dopo, nel 1939. Per la prima volta, Volterra fu preso dallo sconforto e pensò di rinunciare alla presidenza dei Lincei, decisione sulla quale, da molti soci, fu indotto a retrocedere. Ma la fermezza

di Volterra nel difendere gli ideali di libertà non venne meno neppure quando, nel novembre del 1931, dal rettore della “Regia Università di Roma”, Pietro de Francisci, giunse anche ai professori dell’ateneo romano l’«invito» ufficiale a prestare il giuramento di fedeltà al regime fascista, che riguardava oltre milleduecento professori universitari dell’intero territorio nazionale. Vito Volterra, a differenza di molti altri suoi illustri colleghi, che soltanto con le parole avevano manifestato avversione al regime, rifiutò il giuramento, inviando a de Francisci una concisa e secca lettera³ di conferma delle sue posizioni politiche antifasciste:

Ill.mo Signor Rettore della R. Università di Roma

Sono note le mie idee politiche per quanto esse risultino esclusivamente dalla mia condotta nell’ambito parlamentare, la quale è tuttavia insindacabile in forza dell’articolo 51 dello Statuto fondamentale del Regno. La S.V. comprenderà quindi come io non possa in coscienza aderire all’invito da lei rivoltomi con lettera 18 corrente relativo al giuramento dei professori.

Con osservanza della S.V.

Vito Volterra

Soltanto dodici professori universitari in tutta Italia ebbero l’«arroganza» di dire no al regime e, come commentò amaramente Gaetano Salvemini dal suo esilio, «nessuno di coloro che in passato s’erano vantati di essere socialisti aveva sacrificato lo stipendio alle convinzioni così baldanzosamente esibite in tempi di bonaccia». Il mancato giuramento ebbe come effetto l’espulsione del Volterra dall’università, nel gennaio del

³ Accademia dei Lincei, Archivio Volterra, s.3, fasc [XVII/4], lett.3.

1932, per «incompatibilità con le generali direttive politiche del governo» e fornì al regime la giustificazione per estrometterlo ufficialmente anche da ogni altra carica accademica. Infatti, secondo il R.D.L. n. 33 del 1933 *Provvedimenti per le Accademie, gli Istituti e le Associazioni di scienze, di lettere ed arte*, gli statuti di tali istituzioni culturali dovevano essere aggiornati, entro un anno, secondo le «esigenze politiche e culturali del Regime», come recitava l'articolo 1 del regio decreto. Il nuovo statuto del 1934 relativo alle istituzioni culturali nazionali, secondo il citato decreto dell'anno prima, prevedeva per gli accademici lincei l'atto di fedeltà al Fascismo, attraverso un altro giuramento, che nuovamente Volterra rifiutò assieme ad altri soci, dei quali il governo poté così legittimare l'estromissione dall'Accademia nel 1936. Nel 1935 un'ordinanza governativa esclude Volterra e i tre grandi matematici Guido Castelnuovo, Giulio Vivanti e Leonida Tonelli dalla Commissione scientifica dell' "Unione Matematica Italiana", per le loro note posizioni antifasciste.

Volterra era in pratica isolato ed emarginato in Italia, dove, nel 1936, poté ricevere un ultimo riconoscimento soltanto in Vaticano da Padre Gemelli, che lo aveva fatto nominare membro della prestigiosa "Pontificia Accademia delle Scienze". Dall'estero, invece, continuavano ad arrivare al matematico italiano i più alti riconoscimenti e molte manifestazioni d'affetto da parte dei numerosi intellettuali che ebbero occasione di conoscerlo e apprezzarlo durante i frequenti incontri avuti con lui nel passato e i contatti epistolari. Delle sue intense relazioni con il mondo scientifico nazionale e internazionale sono testimonianza le circa 16000 lettere⁴ che costituiscono il

⁴ Vedi nota 8.

suo carteggio epistolare, conservato presso l'“Accademia Nazionale dei Lincei”.

Nel 1938, un ultimo colpo si abbattè sul quasi ottuagenario scienziato: le persecuzioni razziali, essendo Volterra di razza semitica. Furono circa cento i docenti universitari sospesi dall'insegnamento per le loro origini semitiche, e fra i matematici figuravano molti dei più eminenti dell'epoca: Federigo Enriques, Tullio Levi Civita, Guido Fubini, Beniamino Segre, Alessandro Terracini (Guido Castelnuovo era già stato collocato a riposo per raggiunti limiti d'età). Volterra, essendo già stato allontanato dall'università nel 1931 per avere rifiutato il giuramento di fedeltà al regime, fu colpito con la radiazione dalle società scientifiche italiane di cui ancora era membro. Così, nell'ottobre del 1938, dall'antico e prestigioso “Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere” gli fu recapitata questa gelida comunicazione:

...a datare dal 16 ottobre u.s. avete cessato di far parte, quale Socio Corrispondente di questo Reale Istituto, in quanto Voi appartenete a razza non ariana.

Come se non bastasse, altre amarezze gli giunsero proprio da persone a lui vicine e care, come Luigi Fantappiè, suo allievo prediletto, che un giorno, rivolgendosi proprio a lui, elogiò i provvedimenti legislativi antisemiti varati da Mussolini. L'episodio è narrato dall'illustre matematico francese André Weil (1906-1998) che frequentò Volterra a Roma negli anni 1925-26:

Volterra era ebreo e nessuno ignorava questo fatto. Come fu possibile, diceva Volterra raccontando l'episodio, che non

ebbi la presenza di spirito di buttarlo giù dalle scale? (Weil, 1991).

Le decimazioni inflitte dalle leggi razziali del 1938 alla matematica italiana furono, dunque, notevoli. Di esse se ne faceva vanto il ministro dell'Educazione Nazionale, Giuseppe Bottai, al secondo Congresso Nazionale dei Matematici Italiani:

La matematica italiana, non più monopolio di geometri di altre razze, ritrova la genialità e la poliedricità tutta sua propria (...) e riprende con la potenza della razza purificata e liberata il suo cammino ascensionale.

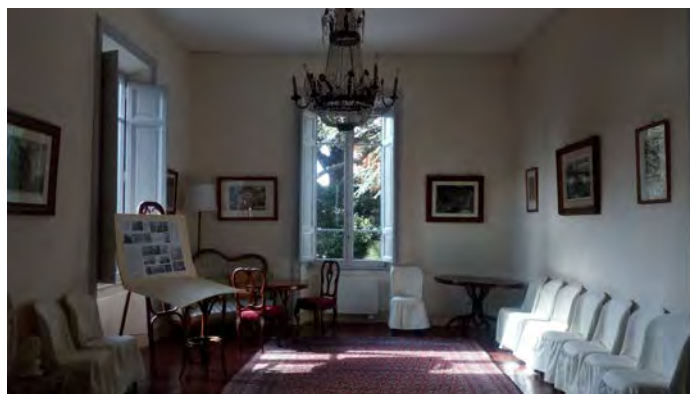
Volterra trascorreva ormai gran parte del suo tempo all'estero, specialmente a Parigi. Nel dicembre 1938 fu colpito da una flebite che gli impedì l'uso degli arti. Ma la sua mente rimase lucida, al punto da consentirgli la scrittura dei suoi ultimi due articoli: *The general equations of biological strife in the case of historical actions*, pubblicato dalla "Edinburgh Mathematical Society" e *Energia nei fenomeni elastici ereditari* pubblicato dalla "Pontificia Accademia delle Scienze" a Roma.

Dopo un'intera vita spesa a illustrare la patria con le opere e le azioni, morì alle 4.30 dell'11 ottobre 1940 a Roma, nella sua casa di Via in Lucina n.17, ufficialmente ignorato in Italia per volere del Fascismo, che non aveva mai cessato di spiarlo e controllarlo. Il palazzo romano ove era situato il suo appartamento (Palazzo Fiano), a pochi metri da Montecitorio, esiste ancora, ma nessuna targa commemorativa ricorda il grande scienziato. Sicuramente, invece, se Volterra fosse stato un letterato o un filosofo, anche di secondaria importanza, altisonanti parole avrebbero richiamato l'attenzione del passante, ricordandone l'operato: un ulteriore segno delle discrimina-

zioni culturali dovute all'artificiosa contrapposizione fra le "due culture". L'unica nota ufficiale sulla sua morte fu un laconico fonogramma della questura di Roma, in cui se ne dava tempestivamente notizia al Ministero degli Interni, che così poté liberarsi di uno dei più incomodi e acerrimi nemici del regime. Di tutta la stampa nazionale, soltanto il «Bollettino della matematica» nel fascicolo gennaio-febbraio 1941 ebbe il coraggio di ricordarlo, assieme alla "Pontificia Accademia del-



Fig. 6 - Il "Villino Volterra" ad Ariccia (Foto dell'Autore).



le Scienze", che per opera di Carlo Somigliana, suo vecchio compagno di studi, gli dedicò una commossa commemorazione.



Fig. 7 - Nel "Villino Volterra" ad Ariccia, da sinistra: Tullio Levi Civita, Nella Volterra, Libera Levi Civita, Virginia e Vito Volterra (Veneziani, Volterra, 2018).

All'estero, invece, Volterra fu celebrato da tutte le numerose istituzioni scientifiche di cui aveva fatto parte, quali la "Royal Society" di Londra, l'"Institut de France", l'"Accademia Imperiale di San Pietroburgo". Il funerale si svolse in forma privata e l'amarezza di quel giorno così venne ricordata dalla nuora del grande scienziato scomparso:

Mi rivedo nell'ottobre del '40 in un cimitero di campagna, dove abbiamo accompagnato mio suocero, che ci ha lasciato per sempre nel periodo più tragico, quando nemmeno uno spiraglio di luce poteva far pensare che fosse possibile il ritorno alla libertà. Egli non è vissu-

to tanto da assistere almeno al crollo delle dittature! Egli, che alla libertà ha tutto sacrificato, dalla carriera universitaria alla partecipazione alla vita politica, piuttosto che giurar fedeltà a un regime che egli avversava e deprecava con tutte le sue forze, ci ha lasciato senza aver rivisto il momento che ha tanto agognato in tutti questi anni!.... Quando giungerà il momento del ritorno alla libertà, non potremo godercelo pienamente, giacché egli che più di tutti lo avrebbe meritato e più avrebbe desiderato assistervi, non sarà con noi a godere la gioia di quell'istante.



Fig. 8 - Marie Curie e Vito Volterra nel "Villino Volterra" di Ariccia. (Veneziani, Volterra, 2018).

Il cimitero di campagna menzionato dalla nuora di Volterra è quello d'Ariccia, che ha dunque l'onore di ospitare un grande figlio dell'Italia democratica e uno dei più grandi matematici che abbia mai avuto l'Italia.

Ad Ariccia, poco prima dell'inizio del ponte, sulla sinistra venendo da Roma, è ancora oggi possibile ammirare il *Villino Volterra* fatto costruire da Vito Volterra e

dalla moglie Virginia Almagià, nel quale ogni anno si trasferivano da maggio all'autunno inoltrato. Era il luogo prediletto da Volterra, per dedicarsi ai suoi studi nella quiete della campagna romana. Erano ospiti del *Villino* molti grandi scienziati dell'epoca italiani e stranieri, con i quali Volterra intratteneva rapporti di amicizia e di collaborazione scientifica. Fra essi:

Tullio Levi-Civita, Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, Marie Curie, Griffith Conrad Evans.

Il *Villino* nel 1943 fu occupato dalle truppe tedesche, che distrussero gran parte del mobilio originale. Successivamente fu utilizzato per ospitare gli sfollati durante la guerra. Soltanto nel 1956, grazie alla perseveranza della vedova di Vito, Virginia Almagià, il *Villino* poté tornare ai legittimi proprietari. Restaurato nel 2010, oggi è una casa museo che fa parte delle “Dimore storiche italiane”, grazie all’interessamento della nipote del grande matematico Virginia Volterra. Il progetto del *Villino* fu redatto dall’architetto Giulio Magni nel 1903, la sua costruzione iniziò il 7 marzo dell’anno dopo ma si concluse definitivamente soltanto nel 1909. I riferimenti stilistici sono molteplici: architettura neorinascimentale nella pianta “bloccata” e prospetti ispirati allo stile *Liberty* dell’epoca, con il tema tipico dell’architettura di Magni costituito dal torrino d’angolo. Tutto attorno all’edificio un parco ricco di frammenti archeologici dell’*Aricia* romana che potremmo definire “botanico” per la grande varietà di specie contenute. Oggi il *Villino Volterra*, oltre per il suo valore storico di residenza estiva del grande scienziato, rappresenta un



Fig. 9 - Vito Volterra con un nipote nel “Villino Volterra” di Ariccia.
(Veneziani, Volterra, 2018).

bell'esempio di architettura neoclassiceggiante e *Liberty* degli inizi del Novecento, rimasto sostanzialmente immutato nella sua forma originaria, ed è anche una bella testimonianza del *modus vivendi* della borghesia romana dell'epoca, che amava costruire le proprie residenze estive nelle immediate vicinanze di Roma, in particolare nelle località dei "Castelli" (Rocca di Papa, Ariccia, Castel Gandolfo) facilmente raggiungibili da Roma tramite la via Appia Nuova e la ferrovia, rese più attraenti dalla elettrificazione giunta nel 1908.

Vito Volterra fu anche un appassionato collezionista di libri e oggetti antichi e di opere d'arte, nonché un grande cultore di letteratura, arte e storia della scienza, come dimostra la sua ricchissima biblioteca del *Villino* di Ariccia.

2 - Vito Volterra, organizzatore scientifico

Vito Volterra fu uno dei fondatori e consiglieri della "Società Italiana di Fisica" (SIF)⁵ di cui fu presidente nel biennio 1906-1908. Nel 1892 fu eletto, assieme ad Antonio Roiti, direttore a vita de «Il Nuovo Cimento», l'organo di stampa della SIF.

Gli interessi di Volterra spaziavano dalla ricerca pura e applicata all'organizzazione d'iniziative culturali (anche non

⁵ Fondata nel gennaio 1897, per iniziativa di 38 docenti universitari di fisica fra cui: Riccardo Felici, Angelo Battelli, Pietro Blaserna, Galileo Ferraris, Antonio Garbasso, Antonio Pacinotti, Augusto Righi, Antonio Ròiti e Vito Volterra. Nel febbraio dello stesso anno aderirono alla Società ben 214 soci che elessero un Comitato Direttivo Provvisorio, composto da Angelo Battelli, Antonio Roiti, Pietro Blaserna, Augusto Righi ed Eugenio Beltrami (Giuliani, 1996, p. 24 e segg.).

scientifiche) di primissimo ordine, fino alla politica, campo che lo vide molto vicino alle posizioni giolittiane, specialmente per la politica scientifica.

