

I fondamenti epistemologici della matematica

di Francesco Speranza
Università degli studi di Parma - Dipartimento di Matematica

1 - Attenzione alle metafore: le parole sono pietre?

Quando ci accingiamo a costruire un nuovo settore disciplinare, o a espanderne uno già esistente, occorrono anzitutto nuove parole per esprimere nuove idee. Molte volte bisogna inventarle: in tal caso, di solito si cercano parole che possano aiutare a capire le idee. Si ricorre perciò a *metafore* («figura retorica consistente nel trasferire a un oggetto il nome di un altro, per analogia»), oppure si riprendono significati di concetti non più correntemente usati. Può accadere che in un caso o nell'altro trasciniamo nella nuova trattazione la storia delle parole: il che può essere utile per comporre nuove metafore, ma potremmo anche sentirci obbligati a seguire le metafore o i vecchi significati al di là di quanto sia opportuno. Un esempio è offerto dalla parola «rivoluzione» (una metafora politica per esaminare certi fenomeni «di rottura» nello sviluppo della scienza): c'è chi cerca di classificare le rivoluzioni *politiche*, per rispondere alla domanda: «il tale episodio della storia della matematica fu rivoluzionario?».

Anche sulle parole che compaiono nel titolo possiamo fare qualche riflessione. Anzitutto, «matematica» deriva da *mathesis*, da *mathema*, «insegnamento»: ma, in questo caso, duemilacinquecento anni di uso della parola hanno oscurato il significato originario (potremmo tuttavia compiere un'operazione «archeologica» per rivendicare l'importanza della dimensione didattica della matematica).

«Epistemologia» deriva da *episteme*, «conoscenza vera e provata»; ma la parola fu coniata solo nell'Ottocento, per significare «filosofia (o teoria) della conoscenza scientifica». Naturalmente, la maggior parte degli epistemologi di oggi non pretende che la conoscenza scientifica sia (o debba essere) vera e garantita. Si può anche osservare che, in virtù della stessa «definizione», l'epistemologia della matematica è una parte della filosofia della matematica: a rigore, non ne farebbero parte le questioni riguardanti la natura de-

gli enti matematici (un caso particolare del classico «problema degli universali»): qui saremmo piuttosto nell'ambito dell'ontologia, della filosofia dell'essere. D'altra parte, per uno «scienziato» la parola «filosofia» può suscitare qualche diffidenza (anche solo inconscia, ma attenzione alle «opinioni inconscie»): «epistemologia» può essere meno carico di (pseudo-) significati impliciti.

Infine, la parola «fondamenti» non è solo di uso piuttosto recente, ma richiama fortemente immagini edificatorie: e quindi può favorire una certa visione epistemologica, ontologica,... della matematica. C'è anche un episodio assai recente: fino a pochi anni or sono, si poteva trovare, negli statuti universitari, una sequenza di discipline «affini»: «Critica dei princìpi», che di per sé non è necessariamente limitata alla matematica; «Filosofia della matematica»; «Epistemologia della matematica»; «Fondamenti della matematica». Quest'ultima si riferisce alla «fondazione», di regola all'assiomatizzazione e alla metateoria di un particolare ramo della matematica (per esempio, la geometria elementare, o l'aritmetica), o di una parte consistente dell'intera matematica (il problema dei fondamenti). Le discipline «affini» sono state qui elencate in ordine decrescente di generalità; essendo stato deciso di ridurre il numero delle discipline universitarie, era naturale aspettarsi che restasse il titolo più generale. Invece è stato scelto il titolo «Fondamenti della matematica»: questo significa certamente che è cambiato il suo significato, fino a comprendere le altre discipline elencate, perché non è pensabile che «per decreto del principe» si possa stabilire che certe discipline non si coltivano più!

Si potrebbe dire a questo punto: allora, quando si parla *a proposito della* matematica, bisognerebbe fare quello che si fa *nella* matematica: dare definizioni precise delle parole usate. Ebbene, anche *nella* matematica alcune parole, a certi livelli di trattazione, non vengono definite con precisione: si pensi per esempio a «spazio» o a «linea» o a «numero»: piuttosto si fa capire il loro significato in modo pragmatico, attraverso esempi e in situazioni concrete. A maggior ragione questo varrà per la terminologia epistemologica.

