Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione

Appunti delle lezioni per il corso di Didattica della Matematica I

Carlo Marchini

1. **L'occasione per la riflessione**.

Nel 1989 ero presidente di commissione agli esami di maturità scientifica. Nella prova scritta viene data da studiare la seguente funzione espressa da

(1) $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Uno studente include 0 nel dominio. Il commissario di matematica lo ritiene un errore tale da fare assegnare alla prova scritta una valutazione negativa. Io controllo il testo in uso e trovo due definizioni diverse di dominio. Secondo una di queste 0 non è elemento del dominio, secondo l'altra sì.

Come si vede, si tratta di un esercizio ben inserito nel filone tradizionale degli studi di funzione e, tutto sommato, di un quesito abbastanza semplice

Capire i punti di vista del collega e dello studente e chiarire le ragioni della disputa è stato il punto di partenza di una ricerca, più che altro rivolta a me stesso ed alla Matematica che avevo appreso, utilizzando la tecnica dell'introspezione indicata in letteratura da [Duffin & Simpson, 1997], [Mason, 1998] e [Stehlikova & Jirotkova, 2002]. In un certo senso questo lavoro si può vedere come la "confessione" di una delle tante mie incomprensioni in Matematica accumulate, come conseguenza un apprendimento acritico, durante gli studi di scuola superiore, pur avendo superato con buoni voti, sia il Liceo scientifico sia l'Università. E' anche un esempio di un'attività di introspezione che si rivela importante per l'insegnante prima che vada in classe a presentare temi di grande spessore culturale e difficoltà, come le funzioni.

Nel tempo ho avuto modo di sottoporre il quesito a insegnanti di vari ordini scolastici, anche universitari, avendone risposte diverse e talora contraddittorie, in piena analogia con quanto rilevato in [Bagni, 1997]. Sono così giunto ad evidenziare aspetti delle funzioni che vengono dati spesso in modo implicito nella prassi didattica.

La presentazione che segue è articolata in 3 distinti paragrafi:

- Storia delle funzioni,
- Problemi logico insiemistici,
- Problemi epistemologici.

Segue, a conclusione, la presentazione di un'attività svolta sul tema da un insegnante ricercatore del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma, il Prof. Achille Maffini.

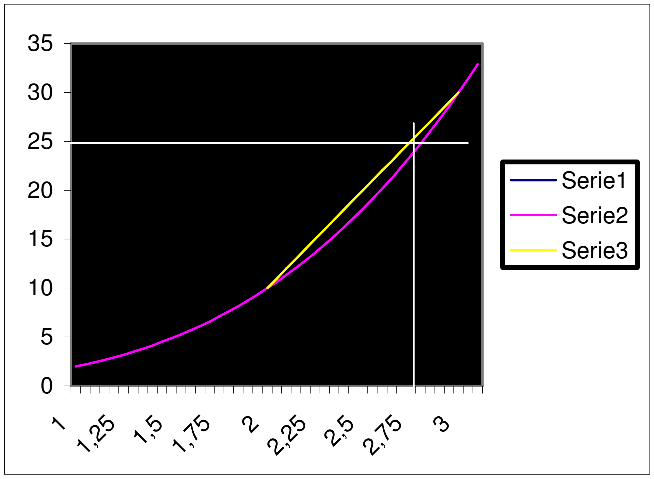
2. **Storia delle funzioni**.

E' abbastanza recente e proficua l'utilizzazione della storia della matematica in classe per favorire l'apprendimento, [Radelet-De-Grave, 1999], [Fauvel & Van Maanen, 2000]. In Italia è ben nota la metodologia didattica detta *gioco voci-echi,* [Boero & al., 2002] che si inserisce in questo filone di ricerca.

Ma di storie ce ne sono tante e tra queste bisogna distinguere

- Storia dell'oggetto matematico.
- Storia della presenza delle funzioni nei programmi scolastici italiani.
- Storia dello studente.

2.1. *Storia dell'oggetto matematico*. Si possono trovare tracce significative dell'uso di funzioni (lineari per interpolazione) già in tavolette mesopotamiche. Gli antichi abitanti di quelle terre avevano delle tavole in cui erano riportati i numeri naturali della forma $n^3 + n$, con $n \in \mathbb{N}$ [Franci & Toti-Rigatelli, 1979]. Qualcosa del genere avviene anche oggi sui testi della scuola media: in fondo al libro sono presenti tavole con i quadrati e i cubi dei numeri naturali. Ad esempio nelle tavole numeriche antiche si trovava $1 \to 2$; $2 \to 10$; $3 \to 30$ eccetera. Nel caso in cui si volesse conoscere il numero tale che $n^3 + n = 25$, gli antichi procedevano mediante interpolazione lineare, vale a dire considerando la proporzionalità:



e quindi sostituendo la curva in fucsia nel grafico con la retta gialla, per cui individuavano il valore $n = \frac{11}{4}$, cui corrisponde il valore 23,54688 inferiore a 25 di 1,45312. Importante l'idea che tra valori discreti si potessero interpolare con una funzione continua (una retta).

Claudio Tolomeo
(85 – 165)

Lo stesso 'artificio' è stato utilizzato da Claudio Tolomeo per dare i valori dei seni e degli angoli oltre a quelli calcolabili con gli strumenti geometrici [Youschkevitch, 1981]. In modo più implicito, negli *Elementi* di Euclide, in particolare nella Definizione V del Libro V, compare la nozione di corrispondenza (nella nozione di «ordinatamente… insieme…»), [Euclide, 1970]:


Euclide
(IV-III sec. a.C.)

«Si dice che le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se equimultipli della prima e della terza rispetto agli equimultipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente, o insieme maggiori, o insieme eguali, o insieme minori».

L'individuazione che le funzioni potevano essere a loro volta oggetto di studio matematico è assai più recente (XVII secolo).

In [Grugnetti & al.1999], si dimostra che gli studenti di oggi fanno propri (in modo non sempre coerente preciso) gli echi dei testi scolastici di varie posizioni di matematici dal XVII al XX secolo. In tale lavoro si confrontano, sul concetto di funzione, le voci del passato con i libri di testo e con gli esiti di un questionario presentato a 99 studenti di scuola superiore. Un approfondimento dei risultati del questionario e dell'analisi dei testi scolastici è in [Maffini, 2000], cui si rimanda per la bibliografia dei testi scolastici. Da [Grugnetti & al.1999] si ricava la seguente breve antologia delle voci storiche messe a confronto coi manuali ed alcuni esiti del questionario (tra parentesi la percentuale di risposte ottenute alle singole domande).

Un "riassunto" delle varie posizioni storicamente affermatesi e di altre si può trovare in [Mac Lane, 1986]: le funzioni sono state viste come

- Formule
- Regole
- Grafi
- Espressioni della dipendenza
- Tavole di valori
- Enti sintattici


Richard Dedekind
(1831 – 1910)

Tali posizioni nettamente indicate o presenti in termini sfumati si possono identificare nella seguente antologia in cui si fa quasi esclusivamente con connotati quantitativi, cioè funzioni tra ambiti numerici. Fa eccezione la proposta di Bourbaki che ha avuto un precursore in Dedekind. Infatti un primo approccio a funzioni tra insiemi arbitrari è riconducibile a Dedekind che nel 1888 introduce il concetto di *Abbildung,* (rappresentazione), indipendente dal concetto di numero:

> «Per una rappresentazione φ di un sistema S s'intende una legge, la quale faccia corrispondere ad ogni dato elemento s di S un oggetto determinato» [Dedekind, 1926].