Innumerevoli, come già ricordato, furono i riconoscimenti a livello nazionale e internazionale che pervennero a Volterra durante la sua lunga carriera scientifica.

Tra il 1903 e il 1907 lo troviamo impegnato in diverse importanti imprese scientifiche: l'incarico governativo per la costituzione del "Politecnico di Torino" e della "Scuola d'Applicazione di Pisa", l'*Edizione Nazionale delle Opere di Alessandro Volta*, della cui commissione fu membro, la fondazione nel 1907, a Parma, della "Società Italiana per il Progresso delle Scienze" (SIPS), il cui scopo primario era allargare l'interesse per la scienza dall'ambiente universitario a quello di un pubblico più vasto e soprattutto al mondo industriale, in modo da realizzare quella sinergia fra ricerca e industria che, secondo il modello statunitense caldeggiato da Hale e pienamente condiviso da Volterra, doveva costituire il nuovo modo di fare impresa scientifica, in grado di creare benessere sociale ed economico alla comunità umana:



L'insieme dei fatti scientifici nuovi manifestatisi in questo pur così breve lasso di tempo ha rinnovellato, in una con le abitudini della vita, l'indirizzo generale della cultura, ed ha sviluppato e consolidato un sentimento tutto nuovo, mo-

derno e originale, che chiamerei sentimento scientifico, il quale domina beneficamente la nostra epoca, come altre forme non meno universali di sentimento hanno dominato in epoche passate. [...] Questo sentimento, che ormai pervade ogni manifestazione di vita sociale, patrimonio così dei grandi come degli umili, è frutto della genialità degli spiriti più eletti a cui si devono le grandi scoperte e le grandi idee, e della feconda attività pratica della intera società odierna, che indefessamente le applica.[...] Si può affermare che il concetto della scienza ed il valore di essa presso il pubblico sono oggi profondamente cambiati rispetto solo ad un mezzo secolo fa. [...] Perciò il momento storico che attraversiamo ci colpisce con lo spettacolo della moltitudine che affascinata da quelle invenzioni, che in poco tempo furono fonte di tanto benessere e di tanta ricchezza, e influirono così profondamente sui costumi e sulla coscienza sociale, cerca d'impossessarsi delle verità scientifiche nel loro insieme, conoscerle nei particolari e, quel che più preme, attende dalla scienza il progresso materiale e morale. È forse questo stato d'animo di attesa, caratteristico dell'epoca presente, ciò che più alimenta il sentimento a cui ho alluso.

Gli uomini dedicati alle industrie, ai commerci, alle pratiche professioni, innumerevoli richieste hanno ogni dì da rivolgere alla scienza, la quale è di continuo premuta da un'onda crescente di persone che sperano da lei la soluzione dei nuovi problemi che lor si affacciano complessi e incalzanti e la invocano vittoriosa delle difficoltà ognora risorgenti.

Solo dinanzi ad un'Associazione come la nostra, la quale, aperta e liberale, accoglie le più diverse categorie di uomini, tali questioni che tanto interessano la scienza e la pratica, potranno essere efficacemente poste, giacché il porle soltanto richiede la cooperazione delle varie tendenze. Ai laboratori e agli istituti scientifici spetterà poi il compito di maturarle e risolverle (Volterra, 1907).

Ancora una volta, Volterra volle replicare in ambito nazionale le iniziative scientifiche internazionali, proponendo nel 1919 la versione nazionale dell' "International Research Coun-

cil", nonché del "National Research Council" di Hale negli USA, con l'istituzione del "Consiglio Nazionale delle Ricerche", che avrebbe dovuto conglobare vari enti di ricerca già esistenti: l' "Ufficio Invenzioni e Ricerche", il "Comitato per le Industrie Chimiche" e l' "Istituto Aeronautico". Si trattava della realizzazione di quell'ente centrale per l'organizzazione della ricerca in Italia a cui pensava oramai da anni durante i suoi viaggi nei Paesi europei più progrediti scientificamente. Il progetto fu approvato dal Governo Orlando, ma le difficoltà burocratiche fecero iniziare l'attività del CNR ben quattro anni più tardi: il 19 novembre del 1923 fu istituito ufficialmente il "Consiglio Nazionale delle Ricerche", e il 12 gennaio del 1924 Volterra ne fu nominato primo presidente. Così Roberto Natalini, dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo «Mauro Picone» del CNR, illustra le finalità originarie dell'Ente, veramente innovative per l'epoca:

Lo scopo dell'Ente doveva essere quello di mantenere le relazioni internazionali con le istituzioni scientifiche straniere, e organizzare dei comitati per ogni disciplina scientifica che provvedessero a sostenere la ricerca distribuendo finanziamenti alle varie iniziative nazionali. In primo luogo, però, il CNR avrebbe dovuto costruire un proprio laboratorio centrale capace di affrontare sia la ricerca pura sia l'applicazione tecnologica e industriale. Questa struttura, secondo Volterra, doveva essere un centro di eccellenza che superasse i problemi tradizionali dell'Università legati alla mancanza di coordinamento tra le varie sedi, e si doveva articolare in vari settori: analisi (cristallografia, ottica, radiologia), chimica e fisica (meccanica, calore, luce, elettromagnetismo, raggi X), sintesi (catalisi, ecc.) e infine un ufficio per il trasferimento tecnologico verso l'industria (Natalini, 2011).

Vito Volterra fu anche un instancabile organizzatore scientifico e culturale. I suoi interessi spaziavano ben oltre quelli scientifici, abbracciando generosamente anche la cultura umanistica e storica in particolare, dando così una fulgida dimostrazione di quanto falsa sia la separazione fra le cosiddette due culture, l'umanistica e la scientifica, separazione che «è solo nei crani limitati dei portatori d'acqua e degli operatori culturali [...], mentre essa non è mai esistita nelle menti senza confini che stanno ai vertici delle proprie discipline», per dirla con Piergiorgio Odifreddi (2005, p. 131).



Vito Volterra fu, infatti, uno dei principali sostenitori della rivista «Intesa Intellettuale», del “Comitato per la diffusione del libro italiano all'estero”, della “Lega italo-britannica”, della “Lega franco-italiana”, del “Comitato per la ricostruzione della Biblioteca di Loviano”, distrutta dai tedeschi durante la Prima Guerra Mondiale.

Alla sua iniziativa si deve la prima stampa anastatica del *Codice Atlantico* di Leonardo e al suo autorevole sostegno la pubblicazione dei *Papiri greco-egizi* a cura di Domenico Comparetti e Gerolamo Vitelli.⁶

Nel 1919, l'ex ministro dell'istruzione Ferdinando Martini e lo storico Mario Meneghini proposero la creazione di una *En-*

⁶ *Papiri greco-egizi pubblicati dalla R. Accademia dei Lincei sotto la direzione di D. Comparetti e G. Vitelli.* Milano: Hoepli, 1906-1915, voll. I-III [20.1.42].

ciclopedia Italiana, incontrando il favore del governatore della Banca d'Italia Bonaldo Stringher, accademico linceo che coinvolse nell'iniziativa l'amico Volterra. Dopo un primo periodo di stallo, il progetto ricevette nuovo impulso per merito di Giovanni Treccani, che diede effettivo inizio all'impresa, rivolgendosi a Vito Volterra e Giovanni Gentile. Nel 1929 fu dato alle stampe il primo volume dell'*Enciclopedia Italiana*, che si completerà nel 1937.

Durante la sua presidenza all'"Accademia Nazionale dei Lincei", Volterra curò l'ampliamento della biblioteca e, in particolare, nel 1925, si adoperò personalmente affinché il prezioso Museo Copernicano fosse trasferito nelle sale dell'Accademia, a Palazzo Corsini, testimoniando così il suo grande interesse per la storia della scienza.

3 - L'opera

È veramente arduo dare un'idea, seppur sommaria, dell'opera di Vito Volterra,⁷ essendosi essa diramata in molteplici direzioni: ricerca scientifica in svariati campi e un'intensa attività organizzativa di iniziative culturali svolta nell'ambito non soltanto delle numerose discipline scientifiche da lui coltivate, ma anche di altre assai lontane da quelle. Le sue numerose pubblicazioni riguardano la meccanica celeste, la meccanica razionale, la teoria delle equazioni differenziali e delle

⁷ Le memorie scientifiche di Vito Volterra sono disponibili in formato digitale nei 5 volumi: *Vito Volterra. Opere Matematiche. Memorie e Note* curati dall'"Accademia Nazionale dei Lincei" e dal "Consiglio Nazionale delle Ricerche" (<http://mathematica.sns.it/opere/429/>).

equazioni integrali, l'analisi funzionale, l'elettrodinamica, la teoria dell'elasticità, la biomatematica e l'economia.



Tra il 1900 e il 1906, studiò le ricerche dell'inglese Karl Pearson sull'impiego del calcolo delle probabilità in biologia e pubblicò tre brevi scritti sull'applicazione della matematica in questo campo. Per tali lavori, che suscitavano molto interesse, Volterra è considerato, assieme all'americano Alfred J. Lotka (1880-1949), il fondatore della biomatematica e ottenne

la presidenza onoraria del "Consiglio internazionale per l'esplorazione scientifica del Mediterraneo".

L'interesse di Volterra per l'applicazione di metodi matematici alla biologia fu ulteriormente stimolato dal genero Umberto D'Ancona, biologo, che si rivolse a lui per un'interpretazione razionale di alcuni strani dati statistici relativi alle presenze delle varie specie ittiche nell'Adriatico, nel periodo 1905-1923. Durante la Prima Guerra Mondiale la pesca era pressoché cessata in quel mare, a causa delle ostilità belliche, e pertanto non v'erano perturbazioni "esterne" che potevano influenzare la presenza delle diverse specie di pesci. I dati statistici mostravano per tale periodo strane fluttuazioni periodiche nelle loro proporzioni, che furono chiaramente interpretate da Volterra considerando il caso ideale di due specie, una di prede e l'altra di predatori, che si contendono lo stesso cibo o si nutrono l'una dell'altra. Secondo tale modello,

inizialmente la specie più aggressiva, avendo il sopravvento sull'altra, ne fa diminuire la presenza, ma successivamente essendo diminuito il nutrimento costituito dalla specie più debole il numero di pesci predatori tende a diminuire, mentre i pesci preda riprendono di conseguenza ad aumentare, dando luogo alle periodiche fluttuazioni evidenziate dalle statistiche. Volterra fu da questo caso indotto a considerare il problema più generale di convivenze di un numero qualunque di specie animali che si scambiano azioni reciproche di varia natura, che trattò matematicamente con un sistema di equazioni differenziali non lineari. Nel 1926 pubblicò tali studi in due suoi scritti: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* e *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*, che gli valsero da parte di Guido Castelnuovo il riconoscimento di creatore della «teoria matematica della lotta per la vita». L'equazione di Lotka-Volterra, alla base della biomatematica, è uno dei primi esempi di modello matematico applicato a realtà dinamiche, in questo caso costituite dall'equilibrio dinamico tra specie predatrici e specie predate. Il forte impegno di Volterra in questo settore è testimoniato dalla sua ricchissima corrispondenza epistolare sull'argomento con scienziati di tutto il mondo,⁸ da cui emer-

⁸ L'epistolario di Vito Volterra è vastissimo e fa parte dell'Archivio Volterra donato all'"Accademia Nazionale dei Lincei" dagli eredi del grande matematico nel marzo 1981. L'Archivio è ora conservato nei locali della Biblioteca accademica, composto da oltre 100 scatole con più di 500 manoscritti scientifici, circa 16.000 lettere scambiate con 1.500 corrispondenti, 20 scatole di carte relative ad attività accademiche e politiche e al suo impegno didattico, esso documenta il lavoro intellettuale e il ruolo di primo piano avuto da Volterra nell'organizzazione della cultura e della ricerca scientifica in Italia. Una prima digitalizzazione di una parte della

ge l'intenzione di Volterra di costruire una «meccanica razionale delle associazioni biologiche», vale a dire una scienza che studiasse l'esito delle reciproche azioni fra specie animali conviventi con gli stessi metodi matematici rigorosi applicati nella meccanica razionale. Tale progetto incontrò le resistenze di molti biologi che, contrapponendo la complessità del vivente alle necessarie semplificazioni matematiche, ritenevano i modelli matematici non idonei per lo studio della biologia. A loro, nel 1935, Volterra ribatteva che anche la realtà fisica ha una complessità che tuttavia i metodi matematici della meccanica razionale, e più in generale della fisica matematica, riuscivano con successo a rappresentare, pur con le inevitabili idealizzazioni che prendevano a fondamento. Tuttavia, i profondi e rapidi sviluppi della biologia, e in particolare della biologia molecolare, hanno richiesto strumenti d'indagine matematica diversi dall'analisi matematica (equazioni differenziali non lineari) su cui Volterra faceva affidamento, mentre oggi si rivela molto più efficace l'uso del calcolatore elettronico, che già si è dimostrato prezioso per il sequenziamento del genoma umano e che implica d'altra parte l'impostazione e la soluzione di una mole di problemi matematici. A parte, dunque, le tecniche matematiche di fatto oggi utilizzate, la biomatematica fondata

corrispondenza di Vito Volterra (17 corrispondenti per un totale di 1.930 lettere) è disponibile on-line all'indirizzo

<http://operedigitali.lincei.it/Volterra/menu.htm>. I corrispondenti e le rispettive lettere sono: Luigi Bianchi 196, Guido Castelnuovo 126, Valentino Cerruti 87, Orso Mario Corbino 53, Griffith Conrad Evans 97, Jacques Hadamard 89, George Ellery Hale 33, David Hilbert 23, Felix Klein 38, Tullio Levi-Civita 214, Gustav Mittag-Leffler 267, Paul Painlevé 22, Emile Picard 211, Salvatore Pincherle 92, Corrado Segre 102, Carlo Somigliana 246, Giovanni Vailati 34.

da Volterra e Lotka rimane ancor oggi una realtà nel firmamento dei saperi.

Vito Volterra si dedicò pure a pionieristiche applicazioni della matematica all'economia, già iniziate dall'ingegnere ed economista Vilfredo Pareto.

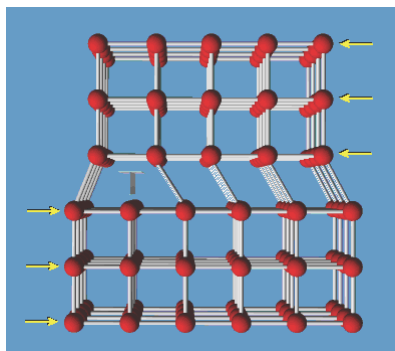


Fig. 10 - Presenza di una dislocazione nel reticolo cristallino di un metallo.

