Periodico di Matematica (IV) Vol. III (2) settembre 2021, pp. 129-154

Proprietà degli insiemi completi del IV ordine

Parte I

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n2.047

Sunto: *Nell'articolo:''Insiemi completi del terzo ordine'' di Francia F., pubblicato sul Periodico di matematica, Vol. I(1-2), sono esposte le condizioni di completezza di un insieme ternario di punti materiali posizionati su una retta; da quello studio risulta che la completezza di un insieme ternario deriva dalle distanze intercorrenti fra i punti dell'insieme di sostegno e le relative masse. Anche nel presente articolo si ricercano le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali che, a differenza del caso precedente, sono posizionati sul piano. I risultati di questo studio sono formalmente analoghi a quelli precedentemente citati: le condizioni di completezza di un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π derivano dalla relazione intercorrente fra le masse degli elementi dell'insieme completo I e le aree dei triangoli i cui vertici sono i punti di sostegno di J.*

Parole Chiave: Insiemi di punti materiali eqivalenti, Quadrato di un insieme di punti materiali.

Abstract: *In the article: "Complete sets of the third order"' by Francia F., published in the Periodical of Mathematics, Vol. I(1-2), are exposed the conditions of completeness of a ternary set of material points placed on a straight line; from that study it results that the completeness of a ternary set derives from the distances between the points of the set and their masses. Also in the present paper, we search for the conditions of completeness of a set of material points* *which, unlike the previous case, are positioned on the plane. The results of this study are formally analogous to those previously mentioned: the conditions of completeness of a quaternary set containing triads of unaligned points belonging to the plane π are derived from the relation between the masses of the elements of the complete set I and the areas of the triangles whose vertices are the support points of J.*

Keywords: *Equivalent sets of material points, Square of a set of material points.*

1 – Cenni sugli insiemi quaternari

Nota 1: Per rendere più agevole la lettura del presente articolo, evitando consultazioni di lavori pregressi, sono richiamati, in modo sommario, alcuni enunciati di teoremi e alcune definizioni contenute nell'articolo: "Insiemi del IV ordine appartenenti al piano".

Sia J un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano π. Siano (X,Y) e (W,Z) gli elementi di una qualsiasi partizione di J in coppie di punti; siano r e t le rette passanti , rispettivamente, per (X,Y) e (W,Z). Fra le partizioni consideriamo quelle contenenti coppie che individuano rette r e t con intersezione H (escludiamo coppie appartenenti a rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Caso a)

Se il punto H è interno ai segmenti [X,Y] e [W,Z], diciamo che i due insiemi ternari (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di J= (X,Y,W,Z) sono esterni (o aderenti) (fig.1).I segmenti [X,Y] e [W,Z] sono detti diagonali. Il poligono P(J) è detto quadrilatero.

Caso b)

Se H è esterno ai segmenti [X,Y] e [W,Z] diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di J sono esterni (o aderenti) all'insieme (fig.2)

Anche in questo caso P(J) è detto quadrilatero

Caso c)

Se H è esterno al segmento [X,Y] ed interno a [W,Z] (o viceversa) diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni; in particolare (X,H,Y) è detto coniugato esterno di J e (W,H,Z) è detto coniugato interno di J (o viceversa). In questo caso si dimostra che J contiene un punto interno; i rimanenti punti di J sono esterni (o aderenti) (fig.3)

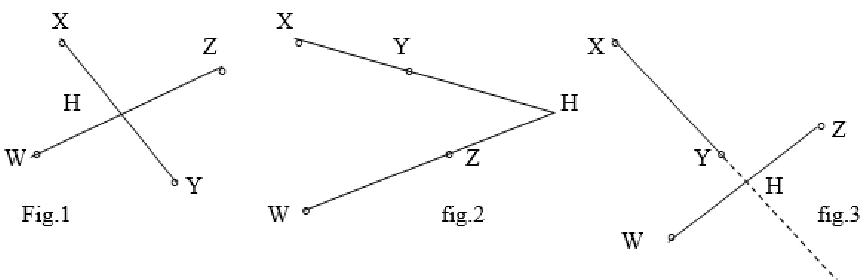
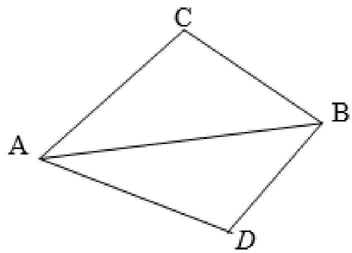
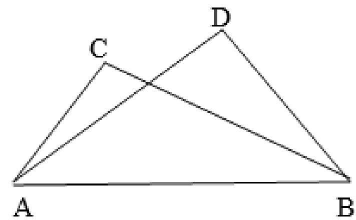


Fig.1 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni.
Fig.2 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni.
Fig.3 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni

<u>Def.1</u>*:* Sia (A, B) la coppia di punti comuni ai due insiemi ternari J'= (A,B,C) e J''= (A,B,D) appartenenti al piano π. Se C e D appartengono, rispettivamente, ai semipiani opposti

individuati dalla retta r passante per A,B, allora J′ e J′′ sono detti adiacenti. In caso contrario sono dette non adiacenti.





Nota 2: Per procedere più speditamente nell'esposizione che segue introduciamo alcuni simboli.

Con T(J) intendiamo riferirci al triangolo i cui vertici sono i punti dell'insieme J = (A,B,C). Indichiamo con S_{ABC} l'area del triangolo T(J). Analogamente, con Q(J), intendiamo riferirci ad un quadrilatero i cui vertici sono gli elementi di J= (A,B,C,D). Indichiamo con S_{ABCD} l'area del rettangolo Q(J).

2 – Masse e superfici

TH.1 Sia J = (A,B,C,D) un insieme di punti del piano π.
Se (A,H,B) e (C,H,D) sono coniugati interni, allora, l'insieme (S_{CBD} A, S_{DAC} B, – S_{BDA} C, – S_{ACB} D) è completo.

