Su alcuni modelli geometrici non Archimedei

Eugeni Franco[1], Mascella Raffaele[2]

Sunto: In questo lavoro vengono costruiti una serie di modelli di rette non archimedee su strutture del tipo $G \times \mathbb{R}$, con G gruppo ordinato: tra questi sono compresi il classico modello di Veronese e un modello che "copre" integralmente il piano cartesiano reale. Nei paragrafi successivi si procede ad un'ampia analisi della nozione di retta non archimedea definita assiomaticamente. Si prova che ad una retta non archimedea si può associare uno speciale gruppo quoziente T ordinato, attraverso il quale la retta è ricostruibile, a meno di isomorfismi, come modello generale $T \times \mathbb{R}$.

Parole Chiave: Geometria non Archimedea, Geometria della retta.

Introduzione

Tutte le problematiche legate alla geometria non archimedea si riconducono, storicamente, al lavoro di G. Veronese [6], [8], [10], [11] che ne evidenziò le peculiarità e ne descrisse un modello, tuttora noto come "Retta di Veronese", e T. Levi-Civita [4], [7] che giustificò, con la costruzione dei cosiddetti "monosemii", tale geometria anche sotto il profilo epistemologico. Lo scopo del nostro studio è stato fin dall'inizio incentrato sulla ricerca di ulteriori modelli di retta non archimedea utilizzando, da un lato, l'idea di base di Veronese, e

[1] Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: eugenif@tin.it
[2] Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: rmascella@tin.it

dall'altra, l'assiomatica euclidea e la struttura logico-deduttiva che ne deriva se si nega l'assioma archimedeo.
Da un'attenta analisi dell'assiomatica (ved. [23], [25] e anche in questo libro nella sezione dedicata alla retta euclidea) si arriva a provare l'esistenza di un gruppo additivo totalmente ordinato $(T, +)$ attraverso il quale, e al variare dello stesso, sono ricostruibili tutti i modelli di retta non archimedea, con opportune strutture assegnate su $G \times \mathbb{R}$. In tal modo si trovano come casi particolari strutture di retta non archimedea su $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, su $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, e su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Di questi modelli, quello costruito su $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, come provato in [23], è sostanzialmente il modello di Veronese. Inoltre, poiché quando G è un gruppo ordinato ogni struttura $G \times \mathbb{R}$ è strutturabile a sua volta come gruppo additivo ordinato, nasce una genesi di modelli di rette non archimedee del tipo $G \times \mathbb{R}$, $(G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $((G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, … il cui esame, a nostro avviso, potrebbe condurre ad ulteriori sviluppi dei quali ci occuperemo in altro momento. Giova pure osservare che, nel modello $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, come si dimostra, tutte le volte che si assegna una direzione, a questa coppia di oggetti risulta associata una struttura naturale di retta non archimedea che sostanzialmente dà luogo ad una sorta di struttura classica "ruotata". Quest'ultimo modello è di notevole importanza per un lavoro parallelo, di cui ci stiamo occupando, nel quale, a partire dalla medesima idea, vengono costruiti modelli di piani affini reali, sia desarguesiani che non desarguesiani, nei quali ogni retta è non archimedea.

1. Il modello generale di retta non archimedea

Sia $(G, +_G, \leq_G)$ un gruppo abeliano totalmente ordinato, con $G \neq \{0_G\}$, e sia $(\mathbb{R}, +, \leq_R)$ l'usuale gruppo additivo ordinato dei numeri reali. Consideriamo, quindi, il prodotto cartesiano $G \times \mathbb{R}$ e l'insieme dei suoi segmenti $S(G \times \mathbb{R}) = \{((g_1, r_1), (g_2, r_2)) \mid (g_i, r_i) \in G \times \mathbb{R}, i=1, 2\}$.