La sua notevole preparazione e vocazione negli studi di teoria dell'elasticità portarono Volterra a studiare matematicamente, in particolare, i casi di deformazioni nei reticoli cristallini dei materiali solidi non provocate da forze esterne. Tali studi si concretizzarono nello sviluppo, nel 1905, della teoria fisico-matematica delle dislocazioni nei materiali metallici,

fondata sull'analisi dei campi di tensione elastica da esse indotte («*Annali della Scuola Normale Superiore*», Vol. 24, pag 400). Con tali studi, Volterra fondò la teoria della statica elastica, ovvero degli sforzi elastostatici e dei campi di spostamenti elementari all'interno dei reticoli cristallini creati dalle dislocazioni nei solidi. Molti anni dopo, dal 1930, Geoffrey Ingram Taylor, Egon Orowan e Michael Polanyi compresero che la teoria matematica creata da Volterra poteva spiegare le proprietà plastiche dei solidi. Il termine latino "dislocazione" fu introdotto da Volterra in tale campo di ricerche, che all'epoca erano assolutamente all'avanguardia. Una dislocazione è una distorsione locale del reticolo cristallino dovuta a una discontinuità geometrica che si manifesta come traslazione di alcuni

atomi rispetto alle normali posizioni reticolari, ovvero come traslazione del blocco del reticolo deformato rispetto alla parte del reticolo non difettiva, da cui il nome "dislocazione". Una dislocazione è pertanto un impulso elementare di deformazione plastica, che può propagarsi all'interno del reticolo cristallino producendo una deformazione plastica globale del solido. Infatti, sotto l'effetto di sollecitazioni esterne, le dislocazioni possono propagarsi più o meno all'interno dell'intera struttura cristallina, con moto ondoso, dando luogo al loro caratteristico movimento a "verme" (Nicotra, 2017). Tutte le proprietà meccaniche dei metalli (durezza, resistenza a fatica, fragilità, duttilità, snervamento, elasticità, plasticità, anelasticità, ecc...) possono essere facilmente interpretate alla luce della teoria delle dislocazioni, che pertanto occupa un posto di rilievo nella moderna scienza dei metalli e dei materiali, oggi studiata nei corsi di laurea in Ingegneria Meccanica.

I contributi dati da Volterra all'analisi matematica sono veramente poderosi: il primo vero sviluppo di una teoria generale delle equazioni integrali (1896) e integro-differenziali

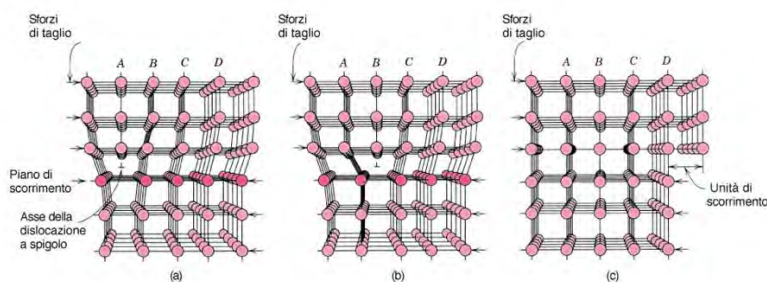


Fig. 11 - Meccanismo della deformazione plastica di un materiale metallico spiegato con il movimento graduale "a verme" di una dislocazione all'interno del reticolo cristallino.

nonché l'introduzione del fondamentale concetto di "funzione di linea" (1887) e conseguentemente la fondazione di una nuova branca della matematica, l'analisi funzionale. Nel famoso congresso internazionale dei matematici che si tenne a Bologna nel 1928 (fu il primo, dopo la Prima Guerra Mondiale, a riunire anche matematici delle nazioni sconfitte, inizialmente esclusi dai consessi internazionali), Vito Volterra e Salvatore Pincherle furono ufficialmente riconosciuti come padri dell'analisi funzionale da matematici del calibro di Jacques Hadamard e Maurice Fréchet. I lavori di Volterra sull'analisi funzionale sono raccolti nei volumi *Theory of functionals* (1930) e *Théorie générale des fonctionnelles* (1936), trattato scritto in collaborazione con il professor Jean Perès dell'Università "Sorbona" di Parigi. L'analisi funzionale ebbe successo per un duplice motivo: l'aver permesso lo sviluppo della teoria delle equazioni integrali e la sua applicazione alla recente meccanica quantistica.

Volterra apparteneva alla categoria dei matematici applicati, perché la sua matematica era «rivolta verso l'esterno, al mondo degli oggetti e delle concretezze», piuttosto che «verso l'interno dell'uomo, al mondo delle idee e delle astrazioni», volendo utilizzare l'efficace distinzione fra matematica applicata e matematica pura data da Piergiorgio Odifreddi (2000, p. 92). Le sue ricerche matematiche traevano alimento dalle questioni irrisolte poste dalla fisica matematica, disciplina in cui, non dimentichiamolo, Volterra si era laureato e alla quale aveva dedicato la sua lunga carriera di docente universitario. Non deve, pertanto, meravigliare che l'idea delle funzioni di linea gli fosse venuta in mente osservando che «... in molte questioni di Fisica e di Meccanica [...] capita di dover conside-

rare delle quantità che dipendono da tutti i valori che una o più funzioni di una variabile prendono in dati intervalli» (Volterra, 1954-1962, 1954 p. 294), come per esempio accade per la temperatura di una lamina metallica in un punto che dipende da tutti i valori della temperatura al contorno. Le funzioni fino ad allora conosciute erano leggi di corrispondenza che permettevano di associare a un valore numerico di una variabile (indipendente) uno o più valori numerici di un'altra variabile (dipendente), e pertanto operavano su numeri (reali o complessi). Gli esempi portati da Volterra conducevano, invece, a generalizzare la precedente definizione, allargandola al caso in cui la funzione operava non più su singoli valori numerici, bensì sugli infiniti valori assunti da un'altra funzione in un certo intervallo della sua variabile indipendente: queste nuove funzioni operavano dunque su funzioni e non su numeri. Volterra non utilizzò il termine "funzione di funzione", al quale verrebbe spontaneo di pensare, perché era già utilizzato per indicare una funzione di variabile numerica definita tramite un'altra funzione, ovvero una funzione composta. Per evitare ambiguità, utilizzò, in un primo momento, il termine "funzione di linea". Tale denominazione traeva spunto da un'esemplificazione geometrica del nuovo concetto di funzione, da Volterra stesso proposta per agevolarne la comprensione. Immaginiamo tutte le linee (rette o curve) che si possono tracciare su un piano o su una superficie: una legge che permetta di associare a ciascuna di esse un numero definirà una funzione di linea entro quel piano o superficie. Ovviamente, anziché linee in un campo bidimensionale si possono considerare superfici in un campo tridimensionale; allora per svincolarsi dall'esempio iniziale, avente esclusivamente finalità di-

dattiche, il termine “funzione di linea” fu poi modificato in “funzionale” da Hadamard, essendo di significato più generico.

L'introduzione dei funzionali rese possibile lo studio delle equazioni integrali e integro-differenziali, le quali sono equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno d'integrale e di derivata ed è una funzione. L'orma lasciata da Volterra in tale campo è testimoniata dal nome di un tipo di equazioni integrali denominate ancor oggi dai matematici “equazioni integrali di Volterra” di 1^a e 2^a specie. Fra i numerosi scritti sulle equazioni integrali e integro-differenziali è doveroso ricordare almeno le seguenti opere: *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles* (1906-1912),⁹ *Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différentielles* (1913), *Teoria delle equazioni funzionali e delle equazioni Integrali e Integro-differenziali* (1930). Le equazioni integrali e integro-differenziali trovano notevoli applicazioni nei cosiddetti fenomeni ereditari o d'isteresi, caratterizzati dalla dipendenza dello stato attuale dalla loro storia precedente, come illustrò nell'ultima lezione del ciclo tenuto alla Sorbona nel 1912:¹⁰

Se assoggettiamo l'estremità di una sbarra elastica orizzontale, fissata all'altro estremo, a pesi che vanno dapprima crescendo e poi diminuiscono a poco a poco, il corpo mentre

⁹ Il volume, pubblicato ad Uppsala nel 1906 e poi ripubblicato in Francia dalla casa editrice Hermann nel 1912, raccoglie le lezioni tenute in Svezia da Volterra, su invito di re Oskar II (1829-1907) di Svezia.

¹⁰ Vito Volterra, *L'applicazione del Calcolo ai fenomeni di eredità*. In: «*La Revue du Mois*», Paris 1912; *Leçons sur les fonctions des lignes*, Paris Gauthier-Villars 1913, Chap. XIV, pp. 207-225; *Saggi scientifici*, Bologna: Zanichelli 1920, pp. 189-218. Anche in (Volterra, 1954-1962, Vol. 3, 1900-1913).

si va alleggerendo, non riprende le stesse deformazioni per cui è passato mentre lo caricavamo, e non presenta la stessa flessione, in corrispondenza allo stesso peso flettore.

Dunque la deformazione attuale non dipende solamente dal carico attuale, ma da tutti i carichi precedenti: sembra perciò che si possa enunciare il principio che ogni azione che si è esercitata lasci un ricordo nel corpo, il quale conserva perciò la memoria di tutti i carichi che ha sopportato.

In linea con la sua innata sensibilità verso le «teorie fisiche e naturali», piuttosto che verso le questioni «poste artificialmente a priori», come egli stesso ebbe a dire alludendo con un certo sarcasmo alla matematica pura, Volterra sviluppò la teoria generale delle equazioni integrali, prendendo spunto dallo studio di particolari problemi detti “ereditari”, o più correttamente “mnemonici”, che si presentano in molti casi reali di diversa natura, in cui lo stato attuale di un sistema dipende non soltanto da quello iniziale, ma anche dalle sue modificazioni occorse fino al momento attuale, ovvero dalla sua “storia”. Un esempio tipico è costituito in fisica dai fenomeni d’isteresi in generale, che consistono nella non perfetta reversibilità della variazione di una grandezza al variare di un’altra. Il caso più noto è l’isteresi elastica, in cui un provino di un materiale sottoposto ad azioni esterne si allunga, ma, una volta che queste sono rimosse, non recupera totalmente le dimensioni iniziali, come avverrebbe nel caso di comportamento perfettamente elastico, conservando delle deformazioni permanenti. Lo stato finale, dunque, dipende dalle sollecitazioni alle quali il materiale è stato sottoposto nel passato, che hanno lasciato un segno. Nella celebre *Matematica Logico Intuitiva* di Bruno de Finetti (Roma:Edizioni Cremonese, 1957, p. 497) è riportato un esempio di applicazione, ad un caso de-

mografico, di equazione integrale di Volterra: il calcolo del numero totale di nati fino ad un dato istante (partendo da uno iniziale), considerando noto il “coefficiente di fecondità” dei nati nell’istante iniziale, comprensivo dei “coefficienti di femminilità e di sopravvivenza”.

La soluzione di un’equazione integrale è l’espressione della sua funzione risolvente, che, secondo i procedimenti risolutivi di Vito Volterra, può essere posta sotto forma di serie convergente, vale a dire di somma degli infiniti termini di una successione.¹¹ Molti problemi di fisica matematica possono essere correttamente impostati e risolti tramite equazioni integrali; da ciò deriva la grande importanza che la teoria delle equazioni integrali ha nello studio dei fenomeni fisici tramite rigorosi metodi matematici.

Facendo uso di equazioni integrali, Volterra costruì un modello matematico delle interazioni fra specie animali conviventi più raffinato di quello che, in precedenza, aveva proposto ricorrendo a un sistema di equazioni differenziali non lineari.

Il grande matematico dette numerosi e importanti contributi anche nel campo delle applicazioni della fisica. In particolare si occupò di problemi di ottica, delle equazioni delle onde cilindriche e delle piccole oscillazioni cui sono sottoposti i poli della Terra, in seguito a spostamenti del suo asse di rotazione, scoperte nel 1885 dall’astronomo italiano Arminio Nobile. Tali spostamenti furono dapprima attribuiti a fenomeni accidenta-

¹¹ La somma di una serie convergente è il limite, determinato e finito, cui tende la successione delle somme parziali della serie, al tendere all’infinito del loro numero.

li, quali cause geologiche ed eruzioni vulcaniche. Volterra, invece, partendo dall'intuizione che la causa era da ricercare in azioni naturali permanenti, consistenti in spostamenti regolari di materia sulla superficie terrestre, dovuti all'evaporazione delle acque con successiva condensazione e alle correnti marine, riuscì a fornire un rigoroso modello matematico del fenomeno scoperto da Nobile.

A illustrare come molte scoperte scientifiche, in particolare matematiche, siano state generate da un'unica idea direttrice, giova ricordare quella che guidò Volterra, com'egli stesso affermò, nella scoperta sia dei funzionali (1883) sia delle equazioni integrali (1884):¹² «il principio del passaggio dal discontinuo al continuo». Tralasciando l'applicazione di tale principio al caso delle equazioni integrali, perché coinvolgerebbe argomenti eccessivamente tecnici, accenniamo, invece, al caso dei funzionali, che in virtù di tale principio possono essere pensati come la naturale evoluzione delle funzioni di più variabili, allorché il numero di queste tende all'infinito, rimanendo, però, i loro valori entro un intervallo finito. Così A. Weinstein (1964) ricorda i contributi di Volterra in questo campo:

La teoria dei funzionali come generalizzazione dell'idea di una funzione di più variabili indipendenti è stata sviluppata da Volterra in una serie di articoli pubblicati a partire dal 1887 ed è stata ispirata dai problemi del calcolo delle variazioni. Questi documenti hanno avviato la moderna teoria dell'analisi funzionale. Attirarono subito l'attenzione dei più

¹² I primi studi sulle equazioni integrali furono, tuttavia, pubblicati molto più tardi, nel 1896.

importanti matematici del suo tempo. In realtà il nome “funzionale” è stato introdotto successivamente da Hadamard e ha ora sostituito la nomenclatura originaria di Volterra. Nello sviluppo di questa teoria Volterra seguì già un principio che lo guidò attraverso molte scoperte e che chiamò il passaggio dal discreto al continuo. Fu questo principio che applicò alle sue celebri ricerche sulle equazioni integrali di tipo volterrano. Considerava euristicamente le equazioni integrali come un caso limite di un sistema di equazioni algebriche lineari e quindi controllava direttamente le sue formule finali. La sua procedura ha aperto la strada a Fredholm e Hilbert che, tuttavia, hanno studiato il processo di limitazione stesso (O'Connor e Robertson, 2013).

Ancor oggi il nome di Volterra è ricordato e onorato con diverse iniziative culturali. Fra le curiosità: un cratere della Luna è stato intitolato al grande scienziato italiano.