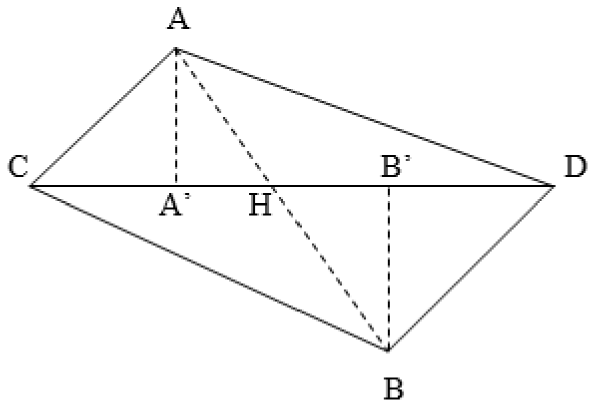
Siano A′ e B′ le proiezioni ortogonali di A e B su [C,D].
Posto d(A,A′) = h_1 e d(B,B′) = h_2, si ha: $S_{ACH} = \frac{1}{2}$ d(C,H) · h_1 e $S_{AHD} = \frac{1}{2}$ d(H,D) · h_1 da cui:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C,H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H,D)} \qquad (2,1)$$

Analogamente , essendo $S_{BCH} = \frac{1}{2}$ d(C,H) · h_2 e

$S_{BHD} = \frac{1}{2}\, d(H,D) \cdot h_2$ si ha:

$$\frac{S_{BCH}}{d(C,H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,D)} \qquad (2,2)$$



Sommando membro a membro la (2,1) e la (2,2), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C,H)} + \frac{S_{BCH}}{d(C,H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H,D)} + \frac{S_{BHD}}{d(H,D)} \ .$$

Essendo $S_{ACH} + S_{BCH} = S_{ACB}$ e $S_{AHD} + S_{BHD} = S_{ABD}$, la precedente relazione diviene: $\frac{S_{ACB}}{d(C,H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H,D)}$.
Posto $\frac{S_{ACB}}{d(C,H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H,D)} = \frac{1}{K'}$, con $K \in R^*$, si ha:

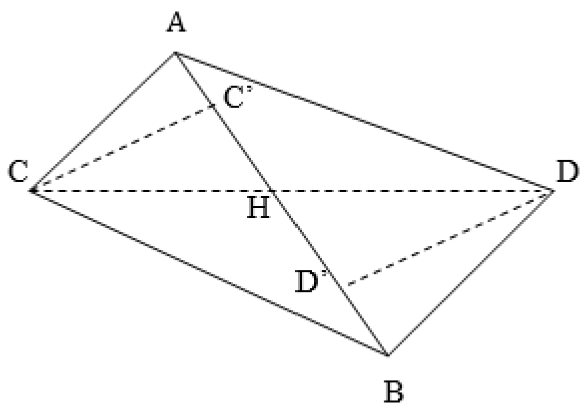
$$d(C,H) = K' \cdot S_{ACB},\ d(H,D) = \\ = K' \cdot S_{ABD},\ d(C,D) = K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \qquad (2,3)$$

Analogamente, siano C′ e D′ le proiezioni ortogonali di C e D su [A,B]. Posto $d(C,C') = h_3$, $d(D,D') = h_4$, si ha:

$$S_{ACH} = \frac{1}{2}\, d(A,H) \cdot h_3 \text{ e } S_{CHB} = \frac{1}{2}\, d(H,B) \cdot h_3$$

da cui:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} \qquad (2,1')$$



$S_{AHD} = \frac{1}{2} d(A,H) \cdot h_4$ e $S_{BHD} = \frac{1}{2}\ d(H,D) \cdot h_4$, da cui:

$$\frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)} \qquad (2,2')$$

Sommando membro a membro la (2,1′) e la (2,2′), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} + \frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} + \frac{S_{BHD}}{d(H,B)},$$

che possiamo riscrivere così:

$$\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)}$$

Posto $\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)} = \frac{1}{K''}$, con $K'' \in \mathbb{R}^*$, si ha:
$d(A,H) = K'' \cdot S_{ACD}$, $d(H,B) = K'' \cdot S_{CBD}$, $d(A,B) =$
$= K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD})$ (2,3′)

Sostituendo le (2,3) e le (2,3′) negli insiemi completi:

$$I' = [d(H,D) \cdot C, - d(C,D) \cdot H, d(C,H) \cdot D]$$

e

$$I'' = [d(H,B) \cdot A , - d(A,B) \cdot H, d(A,H) \cdot B] \text{ si ha:}$$

$$I' = [K' \cdot S_{ABD} \cdot C , - K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, K' \cdot S_{ACB} \cdot D]$$
$$I'' = [K'' \cdot S_{CBD} \cdot A , - K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, K'' \cdot S_{ACD} \cdot B]$$

Dividendo I′ per K′, I′′ per K′′, sottraendo un insieme all'altro, tenendo conto dell'eguaglianza:

$$(S_{ACB} + S_{ABD}) = (S_{ACD} + S_{CBD}), \text{ si ha: } I = \frac{1}{K''} I'' - \frac{1}{K'} I' =$$
$$= [S_{CBD} \cdot A, - (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, S_{ACD} \cdot B] -$$
$$- [S_{ABD} \cdot C , - (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, S_{ACB} \cdot D] =$$
$$= (S_{CBD} \cdot A, S_{ACD} \cdot B, - S_{ABD} \cdot C, - S_{ACB} \cdot D) .$$

<u>*TH.2*</u> Siano (A,H,B) e (C,H,D) i coniugati interni dell'insieme quaternario del piano J = (A,B,C,D) contenente terne di punti non allineati. Se $I' = (m \cdot A, n\ B, - s \cdot C, - h \cdot D)$ è un insieme completo, con $m,n,s,h \in R^+$, allora, sussistono le seguenti eguaglianze:

$$m = K \cdot S_{BCD} , n = K \cdot S_{ACD,} s = K \cdot S_{BDA,} h = K \cdot S_{ABC,}$$

con $K \in R^*$. (2,4)

Supponiamo che $I' = (m \cdot A, n \cdot B, - s \cdot C, - h \cdot D)$ sia completo; per il TH.1, anche l'insieme

$I = (S_{CBD} \cdot A, S_{DAC} \cdot B, - S_{BDA} \cdot C, - S_{ACB} \cdot D)$ è completo. Conseguentemente è completo

$I'' = I' - K \cdot I = [(m - K \cdot S_{CBD}) \cdot A, (n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B,$

$-(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D$].

Attribuiamo a K un reale che annulli una qualsiasi massa di I''. Ad esempio, posto:

$K = \frac{m}{S_{CBD}}$, si ha: $(m - K \cdot S_{CBD}) = 0$ e I diviene:

$I''' = [(n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B, -(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D]$. Poiché I''' è un insieme ternario di punti non allineati, essendo completo deve essere improprio: tutte le masse di I''' devono essere nulle:

$(n - K \cdot S_{DAC}) = 0$, $(s - K \cdot S_{BDA}) = 0$, $(h - K \cdot S_{ACB}) = 0$.

Conseguentemente le (2,4) risultano verificate.