Voci	Manuali	Questionario
1694 Leibniz: «Chiamo funzione *tutte le porzioni di linea retta*, che si ottengono tracciando rette indefinite, che corrispondono al punto fisso e ai punti della curva.»	*Manuali di biennio e triennio*: Definiscono grafo (alcuni relazione) un *sottinsieme* del prodotto cartesiano di due insiemi, una relazione è un grafo. Definiscono poi funzioni come relazioni ovunque definite e funzionali.	Il grafico in fig. 1 evidenzia l'andamento dell'indice Mibtel della Borsa italiana nel 1998 Rispondi alle seguenti domande: a) E una funzione? (57%) b) Rappresenta una funzione? (68%) ……
1748 Eulero «Una funzione di una quantità variabile è *un'espressione analitica composta*, in qualsivoglia maniera, di questa stessa quantità e di numeri, o di quantità costanti. Così ogni espressione analitica che oltre alla variabile z conterrà delle quantità costanti, è una funzione di z. Per esempio $a + 3z$, $az - 4zz$,… ecc. sono funzioni di z. Una funzione di variabile è dunque anche una *quantità variabile*.»	*Manuali triennio*: «Tutte le volte che i valori di una variabile y dipendono da quelli di un'altra variabile x, si dice che y è una *funzione* di x e si scrive $y = f(x)$ ... Il simbolo $f(x)$ molte volte sta a rappresentare *un complesso di operazioni matematiche* che si devono eseguire sopra i valori della variabile x per ottenere i valori corrispondenti della y, in tal caso $f(x)$ si dice *funzione matematica.*» «Il campo di esistenza di una funzione, data mediante un *legame analitico*, *dipende* dal legame che intercede fra le due variabili In generale esso si determinerà esaminando per quali valori della variabile indipendente x hanno significato le *operazioni* che si devono eseguire su di essa per avere il valore della funzione y.»	Indica, motivando la risposta, quali tra le seguenti «scritture» possono indicare delle funzioni a) $A = \pi\cdot r^2$ (68%) b) $3x^3 + 2x^2 - 1$ (18%) c) $A = (b\cdot h)/2$ (54%) d) $x^2 + y^2 = 4$ (61%) ……
1797 Sylvester Lacroix (1765 1843) «Ogni quantità il cui valore *dipende* da una o più quantità, è detta funzione di queste ultime, sia che si conosca o che si ignori mediante quali operazioni bisogna passare per risalire da quelle a questa.»	*Manuale di triennio*. «Dicesi funzione una quantità variabile che *dipende* da un'altra quantità variabile.»	
1821 Fourier: «In generale la funzione $f(x)$ rappresenta *una successione di valori* o ordinate di cui ciascuna è arbitraria.»	*Manuale di triennio*: «… le funzioni a cui si è condotti nello studio dei fenomeni naturali si presentano, in generale, come definite sperimentalmente, in modo che il valore della y si può dedurre da quello assegnato alla x *solamente* con *misure dirette*… Queste funzioni si dicono ***empiriche***.»	La tabella 1 si usa in statistica. Stabilisci se si tratta di una funzione (57%) specificandone dominio e codominio.
1834 Lobatchevsky: «Il concetto generale esige che una funzione di x sia chiamato un numero che è dato per ogni x e che *cambi gradualmente* allo stesso tempo di x. Il valore della funzione può essere dato sia mediante *un'espressione analitica*, sia per mezzo di una *condizione* che fornisce un mezzo per provare tutti i numeri e selezionare uno tra essi; o, infine, la *dipendenza* può esistere ma resta incognita.»		Il grafico di fig. 2 rappresenta il grafico di una funzione ? (22%) Motiva la risposta
1939 Bourbaki: «Siano E e F due insiemi distinti oppure no, una	*Manuali del biennio e del triennio*. E' la definizione più frequente nel biennio. Nel triennio	

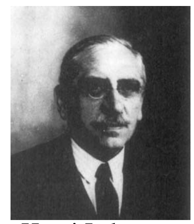
relazione tra una variabile x di E e una variabile y di F è detta *relazione funzionale* in y o relazione funzionale di E verso F, se per ogni x appartenente a E, esiste uno ed un solo y appartenente a F che sia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di funzione all'*operazione* che associa anche ad ogni elemento x di E, l'elemento y in F che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x, e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata.»	compaiono alcune eccezioni: «Dicesi funzione una quantità variabile che dipende da un'altra quantità variabile»; «Dicesi funzione una relazione fra due o più variabili»; (attribuita dal manuale a Dirichlet) «Una variabile y si dice funzione della variabile x nell'insieme numerico I (campo di esistenza della funzione), quando esiste una legge, di natura qualsiasi, la quale faccia corrispondere ad ogni valore dato alla x, dell'insieme I, un valore ed uno solo per la y.»	


Wilhelm Leibniz (1646-1716)


Leonhard Euler (1707-1783)


Joseph Fourier (1768-1830)


Nikolai Lobatchevsky (1792-1856)

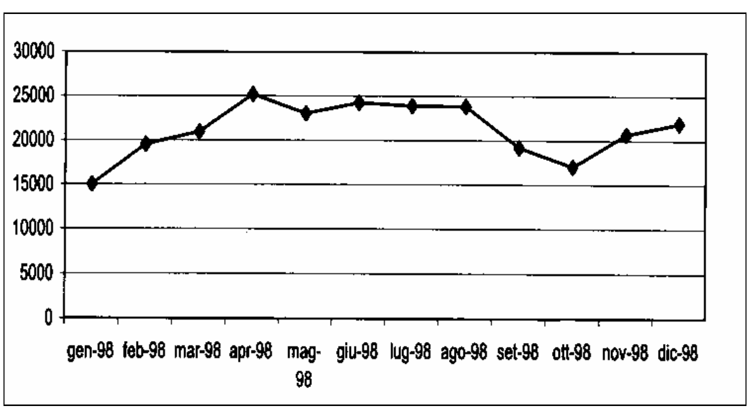

Henri Lebesgue (1875-1941)


Hermann Weyl (1885-1955)

A riprova della difficoltà del concetto di funzione vale la pena di ricordare quanto affermato da Lebesgue e da Weyl,

1902 Lebesgue «Anche se dopo Dirichlet e Riemann, ci si accorda generalmente nel dire che c'è una funzione quando c'è una *corrispondenza* tra un numero y e dei numeri x_1, x_2, …, senza preoccuparsi del procedimento che serve a stabilire tale corrispondenza, molti dei matematici sembrano non considerare *vere* funzioni che quelle che sono introdotte da *corrispondenze analitiche*. Si può pensare che forse in tal modo si introduca una restrizione abbastanza arbitraria; tuttavia è certo che ciò praticamente non restringa il campo delle applicazioni, dato che fino ad oggi sono state effettivamente utilizzate solo le funzioni rappresentabili analiticamente.»

1927 Weyl: «*Nessuno ha mai saputo spiegare cosa sia una funzione*. Ma una funzione f è definita se mediante un mezzo qualsiasi si può *associare* a un numero a, un numero b… Si dirà allora che b è il valore della funzione f per il valore a dell'argomento.»



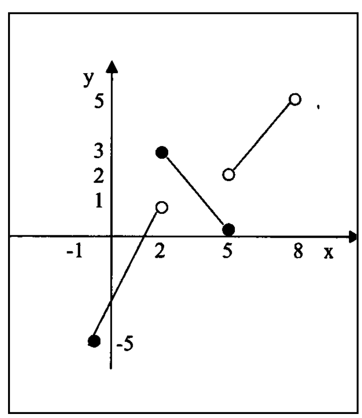
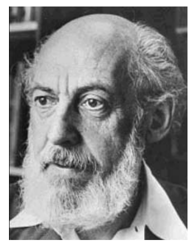


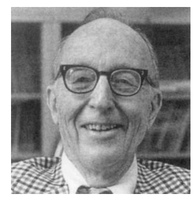
fig. 1 fig. 2

t	z
0,0	0,3989
0,1	0,3970
0,2	0,3910
0,3	0,3814
0,4	0,3983
...	...

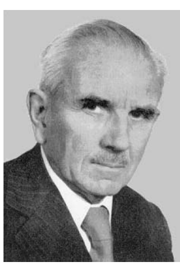
tabella 1

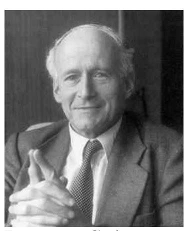
Il processo di chiarimento del concetto di funzione non è ancora terminato, perché i problemi e le intuizioni che sono implicati hanno varia natura e ricondurli ad un'unica definizione può essere arbitrario e forse scorretto. A riprova di ciò sta anche il fatto che la storia delle funzioni non termina col 1939. Si hanno interessanti ed importanti generalizzazioni in epoca successiva. L'anno 1945 è *fatidico*, vengono infatti presentati:


Samuel Eilenberg (1913-1998)


Saunders Mac Lane (1909-2005)

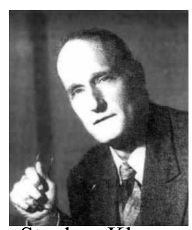
- Le <u>*trasformazioni naturali*</u>, una sorta di trattazione formale del concetto di *legge*, [Eilenberg & Mac Lane, 1945]. Nasce da questi studi la Teoria delle Categorie, in cui il concetto di funzione (morfismo) diviene un <u>*concetto primitivo*</u>.
- I <u>*fasci*</u>, il passaggio dal locale al globale, attribuiti a Leray. [Gray, 1979]).
- Le <u>*distribuzion*</u>i, Schwartz, Sobolev, [Schwartz, 1950].


Jean Leray (1906-1998)

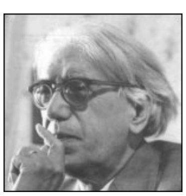

Laurent Schwartz (1915-2002)


Sergei Sobolev (1908-1989)


Kurt Gödel (1906-1978)


Stephen Kleene (1909-1994)

Uno studio a parte meritano le definizioni ricorsive e la classe delle <u>*funzioni ricorsive*</u>, introdotta in un caso particolare in [Gödel, 1931] e successivamente ampliata [Kleene, 1936], [Markov, 1962]. Tali funzioni realizzano un'interessante dialettica tra <u>*infinito in potenza*</u> ed <u>*in atto*</u>.