Assai meritoria è l'istituzione nel 1988, all' "Università Tor Vergata" di Roma, del "Centro Vito Volterra",¹³ istituzione di ricerca che si ispira all'interdisciplinarietà e al dialogo fra ricerca pura e applicata, che furono le direttrici fondamentali dell'opera di Volterra. La principale attività del centro è la modellizzazione matematica di sistemi complessi, che richiede la fusione fra conoscenze e metodologie maturate in diversi ambiti scientifici.

Ringraziamenti

L'autore esprime la sua gratitudine, per la revisione del testo, all'ing. Vito Volterra, nipote omonimo del grande Matematico, che conobbe il Nonno (essendo nato nel 1935) e vive attualmente in Canada.

¹³ <http://volterra.uniroma2.it/center/index.php?lang=it>

Bibliografia

BIGGIERO Giovanni (1974). *Dislocazioni e caratteristiche meccaniche dei materiali metallici*. Vol. 1. *Nozioni preliminari. Elementi di teoria delle dislocazioni*. Roma: Edizioni Sistema.

COEN Salvatore (2008). La vita di Vito Volterra vista anche nella varia prospettiva di biografie più o meno recenti. «*La Matematica nella Società e nella Cultura Rivista dell'Unione Matematica Italiana*», Serie I, Vol. I, Dicembre 2008, 443-476.

GIULIANI Giuseppe (1996). *Il Nuovo Cimento - Novant'anni di fisica in Italia: 1855-1944*. Pavia: Percorsi della Fisica.

GOODSTEIN J. (2007). The Vito Volterra Chronicles. The life and times of an extraordinary mathematician 1860-1940. «*American Mathematical Society, The London Mathematical Society, History of Mathematics* » Vol. 31, 2007, pp. xxvi+310. Edizione italiana: *Vito Volterra. Biografia di un matematico straordinario*. Bologna: Zanichelli, 2009.

GUERRAGGIO Angelo, PAOLONI Giovanni (2008-2011). *Vito Volterra*. Roma: Angelo Muzzio Editore, 2008; *Vito Volterra*. Basel: Birkhäuser, 2011.

ISRAEL Giorgio, GASCA Ana Millàn (2002). The Biology of Numbers. The Correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology. «*Science Networks: Historical Studies*» Vol. 28, Birkhauser, 2002, pp. x+299.

KOVALEVSKAJA Sofja (2000). *Memorie di infanzia*. Introduzione di Laura Guidotti. Pendragon.

KRALL Giulio (1955). Vito Volterra. La matematica e la scienza del suo tempo, «*Civiltà delle macchine*», 3, 1, 1955, 65-77.

LEVI Beppo (1941). La personalidad de Vito Volterra. *Pubi. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 1941, III, 25-48.

LEVI MONTALCINI Rita (1996). *Senz'olio controvento*. Milano: Baldini & Castaldi, (capitolo "Vito Volterra: i matematici parlano con Dio", 127-143).

LINGUERRI Sandra (2005). *Vito Volterra e il Comitato talassografico italiano. Imprese per aria e per mare nell'Italia unita (1883-1930)*. Firenze: Olschki.

LINGUERRI Sandra (2015). *Vito Volterra in divisa: dalla cooperazione interalleata al Consiglio Nazionale delle Ricerche, in La Grande Guerra rivoluziona la comunità scientifica. Il ruolo dell'Italia. Atti del convegno (Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 10-11 dicembre 2014), Roma, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, 2015, pp. 109-138.*

MAZ'YA Vladimir, SHAPOSHNIKOVA Tatyana (1998). A Universal Mathematician. «*American Mathematical Society and London Mathematical Society*», pp. xxv + 574.

NATALINI Roberto (2011). La matematica e la realtà: le sfide del CNR. In AA.VV., *Nuovi ponti tra scienza e società. Il CNR, crocevia della cultura italiana*. Torino: Bollati Boringhieri.

NICOTRA Luca (2017). Il disordine nell'ordine della materia. «*ArteScienza*», Anno IV, N. 8, pp. 5-38.

O'CONNOR J. J. and ROBERTSON E. F. (2013). *Samuel Giuseppe Vito Volterra*. On-line in MacTutor History of Mathematics (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Volterra/>).

ODIFREDDI Piergiorgio (2000). *La matematica del Novecento*. Torino: Einaudi.

ODIFREDDI Piergiorgio (2005). La guerra dei due mondi. *Le due culture di Charles P. Snow*. Marsilio.

PAOLONI Giovanni (1990). *Vito Volterra e il suo tempo*. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei.

SIMILI Raffaella (2001). La presidenza Volterra. In Raffaella Simili, Giovanni Paoloni (cur.) *Per una storia del Consiglio Nazionale delle Ricerche*, Vol. I, Roma-Bari: Laterza, pp. 72-127.

SOMIGLIANA Carlo (1942). Vito Volterra. *Acta Pontificia Academia Scientiarum* 6, 57-85.

VENEZIANI Roberto, VOLTERRA Virginia (cur.) (2018). *Il Villino Volterra in Ariccia*. Modena: Palombi Editori.

VOLTERRA Vito (1907). *Il momento scientifico presente e la nuova Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Discorso pronunciato dal prof.. senatore V. Volterra. Presidente del Comitato ordinatore*. Prima Riunione, Parma - settembre 1907.

VOLTERRA Vito (1954-1962). *Opere matematiche 1954-1962*. In 5 volumi Vol 1 (1881-1892), Vol 2 (1893-1899), Vol 3 (1900-1913), Vol 4 (1914-1925), Vol 5 (1926-1940). Roma: Accademia Nazionale dei Lincei. On--line in <http://mathematica.sns.it/opere/429/>.

WEIL André (1991). *Souvenirs d'apprendissage*. Basel: Birkhauser. Traduzione italiana: *Ricordi di Apprendistato*, Torino: Einaudi, 1993.

WEINSTEIN A. (1964). Review: Vito Volterra: Opere matematiche. Memorie e Note Vols. 1-5, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (3) , 335-337.

WHITTAKER Edmund (1941). Vito Volterra, 1860-1940. Obituary. *Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 3, 1941, 691-729.

Spunti di analisi non standard

Oltre i numeri reali

Luciano Corso*

*Presidente della Federazione Italiana Mathesis - Direttore di
«MatematicaMente»; e_mail: lcorso@iol.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v3n1.040

Sunto: *L'articolo introduce i principi di base dell'analisi non-standard partendo dal campo ordinato e completo dei numeri reali. La perdita della proprietà archimedeica permette di acquisire maggiori capacità operative e una più fluida esposizione analitica.*

Parole Chiave: *infinitesimo, infinito, campo ordinato, infinitamente vicino.*

Abstract: *Starting from the set of real numbers as an ordered and complete field, we introduce the concepts that lead to a new ordered numeric field where the property of Archimedes is lost, but greater analytical clarity and operational capacity are acquired.*

Keywords: *infinitesimal, infinite, ordered field, infinitely close.*

1 - Introduzione

Per arrivare a una sistemazione elementare del campo dei numeri iperreali, occorre partire o dal campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o dal campo ordinato e completo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Qui scegliamo questo secondo approccio. Introdurremo, poi, delle novità che potranno essere utili sia per una specu-

lazione diversa dal punto di vista dell'analisi matematica standard, sia per una migliore comprensione di alcuni aspetti operativi del suo sviluppo analitico.

Si parte quindi da $\mathbb{R}$ e dalle sue caratteristiche fondamentali. Sappiamo che è un campo ordinato e completo; cioè: $\{\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, \text{sup}\}$, dove *sup* sta per estremo superiore; quindi, per ogni insieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato superiormente, c'è un estremo superiore (indicato appunto con «*sup*») [1][2].

2 - Da $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$

Ampliamo ora il sostegno del campo dei numeri reali per costruire un nuovo campo numerico che comprenda gli infinite-simi, $\mathbb{R}$ e gli infiniti e che sia un'estensione propria di $\mathbb{R}$ che risulti coerente rispetto a $\mathcal{L}$, struttura logica del linguaggio del primo ordine [10]. Per far ciò, occorre precisare la nozione di infinitesimo come un nuovo oggetto matematico [3][4][5].

Esso viene definito così: Si afferma che ε è un infinitesimo se

$$|\varepsilon| < a, \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{oppure} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (1)$$

dove $\mathbb{R}^+ = \{a | a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Come è noto, de-finire un nuovo oggetto non significa che poi esso esista. Quindi occorre affermare, come assioma, che in $\mathbb{R}$ esteso almeno un $\varepsilon > 0$ esiste. Si dichiara, inoltre, che «0» è infinitesimo e che è l'unico numero reale a esserlo.

Definiamo la relazione « $\approx$ », cioè "... *infinitamente vicino a* ...": dati due oggetti di questo nuovo insieme che stiamo

costruendo, x e y , essi si dicono «infinitamente vicini» e si scrive

$$x \approx y, \quad (2)$$

se $|x - y| = \varepsilon$.

Il doppio *tilde* presente in (2) è una relazione di equivalenza e, quindi, ha le seguenti proprietà:

- 1) $\forall x, \quad x \approx x$ *riflessiva*
- 2) $\forall x, y, \quad x \approx y \rightarrow y \approx x$ *simmetrica*
- 3) $\forall x, y, z, \quad x \approx y, y \approx z \rightarrow x \approx z.$ *transitiva* (3)

Come conseguenza della definizione di infinitesimo, c'è la definizione di infinito (nota: per convenzione, per indicare i due nuovi oggetti matematici, useremo rispettivamente le lettere greche minuscole e maiuscole). Se infatti, (1) definisce un infinitesimo, allora per ogni ε non nullo la seguente espressione definisce l'infinito corrispondente:

$$\Lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{dove } \varepsilon \text{ è un infinitesimo non nullo.} \quad (4)$$

Questi nuovi oggetti sono “numeri” appartenenti a $\mathbb{R}$ esteso, come vedremo tra breve; conveniamo di assegnare il simbolo ${}^*\mathbb{R}$ a questo nuovo insieme numerico costituito da $\mathbb{R}$, da infinitesimi e infiniti. Ogni $x \in {}^*\mathbb{R}$ o è della forma

$$x = a + \varepsilon, \quad (5)$$

con $a \in \mathbb{R}$, o è infinito.

Diciamo che « a » è la parte standard di x e scriviamo: $\text{st}(x) = a$.

Siano $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, si confermano le seguenti proprietà di $\text{st}(\cdot)$
[dimostrazione omessa]

$$\text{st}(x + y) = \text{st}(x) + \text{st}(y)$$

$$\text{st}(x \cdot y) = \text{st}(x) \cdot \text{st}(y)$$

$$\text{st}(-x) = -\text{st}(x)$$

$$\text{st}(y) \neq 0 \Rightarrow \text{st}(x/y) = \text{st}(x)/\text{st}(y)$$

$$x < y \Rightarrow \text{st}(x) \leq \text{st}(y)$$

$$\text{st}(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{\text{st}(x)}.$$

Infine, la parte standard di un infinitesimo è 0.

3 - Campo degli Iperreali

Verifichiamo se con l'introduzione di questi nuovi elementi è possibile arrivare a un nuovo campo numerico ordinato che chiameremo campo dei numeri iperreali: $\{*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\}$, dove l'asterico che precede le graffe, $\{*\mathbb{R}\}$, riguarda tutti gli elementi dell'insieme e indica che stiamo trattando un campo numerico estensione naturale di $\mathbb{R}$ [3][4][5]. Si dimostra che se questo campo esiste, esso manca di una importante proprietà: la proprietà archimedea.

Ci sono molti modi di esprimere l'assioma di Archimede, come è noto; esso può essere enunciato così:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a < b, \exists n \in \mathbb{N}_{>0}: na > b. \quad (6)$$

Nel campo degli iperreali l'assioma (6) non vale più.

Il problema è creato dalla presenza degli infinitesimi. Se ε e τ sono due infinitesimi positivi tali che $\varepsilon < \tau$ non è sempre vero che $n\varepsilon > \tau$, per almeno un $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Infatti, nel caso in

cui $\varepsilon = \tau^2$ l'assioma non tiene. La perdita della proprietà archimedeica corrisponde alla mancata completezza di ${}^*\mathbb{R}$.

Infatti, l'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente, ma non ammette «sup» [5].

Vogliamo comunque che il nuovo insieme sia un campo ordinato. Per far ciò iniziamo a estendere le usuali operazioni in $\mathbb{R}$, «+» e «·», e le operazioni che danno gli elementi inversi per ogni $x \in {}^*\mathbb{R}$ rispetto a «+» e «·» (in quest'ultimo caso lo zero è escluso). È utile la seguente classificazione per tipi dei numeri iperreali:

- «0» è infinitesimo e parte standard di tutti gli infinitesimi
- infinitesimo non nullo (= *inn*)
- finito non infinitesimo (= *fni*)
- infinito (= *I*).

Partendo da questa, si possono costruire le seguenti tabelle [4], dove il simbolo « ? » indica che le ipotesi non sono sufficienti per esprimere una valutazione precisa del risultato e «n.a.» sta per «non ammesso»:

Operazioni binarie sui tipi di iperreali

SOMMA				
+	0	<i>inn</i>	<i>fni</i>	<i>I</i>
0	0	<i>inn</i>	<i>fni</i>	<i>I</i>
<i>inn</i>	<i>inn</i>	<i>inn</i> o 0	<i>fni</i>	<i>I</i>
<i>fni</i>	<i>fni</i>	<i>fni</i>	<i>fni</i> o 0	<i>I</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	?

MOLTIPLICAZIONE				
·	0	<i>inn</i>	<i>fni</i>	<i>I</i>
0	0	0	0	0
<i>inn</i>	0	<i>inn</i>	<i>inn</i>	?
<i>fni</i>	0	<i>inn</i>	<i>fni</i>	<i>I</i>

I	0	$?$	I	I
-----	-----	-----	-----	-----

INVERSO RISPETTO ALLA SOMMA (OPPOSTO)				
x	0	inn	fni	I
$-x$	0	$-inn$	$-fni$	$-I$

Rispetto alla somma l'elemento neutro è lo «0» e rispetto al prodotto il neutro è «1»; non esiste l'inverso dello «0» rispetto alla moltiplicazione.

Poi, continuiamo a eseguire estensioni elementari (cioè che soddisfano tutti gli enunciati del linguaggio che sono veri quando vengono interpretati negli enti che si intendono estendere). In particolare, si otterranno le estensioni elementari degli insiemi, delle relazioni e delle funzioni, in una parola dell'intera struttura. L'assioma di estensione afferma che tra le tante possibili diverse estensioni elementari ne considereremo una a cui faremo sempre riferimento, che sarà detta estensione naturale.

Possiamo arrivare a confrontare due numeri iperreali.