2 - Grandi domande in attesa di risposte

Spero di avere mostrato, con la discussione precedente, come siano importanti concetti e strumenti di carattere filosofico, anche

quando sembra di avere a che fare con problemi puramente «tecnici». Occorre soprattutto essere attenti alle «filosofie implicite» che spesso abbiamo appreso senza accorgercene, o che possono essere veicolate da certi termini. Per esempio, se parliamo di «scoprire un teorema» ammettiamo che esso esista già, e quindi ci collochiamo, con Platone, nel cosiddetto «realismo delle idee». Questa era la filosofia ufficiale della matematica fin addentro all'Ottocento: ma fra le risposte alla crisi dei fondamenti quella che ha ottenuto i più vasti consensi è certamente quella formalista, che ha indotto molti matematici a considerare la propria disciplina come un gioco di simboli, cioè a cambiarne la filosofia di sfondo in un neo-nominalismo (non credo che questa fosse l'intenzione di Hilbert quando propose il suo programma metamatematico, ma in altre occasioni incoraggiò questa impostazione).

Accade allora che una persona che apprende la matematica si trovi a volte in un ambiente realista, in altre in un ambiente nominalista, e questo può essere fonte di conflitti e di fraintendimenti. *Soprattutto, il pericolo maggiore è che queste filosofie restano implicite: bisogna invece analizzare la nostra concezione della matematica nelle situazioni che incontriamo, rendere esplicito l'implicito, nei limiti in cui ciò è possibile (credo che qualche aspetto implicito resterà comunque: ma è già un passo importante riconoscere l'esistenza dell'«implicito» ed essere preparati ad analizzarlo).*

La questione di cui abbiamo or ora parlato si connette strettamente al problema degli universali (vedi più sopra). Ci possiamo allora chiedere se, fra i due corni del dilemma, c'è una terza via che potrebbe essere fruttuosa. In effetti esiste, è quello che dopo Guglielmo da Occam fu detto terminismo, e che forse si direbbe meglio «concettualismo» (gli universali sono costruzioni della nostra mente, in certa misura libere, opinione verso la quale sembra propendere John Locke, e che appare particolarmente adatta ai concetti matematici; o forse sarebbe meglio tenere conto dell'esperienza, con la quale bisogna quasi sempre fare i conti). Si può ritenere che, passando anche attraverso Kant, questa tendenza si sia evoluta nel «costruttivismo»: nelle sue varie versioni, questo è oggi la concezione più diffusa, *in modo esplicito*, nella didattica della matematica, e probabilmente anche fra gli epistemologi, almeno fra quelli interessati ai problemi della didattica.

C'è spazio per qualche altra considerazione. Anzitutto, anche nell'affrontare problemi di oggi è opportuno rivolgersi alle grandi

tradizioni filosofiche e a riflettere su come esse hanno affrontato i grandi problemi della conoscenza. Lo hanno fatto anche quasi tutti i grandi scienziati e filosofi innovatori, in ambito sia scientifico che filosofico. Si pensi a Galileo, a Cartesio, a Leibniz, ad Einstein; e anche a Kant, a Poincaré, a Enriques, a Popper, a Lakatos.

Un'altra considerazione riguarda una certa diffidenza (forse solo inconscia) degli scienziati nei riguardi della filosofia: come mai i grandi problemi della scienza vengono prima o poi risolti (eventualmente, in un primo momento, solo in modo parziale), mentre nella filosofia ritroviamo oggi alcuni problemi che risalgono all'antichità?

In effetti, molti grandi problemi filosofici posti in altra epoca sono attuali ancor oggi: ma, nel caso della filosofia della scienza, c'è un'ulteriore punto del quale tenere conto. La scienza si sviluppa, e quindi cambiano le «condizioni al contorno» per questi grandi problemi, e cambiano anche le soluzioni, le risposte che possiamo dare loro. Si pensi, per esempio, alla questione della natura degli enti matematici, prima e dopo la rivoluzione non euclidea e la crisi dei fondamenti.