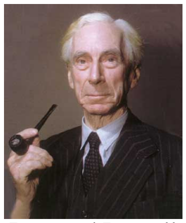

Ferdinand Gonseth (1890-1975)

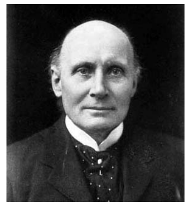
La necessità di generalizzare la nozione di funzione è per altro già presente in opere di Moore (1906), [Gonseth, 1998].

Dalla breve antologia appare chiaro che le varie proposte non sono una sorta di percorso lineare di successivi "miglioramenti" e "precisazioni", ma solo la "traduzione" più o meno formale di idee che traggono origine da attività umane differenti [Mac Lane, 1986]. Tutti i matematici citati si ricollegano ad un unico modello concettuale, di cui finora, non si è fornita una caratterizzazione esaustiva.

Nell'attuale prassi didattica si presenta la nozione di funzione attribuita da [Selden & Selden, 1992], a [Bourbaki, 1939], ma forse più correttamente dovuta a [Peano, 1911], o a [Whitehead & Russell, 1910]. Bourbaki più accuratamente definisce il concetto di *applicazione*, distinguendolo da quelli di *funzione*, *corrispondenza*, *grafico*, *relazione*. A tale tipo di definizione ci si riferisce parlando di *definizione insiemistica* o *strutturale* di funzione. Essa rappresenta attualmente un buon compromesso tra le esigenze concettuali di cui si diceva prima e la semplicità di presentazione.


Giuseppe Peano (1852-1932)


Bertrand Russell (1872-1970)


Alfred North Whitehead (1861-1947)

2.2. *Storia della presenza delle funzioni nei programmi scolastici italiani.* Tale storia è abbastanza interessante. Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [Vita, 1986]. In Italia le funzioni compaiono nei Programmi nel 1906, dopo i Programmi francesi del 1902 ed i Programmi tedeschi di Merano del 1905: il Regio Decreto 22 luglio 1906 n. 373 (Fusinato), programma specifico per il solo Istituto Tecnico di Bergamo, recita

> «funzioni di una variabile indipendente, continuità, nozione elementare di derivata e integrale, derivate e integrali delle funzioni algebriche e trascendenti più semplici».

Il Regio Decreto 28 settembre 1913 n. 1213 (Credaro), introduce le funzioni nei programmi nazionali del *Liceo moderno* che ebbe breve vita a causa dell'immediatamente successivo primo conflitto mondiale e l'avvento del fascismo.

Le funzioni si ritrovano nei Programmi del 1945 predisposti dalla Commissione nominata dai Governi Alleati, emanati per i territori occupati e poi estesi a tutta Italia, mai pubblicati sul Bollettino Ufficiale, né sulla Gazzetta Ufficiale, ma introdotti come Circolare Ministeriale 2 gennaio 1945 n. 155 (Arangio Ruiz), e applicati a partire dall'Anno scolastico 1945 - 1946.

Nonostante le molteplici sperimentazioni, ci sono ancora scuole superiori italiane in cui le funzioni non compaiono nei programmi. Negli obiettivi specifici di apprendimento (OSA) della nuova scuola superiore le funzioni sono presenti in modo più o meno approfondito in tutti i licei. Non ho notizia di cosa accadrà negli istituti di formazione che affiancheranno i licei.

Tutto sommato il "ritardo" con cui il concetto di funzione è stato trasferito dagli studi universitari alla scuola non è stato grandissimo. Per questo non ci sarebbe da stupirsi se tra qualche decennio si riconoscesse indispensabile utilizzare nell'insegnamento anche quegli argomenti che attualmente sono riservati all'Università e che oggi entrano nella preparazione degli insegnanti, ma spesso senza che venga compiuta un'armonizzazione con la nozione di funzione che viene poi insegnata nelle scuole preuniversitarie.

2.3 *Storia dello studente*. A dispetto del fatto che le funzioni siano più o meno esplicitamente presenti, nel suo curricolo scolastico sono molte le occasioni di incontro con esse.

Il contributo delle funzioni all'interno della storia della formazione di ciascuno discente, non è facilmente individuabile, potendo variare molto secondo il curriculum seguito dallo studente.

Per quanto riguarda la scuola dell'obbligo, talora iniziando dalla materna, un primo contatto con le funzioni avviene nella scuola elementare a partire dalle *corrispondenze biunivoche*, particolari tipi di funzioni slegate dagli aspetti quantitativi che saranno preponderanti nel triennio terminale delle scuole superiori a "programma forte". In un certo senso questo primo approccio è riconducibile a quello di Dedekind .

Successivamente gli aspetti quantitativi si presentano in *formule* per perimetri, aree, volumi, a una o più variabili, talora anche per la *proporzionalità.* E' da notare che si ha un primo approccio proprio alle funzioni di più variabili (escludendo le figure geometriche regolari e la circonferenza o il cerchio).

Nella scuola media hanno ancora importanza le *corrispondenze biunivoche*, che talvolta diventano *biezioni*, trasformandosi da processo a oggetto, secondo la distinzione proposta da [Sfard, 1991].


Anna Sfard

Inoltre compaiono le *trasformazioni* del piano in sé come corrispondenze o funzioni, spesso in supporto ad esempi di strutture algebriche. È assai importante l'utilizzazione della *composizione* di trasformazioni, come primo esempio di operazione su (tra) funzioni.

Tornando ad aspetti più quantitativi, l'uso dei numeri interi relativi può essere l'occasione per vedere l'*opposto* e più in generale le *operazioni* come funzioni, passo fondamentale all'introduzione al pensiero strutturale.

In Scienze e in Statistica si incontrano le funzioni viste come *tabelle*. Si parla talora di *funzioni empiriche* o *funzioni sperimentali*. Alle tabelle spesso si fa ricorso come momento preliminare per la costruzione del grafico, nel qual caso si sottintende la continuità, per altro non ancora introdotta formalmente.

Inoltre si introduce la rappresentazione cartesiana di *leggi*, ad esempio: *proporzionalità diretta* e *proporzionalità inversa*, distinguendo tra *legge* e *grafico della legge*.

In tutte le scuole superiori, anzi talora già alla scuola media, si introduce il calcolo letterale, spesso identificato con il calcolo dei *polinomi* e delle *frazioni di polinomi*. Si assiste spesso ad una tacita identificazione dei polinomi con le *funzioni polinomiali*, soprattutto quando si trattano le frazioni di polinomi. Infatti in tal caso si dovrebbe rispettare l'aspetto formale. Per spiegare meglio, l'eguaglianza $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{x+1}{1}$ è corretta in $\mathbb{R}(x)$, campo dei quozienti del dominio di integrità $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x, ottenuto con l'operazione di *localizzazione*, la stessa che fa passare da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, applicata a $\mathbb{R}[x]$, ma solitamente il docente, di fronte a $\frac{x^2-1}{x-1}$ chiede immediatamente di 'discutere' o di porre le condizioni perché il denominatore non si annulli, passando così dal piano morfo-sintattico a quello semantico, sovvertendo il contratto didattico che l'ha portato a definire un polinomio come 'somma di monomi'. Così l'eguaglianza $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{x+1}{1}$ diviene 'scorretta', perché 'non hanno lo stesso dominio', ma gli oggetti di cui si parla sono diventati funzioni, senza che questo passaggio sia spiegato in modo chiaro.

Restano escluse dallo studio delle funzioni alcune scuole superiori non sperimentali. Nelle altre scuole spesso nel biennio e nel triennio le funzioni sono presentate sotto aspetti diversi, come osservano [Furinghetti e Somaglia, 1995].

Ripercorrendo la storia dello studente nella sua formazione, s'incontrano le funzioni in momenti diversi, con finalità, linguaggi e registri semiotici diversi. La storia dello studente non segue però la storia dello sviluppo del concetto. Talvolta è predominante la funzione come procedura, talatra la si considera come oggetto. Questi aspetti richiedono un'analisi approfondita delle difficoltà di apprendimento degli studenti. La presenza contemporanea di due o più accezioni del concetto di funzione, ciascuna delle quali può essere trattata in modo statico o dinamico e avvalendosi di strumenti diversi di rappresentazione, richiede un'attenta diagnosi delle pre-concezioni e delle competenze dei singoli studenti.

Le difficoltà intrinseche del concetto di funzione, che si sono messe in evidenza anche con la breve antologia storica, giustificano l'attenzione della ricerca didattica internazionale in educazione matematica. Essa si è ampiamente occupata dei vari aspetti didattici ed epistemologici che coinvolgono le funzioni, sia sul versante dell'apprendimento, cf. [Harel & Dubinsky, 1992], sia su quello delle credenze (convinzioni) (*beliefs*) degli insegnanti [Garcia Blanco, 1997].