Definizione: Dati 2 iperreali x e y , si dice che x è infinitamente più piccolo di y se $x/y \approx 0$. Se $x/y \approx 1$, allora si dice che x e y sono indistinguibili. Da $x/y \approx 1$, si ottiene

$$\frac{x}{y} - 1 \approx 0, \quad \frac{x - y}{y} \approx 0, \quad \frac{y - x}{x} \approx 0. \quad (7)$$

Per come stiamo costruendo ${}^*\mathbb{R}$, ogni numero reale esteso $x \in {}^*\mathbb{R}$ descrive un insieme numerico costituito da una parte standard « a » di x e da una nube di iperreali infinitamente vicini a x . Chiamiamo «monade» la parte standard e la sua nube di iperreali infinitamente vicini; formalmente scriviamo che se x è un numero iperreale, allora l'insieme degli iperreali infinitamente vicini a x forma con x una monade; cioè:

$$\text{mon}(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx x\}. \quad (8)$$

Si noti che il concetto di monade è diverso da quello di intorno di un punto, come è facilmente verificabile.

4 – Estensionalità e «transfert»

È necessario a questo punto fissare bene due passaggi chiave di tutta l'argomentazione che abbiamo fin qui fatta e anche di quella che si dovrà fare in seguito per il completamento organico elementare dell'analisi non standard. Teniamo presente che i due principi che enunceremo costituiscono l'essenza dell'analisi non standard.

La prima idea da fissare bene è l'*estensionalità*; la seconda è la *trasferibilità*.

Per *principio di estensione* dell'analisi non standard si intendono le seguenti proprietà:

- Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, e più in generale per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$, esiste un soprainsieme ${}^*A \supseteq A$, chiamato iperestensione o estensione non-standard di A .
Se A è infinito, si richiede che l'estensione ${}^*A \supseteq A$ sia propria.
- Per ogni funzione reale $f: A \rightarrow B$, dove $A, B \subseteq \mathbb{R}$, o dove più in generale $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^k$, esiste un'estensione ${}^*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$, chiamata iperestensione o estensione non-standard di f .

Questo principio ci permette di disporre di tutti gli oggetti matematici che abbiamo studiato in analisi standard, là dove l'analisi riguarda le proprietà elementari di questi oggetti.

Il nuovo campo $^*\mathbb{R}$ rispetta, in sostanza, tre precise condizioni:

- (1) Le relazioni d'ordine su $\mathbb{R}$, per esempio $x < y$, sono sottoinsiemi delle relazioni d'ordine in $^*\mathbb{R}$, estensione naturale di $\mathbb{R}$.
- (2) Gli infinitesimi, ε , e gli infiniti, Λ , diventano oggetti di $^*\mathbb{R}$ e si estendono loro tutte le proprietà di campo ordinato; diventando così, di fatto, numeri.
- (3) Le funzioni f in n variabili in $\mathbb{R}$ con tutte le loro caratteristiche elementari e le regole che ne definiscono i contenuti sono un sottoinsieme delle regole che danno lo stesso significato all'estensione delle f , *f in $^*\mathbb{R}$, qualunque sia lo sviluppo diverso in $^*\mathbb{R}$ rispetto a $\mathbb{R}$ [3].

Estendere, in sostanza, significa che dopo aver ben definito le caratteristiche di $^*\mathbb{R}$ si estendono a esso tutte le strutture analitiche fondamentali su oggetti elementari che abbiamo trovato in $\mathbb{R}$; cioè, considerato un oggetto matematico A situato in una struttura di $\mathbb{R}$ esso ha una sua estensione naturale *A in una struttura di $^*\mathbb{R}$. L'estensione non è univoca e, a parità di oggetti e strutture matematiche di partenza, possono verificarsi, per estensione, diversi risultati finali.

Per esempio, per il principio di estensione le funzioni trigonometriche e le funzioni trascendentali in $\mathbb{R}$ sono estendibili in $^*\mathbb{R}$.

La seconda idea da fissare è quella del «*transfert*» o trasferibilità. Il principio afferma che ogni enunciato esprimibile nel linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine adatto ad esprimere le proprietà dei numeri reali (combinazioni di equazioni, disuguaglianze, ecc. tra termini reali) è valido per i numeri reali se e solo se è valido anche quando è interpretato nella strut-

tura degli iperreali. L'idea di questo principio risale a Leibniz che, però, non riuscì a darne una formalizzazione soddisfacente. Oggi, dopo gli sviluppi moderni della logica matematica, è possibile definire correttamente il concetto.

Formalmente, *per principio di transfert o di Leibniz* dell'analisi non-standard si intende la seguente proprietà:

Consideriamo n insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ e k funzioni $f_1, f_2, \dots, f_k$. Sia data una proprietà elementare P e supponiamo che essa sia valida per gli $A_i \forall i = 1, \dots, n$, e per le $f_j \forall j = 1, \dots, k$, allora essa è valida per $A_i \forall i = 1, \dots, n$, e per le $f_j \forall j = 1, \dots, k$, se e solo se P è valida per $*A_i \forall i = 1, \dots, n$, e per le $*f_j \forall j = 1, \dots, k$, in ambiente non-standard. Si ha:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n, f_1, f_2, \dots, f_k) \Leftrightarrow P(*A_1, *A_2, \dots, *A_n, *f_1, *f_2, \dots, *f_k).$$

Ciò comporta che una funzione reale e la sua estensione iperreale naturale hanno esattamente le stesse proprietà esprimibili nel linguaggio $\mathcal{L}$ adatto ai reali. In questo modo viene definita con precisione la richiesta di Leibniz che i nuovi numeri (quelli comprendenti anche gli infinitesimi e gli infiniti) avrebbero dovuto avere esattamente tutte le stesse proprietà dei numeri allora accettati (sostanzialmente i reali), specificando che si tratta delle proprietà esprimibili nel linguaggio $\mathcal{L}$ [3][4][10]. Per un approccio più organico di questi due concetti si veda anche [10] e [12].

Abbiamo così esaurito la sistemazione della struttura del campo ordinato degli iperreali. La loro esistenza la possiamo accettare per costruzione. Per quanto riguarda l'unicità, c'è una variante rispetto a $\mathbb{R}$. Il campo: $\{*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\}$ non è unico [prova omessa].

5 – Definizione di limite in NSA

Premettiamo che in analisi non-standard la determinazione di un limite si riconduce sostanzialmente al calcolo di valori di funzioni per tutti gli iperreali infinitamente vicini a dove si vuole calcolare il limite. Quindi, in base alle proprietà degli iperreali, è possibile con coerenza e rigore calcolare i limiti classici di una funzione reale di variabile reale. Dato il concetto fondamentale per l'analisi standard che stiamo trattando, è tuttavia opportuno un confronto tra la definizione di limite in analisi standard (che qui diamo per nota) e quella data in analisi non-standard.

Si dice che L è il limite della funzione $f(x)$ per x tendente a $c \in \mathbb{R}$ se si verifica che

$$\forall x, (x \approx c \wedge x \neq c) \rightarrow {}^*f(x) \approx L. \quad (9)$$

Se non c'è alcun L che soddisfa la definizione, diciamo che il limite non esiste. La sintassi è identica a quella classica:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

ma la semantica cambia decisamente. In analisi non-standard il calcolo di un limite passa dalla determinazione della parte standard della funzione nei punti iperreali infinitamente vicini a c , ma diversi da c , ricordando che gli infiniti non hanno parte standard.

5.1 Esempio. A tale proposito consideriamo un limite classico e confrontiamo il diverso approccio alla verifica dell'enunciato. Si verifichi che

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} [\sin(\theta)/\theta] = 1.$$

In *analisi standard*, il controllo della tesi si fa partendo dalla geometria (Figura 1); confrontando le aree OQQ' , OQP' , OPP' si trova

$$\frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

e dividendo tutto per $\frac{1}{2} \cdot \sin \theta$ si ottiene:

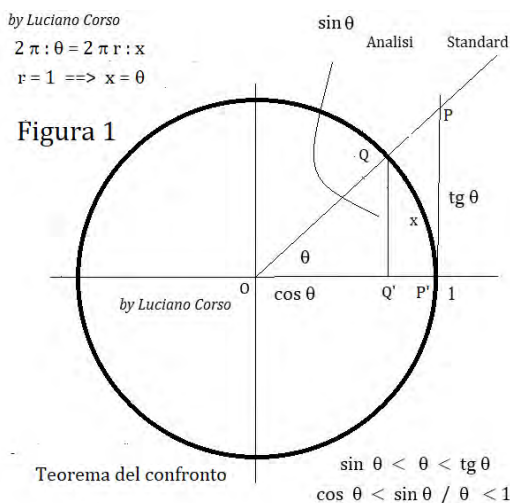
$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

e poi si arriva a

$$\cos \theta < \sin(\theta)/\theta < \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Si passa quindi al limite per $\theta \rightarrow 0$, e si deve tener conto che la dimostrazione del $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$ impone la complicata procedura dell' ε, δ . Poi, si deve applicare il teorema del confronto dei limiti di funzioni e si ha:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin \theta / \theta) \leq 1.$$

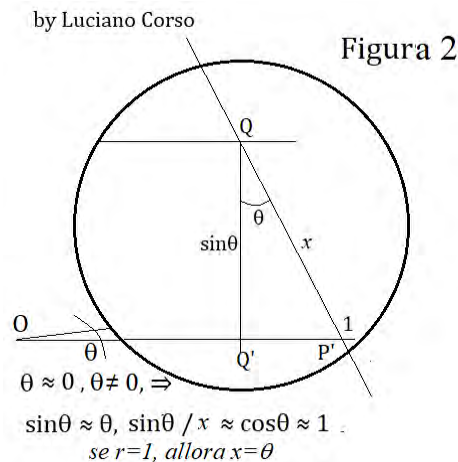


Poiché $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = 1$, allora $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

In *analisi non-standard*, la verifica si può effettuare così (si veda la figura 2). Dal centro O del cerchio, si fanno uscire 2 raggi infinitamente vicini OP' e OQ che, nella zona del punto P' fortemente ingrandita, appaiono nettamente separati, ma le loro intersezioni P' e Q con la circonferenza sono di fatto infinitamente vicine. θ è l'angolo tra OP' , asse delle ascisse, e OQ . L'arco x della circonferenza, quando il raggio $r = 1$, ha lunghezza uguale a θ . Nell'ingrandimento appare che x è la misura del tratto infinitesimo $\widehat{QP'}$ della circonferenza che è infinitamente vicino alla misura della sua corda $|QP'|$; $\sin \theta$ è la misura del tratto infinitesimale $|QQ'|$; così,

$$(\theta \approx 0, \theta \neq 0) \Rightarrow \sin \theta \approx \theta, [\sin \theta / \theta \approx \cos \theta], [\cos \theta \approx 1].$$

Da cui l'asserzione è vera. La dimostrazione non-standard sostituisce al teorema del confronto la più immediata transitività della relazione " $\approx$ ".



Attenzione! Il cerchio è la lente di un microscopio ideale e non la circonferenza goniometrica di figura 1. I 2 raggi OP' e OQ di figura 1 sono stati volutamente separati anche se sono quasi coincidenti. Il segmento $Q'P'$ è un infinitesimo di ordine superiore e l'immagine andrebbe vista con un microscopio nel microscopio.

Facciamo altri notevoli esempi.

5.2 Esempio. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

In base alla definizione (9) di limite, $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Per $x < 0$, il limite è un infinito negativo; per $x > 0$, il limite è un infinito positivo. Sappiamo che, in analisi standard, perché il limite esista, il limite destro e quello sinistro devono esistere ed essere uguali; quindi in analisi standard questo limite non esiste. In analisi non-standard, il limite per $x \rightarrow 0$ di questa funzione non esiste in quanto si può osservare che l'estensio-

ne non-standard di $1/x$ calcolata in un infinitesimo negativo dà un infinito negativo, mentre se la stessa funzione viene calcolata in un infinitesimo positivo dà come risultato un infinito positivo. Quindi il limite non esiste.

5.3 Esempio. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}.$$

In questo caso $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Però, per $x < 0$ il limite è un infinito positivo e per $x > 0$ il limite è un infinito positivo. Perciò in analisi standard il limite esiste ed è $+\infty$. Analogamente, in analisi non-standard il limite esiste in quanto $\forall x \approx 0, 1/x^2$ è un infinito positivo.

5.4 Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

Anche in questo caso $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ e $x \neq 0$. Per $x < 0$, il limite è -1 ; mentre per $x > 0$ il limite è $+1$. Poiché i due limiti non coincidono, si conclude che il limite non esiste.

5.5 Esempio. Facciamo un altro esempio di calcolo del limite.

Sia $f(x)$ una funzione così definita $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

Si calcoli il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

La variabile x è della forma $1/\varepsilon = \Lambda$, dove Λ è un infinito positivo. Si ha:

$$\text{st} \left[\frac{(\sqrt{\Lambda+1} - \sqrt{\Lambda-1})(\sqrt{\Lambda+1} + \sqrt{\Lambda-1})}{(\sqrt{\Lambda+1} + \sqrt{\Lambda-1})} \right] =$$

$$= \text{st} \left(\frac{\Lambda + 1 - \Lambda + 1}{(\sqrt{\Lambda + 1} + \sqrt{\Lambda - 1})} \right) = 0.$$

Allo scopo di comprendere meglio il miglioramento interpretativo dovuto all'uso degli iperreali, invece dei reali, faremo ora una comparazione tra il metodo dell'analisi standard e quello non-standard nello studio della continuità di una funzione in un punto. Con riferimento alla continuità di una funzione in un punto [4], il vantaggio dell'uso dell'analisi non-standard è evidente. L'esempio (5.6) sarà illuminante.

Per l'*analisi standard*, una funzione f definita in un insieme X di $\mathbb{R}$ si dice continua in un punto x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (10)$$

5.6 Esempio: Per rendersi conto della difficoltà operativa di questa espressione, proviamo a verificare se la funzione $f(x) = x^2$ è continua in un punto x_0 del suo dominio $X = \mathbb{R}$. Seguiamo un approccio meccanico e privo di espedienti. Si parte cercando di verificare se esiste un intorno $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 che rispetti le soluzioni della disequazione

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Sappiamo che, in analisi standard, sia ε sia δ sono quantità finite, per quanto esse possano essere arbitrariamente piccole. Si procede così (con $x_0 \neq 0$):

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < +\varepsilon,$$

$$\begin{cases} x^2 - x_0^2 < \varepsilon \\ x^2 - x_0^2 > -\varepsilon. \end{cases}$$

Senza perdita di generalità assumiamo $\varepsilon < x_0^2$ e, in tal caso, il sistema è soddisfatto per

$$x \in \left(-\sqrt{x_0^2 + \varepsilon}, -\sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\right);$$

sicché $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

con $\delta = \min\{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|, |x_0| - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\}$, è l'intorno di x_0 cercato. Se $x_0 = 0$, non ci sono difficoltà e si determina facilmente l'intervallo $I = (-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon})$. In ogni caso ciò conferma l'esistenza di almeno un δ , per ogni ε .