Possiamo poi chiederci quali linee fondamentali si possono individuare a proposito dell'approccio epistemologico. Quanto abbiamo detto ci suggerisce l'*approccio storico*: la storia della matematica (più in generale, della scienza) ci dà indicazioni per capire il significato della matematica (della scienza). Vicino a quello storico è l'*approccio culturale*: studiamo la matematica come una componente della cultura generale di un'epoca, e nelle sue relazioni con altri campi dell'attività umana. Possiamo cercare di capire come è la matematica oggi, *nelle sue varie articolazioni*. Potremmo chiamare questo *approccio riflessivo* in mancanza di un aggettivo più pregnante. L'*approccio genetico* è interessato al sorgere delle idee in una mente che si sta formando: è l'approccio vicino alla psicologia dell'età evolutiva; Jean Piaget parla di *epistemologia genetica*. L'*approccio fondazionale* studia le articolazioni logiche della disciplina, e quindi la considera nel suo aspetto formalizzato (o almeno assiomatizzato). Segnaliamo infine (nonostante per ora non sia molto coltivato, e sia stato anche in un passato recente contestato) l'*approccio sociologico*: si tratta di capire come la società «esterna» possa condizionare lo sviluppo scientifico: cfr. per esempio (Bloor 1976) e (Spranzi 1994), ma anche (Enriques 1910).

Naturalmente, lo stesso pensatore, spesso anche nella stessa ricerca, potrà seguire più d'uno di tali approcci.

Quando c'è un forte legame dell'epistemologia con un'altra disciplina, che cosa si chiederà a questa? La domanda appare particolarmente significativa nel caso della psicologia e in quello della storia.

Per esempio, le teorie psicologiche di Piaget e di Bruner mostrano una interazione forte con le basi della matematica (anzi, forse Piaget ha esagerato nell'interagire con un certo tipo di matematica, lo strutturalismo bourbakista). Ovviamente, le ipotesi che sono alla base della teoria psicologica che viene messa in gioco influiscono sullo sviluppo del pensiero epistemologico.

Per quanto concerne la storia, si può ricordare che Mach consiglia proprio di andare alle origini delle teorie, ai momenti nei quali i loro fondatori hanno dovuto cambiare radicalmente il modo di pensare. Si chiede di ricorrere soprattutto alla «storia delle idee» (Bourbaki), alla «storiografia progressiva», che tenga conto dello sviluppo della scienza (Bachelard), a una rivalutazione del significato culturale della scienza, in modo che questa torni a essere «poesia e luce dello spirito» (Enriques, De Santillana).

Nei paragrafi seguenti considereremo un paio di casi notevoli, soprattutto negli approcci storico, riflessivo e culturale. Questo ci permetterà di dare alcune indicazioni per la didattica; e ci porterà al nodo dei rapporti fra le «due culture», la cui separazione è stata tanto deprecata: ma molti restano al livello di una generica deplorazione, perché mancano loro gli strumenti per superarla: non è certo «capirsi» un omaggio del tipo «quelli che hanno fatto il liceo classico sono più bravi degli altri» (già, provengono mediamente da famiglie, da strati sociali più acculturati); tanto meno lo è la visione un po' magica della scienza, e degli scienziati come stregoni della nostra società.

Le grandi innovazioni scientifiche sono quasi sempre significative anche dal punto di vista filosofico. Matematica e filosofia hanno per lungo tempo interagito, in modo esplicito fino all'inizio dell'Ottocento, poi in modo più nascosto, anche attraverso altri campi del sapere, per esempio la fisica. Analizzare i loro rapporti significa gettare (o riaprire) un ponte fra le due culture; anzi, riscoprire una regione che appartiene a entrambe.

3 - Un caso notevole: la geometria non euclidea

La riflessione epistemologica (con i suoi possibili diversi approcci) è fondamentale per affrontare i problemi e i nodi che si pon-

gono nella didattica della matematica. Pensiamo ad argomenti sui quali gli allievi incontrano spesso delle difficoltà, oppure ad argomenti nuovi o da presentare in modo nuovo: dobbiamo cercare di capire «che cosa significano», e quindi mettere in luce le filosofie implicite che stanno alla loro base.