In Italia l'argomento è spesso oggetto di analisi ed approfondimenti: per le scuole secondarie superiori si è svolto nel 1994 un incontro degli Internuclei, in cui il tema ha avuto ampio spazio, e di tale incontro sono stati pubblicati gli atti in [Piochi, 1995]. Anche la ricerca italiana a più riprese si è soffermata sull'argomento, ad es. [Ferrando, 1999], [Marchini, 1998], [Boero & Garuti, 1999], [Grugnetti & al., 1999], [Garuti, 2002]. Come si mostra nel seguito e come ben noto dalla letteratura di ricerca, ci sono molti modi per presentare le funzioni, ciascuno con i suoi aspetti positivi e negativi, [Grugnetti, 1994]. Tale situazione è presente anche nei 23 testi scolastici tra i più adottati in Italia, utilizzati in [Grugnetti & al., 1999].

E' poi abbastanza discutibile la quasi completa identificazione tacita che viene fatta tra le funzioni e le funzioni con espressione analitica. Lo studente di scuola superiore non ha quasi mai occasione di incontrare funzioni che non abbiano espressione analitica e quindi di riflettere sulle richieste che si fanno talora su tutte le funzioni (pardon, corrispondenze funzionali) (reali di variabile reale).

Oggi la definizione di tipo bourbakista si trova sui testi del biennio delle superiori e quindi è il primo approccio esplicito degli studenti col concetto, procedendo in senso inverso alla evoluzione storica della nozione, dando ragione alla critica presentata in [Sfard, 91]. Poi, nel triennio, in argomenti di Analisi matematica, le funzioni sono oggetti matematici diversi (corrispondenze funzionali), senza che mutino di nome. Talora sono presenti anche aspetti geometrici legati alla rappresentazione delle funzioni e strettamente connessi con l'idea di curva.

Nella prassi i due aspetti di grafico e curva vengono spesso confusi: una lettura geometrica della funzione è suggerita, secondo [Manara & Marchi, 1993], dalle

> «abituali valutazioni qualitative riferite all'andamento del grafico, che si esprimono parlando di concavità verso l'alto o verso il basso, di andamento crescente o decrescente e così via. »

In questo senso importante la nozione di *luogo di punti*. Sempre [Manara & Marchi, 1993] afferma:

> «Completamente diverso è invece il punto di vista nello studio di un luogo (geometrico) di punti nel piano euclideo. Prima di tutto va detto che le proprietà che caratterizzano il luogo sono essenzialmente di natura geometrica»

quindi invarianti per trasformazioni geometriche che possono far "sparire" la natura di funzione ad esempio con una rotazione degli assi: [Slavit, 1977] propone come esempio di **non** funzione

$$x = y^2 - 2y + 5,$$

accettando, implicitamente un postulato nascosto, che in questa scrittura, x e y si debbano intendere riferiti ad un sistema di assi cartesiani in cui ricoprano i ruoli standard, rispettivamente, di ascissa ed ordinata, senza per altro esplicitarlo. D'altra parte l'utilizzazione del grafico può avere delle controindicazioni:

> «In sostanza nella formazione di un concetto possiamo distinguere due livelli di comprensione: uno in cui si delinea in maniera informale il concetto e uno in cui il concetto si formalizza con linguaggio specifico. Il grafico sembra agire soltanto nella prima fase senza legami con la seconda, cioè quando si passa alla formalizzazione».
>
> [Furinghetti & Somaglia, 1995].

Nelle scienze sperimentali vi sono poi altri modi di interpretare le funzioni, ad esempio come modellizzazione di rapporti di causalità [Batschelet, 1988].

A mio parere non è opportuno suggerire una "giusta" definizione di funzione, né utilizzare per i vari concetti un solo nome. Piuttosto è interessante osservare che le varie nozioni di funzione che si incontrano anche nella storia sono presenti in studenti di scuola superiore, come dimostra [Grugnetti & al., 1999], quindi l'insegnamento può entrare in conflitto con idee preconcette degli allievi. Inoltre la molteplicità di approcci ancora presenti contemporaneamente nella prassi didattica e nei testi può essere motivo di difficoltà per il discente, soprattutto se tale molteplicità non è ben padroneggiata dal docente. Nell'ottica del costruttivismo sociale, [Ernest, 1993], afferma

> «Le teorie personali […] debbono rispettare i vincoli imposti dalla realtà fisica e sociale; […] esse realizzano ciò con il ciclo teoria-predizione-controllo-fallimento-accomodamento-nuova teoria; […] ciò dà origine a teorie dotate di consenso sociale e a schemi sociali e all'uso delle regole linguistiche; […] la matematica è la teoria della forma e della struttura che sorge entro il linguaggio».

Presentare e utilizzare il concetto di funzione in accezioni diverse, senza chiarirne le ragioni e lo sviluppo storico è antididattico. Inoltre, dato che si tratta di un concetto che ha ancora spazio di evoluzione nella ricerca matematica; si dovrebbe far capire anche al singolo studente che la fase di controllo-fallimento-accomodamento non è ancora terminata neppure nell'ambito sociale più vasto della comunità matematica e quindi non c'è spazio per nessun tipo di dogmaticità.

3. **Problemi logico-insiemistici**.

3.1. *Funzione e grafico*. Secondo la definizione più comune nel biennio, le funzioni sono opportuni sottinsiemi di prodotti cartesiani, identificando così la *funzione* con il suo *grafico*, privilegiando una nozione *statica* e *globale* opposta all'interpretazione *dinamica* e talvolta *locale* spesso sottintesa al concetto di funzione [Baciotti & Beccari, 1988]. Questa presentazione insiemistica, importante per la sua generalità e semplicità, non si avvicina molto ad un'intuizione diffusa. Ne è prova il fatto che, almeno nella prassi didattica, assai raramente si usano gli elementi di una funzione, pur essendo la relazione di appartenenza uno dei cardini della concezione di insieme. La definizione come grafico richiede inoltre uno sviluppo teorico che va al di là dei semplici aspetti intuitivi usati per introdurre gli insiemi.

3.2. *Coppie ordinate*. E' indispensabile la nozione di *coppia ordinata*, che probabilmente si può far risalire a Cartesio, se non addirittura a Claudio Tolomeo o a Nicola di Oresme, per la quale non c'è univocità nella letteratura. Infatti le coppie ordinate compaiono come

[Peano, 1911]: *concetto primitivo*,

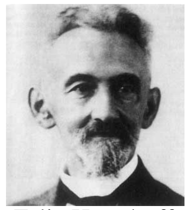
[Hausdorff, 1914]: $\langle a,b\rangle = \{\{a,1\},\{b,2\}\}$,

[Wiener, 1914]: $\langle a,b\rangle = \{a,\{a,b\}\}$,

[Kuratowski, 1921], $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$.


René Descartes
(1596-1650)


Nicole D'Oresme
(1323-1382)


Felix Hausdorff
(1868-1941)


Norbert Wiener
(1894-1964)


Kasimierz Kuratowski
(1896-1980)

Le ultime tre proposte collocano la *coppia ordinata* in un *tipo* maggiore di quello delle componenti della coppia:

> «The Wiener-Hausdorff-Kuratowski definition has the effect that the ordered pair has a type higher by 2 than that of elements (when these are of the same type).» [van Heijenoort:, 1967]

Di conseguenza ogni funzione, vista come collezioni di coppie ordinate, ha un tipo almeno maggiore di 3 del massimo dei tipi degli elementi dell'unione di dominio e immagine.


Leon Chwistek
(1884-1944)


Frank Ramsey
(1903-1930)

La nozione di tipo, che ha una controparte intuitiva, ha risvolti epistemologici di non poco conto; essa è stata formalizzata in un contesto logicista da [Whitehead & Russell, 1910], è stata poi ripresa da [Chwistek, 1922] e [Ramsey, 1925] con l'introduzione dei *tipi semplici.* Un tentativo volto ad evitare il problema della complessità dei tipi si ha con [Zermelo, 1930]. Il problema specifico della complessità dei tipi relativamente alle coppie ordinate ed alle funzioni è trattato in [van Heijenoort:, 1967] in cui si riportano alcune proposte volte a definire le coppie, terne, … ordinate, evitando l'aumento di complessità. Nel contesto della proposta fondazionale intuizionista, la presenza di tipi di ordine maggiore del secondo non è accettabile:


Ernst Zermelo
(1871-1953)


Luitzen Brouwer
(1881-1966)

> «Und hierhaus folgt weiter, dass auch für beliebiges *n* eine beliebighe Menge *n*-ter Ordnung mit einer menge zweiter Ordnung identisch ist. Mithin stellt sich herhaus, dass der Begriff der Menge höherer Ordung, im Gegensatz zum Begriff der Spezies höheres Ordnung, nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt.» [Brouwer, 1942].

Dal punto di vista didattico, la complessità dei tipi può essere causa di difficoltà di apprendimento e forse tale aspetto non è stato adeguatamente approfondito dalla ricerca in educazione matematica. A mio parere si tratta di un ostacolo didattico provocato dalla cosiddetta *Insiemistica:* l'introduzione intuitiva degli insiemi crea un ambito teorico pseudo-strutturale nel senso di [Sfard, 1991], che non permette di padroneggiare la complessità dei tipi; essa allora genera un ostacolo nel conflitto con gli usi più formali richiesti dallo studio delle funzioni. Di conseguenza il livello di astrazione richiesto non è sempre sufficientemente maturato dagli allievi, perciò la funzione rischia di essere una nozione appresa a memoria, ma non interiorizzata, coma afferma anche [Bazzini, 1995], riportando un'ampia letteratura sul tema.

