Giovanni Ricci
“I Fondamenti della Matematica”
da *Momenti decisivi del pensiero matematico negli ultimi due secoli*

Veniamo agli studi riguardanti i Fondamenti della Matematica che si proiettano su atteggiamenti singolari della Matematica contemporanea.

La esigenza di rigore presentatasi all'inizio dell'800 si fece sempre più accentuata, come abbiamo già detto, nella seconda metà del secolo con RIEMANN e WEIERSTRASS: questa esigenza fa rivolgere la Matematica in se stessa, alla ricerca dei propri fondamenti a partire dai quali, con processo logico stretto, deve poi ricostruirsi.

Gli *Elementi* di EUCLIDE, anche in questa fase, ebbero una influenza decisamente storica; essi fornirono un primo modello di tale concezione e provocarono le geometrie non-euclidee che sono un tipo di studi sui fondamenti della Geometria. La Geometria proiettiva, il passaggio agli iperspazi e la considerazione dell'immaginario condussero ad ampliare l'orizzonte per questi fondamenti, sul quale lasciarono notevoli contributi lo STAUDT e il GRASSMANN, il VERONESE e lo HILBERT, l'ENRIQUES e il VEBLEN. Particolarmente importanti sono i *Grundlagen der Geometrie* dello HILBERT.

Il *programma di Erlangen* di KLEIN, che abbiamo già ricordato, può apparire come una sintesi di vedute che conduce dai fondamenti fino alle posizioni più avanzate della geometria sotto l'aspetto costruttivo: la sintesi del KLEIN rendeva la Geometria, potremmo dire, più «adulta» dell'Analisi. D'altronde sull'Analisi, dopo CARTESIO, PONCELET e RIEMANN e dopo le geometrie non-euclidee, gravava la responsabilità della coerenza logica interna della Geometria; e lo studio dei fondamenti dell’Analisi, iniziatosi con CAUCHY e BOLZANO, si prolungò per tutto l'800 con GRASSMANN, WEIERSTRASS, KRONECKER, DEDEKIND, CANTOR e PEANO, per non citare che qualcuno dei maggiori. Questo movimento di pensiero doveva sfociare nella cosiddetta «aritmetizzazione» della Matematica: la Geometria si era fatta analitica e l'Analisi doveva ricondursi all'Aritmetica per poi ricostruirsi partendo dai numeri interi. KRONRCKER dice: «Il buon Dio ha coniato i numeri interi: tutto il resto è opera dell'uomo».

Un momento decisivo fu quello in cui il PEANO riuscì a dare un assetto assiomatico singolarmente perspicuo all'Aritmetica dei numeri interi: tre concetti primitivi e cinque postulati che sono come cinque lucidi steli che connettono l'intero edificio matematico alla realtà che ci circonda facendo presa su fatti primordiali, oggetto di esperienza nella nostra più tenera infanzia. Il PEANO e la sua scuola hanno attivamente contribuito alla ricostruzione della Matematica partendo da quelle basi: *il Formulario* di PEANO (1895) è un documento, singolare per la sua compattezza e organicità, che testimonia tale ricostruzione.

A metà dell'800 il BOOLE (1854), studiando le connessioni logiche che regolano le leggi del pensiero, si accorse che per tali leggi sussiste un calcolo che presenta certe analogie con quello classico algebrico fra quantità: questi suoi studi rimasero senza seguito. Più tardi ci si accorse che entro la Teoria degli insiemi vale un calcolo perfettamente analogo a quello trovato dal BOOLE, e, sul modello della Teoria degli insiemi, venne «algebrizzata» la logica che opera sulle classi di enti: la logica che procede per simboli veniva ad avere una sua algebra interna. Ma, come di rimbalzo, si presentò l'esigenza, d'altronde certamente coltivata nel cuore di ogni studioso in questi indirizzi, l'esigenza, diciamo, di «logicizzare» la Matematica; cioè, come ideale ultimo, di ricondurre tutta la Matematica a concetti puramente logici.

In base a quanto abbiamo già esposto, per ridurre alla logica tutta la Matematica, bastava ridurre alla logica l'Aritmetica. Gli studi profondi dello HILBERT, del FREGE e del RUSSELL sono fondamentali in questo indirizzo.

Lo HILBERT ha fatto anche indagini su quella che egli chiama la «Metamatematica» cioè su quella scienza logico-matematica che non ha per oggetto lo stabilire la verità o meno di proposizioni contenute in un sistema ipotetico-deduttivo, ma, da un piano superiore, studia la mutua dipendenza fra proposizioni contenute in uno stesso sistema e, ancora più dall'alto, le mutue connessioni fra sistemi diversi. Il complesso delle geometrie non euclidee, a chi le riguardi oggi, costituisce un tipico e semplice esempio dell'oggetto di questi problemi.

Da queste basi partono gli studi moderni di Logica simbolica nei quali apparisce l'opera di GŐDEL (1931). Nell'impianto delle logiche moderne trovano posto, come concetti nettamente distinti, la validità, la decidibilità, la dimostrabilità delle proposizioni.

In PLATONE si legge: «I geometri ... si servono di figure visibili e ad esse applicano i loro ragionamenti, sebbene non sia ad esse che loro pensano, ma a quelle di cui queste sono l'immagine».

Ebbene, dopo millenni, all'inizio del secolo XX, il coronamento delle vedute sui fondamenti della Matematica è sintetizzato dallo HILBERT nella sentenza: «In principio è il segno».

Ho enunciato Loro questa massima all'inizio del mio discorso, e adesso guardiamola controluce: essa vuole esprimere in forma densa, incisiva, un atteggiamento mentale; essa sottolinea lo sforzo compiuto prima nella conversione verso i fondamenti, poi nell'aritmetizzazione, poi ancora nella riduzione alla logica di tutto il pensiero matematico.

Il segno: segno della logica simbolica, segno di ogni ente matematico, segno di operazione o relazione matematica: esso è inserito in una trama i cui legami vengono fissati dalla mente umana in una parte iniziale di essa: e questa trama procede poi per deduzioni, come spogliata di ogni specificazione concreta; tuttavia il segno, ha significato univoco, lucido, di fronte alla trama stessa che è concepita astrattamente.

Ripensiamo alla sentenza di RUSSELL che abbiamo ricordata in principio: «La Matematica è una scienza nella quale non si ha mai bisogno di sapere di che cosa si parla e neppure di sapere se quello che si dice sia vero». La mancanza di specificazione concreta della trama rende ragione delle affermazioni contenute in questa sentenza.

Da una parte il segno, dall'altra parte la figura geometrica, per esempio quella della Geometria euclidea elementare. La figura apparisce, a chi la consideri con spirito matematico, una fra le tante figure analoghe possibili, una come rappresentante di una vasta categoria di figure delle quali la mente vuol cogliere le proprietà comuni in un proposito istintivo di astrazione, ignorando le proprietà accidentali che essa porta con sé, e che non appartengono a ciascuna delle figure della categoria rappresentata.

La figura e il segno: ambedue richiedono la mente attenta dell'uomo. Ma il segno si adatta anche all'automa: è con successioni di segni che il matematico concepisce e appresta i programmi destinati ai moderni calcolatori veloci.