Un caso tipico (in quanto novità assoluta nella scuola) è quello delle geometrie non euclidee. Affrontato senza un adeguato sfondo epistemologico da parte dell'insegnante, è molto facile che negli allievi susciti l'impressione che si tratti di una «geometria da manicomio» (come nell'Ottocento disse un matematico italiano d'una certa autorevolezza, ma evidentemente incapace di vedere al di là degli aspetti puramente tecnici). L'insegnante dovrà quindi conoscere e porgere, più che dimostrazioni di teoremi non euclidei, una visione globale del problema, e dovrà curare che anche gli studenti arrivino a capire quello che ha significato questa «rivoluzione» nello sviluppo del pensiero matematico: grazie alla ben nota analogia fra lo sviluppo (intellettuale) dell'umanità e quello dell'individuo, anch'essi arriveranno a una nuova «immagine» della matematica.

La filosofia della matematica imperante fino alla rivoluzione non euclidea era chiaramente il realismo delle idee di Platone: la matematica ci porge verità eterne indipendenti dalla mente umana. La maggior parte dei matematici accademici ha abbandonato questa concezione per quella formalista spinta, secondo la quale la matematica è un gioco di simboli; tuttavia, non sono evidentemente riusciti a convincere di questo i loro allievi, o forse non si sono curati di farlo: infatti fra gli insegnanti secondari il platonismo è ancora assai diffuso (secondo Vinicio Villani, l'ultimo grado di istruzione, in particolare quello universitario, quando c'è, non ha effettiva influenza sulla formazione intellettuale). A questo (e in particolare alla mancata analisi delle filosofie implicite soggiacenti) si possono collegare le difficoltà che i nuovi insegnanti incontrano quando «tornano» dall'università alla scuola secondaria; e anche le difficoltà di applicazione di nuovi programmi (per la quale non basta la conoscenza disciplinare). Questo scollamento è una causa non secondaria delle difficoltà e delle frustrazioni che incontrano gli studenti nel passaggio dalle scuole secondarie all'università, e più in generale delle idee distorte che si fanno a proposito della matematica.

Orbene, la storia del quinto postulato, ripercorsa almeno per sommi capi, è importante per capire le diverse concezioni della ma-

tematica: del resto, se non si tiene conto di queste, alcuni aspetti di quella storia appaiono incomprensibili.

Anzitutto, non solo la matematica era ritenuta la cittadella della conoscenza vera e garantita, ma in essa la geometria si poteva considerare il mastio, la parte più sicura: essa, basandosi su premesse evidenti (nel sentire comune questa opinione si ritrova ancora: Pontiggia parla di «evidenza geometrica» come di qualcosa di emblematico), ci avrebbe permesso addirittura di sapere come era fatto lo spazio, il mondo fuori di noi.

Ma il quinto postulato («se due rette, tagliate da una trasversale, formano da una parte angoli la cui somma è minore di due retti, esse, prolungate, si incontrano da quella parte») era considerato meno evidente: c'era un «programma di ricerca» che si proponeva di dimostrarlo, oppure di sostituirlo con un'affermazione equivalente. Alla sensibilità moderna appare molto più «meritoria» una dimostrazione piuttosto che la sostituzione con un'altra formulazione «più evidente»: ma allora probabilmente i due modi di «emendare Euclide» non erano considerati molto diversi. Gli assiomi erano sentiti come illuminazioni dal mondo delle idee, uno più o meno non era poi così importante, purché il messaggio che portava fosse sicuro.

Una versione alternativa del postulato suona: «per un punto passa al più una retta parallela a una retta data» (la sua esistenza è una conseguenza degli altri assiomi). A più riprese si credette che bastasse cambiare la definizione di rette parallele (da «rette che non si incontrano», come dice Euclide, a «rette equidistanti») per dimostrare in modo semplicissimo l'unicità della parallela per un punto a una retta. In una visione realista, la scelta d'una definizione appare come qualcosa di secondaria importanza, perché l'ente da definire è un dato di fatto, appartenente al mondo delle idee (non si lasciò tuttavia ingannare Saccheri, che era un sottile logico, anche se alla fine anch'egli concluse lo studio del caso dell'angolo acuto in modo insoddisfacente, *non sine magno in logicam peccato*).