3.3 *Dominio, codominio e immagine*. Ulteriori difficoltà sono presentate dalla nozione di *dominio* [Longo & Di Carlo, 1995], *codominio* e *immagine*. Il primo in quanto esplicitamente presente nella nozione insiemistica e da determinare nella presentazione delle funzioni come corrispondenze funzionali sui reali; le altre nozioni in quanto vengono definite in modi diversi nei manuali scolastici. Alcuni autori, ad es. [Furinghetti & Somaglia, 1995], attribuiscono queste difficoltà all'uso di un linguaggio colloquiale. Esso viene utilizzato per introdurre i concetti, ma tende a permanere e non viene sostituito con quello matematico, lasciando così in ombra la differenza tra quantificazione universale ed esistenziale indispensabili per distinguere tra dominio e immagine. In questi casi, come in altri di interesse per la Matematica, ad esempio limiti, continuità, continuità uniforme, ecc., possono essere presenti *alternanze di quantificatori*; esse rendono ancora più difficile la comprensione. Per questi motivi, presentare i concetti con uno stile verbale colloquiale (ambito *linguistico*), facendo anche spesso riferimento alla intuizione grafica (ambito *semantico*), può risultare soddisfacente ad un primo approccio, ma bisogna che l'insegnante ben presto lasci da parte il linguaggio suggestivo della lingua parlata e della rappresentazione per precisare in modo non equivoco la struttura del *linguaggio formale* da utilizzare. Certamente restando a livello "intuitivo" non si facilita il secondo livello di comprensione ipotizzato da [Furinghetti & Somaglia, 1995]. Ma non è solo un problema di comprensione o, se si preferisce, di *reificazione* [Sfard, 1991] o *entificazione* [Arcavi & Nachmias, 1993]: usando un linguaggio non formalizzato certe idee si traducono in modo scorretto, come mostra [Maturo & Varone, 1995] a proposito della continuità.

Come viene identificato il dominio? Per [Longo, Di Carlo 1995] è uno dei nodi del concetto di funzione. E' interessante che tale nozione su vari testi viene presentata in termini diversi e non equivalenti. Ad esempio in [Zwirner, 1971] a pag. 138 si ha:

> *«L'insieme I dei valori che si possono attribuire alla x, perché esista il corrispondente valore della y, dicesi campo di esistenza o di definizione della funzione y»*

utilizzando rientri e corsivi spesso usati nel testo per evidenziare le definizioni, dando per sottinteso che $I \subseteq \mathbb{R}$ e che esistere significhi essere un numero reale. Lo stesso testo a pag. 142, in caratteri normali scrive

> «Il campo di esistenza di una funzione, data mediante un legame analitico, *dipende* dal legame che intercede fra le due variabili.
> In generale esso si determinerà esaminando per quali valori della variabile indipendente *x* hanno significato le operazioni che si devono eseguire su di essa per avere il valore della funzione *y*.»

La distinzione tra funzioni e funzioni esprimibili analiticamente viene presentata dal testo, esplicitamente e con esempi, ma non viene messo invece in evidenza la differenza tra i due modi di intendere il dominio delle funzioni. Non viene neppure accentrata l'attenzione sulla differenza tra funzione e sua eventuale espressione analitica.

Apparentemente le due "definizioni" di Zwirner sono equivalenti, ma così non è. Nella prima si considera la funzione "globalmente" ed è una definizione applicabile anche se non è nota una espressione analitica. Così nel caso della (1) il numero 0 è elemento del dominio dato che $\frac{0}{\sqrt{-1}} = 0 \in \mathbb{R}$. Nella seconda si privilegia un'analisi morfologica: la funzione è data mediante un'eguaglianza in cui compare un termine. Tale termine viene preliminarmente scomposto nei sottotermini, seguendo le operazioni e la composizione; ciascuno di tali sottotermini viene usato per definire una funzione di cui si determina il dominio. Da questi domini con le operazioni tipiche di intersezione, si risponde finalmente alla domanda. Con questa analisi la (1) si scompone nelle funzioni $y = x$; $y = \sqrt{x - 1}$, $y = \frac{1}{x}$, da cui per composizione e moltiplicazione si ha la (1). Ma la prima ha come dominio $\mathbb{R}$, la seconda ha come dominio $[1,+\infty[$ e la terza $\mathbb{R}^*$. Secondo questo metodo, la (1) ha per dominio $]1,+\infty[$.

3.4. *La descrizione mediante insiemi*. La scelta di inserire la trattazione delle funzioni nell'ambito insiemistico ha punti delicati che possono essere illustrati illustrare con un semplice esempio. Si consideri

(2) $$f = \{\langle n,2n\rangle \mid n\in \mathbb{N}\}.$$

Dalla definizione si ha $f \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Per essa si utilizza anche la scrittura $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denotando in tal modo una terna ordinata, in cui i due punti stanno al posto di $\subseteq$ e la freccia sta per $\times$. Di solito l'insieme posto in coda della freccia si dice il *dominio* e quello dopo la punta della freccia, il *codomino* della funzione. Anche a questo proposito non c'è una univocità di dizione. Un'alternativa è quella di *immagine* in luogo di *codominio*, ma questa opzione può dare luogo a confusioni, visto che a volte interessa distinguere i due concetti. Si noti che [Sierpinska, 1992] utilizza il nome di funzione in modo più affine all'uso dell'Analisi matematica, richiedendo che il dominio sia un sottinsieme del primo fattore del prodotto cartesiano. La scrittura con la freccia ha in sé una suggestione di *dinamicità*: la freccia mette in evidenza il passaggio, forzato da f, dagli elementi di $\mathbb{N}$ a quelli di $\mathbb{N}$, come a dire che la funzione viene rivelata (*in potenza*) mano a mano che si considerano gli elementi del dominio, esplicitata dalla (3) seguente; in questo differisce dalla


Anna Sierpinska

notazione *statica* usata per denotare il grafico che considera l'insieme dato *in atto*.

In questa scrittura la lettera f viene usata come variabile per la generica funzione. In tal modo però si utilizza implicitamente un *linguaggio a più sorte*, una per gli argomenti delle funzioni, l'altra per le funzioni ed una terza per domini e codomini.

Talora accanto ad una scrittura del tipo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, viene indicato il "comportamento" della funzione f sugli elementi. Ad esempio nel caso di (2) si scrive

(3) $$f\colon n \mapsto 2n.$$

In (3) compare una "freccia" diversa, utilizzata dai testi per precisare che non si sta operando con la corrispondenza sottinsieme del prodotto cartesiano $n \times 2n$, ma sui singoli elementi, di cui nella scrittura n è l'"esemplare". Si sottintende che si sta considerando il generico numero naturale, quindi si tratta di una variabile (in $\mathbb{N}$) quantificata universalmente. Ciò può essere messo in evidenza dal fatto che ponendo $f\colon m \mapsto 2m$, non viene alterata la funzione. Talora poi si utilizza la scrittura

(4) $$f(n) = 2n$$

in cui la freccia "strana" viene sostituita da una eguaglianza e i due punti e la "coda" della freccia si trasformano in parentesi.

E' interessante confrontare il ruolo logico dei simboli presenti in (2), in (3) e in (4). Spesso nell'uso della notazione degli insiemi dati per caratteristica i testi, e talora anche gli insegnanti, trovano difficoltà, per lo più originate dall'uso dei operatori che vincolano le presenze delle indeterminate, ad esempio quantificatori e tra questi soprattutto quelli esistenziali. Ad esempio se $\varphi(x)$ denota una proprietà di una certa specie di enti matematici, $\{x \mid \varphi(x)\}$ sta ad indicare l'insieme (o meglio la classe) di *tutti* e *soli* gli enti prefissati che godono o soddisfano la proprietà φ. Si ha $\{x \mid \varphi(x)\} = \{y \mid \varphi(y)\}$, cioè non ha importanza il nome della indeterminata (variabile se è fissato il dominio di variazione) usata nella scrittura. In termine tecnico i logici dicono che le presenze di x in $\{x \mid \varphi(x)\}$ sono *vincolate* [1]. Ma il fatto che la scrittura individui la collezione di tutti gli elementi che soddisfano la proprietà φ comporta che per ogni a per cui $\varphi(a)$ si ha $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$; tutto ciò accosta questa simbologia al quantificatore universale. Così in (2) le presenze del simbolo n sono vincolate, quindi non cambia l'oggetto matematico se si cambia il nome di tale simbolo. Lo stesso avviene in (3) e (4).