In *analisi non-standard*, il concetto di continuità di una funzione in un punto si dimostra con una procedura più semplice, con un vantaggio sia sul piano formale, sia su quello operativo. Convenendo di indicare con f (senza asterisco) anche l'estensione naturale di una funzione reale f all'ambiente ${}^*\mathbf{R}$, diciamo che f è continua nel punto reale x_0 se

$$\forall x \text{ iperreale, } x \approx x_0 \text{ implica } f(x) \approx f(x_0). \quad (11)$$

Allora, poiché i numeri iperreali infinitamente vicini a x_0 si scrivono nella forma $x = x_0 + \varepsilon$, dove ε è un infinitesimo, la continuità di $f(x) = x^2$ in x_0 si dimostra così

$$f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = (x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2 = \varepsilon(2x_0 + \varepsilon) \approx 0,$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il prodotto di un infinitesimo per una quantità finita è un infinitesimo. Pertanto, come si voleva dimostrare, $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(x_0)$ se x è infinitamente vicino a x_0 .

Al di là degli aspetti tecnici delle procedure di calcolo, rimane il fatto che la definizione *standard* di continuità impone la fatica (non sempre sopportabile) di esibire un δ esplicito

(finito!), mentre la definizione *non-standard* richiede solo di riconoscere che una certa differenza è un infinitesimo.

6 – Microscopi, telescopi e grand'angoli

La didattica dell'analisi non-standard usa anche strumenti visivi di notevole importanza per aiutare l'intuizione degli studenti. I supporti visivi che evidenziano per mezzo di immagini ciò che accade nell'infinitamente piccolo e nell'infinitamente grande sono microscopi e telescopi ideali a infiniti ingrandimenti. Il loro uso impone molta cautela e tuttavia costituisce un utile mezzo per chiarire idee che possono essere spesso fraintese. Le figure 2 e 3 già dimostrano come funzio-

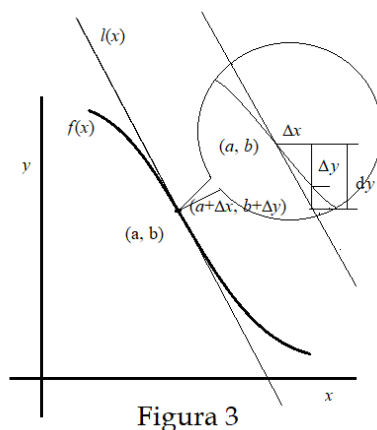


Figura 3

nano i microscopi. Facciamo qualche ulteriore esempio nelle figure 4 e 5. La figura 3 presenta l'ingrandimento di $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ e del differenziale $dy = f'(a)dx$, dove $dx = \Delta x$. La retta $l(x)$ è tangente nel punto (a, b) alla curva di equazione $y = f(x)$.

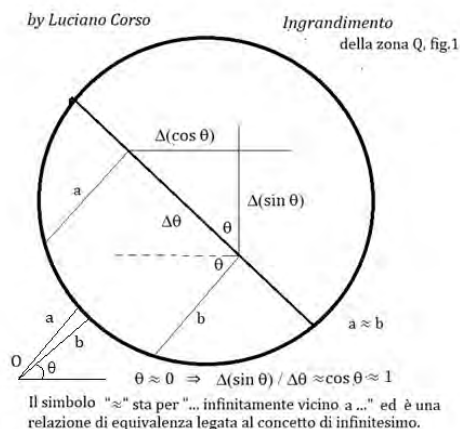


Figura 4

La figura 4 rappresenta un ingrandimento fatto con un microscopio ideale. A partire dalla figura 1, con un microscopio a infiniti ingrandimenti, si riesce a definire bene ciò che appare vicino al punto Q di figura 1. Si nota che i due raggi a e b risultano paralleli nell'ingrandimento dell'infinitamente piccolo.

Il grafico delle serie a segno alterno

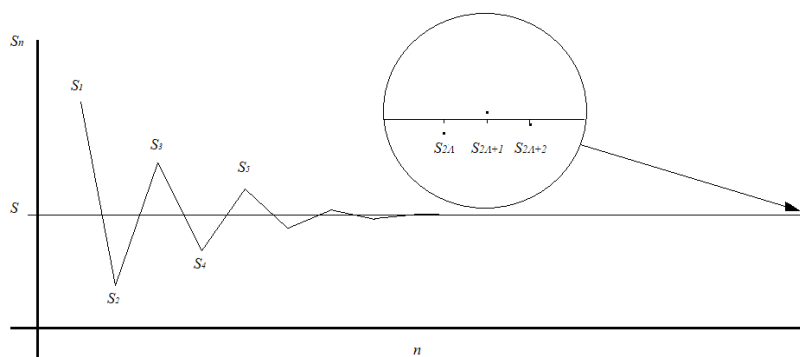


Figura 5

Figura 5. Siamo in presenza di una serie a termini di segno alterno. Il grafico mostra un ingrandimento telescopico della serie in presenza di indici Δ , per tutti i Δ interi infinitamente grandi e positivi.

Bibliografia

- [1] Apostol Tom M. (1985), *Calcolo - vol. I - Analisi 1*, ed. Borin-ghieri, Torino.
- [2] Rudin W. (1991), *Analisi Matematica*, ed. McGraw-Hill, Milano.
- [3] Keisler H. J. (1982), *Elementary Calculus, An Infinitesimal Ap-proach*, Second Edition, Copyright 2000 by H. Jerome Keisler, Re-vised 2012, www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-08-18-20.pdf
- [4] A cura del gruppo NSA di Verona (2017), *MatematicaMente* ISSN 2037-6367, nn. 205, 207, 210, 211, 216, 217, Verona.
- [5] Di Nasso M., *Numeri infinitesimi e l'analisi non standard* [http://w
ww.dm.unipi.it/~dinasso](http://www.dm.unipi.it/~dinasso).
- [6] Ferro R. (2015), *Ritorno all'analisi infinitesimale*, Atti del conve-igno di Verona - V Giornata di Studio - Mathesis sez. di Verona - UNIVR- ed. Matematicamente.it, Lecce.
- [7] Goldoni G. (2015), *Strumenti ottici per un approccio ad alcuni teo-remi di analisi*, Atti del convegno di Verona - V Giornata di Studio - Mathesis sez. di Verona - UNIVR- ed. Matematicamente.it, Lecce.
- [8] Benci V. (2015), *Infinitesimi in natura*, Atti del convegno di Vene-zia 30-09-2017, VII Giornata nazionale di Analisi non Standard, Mathesis sez. Venezia, ed. Matematicamente.it, Lecce.
- [9] Benci V. (2019), *L'infinito in Matematica tra Scienza e Filosofia*, in *MatematicaMente* nn. 251 e 253, Verona.

[10] Robinson A. (2013), *Analisi Non Standard* (trad. Franco Bedini), Aracne editrice srl, Roma, ISBN 978-88-548-6427-6.

[11] A cura di Zambelli D. e Stecca B., Autori vari (2019), *Atti della IX Giornata nazionale di NSA*, Verona, ISBN 9791220064477.1

[12] Di Nasso M. (2019), *I fondamenti dell'Analisi Non Standard*, Atti della IX Giornata nazionale di NSA, Verona, 5 - 10 - 2019. ISBN 9791220064477.1

[13] Ferro R. (2019), *L'analisi non standard e nozioni di infinito in matematica*, Educare alla razionalità. Tra logica e didattica della matematica, pagg 91-123, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

Decisione per integrali indefiniti

Uno strano caso di integrale “quasi” non calcolabile elementarmente

Ferdinando Casolaro*

*Mathesis Napoli “Aldo Morelli”; ferdinando.casolaro@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.041

Sunto: Utilizzando un teorema di Liouville su problemi di decisioni per integrali indefiniti (Casolaro 1991), si propone una dimostrazione della non integrabilità per via elementare della funzione di Gauss e si riporta un particolare esempio di integrale che, in generale, non è calcolabile elementarmente ma, con la variazione di una semplice costante additiva ad uno dei fattori dell'espressione analitica, si riscontra un unico caso di esistenza della primitiva.

Parole chiave: Integrazione, decisione, esponenziali, logaritmi.

Abstract: Using a Liouville theorem on decision problems for indefinite integrals (Casolaro 1991), a proof of the non-integrability of the Gauss function is proposed and we report a particular example of an integral which, in general, cannot be calculated elementarily but, with the variation of a simple additive constant to one of the factors of the analytic expression, we find a only case of existence of the primitive.

Keywords: Integration, decision, exponentials, logarithms.

1 - Introduzione

Nell'ultimo decennio del secolo scorso, sono stati pubblicati alcuni risultati relativi a problemi di decisione per integrali indefiniti (Casolaro 1991, Casolaro 1993), utilizzando un algoritmo che consente di decidere a priori se la primitiva di una funzione data sia esprimibile mediante funzioni elementari. Tale problema - insolubile per integrali qualsiasi - aveva caratterizzato gli studi di alcuni matematici nel XIX secolo.

In particolare, il francese Joseph Liouville (1809-1882) aveva enunciato due teoremi che, relativamente all'integrabilità di alcune classi di funzioni, assicurano l'esistenza di primitive delle funzioni razionali espresse analiticamente da funzioni elementari, a meno di problemi operativi legati alla scomposizione del polinomio al denominatore (Casolaro 1999).

Successivamente, nella seconda metà del XX secolo, il matematico statunitense Henry Risch¹ ha sviluppato due algoritmi (il primo nel 1968, il secondo nel 1976) che permettono di decidere per le classi di funzioni del tipo $f[x, e^{R(x)}, \lg S(x)]$, con $R(x)$ e $S(x)$ funzioni razionali della variabile x (Casolaro 1991).

Con l'utilizzo dell'algoritmo di Risch e l'applicazione delle formule di Eulero,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

che esprimono le funzioni goniometriche mediante esponenziali nel campo complesso, l'autore di questa nota ha am-

¹ Robert Henry Risch (1939) è un matematico americano che ha lavorato sull'algebra informatica ed è noto per i risultati sulle proprietà algebriche delle funzioni elementari e per il suo lavoro sull'integrazione simbolica da cui nasce l'algoritmo di Risch.

piato l'applicazione dell'algoritmo di Risch anche a funzioni che si presentano sotto forma razionale o irrazionale di $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$ (Casolaro 1993).

Per uno studio più esaustivo ed anche ordinato delle questioni in oggetto, è opportuno classificare le funzioni mediante particolari strutture, i campi differenziali (Pessa E., Rizzi B. 1990), per i cui dettagli rimandiamo alla bibliografia (Casolaro, Iorio, Prosperi 2009).

Ai fini di questo lavoro, ci limiteremo ad enunciare solo il primo teorema di Liouville, rimandando alla bibliografia gli ulteriori approfondimenti del tema in oggetto.

2 - Interpretazione del 1° teorema di Liouville

Primo teorema di Liouville - Siano $g(x)$ e $h(x)$ funzioni razionali, con $g(x)$ non riducibile ad una costante². Allora se

$$\int e^{g(x)} h(x) dx$$

è esprimibile mediante funzioni elementari, si deve avere:

$$\int e^{g(x)} h(x) dx = e^{g(x)} r(x) \quad (2.1)$$

dove $r(x)$ è ancora una funzione razionale di x .

Una significativa conseguenza di questo teorema si può formulare come segue:

Date due funzioni razionali $g(x)$ ed $h(x)$ soddisfacenti alle ipotesi del primo teorema di Liouville, l'integrale al primo membro della (2.1) è esprimibile mediante funzioni elementari

² Se $g(x) = \text{costante}$, il problema si riduce alla semplice integrazione di una funzione razionale.

se e solo se esistono due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ $\left[\text{con } r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \right]$,

primi tra loro, tali da soddisfare la relazione:

$$p(x)q'(x) = [p'(x) + g'(x)p(x) - h(x)q(x)]q(x) \quad (2.2)$$

Dim. - Se l'integrale $\int e^{g(x)} h(x) dx$ è esprimibile mediante funzioni elementari, per il primo teorema di Liouville, deve esistere una funzione razionale $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tale che:

$$\int e^{g(x)} h(x) dx = e^{g(x)} \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.3)$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi sul campo complesso.

Derivando ambo i membri della (2.3) si ha:

$$e^{g(x)} h(x) = e^{g(x)} g'(x) \frac{p(x)}{q(x)} + e^{g(x)} \frac{p'(x)q(x) - q'(x)p(x)}{q^2(x)},$$

cioè

$$h(x)q^2(x) = g'(x)p(x)q(x) + p'(x)q(x) - q'(x)p(x)$$

da cui la (2.2).

$$p(x)q'(x) = [p'(x) + g'(x)p(x) - h(x)q(x)]q(x)$$

3 - Applicazione del teorema di Liouville alla funzione gaussiana

È ben noto, dalla teoria del calcolo delle probabilità, che la distribuzione normale, è rappresentata dall'integrale de-

$$\text{finito } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3.1)$$

noto come "integrale di Gauss" e la sua rappresentazione grafica è detta "gaussiana", in quanto calcolato per la prima volta da Gauss.

Il risultato della (3.1) si ottiene dallo sviluppo in serie della funzione integranda in quanto mai è stato possibile calcolare la primitiva.

Utilizzando il teorema di Liouville con l'espressione (2.2), vogliamo dimostrare che non esiste alcuna primitiva esprimibile elementarmente della $f(x) = e^{-x^2}$.

Teorema - L'integrale di Gauss

$$\int e^{-x^2} dx$$

non è esprimibile mediante funzioni elementari.

Dim. - Con riferimento alla (2.3), applicando la (2.2)

$$p(x)q'(x) = [p'(x) + g'(x)p(x) - h(x)q(x)]q(x)$$

con $g(x) = -x^2$, $h(x) = 1$, si ha:

$$p(x)q'(x) = p'(x)q(x) - 2x p(x)q(x) - q^2(x) \quad (3.2)$$

Sia m il grado di $p(x)$ ed r il grado di $q(x)$, con $m \geq 0$, $r \geq 0$; ne consegue che i gradi dei tre polinomi al secondo membro della (3.2) sono rispettivamente:

$$m+r-1; \quad m+r+1; \quad 2r.$$

Siccome il grado del polinomio al primo membro è $m+r-1$, uguale al grado del primo addendo del polinomio al secondo membro ma minore del grado del secondo addendo, per il principio di identità dei polinomi, il termine di ordine massimo del secondo polinomio al secondo membro deve annullarsi col termine di ordine massimo del terzo polinomio; quindi, deve valere l'uguaglianza:

$$m+r+1 = 2r$$

cioè:

$$m+1 = r. \quad (3.3)$$

Poiché la (3.3) vale per qualunque scelta di r , varrà in particolare per $r = 1$.