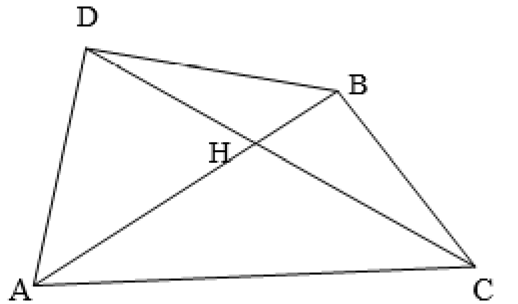
Il precedente teorema permette di affermare che il rapporto fra masse di punti materiali di I e I', egualmente posizionati, è costante. Diciamo, allora, che I' appartiene alla stessa classe individuata da I. Gli insiemi I e I' sono detti equivalenti.

<u>*TH.3*</u> Sia $I = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ un insieme quaternario completo con sostegno

$J = (A,B,C,D)$ e masse m , n , s , $h \in. R^+$. Il poligono P(J) è un quadrilatero le cui diagonali sono [A,B] [C,D].

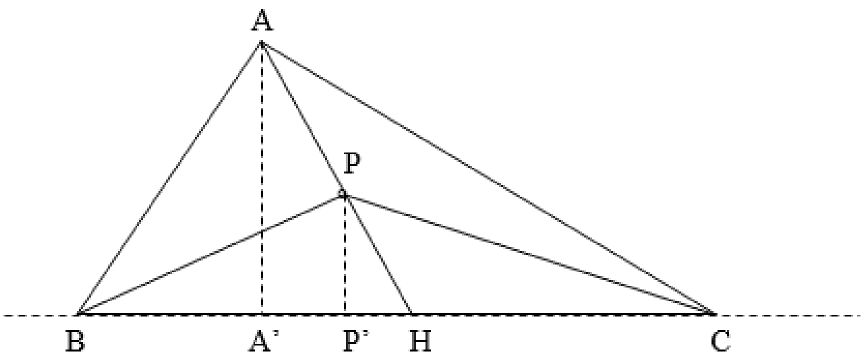
Sia $-(m+n)$ H il complementare di $m \cdot A$ e $n \cdot B$. Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo $I' = [m \cdot A, -(m+n) H, n \cdot b]$, risulta che il punto H è interno a (A, H, B). Effettuando la differenza $I' - I = I''$, essendo $m + n = s + h$, si ha:

$I'' = [s C, -(m + n) H, h D] = [s C, -(s + h) H, h D]$.



Anche in questo caso il punto H di J′′= (C, H, D), sostegno dell′insieme completo I′′, è interno a (C, D). Così, essendo gli insiemi di sostegno di I′ = [m · A, – (m + n) H, n · B] e I′′ = [s C – (s + h) H, h D] coniugati interni, per la nota 1, caso a), P(J) è un quadrilatero e [A,B] , [C,D] sono le diagonali.

TH.4 Sia J = (A,B,C,P) un insieme di punti appartenenti a π. Se (A,P,H) e (B,H,C) sono coniugati alterni, (cioè H è interno di [B,H,C] ed esterno di [A,P,H]), allora, l′insieme (S_{PCB} ·A, S_{PCA} ·B, S_{ABP} ·C, – S_{ABC} · P) è completo.



Siano A′ e P′ le proiezioni ortogonali di A e P su [B,C].

Posto $d(A,A') = h_1$ e $d(P,P') = h_2$, si ha: $S_{ABH} = \frac{1}{2}\, d(B,H) \cdot h_1$ e $S_{AHC} = \frac{1}{2}\, d(H,C) \cdot h_1$ da cui: $\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H,)}$ (2,5)

$S_{PBH} = \frac{1}{2}\, d(B,H) \cdot h_2$ e $S_{PCH} = \frac{1}{2}\, d(C,H) \cdot h_2$ da cui:

$$\frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{PCH}}{d(C,H)} \qquad (2,6)$$

Sottraendo la (2,5) alla (2,6), si ha:

$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} - \frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H,)} - \frac{S_{PCH}}{d(C,H)} \,.$$

Essendo $S_{ABH} - S_{PBH} = S_{ABP}$ e $S_{AHC} - S_{PCH} = S_{APC}$, la precedente relazione diviene:

$$\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)}$$

Posto $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)} = \frac{1}{K'}$, si ha:

$$d(B,H) = K' \cdot S_{ABP},\ d(C,H) = \\ = K' \cdot S_{APC},\ d(B,C) = K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \qquad (2,7)$$

Analogamente, siano C' e B' le proiezioni ortogonali di C e B sulla retta s passante per (A,P).

Posto $d(B,B') = h_3$ e $d(C,C') = h_4$; si ha:

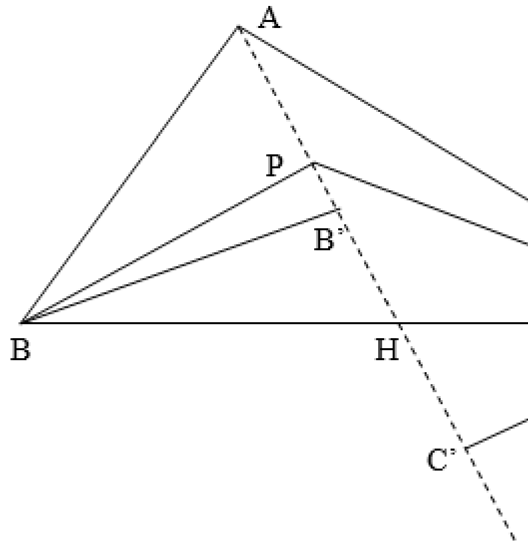
$S_{ABP} = \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_3$, $S_{BPH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_3$

da cui:

$$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H,)} \qquad (2,5')$$

$S_{APC} = \frac{1}{2}d(A,P) \cdot h_4$, $S_{PCH} = \frac{1}{2}d(P,H) \cdot h_4$ da cui:

$$\frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \qquad (2,6')$$



Sommando membro a membro la (2,5′) e la (2,6′), si ha:

$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} + \frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H,)} + \frac{S_{PCH}}{d(P,H)}$ da cui, posto $\frac{S_{ABP}+S_{APC}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPC}}{d(P,H,)} = \frac{1}{K''}$, si ha:

$d(A,P) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC})$, $d(P,H) = K'' \cdot S_{BPC}$, $d(A,H) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC})$ (2,7′)

Sostituendo le (2,7) e le (2,7′) negli insiemi completi:
$I_1 = [d(H,C) \cdot B, -d(B,C) \cdot H, d(B,H) \cdot C]$ e $I_2 = [d(P,H,) \cdot A, -d(A,H) \cdot P, d(A,P) \cdot H]$ si ha:
$I_1 = [K' \cdot S_{APC} \cdot B, -K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H, K' \cdot S_{ABP} \cdot C]$

I_2 = [K''· S_{BPC} ·A , – K''· $(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC})$ · P,
K''· $(S_{ABP} + S_{APC})$ · H]

Dividendo I_1 per K' e I_2 per K'' si ottengono gli equivalenti
I' = [S_{APC} · B , – (S_{ABP} + S_{APC}) · H, S_{ABP} · C]
I'' = [S_{BPC} ·A , – $(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC})$ ·P, $(S_{ABP} + S_{APC})$ · H]

Effettuando l'unione degli insiemi I' e I'' si ottiene:
I' ∪ I''= [S_{BPC} ·A, S_{APC} · B , S_{ABP} · C, – $(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC})$ ·P].