3.5. *Il registro semiotico grafico.* Un'altra strada spesso seguita per introdurre il concetto di funzione è l'utilizzazione e lo studio dei grafici; però in tal modo si sottintendono spesso anche

[1] Le presenze di eventuali altre indeterminate presenti in $\varphi(x)$ rimangono libere, cioè non vengono vincolate; tali indeterminate svolgono il ruolo di *parametri:* l'insieme o classe risultante dipende da essi cioè al variare dei valori assunti dai parametri cambia l'insieme come avviene ad esempio per $\{x \mid x \in y \wedge x \in z\} = y \cap z$, che dipende dai parametri y e z.

aspetti geometrici legati alla rappresentazione delle funzioni e strettamente connessi con l'idea di curva. Nella prassi i due aspetti di grafico e curva vengono spesso confusi: una lettura geometrica della funzione è suggerita, secondo [Manara & Marchi, 1993], dalle

> «abituali valutazioni qualitative riferite all'andamento del grafico, che si esprimono parlando di concavità verso l'alto o verso il basso, di andamento crescente o decrescente e così via. »

In questo senso importante la nozione di *luogo di punti*. sempre [Manara & Marchi, 1993] afferma:

> «Completamente diverso è invece il punto di vista nello studio di un luogo (geometrico) di punti nel piano euclideo. Prima di tutto va detto che le proprietà che caratterizzano il luogo sono essenzialmente di natura geometrica.»

3.6. *Uso dei numeri complessi*. Un'ulteriore difficoltà didattica è costituita dall'uso implicito dei <u>*numeri complessi*</u> per lo studio di funzioni reali di variabili reali (consueto in alcuni strumenti informatici), come nel problema (1). La struttura e le proprietà dei numeri complessi sono argomento di pochi programmi scolastici sperimentali, eppure sono strumento matematico utilizzato ed indispensabile, si pensi alla teoria delle equazioni algebriche. Il confronto tra i risultati ottenuti con alcuni manipolatori simbolici e con carta e penna, può creare incomprensione.

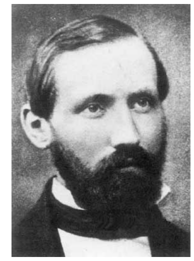
Anche in casi 'tranquilli' come quello dello studio di funzioni polinomiali, a volte ci si imbatte nella necessità di utilizzare i numeri complessi per ottenere risultati reali. Ad esempio $f(x) = x^4 + 20x^3 - 81x^2 - \sqrt{2}\,x + 62$ è una funzione 'di buona famiglia' con dominio $\mathbb{R}$. Per determinare i quattro punti (reali) di intersezione con l'asse delle ascisse, il punto di massimo e i due punti di minimo, anch'essi reali) si devono risolvere equazioni algebriche di quarto grado e di terzo grado (rispettivamente). In tale caso le soluzioni possono essere trovate solo facendo uso dei numeri complessi, non essendo sufficienti i metodi sviluppabili all'interno del campo reale. Non si vede pertanto perché impedire l'uso dei numeri complessi nello studio della funzione (1).

Si può osservare che funzioni di questo tipo non compariranno mai come temi agli esami di maturità, né sui manuali scolastici, a meno di un qualche errore di stampa. Questa osservazione sensata mette allora in discussione l'individuazione delle funzioni 'di buona famiglia'. Non si tratta di quelle che hanno espressione analitica, ma solo di quelle costruite ad hoc perché gli esercizi siano fattibili con metodi elementari.

3.7. *Restrizione e inclusione*. È poi assai frequente l'uso sottinteso della <u>*restrizione*</u> e quindi dell'<u>*inclusione*</u> vista contemporaneamente come funzione e come relazione tra insiemi ($\subseteq$), ciò in conseguenza alla gestione della nozione di dominio che talora non viene esplicitata.

Nello studio dell'Analisi spesso si ricorre alla restrizione. Ad esempio su molti testi, anche universitari se f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione Riemann – integrabile e $c \in]a,b[$, allora

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Questa scrittura è scorretta: nella definizione di integrale di Riemann si esplicita che la funzione è definita nell'intervallo su cui si fa l'integrazione. Più correttamente si dovrebbe porre: sia $f_1 = (f\upharpoonright[a,c])$ e $f_2 = (f\upharpoonright[c,b])$, allora $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$. Ma $f_1 = (f\circ i_1)$ e $f_2 = (f\circ i_2)$, avendo indicato con i_1: $[a,c] \to [a,b]$ e con i_2: $[c,b] \to [a,b]$ le rispettive inclusioni. Resterebbe però da dimostrare (anche se si tratta di una dimostrazione banale) che f_1 e f_2 sono Riemann – integrabili. In altre parti si confonde una funzione con una sua restrizione: ad esempio se si chiede di conoscere il dominio della funzione $(f + g)$ si afferma che il dominio è l'intersezione dei due domini. Ma se essi sono diversi e D è la loro restrizione, non è corretto parlare di $(f + g)$, bensì di $((f\upharpoonright D)+(g\upharpoonright D))$. In altre occasioni bisogna conoscere la derivata dell'inclusione per mostrare che se una funzione è derivabile, anche una sua restrizione lo è.



Bernhard Riemann
(1826-1866)

3.8. *Ipostatizzazione*. Dal punto di vista logico, una difficoltà ulteriore è offerta dall'*uso ipostatizzato* delle variabili. Un esempio di ciò si ha in [Slavit, 1997]. Fornendo una descrizione della funzione come insieme di coppie ordinate, descritto per caratteristica, il nome delle variabili utilizzate è irrilevante; diventa invece importante utilizzando altre scritture. Per chiarire: $y = x^2 - 2x + 5$ è ritenuta l'espressione di una funzione, ciò non avviene per $x = y^2 - 2y + 5$, mentre, essendo $\{\langle x,y\rangle\in \mathbb{R}^2 | y = x^2 - 2x + 5\} = \{\langle t,y\rangle\in \mathbb{R}^2 | y = t^2 - 2t + 5\} = \{\langle t,z\rangle\in \mathbb{R}^2 | z = t^2 - 2t + 5\} = \{\langle t,x\rangle\in \mathbb{R}^2 | x = t^2 - 2t + 5\} = \{\langle y,x\rangle\in \mathbb{R}^2 | x = y^2 - 2y + 5\}$ è l'espressione di una funzione.

La differenza sta negli aspetti impliciti sottintesi nella prima e nella seconda espressione e nelle *presenze vincolate* delle variabili nella terza. L'uso che tende a identificare col nome il ruolo delle variabili introduce una rigidità che ostacola l'applicazione della funzione come modello matematico in applicazioni, ad esempio nelle leggi orarie del moto, dei gas perfetti, ecc.

Le scritture ormai divenute tradizionali, come la (1) o peggio ancora nella forma $y = \ldots$, con la subdola ipostatizzazione, nascondono la presenza e l'uso dei quantificatori. Il nome *variabile indipendente*, pur avendo una storia di tutto rispetto, sembra voler celare un'universalizzazione (in un dominio talvolta da determinare).

3.9. *Estensione – intensione*. La prassi consueta utilizza la presenza contemporanea di *aspetti estensionali* ed *intensionali* (funzioni come insiemi - funzioni come leggi); a causa di ciò possono nascere perplessità come quelle rilevate con la domanda 5 del questionario di [Maffini, 2000]:

Le funzioni f, g, h definite in $\mathbb{R}$ da $f(x) = x$, $g(x) = x\cdot 1$, $h(x) = x + 0$

a) sono uguali (25%)
b) hanno lo stesso grafico (14%)
c) hanno domini diversi (16%)
d) sono diverse (34%)

La scarsa prevalenza di una risposta sulle altre induce alla riflessione.

Estensionalmente due funzioni (come sottinsiemi di un prodotto cartesiano) sono uguali quando hanno gli stessi elementi, oppure in modo più complesso, quando hanno lo stesso dominio e operano nello stesso modo sugli stessi elementi del dominio. Se il punto di vista estensionale fosse il più interiorizzato, gli esiti sarebbero a favore della prima risposta, visto che il dominio è esplicitato nel quesito e che le operazioni con cui è costruita l'espressione analitica relativa sono tutte effettuabili in $\mathbb{R}$, campo in cui forniscono lo stesso valore. La risposta c) non avrebbe ragione di essere, data la menzione esplicita del dominio nel testo. Chi ha scelto la risposta c) mette in risalto il suo disagio di fronte a questo confronto tra aspetti intensionali ed estensionali.

Intensionalmente le funzioni sono diverse, perché è diversa l'espressione analitica usata per rappresentare le funzioni. Se vengono viste come leggi e non come formule, allora i domini sono effettivamente diversi: la f è una funzione definibile in tutti gli insiemi, essendone l'identità. Le funzioni g e h richiedono domini diversi, in cui sono definite operazioni binarie: g è definibile in strutture con un'operazione binaria e per essere "uguale" a f, bisogna che 1 sia elemento neutro per tale operazione; per h l'elemento neutro dell'operazione coinvolta deve essere 0.