Ciò comporta che $p(x)$ e $q(x)$ abbiano la forma:

$$p(x) = c; \quad q(x) = ax + b \quad (3.4)$$

con a, c , entrambi non nulli per ipotesi.

Pertanto, il primo membro della (3.2), $p(x)q'(x)$, deve essere di grado zero, cioè una costante.

Sostituendo le (3.4) nelle (3.2) si ha:

$$c \cdot a = 0 \cdot (ax + b) - 2x \cdot c(ax + b) - (ax + b)^2$$

da cui:

$$-2acx^2 - 2bcx - a^2x^2 - 2abx - b^2 = c \cdot a$$

$$a(2c + a)x^2 + 2b(c + a)x + b^2 + c \cdot a = 0$$

che, per il principio di identità dei polinomi, impone:

$$\begin{cases} 2c + a = 0 \\ 2b(c + a) = 0 \\ b^2 + c \cdot a = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Poiché a e c sono entrambi non nulli, dalla terza equazione si evince che anche b risulta essere diverso da zero, per cui dalle prime due equazioni si ha contemporaneamente

$$\begin{cases} a = -2c \\ a = -c \end{cases}$$

che, da $c \neq 0$, è un assurdo da cui si evince che l'integrale di Gauss non è esprimibile mediante funzioni elementari.

4 - Lo “ ∞ -1”. Il quasi-sempre “non integrabile”

La (2.2) ci permette di decidere sull'integrabilità di classi di funzioni espresse da integrali della forma $\int e^{g(x)} h(x) dx$.

Di seguito si presenta un esempio di funzione - in generale non integrabile elementarmente - in cui variando solo una costante additiva in uno dei fattori dell'espressione analitica si ottiene l'integrale di una funzione esprimibile mediante funzioni elementari.

Teorema - L'integrale $\int \left(\frac{x-n}{x}\right)^2 e^x dx$ è esprimibile mediante funzioni elementari solo nel caso in cui $n = 2$ (oltre, ovviamente, al caso banale di $n = 0$).

Dim. - Con $g(x) = x$, $h(x) = \left(\frac{x-n}{x}\right)^2$ nella (2.1), la (2.2) diventa:

$$p(x)q'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q(x) - \left(\frac{x-n}{x}\right)^2 q^2(x)$$

cioè:

$$x^2 p(x) q'(x) = x^2 p'(x) q(x) + x^2 p(x) q(x) - (x-n)^2 q^2(x) \quad (4.1)$$

Sia m il grado di $p(x)$ ed r il grado di $q(x)$; ne consegue che i gradi dei tre polinomi al secondo membro della (2.2) sono rispettivamente:

$$m+r+1; \quad m+r+2; \quad 2r+2.$$

Siccome il grado del polinomio al primo membro è $m+r+1$, uguale al grado del primo addendo del polinomio al secondo membro ma minore del grado del secondo addendo, per il principio di identità dei polinomi, il termine di ordine massimo del secondo polinomio al secondo membro deve annullarsi col termine di ordine massimo del terzo polinomio. Quindi, deve valere l'uguaglianza:

$$m+r+2 = 2r+2 \quad (4.2)$$

da cui:

$$m = r, \quad \forall m \in \mathbb{N}; \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Poiché la (4.2) vale per qualunque scelta di m ed r , varrà particolarmente per $m = r = 1$. Ciò comporta che $p(x)$ e $q(x)$ abbiano la forma:

$$p(x) = ax + b; \quad q(x) = cx + d \quad (4.3)$$

con a, c , entrambi non nulli per ipotesi.

Sostituendo i valori (4.3) nella (2.2), risulta:

$$(a - c^2)x^4 + (ad + bc - 2cd + 2c^2n)x^3 + (ad + bd - d^2 + 4cdn - c^2n^2) + (2nd^2 - 2n^2cd)x - d^2n^2 = bcx^2$$

Per il principio di identità dei polinomi, deve dunque risultare:

$$\begin{cases} ac - c^2 = 0 \\ ad + bc - 2cd + 2c^2n = 0 \\ ad + bd - d^2 + 4cdn - c^2n^2 = bc \\ 2nd^2 - 2n^2cd = 0 \\ d^2n^2 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Dalla prima equazione $c(a - c) = 0$, con $c \neq 0$, si ha: $a = c$; dalla quinta equazione, essendo $n \neq 0^3$, risulta $d = 0$. Pertanto, le prime tre equazioni del sistema (3.4) si riducono a:

$$\begin{cases} a = c \\ bc + 2c^2n = 0 \\ -c^2n^2 = bc \end{cases} \quad (4.5)$$

da cui risulta:

$$\begin{cases} b = -2nc \\ b = -n^2c \end{cases} \Rightarrow 2n = n^2$$

relazione verificata solo per $n = 2$.

³ Se $n = 0$, si ha il banale integrale della funzione esponenziale

Precisamente la (2.2), che è condizione necessaria e sufficiente affinché sia calcolabile elementarmente l'integrale

$$\int \left(\frac{x-n}{x} \right)^2 e^x dx, \text{ è verificata solo per } n = 2.$$

Del resto, per $n = 2$, dalla (4.5) si ha:

$$\begin{cases} a = c \\ b = -4c \end{cases}$$

che, con $d = 0$, a meno di una costante moltiplicativa che non influisce sul calcolo della primitiva, ci dà i valori di a, b, c, d della (4.3).

Per semplicità, ponendo $c = a = 1$, quindi

$$p(x) = x - 4; \quad q(x) = x$$

si vede immediatamente che, con $h(x) = \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$, è verificata

la (2.2) con l'identità:

$$x - 4 = \left[1 + 1 \cdot (x - 4) - \frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot x \right] \cdot x$$

Sostituendo nella (2.3) [equivalente alla (2.1)]

$$h(x) = \left(\frac{x-2}{x} \right)^2, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-4}{x}$$

risulta:

$$\int \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^x dx = e^x \frac{x-4}{x} \quad (4.6)$$

con il secondo membro primitiva della funzione integranda, a meno di una costante additiva.

Infatti, derivando il secondo membro della (4.6), si verifica il risultato:

$$\frac{d}{dx} e^x \frac{x-4}{x} = e^x \frac{x-4}{x} + e^x \frac{x-x+4}{x^2} = e^x \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} \right] = e^x \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$$

che è la funzione integranda al primo membro.

In questo procedimento, l'applicazione del primo teorema di Liouville ci ha permesso di calcolare addirittura la primitiva della funzione. In generale ciò non è possibile, in quanto procedimenti basati su tale teorema non hanno natura costruttiva, nel senso che non consentono di determinare la forma esplicita della funzione. In alcuni casi generalizzati, però, gli algoritmi di Risch permettono di determinare la primitiva della funzione integranda nel caso in cui esiste. Di ciò non ci occuperemo, in quanto esula dalla trattazione elementare di questo lavoro.

Bibliografia

PESSA E., RIZZI B. (1990). "L'integrazione indefinita delle funzioni trascendenti elementari". *«Periodico di Matematiche»* n. 2-1990. Pagine 3-32.

CASOLARO Ferdinando (1991). "Decisione per integrali indefiniti; funzioni non integrabili". *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Matematica moderna ed insegnamento"* - Cattolica 22-26 aprile 1991 - pagine 68-86.

CASOLARO Ferdinando (1993), "Il problema dell'integrazione indefinita". *«Ratio Mathematica»* n. 4, 1992. Pp. 29-38.

CASOLARO Ferdinando (1999), *"Integrali. 300 esercizi sull'integrazione indefinita"*. Ed. Masson 1997, ristampa Zanichelli 1999, pp. 219- 232.

CASOLARO F., IORIO L., PROSPERI R.(2009) *"Le applicazioni della matematica da Eulero ad oggi, nel III centenario della nascita di Leonhard Euler (1707 - 2007)"*. Ed. Rotas - Chieti, 2009; pag.117-127.

Renato Caccioppoli

Nei ricordi del Maestro Roberto De Simone

Corrado Valletta*

* Giornalista e consulente media; conrad.valletta@gmail.com.



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n1.042

Sunto: *Si riportano i ricordi del Maestro Roberto De Simone in merito alla sua amicizia con Renato Caccioppoli, cui lo legava la comune passione per la musica e la cultura esoterica. Quanto segue è l'esito di un'intervista realizzata, alla fine di febbraio di quest'anno (2021), nella dimora del celebre compositore, musicologo e regista teatrale.*

Parole chiavi: Matematica, musica, alchimia, pittura

Abstract: *The memories of Maestro Roberto De Simone are reported about his friendship with Renato Caccioppoli, to whom he was linked by the common passion for music and esoteric culture. What follows is an interview at the end of February this year (2021), in the home of the famous composer, musicologist and theater director.*

Keywords: Mathematics, music, alchemy, painting

Corrado Valletta: Maestro, rammento che, anni fa, in occasione della nostra prima amichevole chiacchierata, mi citava spesso curiosità che emergevano negli incontri che ebbe con il matematico napoletano, Renato Caccioppoli. Mi può

descrivere la figura del grande genio, vista da lei, all'epoca, giovane musicista?

Roberto De Simone: ¹ Dunque, vediamo... suo padre, un celebre chirurgo napoletano; suo nonno materno era nientedimeno che il noto rivoluzionario russo, Michele Bakunin; la zia Maria,² docente di chimica, tutt'altro che una figura di poco peso, in ambito accademico. Certamente molti aspetti della personalità così singolare, eclettica, anarchica di Renato Caccioppoli mi risultarono chiari, fin dal principio, in virtù dei suoi natali.

Il mio incontro con Caccioppoli è uno strano miscuglio di personali rapporti con il mondo della musica che, in apparenza, può sembrare avulsa dal contesto. Invece l'anello di congiunzione fu il mio maestro di composizione, armonia e

¹ Roberto De Simone (Napoli, 1933) è compositore, musicologo e regista teatrale. Il suo percorso professionale è stato dedicato, principalmente, a studi e ricerche sulle tradizioni campane. Negli anni Settanta ha insegnato Storia del Teatro all'Accademia di Belle Arti di Napoli e, per sette anni - dal 1981 al 1987 - è stato Direttore artistico del Teatro S. Carlo. Nel 1995 diviene direttore del Conservatorio di San Pietro a Majella. Nel 1998 è nominato Accademico di Santa Cecilia e, successivamente, insignito del Cavalierato delle Arti (Chevalier des Arts et des Lettres) dal Presidente della Repubblica francese.

² Maria Bakunin (Krasnojarsk, 2 febbraio 1873 - Napoli, 17 aprile 1960), è stata una chimica e biologa italiana. Partecipò alla creazione della mappa geologica d'Italia. Fu socia della Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti, della Società dei Naturalisti, dell'Accademia nazionale dei Lincei, dell'Accademia delle Scienze fisiche e naturali, nonché dell'Accademia Pontaniana. Di queste ultime due istituzioni ricoprì pure la carica di presidente.

contrappunto, Renato Parodi. Oltre che insegnare al Conservatorio di Musica San Pietro a Majella, il Maestro Parodi si era laureato – peraltro, con un’ottima votazione – in matematica pura e Caccioppoli – credo, fresco di cattedra – era suo docente.

Non so bene quale fosse il grado di conoscenza che Parodi avesse del professor Caccioppoli, ma sta di fatto che parlava, di lui, sempre in termini entusiastici: geniale, eccentrico, un po’ matto, benché molto severo, temibile.

Rammento quando mi disse: «Guarda, Roberto. Ti posso istruire sul contrappunto, però Caccioppoli te lo può insegnare meglio di me».

Nel contempo, frequentavo il salotto di una nobile duchessa di origine ebraica, dama preferita dell’imperatrice di Russia, nonché moglie dell’ambasciatore presso lo zar. La famiglia, da principio, aveva trovato asilo a Napoli, dopo la rivoluzione bolscevica. Abitavano a palazzo Cellammare.³ Periodicamente, la duchessa era solita organizzare dei concerti, cui partecipavano diversi nobili abitanti del palazzo, tra i quali il marchese Parisio Perrotti, fervente appassionato di musica.

All’epoca, ero allievo di pianoforte, al Conservatorio. Invitato a suonare, lì, in diverse occasioni, fu proprio in una di queste esecuzioni che conobbi Renato Caccioppoli. La sua notorietà quasi lo aveva preceduto e ammetto che fui vittima delle descrizioni non proprio edificanti, sul suo carattere. Per cui, quando lo vidi, provai un po’ di soggezione. Invece, devo dire che mi si avvicinò con molto garbo. Reputava bellissima la ballata di Chopin e, benché avesse studiato pure lui

³ Storico palazzo nobiliare napoletano, sito in via Chiaia.

pianoforte, era rammaricato di non avere la tecnica per suonarla, ma che avrebbe amato moltissimo poterla eseguire.

In un'altra circostanza, lo incontrai al San Carlo. Ci salutammo familiarmente: ormai, la reciproca conoscenza era consolidata ed entrambi consapevoli che ci saremmo, di nuovo, rivisti nel salotto della duchessa.

Una volta, tirò fuori una specie di gioco di prestigio: erano degli anelli di metallo che bisognava infilare uno nell'altro. Nessuno ci riusciva, tranne lui.

Aveva l'abitudine di raccontare anche delle storielle piccanti, salaci.

Il suo scibile era vasto e spaziava pure nella metafisica. Anzi, diceva che per essere un matematico, bisognava padroneggiare anche l'alchimia. Era più che una predilezione: Renato Caccioppoli aveva una profonda conoscenza dell'Arte Regia. Citava Giovan Battista della Porta, così come Giordano Bruno.

La stura che ci portò a conversare di alchimia fu una discussione sul miracolo di San Gennaro: il professore riteneva che fosse l'esito di un processo alchemico. Del resto, un'altra prova del suo vivido interesse per tali argomenti la esternò in una sincera stima per un artista: Lucio Del Pezzo,⁴ a quei tempi, giovane studente dell'Accademia di Belle Arti. Molti dei suoi quadri, infatti, rivelano riferimenti alchemici.

C'è un altro particolare: rammento che un orefice – che aveva bottega in via San Biagio dei Librai – mi raccontò di aver avuto a che fare col professore. Mi mostrò il disegno di una medaglia che recava certe iscrizioni di carattere magico.

⁴ Lucio Del Pezzo (Napoli, 13 dicembre 1933 - Milano, 12 aprile 2020). Pittore e Scultore napoletano.

L'amuleto, d'oro, era l'esito di un procedimento alchemico nel quale, secondo l'artigiano, lo stesso professore si era cimentato.

Il talismano doveva far parte di un volume di magia attribuito al leggendario personaggio cui, secondo la tradizione, si deve l'alchimia: Ermete Trismegisto. Caccioppoli ne faceva, sovente, cenno.