Tenendo conto che $(S_{ABP}+S_{APC} + S_{BPC})$=$S_{ABC}$, si ha la tesi.

Così come i teoremi 2 e 3 sono strettamente collegati al TH.1, allo stesso modo, al TH.4 sono collegati i teoremi 5 e 6 che enunciamo omettendone la dimostrazione.

<u>*TH.5*</u> Sia J = (A,B,C,P) un insieme di punti del piano π. Se (A P,H) e (B,H,C) sono coniugati alterni essendo P interno ad (A,H) ed H interno a [B,C], allora, se I'=(m·A, n · B, s·C, –h·P) è un insieme completo, le masse m ,n, s, h ∈ R^* sono così definite:

$$m = K \cdot S_{BCP},\ n = K \cdot S_{ACP},\ s = K \cdot S_{BPA},\ h = K \cdot S_{ABC}$$

<u>*TH.6*</u> Sia J il sostegno dell'insieme quaternario I contenente tre punti materiali di segno concorde ed un punto di segno discorde rispetto ai precedenti. L'insieme J contiene un punto interno.

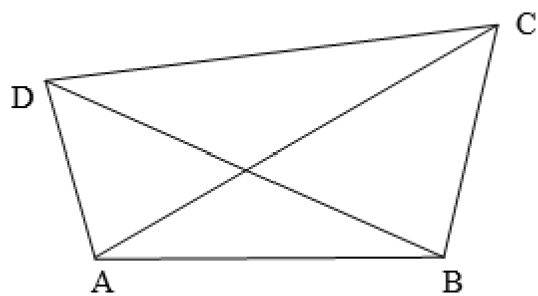
3 - Applicazioni

<u>Applicazione 1</u>*:* Siano (A,B,D) e (A,D,C) due insiemi ternari non adiacenti e risulti: d(A,B) = 6, d(B,D) = $4\sqrt{5}$,
d(A,D) = $2\sqrt{5}$, d(A,C) = $7\sqrt{2}$, d(D,C) = $3\sqrt{10}$. Trovare d(B,C).

L'insieme completo con sostegno J = (A,B,C,D) è:

$$(S_{BCD}\,A,\ S_{ACD}\,B,\ s_{ABD}\,C,\ s_{ABC}\,D).$$

Utilizzando la formula di Eulero:



$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$ si ha: $S_{ABD}=12$, $S_{ACD}=21$.

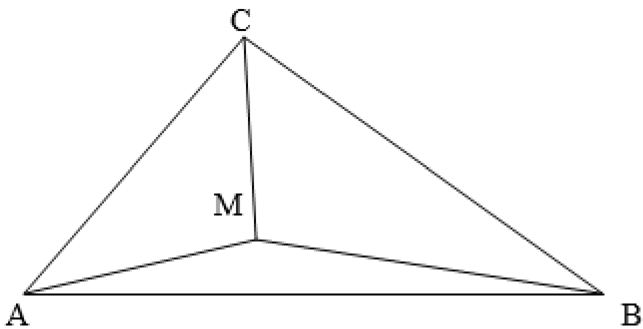
Posto $S_{ABC}=x$, $S_{BCD}=y$, essendo: $S_{ABD}+S_{BCD}=S_{ABC}+S_{ADC}$ si ha: $12+y=21+x$ da cui $S_{BCD}=x+9$. Affinché l'insieme $I=[(x+9)\,A,\ -21\,B,\ 12\,C,\ -x\,D]$ sia completo deve risultare: $A\cdot I=D\cdot I$. Sviluppando si ha:

$$-21[d(A,B)]^2+12[d(A,C)]^2-x\,[d(A,D)]^2=(x+9)[d(D,A)]^2$$
$$-21[d(D,B)]^2+12\,[d(D,C)]^2$$

da cui $x=21$. Sostituendo si ha: $S_{ABD}=12$, $S_{ADC}=21$, $S_{BCD}=30$, $S_{ABC}=21$ e l'insieme I diviene: $I=[30\cdot A,\ -21\cdot B,\ 12\cdot C,\ -21\cdot D]$.
Per calcolare d(B,C) risolviamo l'equazione $B\cdot I=D\cdot I$:
$30[d(B,A)]^2+12[d(B,C)]^2-21[d(B,D)]^2=30[d(DA)]^2$
$-21\,[d(D,B)]^2+12\,[d(D,C)]^2$, da cui $d(B,C)=5\sqrt{2}$.

<u>Applicazione 2</u>*:* Sia J = (A,B,C,M) un insieme di punti del piano con M interno a J e risulti: d(A,M) = $2\sqrt{5}$, d(B,M)=$2\sqrt{17}$, d(C,M)=$5\sqrt{2}$. Trovare d(A,B), d(B,C), d(C,A). Sapendo che si ha:

$$\frac{S_{BCM}}{9} = \frac{S_{CAM}}{5} = \frac{S_{ABM}}{4} = K. \qquad (3,1)$$



Dalla (3,1) si ha: $S_{BCM} = 9 \cdot K$, $S_{CAM} = 5 \cdot K$, $S_{ABM} = 4 \cdot K$, $S_{ABC} = 18 \cdot K$, con $K \in R^*$; per il TH.4, l'insieme (9K·A, 5k · B, 4K· C, –18K·M) è completo e completo è l'equivalente I = (9·A, 5· B, 4· C, –18· M) pertanto si ha: A · I = M · I, B · I = M · I, C · I = M · I, da cui

$$\begin{cases} 5[d(A,B)]^2 + 4[d(A,C)]^2 - 18[d(A,M)]^2 = 9\,[d(M,A)]^2 + 5\,[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,B)]^2 + 4[d(B,C)]^2 - 18[d(B,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,C)]^2 + 5[d(B,C)]^2 - 18[d(C,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \end{cases}$$