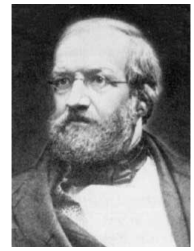
Sommando assieme le risposte estensionali (a e b) si ottiene 39%, mentre per le risposte intensionali (c e d) si ottiene 40%. Di tutto rilievo il 20% che non ha risposto al quesito.

Alcune delle domande del questionario evidenziano che negli studenti conflitti tra *semantica* (funzioni come valori) e *sintassi* (funzioni come formule), tra aspetti *potenziali* e *attuali* dell'infinito usato nelle descrizioni delle funzioni come *procedure* o come *enti*.

4. **Problemi epistemologici**.

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come siano possibili modi diversi di presentare le funzioni; la scelta di quale nozione adottare ha importanti riflessi epistemologici. Il fatto di accettare una sequenzialità di presentazione suggerita dai programmi scolastici che parte dalla nozione bourbakista (qualitativa) per approdare a quella più tradizionale di funzione reale di variabile reale, è il sintomo di scelte in base alle quali si dà all'inizio, in un certo senso, scontato un approccio inquadrabile nel *platonismo insiemistico* di cui parla [Borga & Palladino, 1997], vale a dire l'assunzione che la (una) teoria degli insiemi descriva una realtà, gli insiemi, come gli unici enti esistenti effettivamente nell'iperuranio, essendo poi gli altri enti matematici dedotti a partire da

questi, come rappresentazione di relazioni tra insiemi. Tale approccio viene poi abbandonato in favore di una versione di funzione più tradizionale (quantitativa e a mio parere a-critica).
Viene da chiedersi se queste scelte, siano il frutto di un'omologazione tipica di un periodo di *scienza normale* [Kuhn, 1962], [Speranza, 1992].
I manuali scolastici del biennio delle superiori ed universitari presentano le funzioni come enti insiemistici. Anche la ricerca didattica si occupa per lo più di questo tipo di definizione: ad es. in [Sfard, 1992], essa è proposta come un punto d'arrivo di processi cognitivi, riprendendo la metafora dei rapporti tra filogenesi ed ontogenesi. Le ricerche spesso mettono in luce i vari conflitti cognitivi che intervengono nell'ambito delle funzioni, visto che esse vengono introdotte ed utilizzate, sempre con lo stesso nome, secondo idee, concetti e schemi diversi, che seguitano poi a permanere negli studenti.
Le più "tradizionali" funzioni reali di variabile reale, oggetto di studio nel segmento terminale di alcune scuole secondarie italiane, non sono esenti da problemi di carattere epistemologico. Esse si basano sulla nozione di numero reale, inglobando problematiche relative a $\mathbb{R}$, alla sua struttura algebrica, metrica, d'ordine, topologica, alla sua cardinalità.
I numeri reali ***non*** sono un oggetto *epistemologicamente neutro*, anzi sono il frutto di scelte precise. Data la loro importanza matematica, sono presenti in modo rilevante e centrale in (quasi) tutte le proposte fondazionali, ad esempio in quelle associabili a *intuizionismo*, *costruttivismo alla Erret Bishop (1928-1983)*, *costruttivismo russo*, *predicativismo* [N.R.D. Modena, 1985], talvolta con caratteristiche "sorprendenti". Di conseguenza le funzioni o i concetti corrispondenti in questi approcci, svolgono un ruolo specifico in ciascuna di predette impostazioni epistemologiche, e ad esse bisogna aggiungere la *teoria delle categorie*, ma i risultati ottenuti nelle varie accezioni del concetto di funzione possono essere in aperto contrasto tra loro.
La presenza nello studente di concezioni e stili cognitivi diversi può essere fonte di *ostacoli epistemologici*
Come detto in precedenza [Batschelet, 1988] rileva l'interpretazione delle funzioni come rappresentazioni del principio di causalità e questa idea può permanere entrando in conflitto con la possibilità di determinare la funzione inversa, che invertirebbe causa ed effetto.
Tipico ostacolo epistemologico rilevato in [Grugnetti et al., 1999] in relazione all'apprendimento del concetto di funzione, è la presenza di una nozione di continuità. Qui non si intende la continuità locale o globale definita in ogni testo di Analisi e neppure dell'idea quasi formale di cui parlano [Maturo & Varone, 1995], ma di una continuità ancora più intuitiva, come presentata da [Nordon, 1995] e [Pellerey, 1997], attestata anche in età precoce, [Dalla Noce et al., 1999], [Grugnetti & al., 2002]. La continuità sembra strettamente connessa con l'idea stessa di funzione come teorizzato


Lejeune Dirichlet
(1805-1859)

nella cosiddetta definizione di Dirichlet, [Youschkevitch, 1981], o nella definizione di Lobatchevsky. Una conferma indiretta di questa stretta connessione tra concetto di funzione e continuità si ha con [Brouwer, 1927] in cui si dimostra il cosiddetto *teorema del ventaglio*; da tale risultato consegue che tutte le funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo chiuso, sono uniformemente continue, beninteso con la nozione intuizionista di funzione. Lo scarso numero di risposte affermative alla domanda del questionario connessa con la fig. 2, ne è una riprova.

5. **Conclusione**.

I paragrafi precedenti cercano di mettere in luce la complessità e la criticità della nozione di funzione, insieme alla sua importanza nello studio della Matematica. L'apprendimento a-critico di un solo approccio rischia di banalizzare e di nascondere la problematica. L'obiezione che in classe non c'è tempo per giungere a presentare nei dettagli il concetto, anche perché questa (lunga e non esaustiva) serie di dubbi e problemi rischia di destabilizzare lo studente.

Sicuramente questi sono motivi sensati di perplessità da parte del docente che comunque è tenuto a conoscere le questioni qui delineate per interpretare eventuali difficoltà degli studenti.

D'altra parte le funzioni possono essere un buon esempio di quel ciclo propugnato da [Ernest, 1993]: teoria-predizione-controllo-fallimento-accomodamento-nuova teoria, visto come fase indispensabile per ottenere l'apprendimento di un nuovo concetto.

In una sperimentazione nel Liceo Scientifico Falcone di Asola (Mn), il Prof. Maffini ha costituito un gruppo di 8 studenti, di quattro classi (dalla seconda alla quinta); i giovani hanno svolto un'attività di laboratorio per chiarire e confrontare il concetto di funzione.

Un resoconto dell'attività, presentata al convegno UMI-CIIM di Salsomaggiore 2000, compare sugli atti di tale convegno.

Parte integrante della sperimentazione è stata la preparazione di un *test*, opera degli stessi 8 studenti i quali hanno anche la valutato le 262 risposte.

Il test è stato organizzato individuando il numero dei quesiti da proporre e gli scopi delle singole domande.

Nella fase di preparazione del test la *scelta* delle domande è stata concordata in modo da toccare i *punti nodali* del concetto.

Altri aspetti interessanti sono emersi nella fase di valutazione delle risposte.

Un'ipotesi di ricerca è che la consegna di elaborare un questionario da sottoporre ad altri gruppi all'interno della stessa classe o ad altre classi (parallele o no) sia un'attività *motivante*.

Ulteriore ipotesi è che la scelta delle domande metta in luce *le difficoltà* che il gruppo o la classe ha sul concetto prescelto.

Con questa attività si dovrebbe evidenziare un *atteggiamento* degli studenti nei confronti della matematica, diverso da quelli finora teorizzati, ad esempio da McLeod.

Bibliografia

Arcavi, A. & Nachmias, R.: 1993, 'What Is Your Family Name Ms. Function? Exploring Families of Functions With a Non-Conventional Representation' Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching 12 (3/4), 315 - 329.

Bacciotti, A. & Beccari, G.T.: 1988, 'Problemi didattici nei corsi universitari. L'introduzione del concetto di funzione', *Archimede*, XL, 41 - 49.

Bagni, G.T.: 1997, 'Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore', *La Matematica e la sua Didattica*, 1997, 306 - 319.

Batschelet, E.: 1988, *Introduzione alla matematica per biologi*, Piccin Nuova Libraria, Padova.

Bazzini, L.: 1995, 'Sulla comprensione del concetto di funzione in studenti di liceo scientifico', in [Piochi, 1995], 33 - 40.

Boero, P. & Garuti, R.: 1999, 'Les inéquations fonctionnelles: lieu de developpement et d'étude de la maitrise des fonctions', Preprint Sfida 10.

Boero, P. & Garuti, R. & Pedemonte, B. & Robotti, E.: 2002, 'Il gioco *voci-echi* come metodologia per la mediazione degli aspetti salienti delle teorie', in [Malara & al., 2002], 29 - 41.

Borga, M. & Palladino, D.: 1997, *Oltre il mito della crisi - Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia.

Bourbaki, N.: 1939, *Elements de Mathématiques*, *Livre I, Ch. 2*, Hermann, Paris.

Brouwer, L.: 1927, 'Über Definitionsbereiche von Functionen', *Mathematischen Annalen*, 97, 60 - 75.