Benché affrontasse tali argomenti con molta leggerezza e ironia era palese una grande competenza e rispetto per la materia, come ho potuto appurare nel corso del tempo, quando ho iniziato a interessarmi di religiosità popolare. In buona sostanza, il professore non era affatto estraneo alla conoscenza di certi rituali di carattere estatico, né, tantomeno, alla tradizione orfica.

Si eclissò dopo i dissapori con la moglie. Lo incrociai, a via Chiaia, completamente sbronzo. Addosso, aveva un impermeabile sporchissimo e, sbandava. Non mi ci avvicinai, per pudore: anche ammettendo che fosse stato lucido a sufficienza, non credo avrebbe voluto salutarmi in quello stato.

Erano questi i miei rapporti con Renato Caccioppoli. Il resto sono racconti de relato, che rientrano nell'aneddotica ormai nota a tutti.

I quadrati greco-latini

Considero due quadrati latini di egual mordine n $A = [a_{hk}]$, $B = [b_{hk}]$, $h,k = 1,2,\dots,n$. Si dice che i *due quadrati latini sono ortogonali* se le n^2 coppie (a_{hk}, b_{hk}) sono tutte distinte. In tale caso si chiama prodotto di A con B la nuova matrice:

$$AB = [(a_{hk}, b_{hk})].$$

Tale prodotto non è un quadrato latino ma un nuovo ente denominato *quadrato greco-latino*, nome introdotto da Eulero che li scriveva usando le lettere latine per il primo quadrato e le lettere greche per il secondo. Tali strutture sono legate all'esistenza dei piani affini finiti, poiché esiste il **Teorema di Bose** asserente che : *esistono $n-1$ quadrati latini mutuamente ortogonali se e solo se esiste un piano affine di ordine n .*

Cfr. Cerasoli M.-Eugeni F.-Protasi M. (1988). Elementi di Matematica discreta, Bologna, Zanichelli (Cap.2, par.8, p.57).

Profili biografici degli Autori

Aniello Buonocore (Napoli) - aniello.buonocore@unina.it

Professore associato del settore scientifico-disciplinare MAT/06 presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” dell’Università di Napoli Federico II, dove attualmente gli sono affidati insegnamenti di Probabilità e Statistica Matematica. In precedenza, è stato ricercatore del CNR presso l’Istituto di Cibernetica, docente di ruolo nella Scuola Media Superiore e ricercatore universitario. Laureato in Matematica nel 1984 presso l’Università di Napoli Federico II, ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica Applicata e Informatica presso lo stesso ateneo nel 1990. Attualmente i suoi interessi di ricerca sono orientati allo studio dei processi di diffusione e alle loro simulazioni con relative applicazioni. Ha partecipato attivamente all’organizzazione del secondo congresso italiano di probabilità e statistica matematica (PRISMA2019), al Workshop SMOCS_2020 nell’ambito del PRIN201 e a una serie di convegni dal titolo BIOCOMP (modelli matematici per problemi biologici con enfasi sugli aspetti computazionali) i cui Atti, pubblicati su riviste internazionali, ha curato in qualità di co-editore. Infine, negli ultimi anni si è interessato alla didattica della matematica con particolare riferimento al tema “Dati e Previsioni”.

Ferdinando Casolaro (Napoli) - ferdinando.casolaro@gmail.com

Professore a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell’Università “Federico II” di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell’Università del Sannio. E’ autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche e vari libri. Fa parte dell’Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico) della rivista “Science & Philosophy”, e Socio fondatore del “Periodico di Matematica” nella sua nuova rinascita 100 anni dopo la sospensione del 1918. E’ Presidente della sezione di Napoli della Mathesis, Società di Matematica e Fisica, di cui è stato Segretario nazionale ed ha fatto parte del Consiglio Direttivo nel periodo 2003-2014.

Luigia Caputo (Napoli) - luigia.caputo@unina.it

Ricercatore universitario del settore scientifico-disciplinare MAT/06 presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. È ivi incaricata per affidamento di insegnamenti di Probabilità e Statistica Matematica per diversi Corsi di Laurea. Laureata in Matematica nel 2002 presso l'Università di Napoli Federico II, ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Scienze Computazionali ed Informatiche presso lo stesso ateneo nel 2006 e nel 2005 ha conseguito il diploma relativo al Corso Annuale di Perfezionamento post laurea in Didattica delle Matematica. Ha curato attivamente l'organizzazione di numerosi congressi di matematica. Ha partecipato a molti progetti nazionali e internazionali. Attualmente è impegnata nel Prin 2017-2020: Stochastic Models For Complex Systems. I suoi interessi di ricerca sono orientati allo studio di proprietà asintotiche della densità del tempo di primo passaggio per processi di diffusione, alla analisi di modelli stocastici neuronali e alla formulazione di motori browniani nella dinamica di proteine. Negli ultimi anni si è interessata allo studio di alcuni problemi di teoria del calcolo delle probabilità a carattere paradossale in contesti didattici.

Luciano Corso (Verona) - lcorso@iol.it

Presidente della Federazione Italiana Mathesis. Laurea in Economia con indirizzo statistico, presso Università degli Studi di Padova. Già docente di ruolo di Matematica Applicata presso l'ITIS G. Marconi di Verona, corso di Informatica. Già presidente della Mathesis di Verona – Società Italiana di Scienze MM. e FF. Già consigliere Nazionale della Mathesis, Segretario e Vicepresidente nazionale (dal 2009-2011). Fondatore e direttore della rivista scientifica nazionale «MatematicaMente» (1998), per i cultori di Matematica pura e applicata, di proprietà della Mathesis di Verona (www.mathesis.verona.it). Già referente per il Veneto del Piano Nazionale Lauree Scientifiche in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Padova e di Verona – Facoltà di Scienze, anni 2006 e 2007. Organizzatore e conduttore di un corso annuale di aggiornamento di Statistica e Matematica applicata presso l'Arpav del Veneto, anno 2007. Presidente dell'Associazione Mathesis di Verona (dal 2021). Presidente della Federazione Italiana Mathesis (dal 5 ottobre 2019).

Marco D'Errico - marco.derrico1@posta.istruzione.it

Laureato in scienze geologiche e dottore di ricerca in scienze della Terra. Si è occupato della geologia dell'area al confine calabro-lucano, di divulgazione scientifica e attualmente ricopre il ruolo di insegnante di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di I grado. Oltre alle pubblicazioni in ambito geologico, ha presentato un lavoro sulla geometria in Emma Castelnuovo in occasione di due convegni.

Franco Eugeni (Teramo) - eugenif3@gmail.com

Coordinatore PHD. Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Logica e Filosofia della Scienza in varie Università (Modena, L'Aquila, Chieti, Milano, Roma). È stato presidente nazionale della Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", direttore di dipartimento e delegato rettorale per la Didattica. È membro onorario della "Romanian Society for Fuzzy Systems" a Iasi. Direttore dei periodici telematici «Ratio Mathematica», «Eiris (Epistemologia dell'Informatica e Ricerca Sociale)», «SEM Bollettino dell'AFSU, Vol. I (1), 2018.(Skills for Economic Management)», «Divulgazione della Scienza e della Filosofia». È stato Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV, fondata nel 1598). È presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). È condirettore dei periodici «Science & Philosophy» e «Bollettino dell'AFSU» ed è fondatore della rinata rivista "Periodico di Matematica", dopo 100 anni dalla sua chiusura nel 1918. È membro dei Consigli Scientifici delle Riviste «Italian J. of Applied Mathematics» e «J.of Interdisciplinary Mathematics». È stato membro dei Consigli Scientifici dei «Rendiconti di Matematica» e del «Journal of Optimization and Economic Science». È Commendatore della Repubblica e professore onorario nell'Università A. Cuza di Iasi (Romania). Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Ingegnere meccanico e giornalista pubblicista. Autore di circa 300 articoli, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (Livorno:Belforte, 2008), la prima biografia mondiale del grande scienziato. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore in ambito universitario e nel settore dei

sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa. Esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Corrado Valletta (Napoli) - conrad.valletta@gmail.com.

È giornalista e consulente media. È stato responsabile di uffici-stampa in ambito medico, scientifico e tecnologico, comparti per i quali si occupa, tuttora, della divulgazione. Nel 2006 è stato produttore esecutivo del mediometraggio *Napoli o Gotham City? Tra Decadimento e Risanamento: il recupero del centro storico partenopeo* che traeva spunto dal dossier fotografico del professor Giulio Pane, docente di Storia dell'Architettura all'Università "Federico II", Napoli.

Norme per gli autori

Vengono qui riportate le principali norme editoriali che devono essere applicate dagli Autori per la redazione degli articoli. Una versione dettagliata ed esauriente è consultabili nel sito dell'AFSU.

VIRGOLETTE

A) Si scrivono tra virgolette basse o caporali all'interno del testo (« ») (« si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 174 sul tastierino numerico; » si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 175 sul tastierino numerico) :

- le citazioni quando non troppo lunghe (da valutarsi caso per caso) e inserite in modo tale da integrare lo stesso testo (parole fatte proprie dall'Autore);
- i discorsi diretti;
- le testate di periodici («L'Espresso»).

Ricordiamo che il punto fermo va generalmente fuori dalle virgolette (».), anche se all'interno c'è già un punto interrogativo, esclamativo o i puntini di sospensione; va invece all'interno delle virgolette quando la citazione o il discorso diretto (specie in narrativa) non è introdotto dai due punti, ovvero quando la citazione o la frase è preceduta da un punto.

B) Si scrivono tra virgolette alte o doppi apici (" "):

- le citazioni all'interno di citazioni. Esempio: Platone scrisse: «Un giorno Socrate disse: "Questo è un uomo"»;
- le parti pensate quando vanno distinte dal discorso diretto. Esempio: "Devo andare via" pensò Luigi tra sé e sé mentre intanto le diceva: «Resta, parliamo ancora»;
- le parole o frasi evidenziate in quanto:
- usate in senso ironico o prescindendo dal loro significato letterale (esempio: i "poveri" statunitensi possiedono soltanto un'automobile ciascuno);
- usate per esprimere un concetto particolare (il concetto di "rinascita", l'idea del "bello");
- di uso comune alle quali si vuole dare una particolare enfasi (da usare con moderazione);
- espressioni figurate o gergali (sciopero "a singhiozzo");
- le testate dei quotidiani ("la Repubblica");
- titoli di capitoli o parti di libri citati (nel capitolo "Aristotele nel Medioevo" parleremo di...);
- titoli di convegni, seminari, conferenze o interventi;

- denominazioni aggiunte a scuole, associazioni, musei, ecc. (il Conservatorio di Musica “Giuseppe Verdi”, il Circolo culturale “Cesare Pavese”, il liceo statale “Giacomo Leopardi”, l’ospedale “Sandro Pertini”, ecc.; ma: l’Accademia di Brera, il Teatro alla Scala).

C) Le virgolette singole o apici semplici (‘ ’) non si usano mai, a eccezione della citazione all’interno di un discorso già tra apici doppi o di una scelta specifica e coerente in se stessa da parte dell’autore, specie se esperto di italianistica o linguistica.

D) Per esprimere minuti e secondi si usano le stanghette dritte (Bartali giunse a 1'45" da Coppi).

E) Per gli apici doppi e l’apice singolo (quest’ultimo ricorrente prevalentemente come apostrofo o elisione) utilizzare quelli tipografici o aggraziati, e non le stanghette dritte (“ ” e non " "; ‘ e non ').

SOTTOLINEATO

Il sottolineato non si usa mai; se c’è va sostituito con il corsivo. Non utilizzare mai insieme corsivo e sottolineato.

GRASSETTO

Il grassetto non si usa mai nel corpo testo, eventualmente soltanto nei titoli.

CORSIVO

Si scrivono in corsivo:

- i titoli di libri (italiani o stranieri), articoli di giornale e di rivista, brani poetici, racconti, opere d'arte, brani musicali, film, trasmissioni radiofoniche e televisive;
- le parole straniere quando non sono di uso comune nella lingua italiana (esempi: *Weltanschauung*, *cherchez la femme*; ma: film, festival, computer (da notare che la punteggiatura che segue il corsivo resta in tondo!);
- le denominazioni scientifiche delle scienze naturali;
- in alcuni contesti particolari, termini tecnici o specialistici;
- i titoli di brani musicali, tranne l'indicazione strumentale e il numero d'opera. Esempi: Sonata in la minore per pianoforte K. 310; Quinta Sinfonia in do minore op. 67; Sonata quasi una fantasia in do minore Al chiaro di luna per pianoforte n. 14 op. 27 n. 2 (N.B.: i vari elementi del titolo seguono sempre l'ordine indicato in questi esempi). I sottotitoli e le arie vanno in corsivo con l'iniziale maiuscola quando non sono quelli originali. Esempi: *Patetica*, *La donna è mobile*;
- i nomi propri di aeroplani, navi e divisioni militari.

PAROLE STRANIERE

Le parole straniere entrate nell'uso comune vanno in tondo e non prendono la desinenza del plurale. Esempi: i film, i box, i pub e non: i films, i boxes, i pubs.

CONGIUNZIONI "E", "ED"

Si usa sempre "e" ma si usa "ed" davanti a parola che inizia con "e".

PREPOSIZIONI "A" "AD"

Si usa sempre "a" ma si usa "ad" soltanto davanti a parola che inizia con "a".

RIFERIMENTI A NOTE

I numeri di rimando alle note devono essere scritti come apici di seguito al termine cui si riferiscono se non vi sono segni di punteggiatura. In caso contrario, devono essere scritti come apici di seguito al segno di punteggiatura. Esempi:

coltura¹

coltura;¹

coltura,¹

coltura:¹

coltura.¹

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

I riferimenti bibliografici seguono lo standard APA (Autore, anno di pubblicazione). I riferimenti bibliografici nel testo comprendono entro la parentesi tonda il cognome dell'autore e l'anno di pubblicazione:

(Eugeni & Ruscio, 2004)

Nella bibliografia posta a fine articolo, invece:

Eugeni Franco, Ruscio Edoardo (2004). *Carlo Forti, allievo di Niccolò Fergola, ingegnere sul campo*. Teramo, Edilgrafital.

Lo standard APA prevede, nella bibliografia, l'indicazione del cognome dell'autore seguito dalla iniziale puntata del nome. Per evitare casi di omonimia (per es. Raffaele Bombelli, Rocco Bombelli) e per maggiore informazione nelle ricerche bibliografiche che si intendessero seguire, preferiamo indicare per esteso anche i nomi degli autori come nell'esempio sopra riportato..

Per maggiori dettagli si rimanda alle norme di citazioni bibliografiche APA consultabile nel sito dell'AFSU.