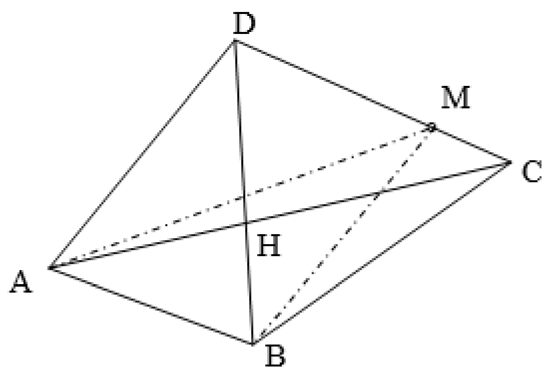
Posto d(A,B) = x, d(B,C) = y, d(C,A) = z, si ha:

$$\begin{cases} 5x^2 + 4\,z^2 = 1080 \\ 9x^2 + \ 4y^2 = 1944 \\ 9z^2 + 5y^2 = 1620 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = 12,\ y = 9\sqrt{2},\ z = 3\sqrt{10}$$

Applicazione 3: Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero T(J), con J = (A,B,C,D), e risulti:

$$S_{CBD} = 36,\ S_{DAC} = 72,\ S_{BDA} = 108,\ S_{ACB} = 72. \qquad (3,2)$$

Sia M un punto sul lato [D,C] e risulti: $\frac{d(D,M)}{d(M,C)} = 3$.
Trovare: S_{BMD}, S_{MDA}, S_{ABM}.



Per il TH.1 l'insieme completo con sostegno J è:
$I' = (S_{CBD} \cdot A,\ - S_{DAC} \cdot B,\ S_{BDA} \cdot C,\ - S_{ACB} \cdot D)$ da cui
$I' = (36 \cdot A,\ - 72 \cdot B,\ 108 \cdot C,\ - 72\ D)$.
L'insieme completo avente sostegno (C,M,D) è
$I'' = (D,\ -4\ M,\ 3\ C)$. Ricaviamo l'insieme completo con sostegno $J''' = (A,B,M,D)$: $I''' = \{I' \cup [(-36)I'']\} = (36\ A, -108\ D, -72\ B, 144\ M)$. Poiché, per il TH.2, deve risultare:

$$6 = K \cdot S_{BMD},\ 108 = K \cdot S_{ABM},\ 144 = K \cdot S_{BDA},\ 72 = K \cdot S_{ADM} \qquad (3,3)$$

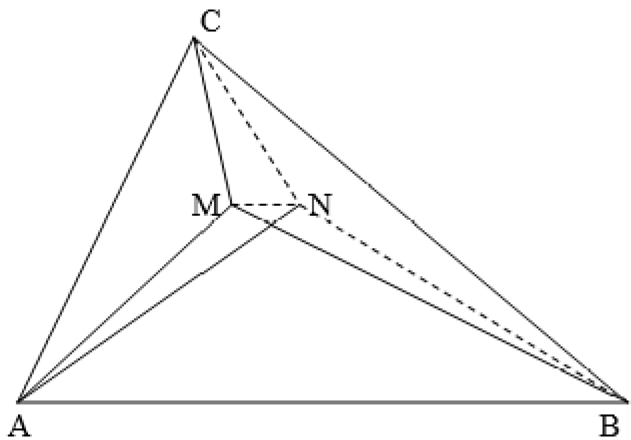
con $K \in R^*$, essendo per le (3,2) $144 = K \cdot S_{BDA} = K \cdot 108$, si ha $K = \frac{4}{3}$; sostituendo la costante K così ricavata nelle (3,3), si ha:

$S_{BDA} = 108$, $S_{BMD} = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27$, $S_{ABM} = 108 \cdot \frac{3}{4} = 81$,
$S_{ADM} = 72 \cdot \frac{3}{4} = 54$.

Applicazione 4*:* Sia J' = (A,B,C,M) un insieme di punti del piano con **M** interno a J' e risulti:

$$S_{ABM} = 64,\ S_{BCM} = 28,\ S_{AMC} = 20,\ S_{ABC} = 112. \qquad (3,4)$$

Sia N interno di J" = (C,M,B,N) e risulti:
$S_{MBN} = 12$, $S_{BCN} = 7$, $S_{MNC} = 9$, $S_{MBC} = 28$. Trovare S_{MNA}.



L'insieme completo I', avente sostegno J', è:
I' = (28 A, 20 B, 64 C, – 112 M).
L'insieme completo I", avente sostegno J", è:
I" = (9 B, 7 M, 12 C, – 28 N).
Effettuando l'unione dei due insiemi I' e I" moltiplicati, rispettivamente, per $\frac{9}{4}$ e per –5 , riducendo
e dividendo per 7 si ha :
rid. [($\frac{9}{4}$ I') ∪ (–5 I") = (63 A, 45 B, 144 C, – 252 M, – 45 B –

35 M, – 60 C, 140 N) =

= (63 A, 84 C, 140 N, – 287 M). Dividendo per 7 l'equivalente è: (9 A , 12 C, 20 N, – 41 M)

Per il TH.4, essendo:

$S_{ANM} = 12 \cdot K$, $S_{NCM} = K \cdot 9$, $S_{AMC} = K \cdot 20$, $S_{ANC} = K \cdot 41$ (3,5)

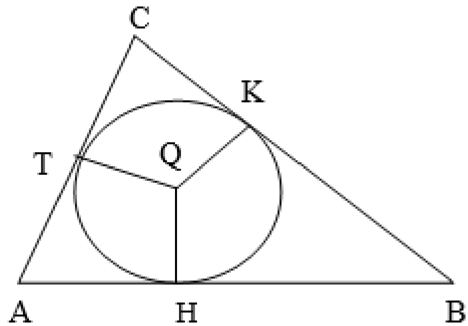
con $K \in R^*$, tenendo conto della (3,4) si ha:

$S_{ACM} = 20 = K \cdot 20 = S_{ACM}$ da cui K = 1.

Sostituendo nelle (3,5) si ha: $S_{ANM} = 12 \cdot 1 = 12$.

<u>Applicazione 5</u>*:* Sia Q l'incentro del triangolo T(J')

con J' = (A,B,C). Siano H,K,T le proiezioni ortogonali di Q, rispettivamente, sui lati [A,B], [B,C], [C,A]. Trovare l'insieme completo I con sostegno J = (A,B,C,Q).