Brouwer, L.: 1942, 'Beweis das der Begriff der Menge höherer Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt', *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.* 45, 791 - 793.

Chwistek, L.: 1922, 'Uber der Antinomien der Prinzipien der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift,*14, 236 - 242.

Dallanoce, S. & Grugnetti, L. & Molinari, F. & Rizza, A. & Andriani, M.F. & Foglia, S. & Gregori, S. & Marchini, C. & Pezzi, F.: 1999, 'A cognitive cohoperation across different sectors of education', Ahmed, Kraemer, Williams (Eds.), *Proc. CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publ., 297 - 303.

Dedekind, R.: 1926, *Essenza e significato dei numeri - Continuità e numeri irrazionali*, Traduzione dal tedesco di Oscar Zarinski, Alberto Stock Editore, Roma.

Duffin, J. & Simpson, A.: 1997, 'When does a way of working become a methodology?' in Pehkonen, E. (Ed.) *Proceedings PME*, Lahti, Finland, 233-240.

Eilenberg, S. & Mac Lane, S.: 1945, 'General Theory of Natural Equivalences' *Transactions of the Americal Mathematical Society,* **58,** 239 - 294.

Ernest, P.: 1993, 'Il costruttivismo sociale come filosofia della matematica: riabilitazione del costruttivismo radicale', Speranza, F. (Ed.)*Quaderni di Didattica della Matematica e dei suoi fondamenti*, n. 1, 1 - 16.

Euclide: 1970, *Elementi*, Traduzione e commento a cura di Frajese, A. & Maccioni, L., UTET, Torino.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.): 2000, *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, Kluwer Academic Pubbl.

Ferrando, E.: 1999, 'A multidisciplinary approach to the interpretation of some difficulties in learning Mathematica Analysis', *Proccedings of 50-th CIEAEM, Neuchatel, 1998*, 308 - 312.

Franci, R. & Toti-Rigatelli, L.: 1979, *Storia della teoria delle equazioni algebriche,* Mursia, Milano.

Furinghetti, F. & Somaglia, A.: 1995, 'Uno studio longitudinale sulla funzione', in [Piochi, 1995], 63 - 74.

Garcia Blanco, M.M.: 1997, *Conocimiento Profesinal del profesor de Matemáticas - El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*, Giem, Università di Siviglia.

Garuti, R.: 2002, 'Attività sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione nella scuola media', in [Malara et al, 2002], 115 - 125.

Gödel, K.: 'Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* un verwandter Systeme I', *Monateshefte für Matematik und Physik*, 38, 144 - 195. Una traduzione italiana è in [Shanker, 1991], 21 - 62.

Gonseth, F.: 1998, *Logique et philosophie mathématiques*, Hermann, Paris.

Gray, J.W.: 1979, 'Fragments of the History of Sheaf Theory', Fourman, M.P. and Mulvey, C.J. and Scott, D.S. (Eds.) *Applications of Sheaves,* Lecture Notes in Mathematics, n. 753, Springer, Heidelberg.

Grugnetti, L: 1994, 'Il concetto di funzione, difficoltà e misconcetti', L'educazione Matematica, Anno XV - Serie IV - Vol. I, n.3, 173 - 183.

Grugnetti, L. & Maffini, A. & Marchini, C.:1999, 'Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens' in [Radelet-De-Grave, 1999], Vol. II, 421 - 443.

Grugnetti, L. & Rizza, A. & Dalla Noce, S. & Gregori, S. & Marchini, C. & Molinari, F. & Piccoli, A.M. & Vannucci, V.: 2002, 'Piccole intuizioni crescono: alcune attività per sviluppare idee intuitive sul concetto di infinito a livello di scuola dell'obbligo', in [Malara & al., 2002], 127 - 138.

Harel, G. & Dubinski, E. (Eds.): 1992, *The Concept of Function,* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America,

Hausdorff, F.: 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Ristampa Chelsea, New York, 1949.

Heijenoort van, J. (Ed.): 1967, '*From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic 1879 - 1931*, Harvard University Press,

Cambridge, Mass.
Kleene, S.C.: 1936, 'General Recursive Functions of Natural Numbers', *Mathematische Annalen*, 112, 727 - 742.
Kuhn, T.S.: 1962, *The Structure of Scientific revolutions,* University of Chicago Press, Chicago.
Kuratowski, C.: 1921, 'Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles', *Principia Mathematica*, Tom II, 161-171.
Longo, P. & Di Carlo, A.: 1995, 'Contributo per una ipotesi costruttiva nell'insegnamento dell'Analisi: cenni teorici ed esempi', in [Piochi, 1995], 89 - 96.
Mac Lane, S.: 1986, *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg.
Maffini, A.: 2000, 'Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria', Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3***, 91 - 122.
Malara, N.A. & Marchini, C. & Navarra, G. & Tortora, R. (Ed.): 2002, *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo - Studi ed esperienze con Insegnanti e nelle classi*, Pitagora Edidtrice, Bologna.
Manara, C.F. & Marchi, M.: 1993, *L'insegnamento della Matematica nei primi due anni della scuola secondaria superiore*, Editrice La Scuola, Brescia.
Marchini, C.: 1998, 'Analisi logica della funzione' su Gallo, E. and Giacardi, L.and Roero C.S. (Eds.) *Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis 1997 - 1998*, 137 - 157.
Markov, A.A.: 1962, *Theory of Algorithms*, Israel Program for scientific Translations, Gerusalemme.
Mason, J.: 1998, 'Researching from the Inside in Mathematics Education' in Sierpinska, A. & Kilkpatrick, J. (eds.) *Mathematics Education as a Research Domain,* Kluwer Academic Pubbl., 357-377.
Maturo, A. & Varone, G.: 1995, 'I concetti intuitivi di Analisi Matematica presenti sui testi scolastici fino a che punto si identificano con quelli rigorosi? Il caso delle funzioni continue', in [Piochi, 1995], 101 - 106.
N.R.D. Modena: 1985, *Il concetto di funzione nella scuola superiore*, Quaderno n. 3, Dipartimento di Matematica di Modena, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Contratto 84.01953.01.
Nordon, N.: 1995, 'Le continu quand il n'était qu'attribut', *Actes de l'Université d'été '95: Epistemologie et Histoire des Mathématiques* (Besançon).
Peano, G.: 1911, 'Sulla definizione di funzione', Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie V, Vol. XX, 3 - 5.
Pellerey, M.: 1997, 'Continuità e discontinuità nello sviluppo degli atteggiamenti e delle conoscenze e competenze in ambito matematico', Micale, B. & Pluchino, S. (eds.) *Diciottesimo convegno nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della Matematica: "Dalla scuola media alle superiori: continuità nell'insegnamento della Matematica" - Campobasso, 24-25-26 Ottobre 1996***,** 9 - 20.
Piochi, B. (Ed): 1995, *Funzioni, Limiti, Derivate*, *Atti 4° Incontro Nuclei di Ricerca didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore, Siena, 1994*, IRRSAE Toscana.
Radelet-De-Grave, P. (Ed.): 1999, *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* Louvain la Neuve - Leuven.
Ramsey, F.P.: 1925, 'The Foundations of Mathematics', *Proc. London Math. Soc.* 25, 338 - 384.
Schwartz, L.: 1950, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris.
Selden, A. & Selden, J.: 1992, 'Research perspectives on conceptions of function. Summary and overview', in [Harel & Dubinski, 1992], 1 - 21.
Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as differents sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics*, **22**, n. 1, 1 - 36.
Sfard, A.: 1992, 'Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function', in [Harel & Dubinski, 1992], 59 - 84.
Shanker, S.G. (Ed.): 1991, *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco,* Franco Muzzio, Padova.
Sierpinska, A.: 1992, 'Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 23 - 58.
Slavit, D.: 1997 'An alternative route to the reification of function' *Ed. Studies in Mathematics*, **33**, 259 - 281.
Speranza, F.: 1992, 'Il ruolo della Storia nella comprensione dello sviluppo della Scienza', *Cultura a e Scuola*, v. 31, n. 123, 201 - 208.
Stehlikova, N. & Jirotkova, D.: 2002 'Building a Finite Algebraic Structure' in Novotna, J. (Ed.) *Proceedings CERME 2*, 101 – 111.
Vita, V.; 1986, *I programmi di Matematica per le scuole secondarie dall'unità d'italia al 1986*, Pitagora Editrice, Bologna.
Youschkevitch, A.P.: 1981, 'Le concept de function jusq'au milieu du XIX^{e} siècle', Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.) *Fragments d'histoire des mathematiques*, Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 7 - 68.
Whitehead, A.N. & Russell, B.: 1910, *Principia Mathematica - Vol I*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
Wiener, N.: 1914, 'A simplification of the logic of relation', *Proc. Cambridge Philosophical Society* **17.**
Zermelo, E.: 1930, 'Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengelehre', *Fundamenta Mathematicae 14,* 29 - 47.
Zwirner, G.: 1971, *Complementi di Algebra e nozioni di Analisi Matematica per Licei Scientifici*, Cedam.