Ecco alcune altre affermazioni equivalenti al postulato:

La somma delle ampiezze degli angoli d'un triangolo è quella d'un angolo piatto.

Esiste un quadrilatero con quattro angoli retti (Euclide definisce un rettangolo «un quadrilatero equiangolo»: già all'inizio non s'impegna sul quinto postulato).

Esiste un triangolo di area maggiore d'un'area assegnata.

Esistono due figure simili ma non isometriche.

Soffermandosi su di esse, si comincia probabilmente a dubitare che l'evidenza sia un criterio sicuro per fondare una teoria vera (ovviamente l'insegnante farà notare questo agli allievi, se vede che ce n'è bisogno). Ciò significa anche cominciare a formarsi una consapevolezza epistemologica a proposito della matematica.

Piuttosto che proporre, nel solito stile dell'esposizione euclidea, teoremi di geometria non euclidea, mi sembra più significativo proporre e analizzare qualche modello: per esempio, per la geometria iperbolica, quello di Klein (il PIANO è l'interno K d'una circonferenza C , e le RETTE ne sono le corde) e quello di Poincaré (il PIANO è ancora K , ma le RETTE sono gli archi di circonferenza che incidono ortogonalmente su C): quest'ultimo è stato sfruttato da Escher per alcune sue incisioni.

Più semplice ancora è il modello della geometria ellittica realizzato su una superficie sferica (o meglio su un emisfero), nella quale le RETTE sono circonferenze massime, e le DISTANZE si misurano come angoli al centro (la geometria ellittica viola però anche qualche assioma dell'ordine, infatti una RETTA è una linea chiusa). Si vede immediatamente che nella geometria ellittica la somma delle ampiezze degli ANGOLI d'un TRIANGOLO è maggiore di 180° (nella geometria iperbolica è minore).

Le parole scritte in maiuscolo si riferiscono all'interpretazione non euclidea d'un ente originariamente preso in ambiente euclideo (e in questo caso nominato in minuscolo). Da un lato, un modello si presenta come un «mondo possibile» (nel senso che soddisfa certe condizioni, gli assiomi); si mette così in crisi la visione platonista della matematica, nella quale ce ne sarebbe uno solo, che con la trattazione razionale farebbe inscindibilmente un tutto. Su un modello si può argomentare, si possono fare congetture, tanto meglio se si hanno a disposizione più modelli. Si può dire che su essi si può condurre un approccio empirico alla geometria.

Geometria empirica! Qualcuno troverà sconvolgente questo accostamento. Ma è ancora un problema di chiarimento di filosofie implicite: se la geometria deve rendere conto della struttura dello spazio, e abbiamo dei dubbi su un suo principio, a che cosa rivolgersi, se non all'esperienza? (Rammentate il primo tema dei programmi della scuola media, ispirato a Enriques: «la geometria, prima rappresentazione del mondo fisico»). Avremo addirittura una geometria sperimentale: si dice che Gauss abbia tentato di mettere alla

prova il quinto postulato misurando gli angoli d'un triangolo avente lati di qualche decina di chilometri.

Dal punto di vista metodologico, ci troviamo in presenza d'un caso singolare: basta *un solo* triangolo per decidere fra i tre tipi di geometria (tutti gli altri si comporteranno nello stesso modo). Questo accade perché gli altri assiomi si ammettono incondizionatamente: un vero controllo sperimentale dovrebbe farsi su più casi, e metterebbe alla prova tutta la teoria, tutti gli assiomi.

La differenza fra 180° e la misurazione δ effettuata da Gauss fu minore del possibile errore ϵ di misurazione, e quindi l'esperimento non fu conclusivo. Se si avesse $\delta > 180^\circ + \epsilon$, lo spazio sarebbe ellittico; se si avesse $\delta < 180^\circ - \epsilon$, lo spazio sarebbe iperbolico. Nell'intervallo $[180^\circ - \epsilon, 180^\circ + \epsilon]$ resta invece l'incertezza, e quindi, in particolare, se lo spazio è euclideo per questa via non lo si potrà provare.