Posto d(A,B) = c, d(B,C) = a, d(C,A) = b, essendo r il raggio della circonferenza inscritta in T(J), si ha:

$$S_{B,C,Q} = \frac{1}{2} a\, r,\ S_{CAQ} = \frac{1}{2} b\, r,\ S_{ABQ} = \frac{1}{2} c\, r,$$

$$S_{A,B,C} = S_{B,C,Q} + S_{CAQ} + S_{ABQ} = \frac{1}{2} (a+b+c)\, r.$$

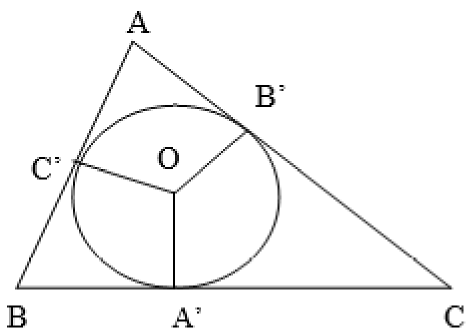
Tenendo conto del TH.4 si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{2} a\, r\right) A, \left(\frac{1}{2} b\, r\right) B, \left(\frac{1}{2} c\, r\right) C, -\left(\frac{1}{2} (a+b+c)\, r\right) Q\right]$$

Moltiplicando per $\frac{2}{r}$ si ha l'equivalente:

$$I = [a \cdot A,\ b \cdot B,\ c \cdot C,\ -(a+b+c) \cdot Q].$$

Applicazione 6 Sia S la circonferenza di centro O inscritta nel triangolo T(J), con J = (A,B,C) e A′,B′,C′ siano i punti di tangenza di S, rispettivamente, con i lati [B,C], [A,C], [A,B]. Mostrare che: $S_{AOB} = K \cdot S_{A'OB'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'OC'}$, $S_{COA} = K \cdot S_{C'OA'}$ con $K \in R$.



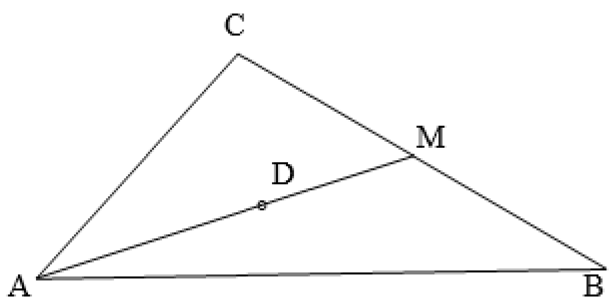
Dalla geometria elementare risulta:
d(A,C′)=d(A,B′)=u, d(B,C′)=d(B,A′)=v, d(C,A′)=d(C,B′)=w.

Tenendo conto dell'applicazione 5 l'insieme:
I° = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, –2 (u + v + w)O] risulta completo. Anche gli insiemi I′= [vA, – (u + v)C′,uB], I′′= [wB, – (w + v)A′,vC], I′′′= [uC, – (u + w)B′,wA], risultano completi. Dall'unione di I′, I′′, I′′′si ottiene:
$I^* = I' \cup I'' \cup I''' = [(v + w)A, (u + w)B, (v + u)C, -(u + v)C', -(w + v)A', -(u + w)B']$.
Effettuando la differenza dei due insiemi I° – I^* si ottiene:
I = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, –2 (u + v + w)O – (v + w)A, – (u + w)B, – (v + u)C, (u + v)C′, (w + v)A′, (u + w)B′] =
= [(w + v)A′, (u + w)B′, (u + v)C′ , – 2 (u + v + w)O].
Confrontando i due insiemi completi

I° = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, – 2 (u + v + w)O] e
I = [(w + v)A′, (u + w)B′, (u + v)C′ , – 2 (u + v + w)O]
risulta che le masse di I°, riferite ai punti A, B, C, O, sono uguali, rispettivamente, alle masse di A′, B′, C′, O pertanto si ha:

$S_{AOB} = K \cdot S_{A'O\,B'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'O\,C'}$, $S_{COA} = K \cdot S_{C'O\,A'}$, con $K \in R^*$.

<u>Applicazione 7</u>: Sia D il punto interno di J = (A,B,C,D), insieme contenente terne di punti non allineati del piano π. Risulti: $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, con $K \in R^*$. Ricavare l'insieme completo con sostegno J e verificare che d(A,D) = 2 d(D,M) .



Essendo $S_{ABC} = 3\,K$, $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, si ha:

$$(K \cdot A, K \cdot B, K \cdot C, -3K \cdot D).$$

Dividendo per K si ha:

$$I = (A,\ B, C, -3 \cdot D) \qquad (3,6)$$

Indicando con –2 M il complementare di (B,C) risulta completo l'insieme I′ = (B, –2 M, C) (3,7)

da cui si deduce: $\frac{d(B,M)}{d(M,C)} = 1.$

Sottraendo la (3,7) alla (3,6) si ottiene l'insieme completo

I′′ = I – I′ = (A, –3D, 2M) da cui si deduce: $\frac{\mathrm{d(A,D)}}{\mathrm{d(D,M)}} = 2.$

Nota 3. Dato un insieme quaternario completo
$I = (s_1 \cdot P_1 , s_2 \cdot P_2 , s_3 \cdot P_3 , s_4 \cdot P_4)$ è sempre possibile trovare l'equivalente I′ le cui masse siano espresse mediante due parametri: m, n. Infatti, moltiplicando le masse di I per un $K \in R^*$ si ottiene un insieme completo equivalente a I′; ponendo, ad esempio, $K = \frac{1}{s_3}$, si ha: $I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_2, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_3, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_4\right)$ (3,8)

Effettuando le seguenti sostituzioni:
$\frac{s_1}{s_3} = m$, $\frac{s_2}{s_3} = n$, essendo $\frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0$, si ha:

$$m + n + 1 + \frac{s_4}{s_3} = 0$$

da cui $\frac{s_4}{s_3} = -(m + n + 1)$. Sostituendo nella (3,81) si ha:

$$I' = [m \cdot P_1 , n \cdot P_2 , 1 \cdot P_3 , -(m + n + 1) \cdot P_4]$$

da cui risulta che le masse sono espresse mediante m e n. Naturalmente I′ non è l'unico insieme equivalente a I. E′ possibile ricavarne altri , formalmente distinti da I′ , elaborando diversamente le masse di I.

Una ulteriore elaborazione di un insieme completo le cui masse siano espresse mediante due parametri è la seguente:

Nota 4. Siano J′ =(A,H,C) e J′′= (B,H,D) i coniugati interni di un insieme quaternario del piano : J = (A,B,C,D). Gli insiemi completi aventi sostegno J′ e J′′ sono:
$[m\,A, -(m + s)\ H , s\,C]$ e $[(n\,B, -(n + h)\ H , h\,D]$. Dividendo i due insiemi, rispettivamente, per (m + s) e per (n + h) si ottiene:

$$\left(\frac{m}{m+s}A, -H, \frac{s}{m+s}C\right) \quad e \quad \left(\frac{n}{n+h}B, -H, \frac{h}{n+h}D\right).$$

Sottraendo l'uno dall'altro si ha:

$$\left(\frac{m}{m+s} A, \frac{s}{m+s} C, - \frac{n}{n+h} B, - \frac{h}{n+h} D \right) \qquad (3,9)$$

Posto $\frac{m}{m+s} = u$ e $\frac{n}{n+h} = v$ (3,10)

si ha:

$$\frac{s}{m+s} = 1 - \frac{m}{m+s} = 1 - u \text{ e } \frac{h}{n+h} = 1 - \frac{n}{n+h} = 1 - v \qquad (3,11)$$

Sostituendo le (3,10) e le (3,11) nella (3,9) si ha:

$$I = [u\,A, (1 - u)C, - v\,B, -(1 - v)D]$$

Risulta evidente che l'insieme completo I dipende da due parametri: u e v.

4 – L'equazione $I^2 = 0$ essendo I completo

Def.2*:* Il prodotto di due insiemi di punti materiali I′ e I′′, e scriviamo I′ · I′′, è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascun punto materiale di I′ per ciascun punto materiale di I′′.

Nota 5. È facile mostrare che il prodotto di due insiemi di punti materiali gode della proprietà commutativa e distributiva.

1) $I' \cdot I'' = I'' \cdot I'$
2) $I \cdot I^* = I \cdot (I' \cup I'') = (I \cdot I' + I \cdot I'')$

essendo I′ e I′′ una partizione di I^*.

Def.3: È detto quadrato di un insieme di punti materiali, e scriviamo I^2, il prodotto I · I.

Th.7*:* Supponiamo che le masse degli elementi dell'insieme di punti materiali di ordine n, $H=(m_1Q_1 + m_2Q_2 + \ldots + m_nQ_n)$, soddisfino la seguente condizione: $\sum m_i = 0$.

Il prodotto $H \cdot I$, essendo I un insieme completo di ordine s, è identicamente nullo.

Sia $I = (n_1 P_1, n_2 P_2, \ldots, n_s P_s)$ un insieme completo. Effettuando il prodotto $H \cdot I$, si ottiene:

$$H \cdot I = (m_1 Q_1 \cdot I + m_2 Q_2 \cdot I + \ldots + m_n Q_n \cdot I) \qquad (4,1)$$

Essendo I completo si ha: $Q_1 \cdot I = Q_2 \cdot I = \ldots = Q_n \cdot I = K$, con $K \in R$.

Sostituendo nella (4,1), si ha:

$$H \cdot I = (m_1 \cdot K + m_2 \cdot K + \ldots + m_n \cdot K) = K \cdot \sum m_i = K \cdot 0 = 0.$$

I teoremi successivi potrebbero essere riferiti ad insiemi completi di qualsiasi ordine. Preferiamo svolgerli prendendo in considerazione, esclusivamente, insiemi completi quaternari conformemente al contesto della trattazione.

Th.8: Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ è un insieme quaternario completo, si ha: $I^2 = 0$.

Svolgendo il quadrato si ha:

$$I^2 = m_1 P_1 \cdot I + m_2 P_2 \cdot I + m_3 P_3 \cdot I + m_4 P_4 \cdot I \qquad (4,1)'$$

La completezza di I implica che sia: $P_i \cdot I = K$, con $K \in R$ costante, pertanto la (4,1)′ diviene:

$$I^2 = (m_1 K + m_2 K + m_3 K + m_4 K) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) K.$$

Essendo I completo si ha: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$ da cui: $I^2 = 0$.

Th.9: Sia $I = (m_1 P_1 , m_2 P_2 , m_3 P_3 , m_4 P_4)$ un insieme quaternario completo del IV ordine e I_i sia il sottoinsieme ternario: $I_i = I - m_i P_i$, per $i \in \{1,2,3,4\}$. Si ha, allora:

$$2 m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \text{ per } k \in \{1,2,3,4\}.$$

Per il TH.8, essendo $I^2 = 0$, si ha:

$$I^2 = [(m_i P_i) \cup I_i]^2 = (m_i P_i)^2 + 2 \cdot (m_i P_i) \cdot I_i + (I_i)^2 = 0.$$

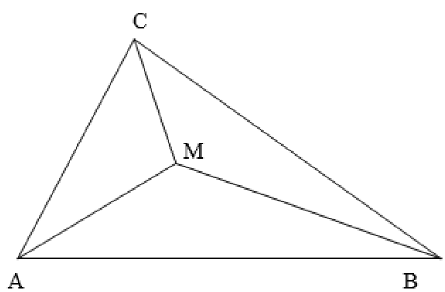
Poiché $(m_i P_i)^2 = (m_i)^2 [d(P_i, P_i)]^2 = 0$ la precedente diviene:

$$2\ m_i (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0 .$$

Inoltre, essendo $P_i \cdot I_i = P_i \cdot I = P_k \cdot I$, la precedente diviene:

$$2\ m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \quad \text{per qualsiasi} \quad k \in \{1,2,3,4\}.$$

<u>Applicazione 8</u>: Sia J = (A,B,C,M) un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati, complanari, con M punto interno. Siano $d(A,B) = 6$, $d(B,M) = 2\sqrt{5}$, $d(M,A)= 2\sqrt{2}$. Sapendo che $S_{AMC} = 4$, $S_{BCM} = 5$, $S_{ABM} = 6$, $S_{ABC} = 15$, trovare: d(A,C) , d(M,C) , d(B,C).