Questa è l'interpretazione empirica della geometria elementare. Ma accanto a essa c'è l'interpretazione formalista: possiamo prendere come base il sistema euclideo di assiomi, come possiamo prendere un sistema diverso: ciascuno si potrà sviluppare autonomamente. Anzi, avendo a disposizione modelli di ciascuno dei sistemi (euclideo, iperbolico, ellittico), potremo porre in atto la dialettica fra *sintassi* (apparato dimostrativo) e *semantica* (analisi dei modelli). Per esempio, il modello di Klein suggerisce che nella geometria iperbolica LE PARALLELE A UNA RETTA RIEMPIONO DUE ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE e che RETTE PERPENDICOLARI A UNA STESSA RETTA SONO PARALLELE FRA LORO. La convenzione della scrittura in lettere maiuscole suggerisce implicitamente la convenzionalità della scelta dell'interpretazione.

L'analisi dei modelli potrà suggerire alcune congetture: eventualmente, si potrà cercare di dimostrarle entro la teoria assiomatica corrispondente. Si vengono così a intrecciare una «fase empirica» con la «fase dimostrativa». Analoghe considerazioni si possono fare per altri sistemi, per esempio per la geometria affine grafica, che ammette modelli finiti.

E se qualcuno chiedesse se per la geometria è giusta l'interpretazione empirista o quella formalista? La domanda è inammissibile, in quanto entrambe sono epistemologicamente accettabili: si svolgono su «livelli» («orizzonti di realtà», diceva Gonsseth) diversi. Diversi ma non inconciliabili: rammentiamo l'interpretazione lakatosiana della matematica come disciplina quasi-empirica («i potenziali falsificatori di una teoria assiomatizzata sono le affermazioni della

corrispondente teoria informale»). Anche se Lakatos non fa cenno in questa occasione alla geometria, a mio avviso possiamo così tenere collegati gli aspetti empirici e quelli formali della geometria.

Con la rivoluzione non euclidea la geometria ha perso il carattere di cittadella della certezza (che per qualche decennio fu poi rivendicato e cercato dalla logica e dall'aritmetica elementare). Ma in questo modo ha aperto la strada a una rivoluzione epistemologica, a una nuova visione della matematica e della scienza. Sarebbe un grave errore perdere un'occasione per stabilire un nesso tanto significativo fra scienza e filosofia.

4 - Fra intuizione e rigore: l'approccio all'analisi

I nuovi programmi delle superiori sembrano suggerire per l'analisi l'approccio ottocentesco alla Weierstrass, fondato sul concetto di limite. Tuttavia, recentemente è stata pubblicata una «ristrutturazione» dei programmi, nella quale la ripartizione degli argomenti fra gli anni del triennio non è più rigida, e quindi si apre la possibilità di percorsi diversi per costruire l'analisi.

L'esposizione attuale è inquadrabile sia nell'ordine positivistico comitiano delle discipline (la matematica pura precede le «applicazioni»), sia in una visione idealistica della matematica, che tenda a isolarla dalle altre discipline (al modo di Bourbaki).

Storicamente, invece, l'analisi è iniziata con il problema delle aree (metodo di esaustione nell'antichità, e metodo degli indivisibili nell'età moderna), per proseguire con il problema delle tangenti, e come strumento per affrontare le necessità della fisica matematica: il concetto di limite è arrivato per ultimo (anche se era adombrato, per esempio, in Newton). Se vogliamo tenere conto fin dall'inizio delle ragioni che hanno spinto i matematici a costruire i concetti fondamentali, dovremo tenere conto dello sviluppo storico dei vari argomenti. In questo modo si dovrà rinunciare a una sistemazione rigorosa: ma chi proseguirà gli studi matematici all'università avrà modo di vederla in quell'occasione, mentre gli altri potranno rendersi conto del significato che ha l'analisi nella cultura scientifica. Del resto, fra gli stessi laureati in matematica molti non si rendono conto che, per esempio, velocità e tasso d'inflazione appartengono alla medesima categoria concettuale, quella della misura d'una variazione.

Seguiamo brevemente la pista della meccanica: naturalmente faremo qualche semplificazione (Lakatos parla di «ricostruzioni razionali» della storia, nel senso che esse si riferiscono a come si sarebbe dovuta svolgere, se lo sviluppo della scienza fosse stato «razionale», secondo il punto di vista dello storico-epistemologo).

Per Aristotele e i suoi seguaci, ci vuole una causa per provocare uno stato di movimento: asserzione ben accetta al senso comune, tanto più se si tiene conto dei limitati mezzi tecnici e naturali che allora l'umanità aveva a disposizione (salvo il problema di come potesse muoversi una freccia, una volta che aveva lasciato l'arco). Il principio d'inerzia, intuito da Galileo, e formulato da Cartesio, è un'ardita ipotesi concettuale, che per la sua stessa espressione non può trovare una puntuale corroborazione (eppure noi l'abbiamo banalizzato, lo facciamo recitare come una banale formuletta: la storia ci fa capire la sua importanza nello sviluppo della scienza).

Sua naturale prosecuzione è la seconda legge della dinamica, secondo la quale una forza produce un'accelerazione: riducendo lo spazio a una sola coordinata x ,

$$(1) F = ma,$$

dove a è la variazione della variazione di x , cioè quella che noi diciamo «la derivata seconda». D'altra parte, le funzioni «normali» si possono sviluppare in serie di potenze:

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0) x'(t_0) + 1/2 (t - t_0)^2 x''(t_0) + \dots$$

L'analisi si salda così con il principio deterministico: lo stato dell'universo, qui $x(t)$, è noto, nel futuro (ma anche nel passato), se si conosce il suo stato all'istante t_0 .

Facciamo ora intervenire la (1), nella forma $x''(t) = F/m$. F può dipendere da t e da x , in alcuni casi anche da $x'(t)$: si possono così esprimere $x''(t)$ e le derivate successive mediante il tempo, la posizione e la velocità. La (1) è una equazione differenziale del secondo ordine: anche le equazioni differenziali si saldano alla «metafisica deterministica» della nuova fisica (Israel 1996).

Ma c'è dell'altro. Il principio deterministico esige che lo stato d'un sistema fisico all'istante t dipenda dal suo stato per $u < t$. Quando l'evoluzione del sistema è rappresentata da equazioni differenziali, il suo stato in un determinato istante dipende, per così dire, dallo stato nell'istante «immediatamente precedente». *Funziona così una specie di «azione a contatto nel tempo»*: (Questo richiama alla mente la *querelle* fra cartesiani e newtoniani a proposito della gravitazione. Newton suppone che essa agisca a distanza, mentre gli

oppositori ammettevano solo azioni per contatto. Nelle edizioni successive dei *Principia* compare il principio secondo il quale non si è obbligati a rinunciare a una teoria in base a «ipotesi contrarie», purché essa sia corroborata dall'esperienza; ma, privatamente, riconosceva che l'azione a distanza necessitava di ulteriori spiegazioni fisiche).

Come si vede, l'analisi non è uno «strumento neutro», fabbricato astrattamente dai matematici, e messo a disposizione dei fisici: essa è collegata a ipotesi di natura metafisica, che stanno alla base della nuova fisica.

Bibliografia

- D. Bloor, 1976, (tr. it.) *La dimensione sociale della scienza*, Cortina, Milano.
- D. Gillies (ed.), 1992, *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.
- F. Enriques, 1910, La filosofia positiva e la classificazione delle scienze, *Scientia*, 7 anche in F. Enriques, *Natura, ragione, storia*, Einaudi, Torino 1955, 219-237.
- F. Enriques, G. De Santillana, 1932, *Storia del pensiero scientifico*, vol. 1, Zanichelli, Bologna.
- G. Israel, 1996, *La visione matematica della realtà*, Laterza, Bari - Roma.
- F. Speranza (ed.) 1992, *Epistemologia della Matematica, Seminari 1989-1991*.
- F. Speranza, M. Ferrari (eds.), 1994, *Epistemologia della Matematica, seminari 1992-1993*.
- M. Spranzi, 1994, *La sociologia e la retorica della scienza*, in G. Giorello, *Introduzione alla filosofia della scienza*, 235 - 281, Bompiani, Milano.