L'insieme completo avente sostegno J è: I = (5A, 4B, 6C,–5M). Scegliamo il sottoinsieme ternario I_C di I il cui sostegno J_C = (A,B,M) contiene punti di cui si conoscono le distanze:

I_C = (5 A, 4 B, – 15 M). Per il TH.9,

si ha:

$$I^2 = [(6 \cdot C) \cup I_C]^2 = (6 \cdot C)^2 + 2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I_C) + (I_C)^2 = 0$$

Essendo $(6 \cdot C)^2 = 0$ e $C \cdot I_C = C \cdot I$, la precedente diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I) + (I_C)^2 = 0 . \qquad (4,2)$$

Il prodotto $(C \cdot I)$ della (4,2) contiene i quadrati dei seguenti moduli: d(C,A) = x , d(C,M) = y , d(C,B) = z ; il prodotto $(A \cdot I)$ contiene, invece, la lunghezza incognita del solo segmento [C,A].

a) Per calcolare d(C,A) = x, essendo (C · I) = (A · I), effettuiamo nella (4,2) la sostituzione:

$$2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) + (I_C)^2 = 0. \qquad (4,3)$$

Posto d(A, C) = x , sviluppiamo separatamente $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I)$ e $(I_C)^2 = 0$: $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) = 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(A, A)]^2 + 4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{4 \cdot 36 + 6x^2 - 15 \cdot 8\} = 2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\}$
$(I_C)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4\,[d(A,B)]^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15\,[d(B,M)]^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15\,[d(M,A)]^2 =$
$= 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 36 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 8 = 2 \cdot (-1080)$
Sostituendo nella (4,3) si ha: $2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$ da cui $d(A, C) = \sqrt{26}$.

b) Per calcolare d(C,M) si sostituisce nella (4,2) C · I con M · I, prodotto contenente il solo elemento incognito d(C,M) = y. L'equazione diviene:
$2 \cdot 6 \cdot (M \cdot I) + (I_C)^2 = 0$ da cui $2 \cdot 6 \cdot \{5[d(M, A)]^2 + 4[d(M, B)]^2 + 6[d(M, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{5 \cdot 8 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot y^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$ da cui $d(C,M) = \sqrt{10}$.

c) Per calcolare d(C,B) si sostituisce nella (4,2) C · I con B · I, prodotto contenente il solo elemento incognito d(C,B) = z. L'equazione diviene:
$2 \cdot 6 \cdot (B \cdot I) + (I_C)^2 = 0$ da cui $2 \cdot 6 \cdot \{5[d(B, A)]^2 - 15\,[d(B, M)]^2 + 6[d(B, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot [5 \cdot 36 - 15 \cdot 20 + 6 \cdot z^2] - 2 \cdot 1080 = 0$ da cui $d(C,B) = 5\sqrt{2}$.

<u>Applicazione 9</u>: Fra i punti dell'insieme J = (A,B,C,D) sussistano le seguenti distanze:

$$d(A,B)= 6,\ d(B,C)= 2,\ d(A,C) = 2\sqrt{10}\ ,$$
$$d(A,D) = 2\sqrt{5}\ ,\ d(B,D) = 4\sqrt{2}\ .$$

Trovare l'insieme completo con sostegno J e la distanza (D,C).

Formalmente, [– m A, (m + n – 1) B, – n C, D] (4,4)
è l'insieme completo avente sostegno J indipendentemente dal fatto che le terne (A,B,C) e (A,B,D) siano adiacenti o non adiacenti

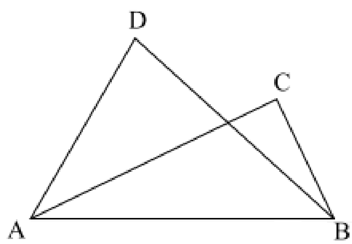


Fig. (1)

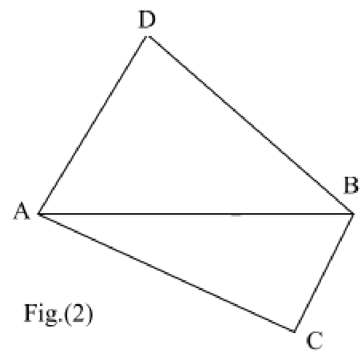


Fig.(2)

Nella fig. (1) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono non adiacenti;
nella fig. (2) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono adiacenti.

Come nell'esercizio precedente, posto I_D = [– mA, (m+n– 1) B, –nC] si ha:

$$I^2 = [I_D \cup (I \cdot D)]^2 = (I_D)^2 + 2 \cdot (D \cdot I_D) + (D)^2 = 0 \qquad (4,5)$$

Tenendo conto che $D \cdot I_D = D \cdot I$, $(D)^2 = 0$ e che, essendo I completo, si ha: $D \cdot I = A \cdot I = B \cdot I$, dalla (4,5) si ricavano le seguenti equazioni.

$$\begin{cases} (I_D)^2 + 2 \cdot (B \cdot I) = 0 \\ (I_D)^2 + 2 \cdot (A \cdot I) = 0 \end{cases} \qquad (4,6)$$

si ha:

a) $(I_D)^2$ = [– m · A, (m + n – 1) · B, – n · C]^2 =
= 2{–m(m+n–1)[d(A,B)]^2– n(m+n–1)[d(B,C)]^2 +m n[d(A,C)]^2}=
= 8(– 9 m^2 + 9 m – n^2+n)
b) 2 · $(B \cdot I)$ = 2{ – m [d(B,A)]^2 +[d(B,D)]^2 – n [d(B,C)]^2 } =
= 8 (– 9 m + 8 – n)
c) 2 · $(A \cdot I)$ = 2{[d(A,D)]^2 – n [d(A,C)]^2 +(m + n – 1)[d(A,B)]^2 }
= 8 (9 m – n – 4)
Sostituendo nelle (4,6), si ha:

$$\begin{cases} 8\,(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8\,(-9\,m + 8 - n) = 0 \\ 8\,(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8\,(9\,m - n - 4) = 0 \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \\ n_1 = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} m_2 = \frac{2}{3} \\ n_2 = -2 \end{cases}$

Sostituendo nella (1) si ottengono i seguenti insiemi completi:

I′ = (– 2 A, 5 B, – 6 C, 3 D) e I′′ = (–2 A, –7 B, 6 C, 3 D)

contenenti entrambi punti esterni. Per calcolare d(D,C) svolgiamo le seguenti equazioni:

D · I′ = C · I′ (4,7′) D · I′′ = C · I′′ (4,7′′)

Dalla (4,7′) si ha:
– 2[d(D,A)]^2 + 5 [d(D,B)]^2 – 6[d(D,C)]^2 = – 2[d(C,A)]^2 + 5 [d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2
Posto d(D,C) = x, si ha x = 2 $\sqrt{5}$; dalla (4,7′′) si ha:
– 2 [d(D,A)]^2 – 7[d(D,B)]^2 + 6[d(D,C)]^2 = – 2[d(C,A)]^2 – 7 [d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2
Posto d(D,C) = y, si ha y = 2 $\sqrt{13}$.