Su questa coppia di enti definiamo le seguenti relazioni binarie:

(a) una relazione ternaria di "stare fra" sui punti di $G \times \mathbb{R}$ così fatta:

(g_2, r_2) sta fra (g_1, r_1) e (g_3, r_3) se vale una delle seguenti (1)

i) $g_1 <_G g_2 <_G g_3$ oppure $g_3 <_G g_2 <_G g_1$;

ii) $g_1 = g_2 <_G g_3$ e $r_1 <_R r_2$;

iii) $g_1 <_G g_2 = g_3$ e $r_2 <_R r_3$;

iv) $g_3 = g_2 <_G g_1$ e $r_3 <_R r_2$;

v) $g_3 <_G g_2 = g_1$ e $r_2 <_R r_1$;

vi) $g_3 = g_2 = g_1$ e $r_1 <_R r_2 <_R r_3$ oppure $r_3 <_R r_2 <_R r_1$.

(b) una relazione di congruenza "≡" su $S(G \times \mathbb{R})$ così fatta:

$((g_1, r_1), (g_2, r_2)) \equiv ((g_3, r_3), (g_4, r_4))$ se (2)

$g_2 +_G (-g_1) = g_4 +_G (-g_3)$ e $r_2 - r_1 = r_4 - r_3$.

Si dimostra facilmente che la congruenza "≡" appena descritta è una relazione d'equivalenza.

A partire da queste relazioni, ma in realtà semplicemente a partire dagli ordinamenti e dalle operazioni di G ed $\mathbb{R}$, posso inoltre definire:

(c) una relazione binaria "≤" così fatta

$(g_1, r_1) \leq (g_2, r_2)$ se e solo se (3)

$g_1 <_G g_2$ oppure $g_1 = g_2$, $r_1 \leq_R r_2$;

(d) un'operazione binaria "⊕" così fatta

$(g_1, r_1) \oplus (g_2, r_2) = (g_1 +_G g_2, r_1 +_R r_2)$. (4)

E' da osservare, e la dimostrazione è un semplice esercizio, che la struttura $(G \times \mathbb{R}, \oplus, \leq)$ è di gruppo abeliano totalmente ordinato. Vogliamo ora soffermarci sulle proprietà delle relazioni di "stare fra" e della congruenza dei segmenti.

Teorema 1.1. Le relazioni di "stare fra" e di "congruenza" su $G \times \mathbb{R}$ soddisfano tutti gli assiomi geometrici della retta non archimedea (ved. appendice): I1, II1, II2, II3, II4, II5, II6, III1, III2, III3, III4, Non-IV1, IV2.

Dim. La verifica degli assiomi discende facilmente dalle definizioni date. L'assioma I1 è banalmente vero mentre gli assiomi del gruppo II discendono dalla stessa definizione dello "stare fra" e dunque dagli ordinamenti di G ed $\mathbb{R}$. Gli assiomi del gruppo III discendono dal fatto che G ed $\mathbb{R}$ sono gruppi mentre l'assioma IV2 di Cantor discende dalla sua validità in $\mathbb{R}$. Verifichiamo invece l'assioma Non-IV1. Presi due segmenti A = $((g_1, r_1), (g_1, r_2))$, B = $((g_3, r_3), (g_4, r_4))$ in modo che $g_3 <_G g_4$, se reiteriamo il trasporto del segmento A a partire dal punto (g_3, r_3) possiamo raggiungere tutti i punti del tipo (g_3, r) ma non i punti del tipo (g, r) con $g_3 <_G g$ dunque non si raggiunge (g_4, r_4). Concludendo: la struttura ($G \times \mathbb{R}$, "stare fra", $\equiv$) è di retta non archimedea.

Osservazione. Per quanto visto, da un qualsiasi gruppo abeliano G totalmente ordinato si può ottenere una struttura di retta non archimedea $G \times \mathbb{R}$. Nella costruzione di esempi significativi di tale struttura considereremo, innanzitutto, gli insiemi numerici classici che soddisfano alle ipotesi su G e, vista l'arbitrarietà della struttura di gruppo iniziale, studieremo solo alcuni modelli rappresentativi di classi non isomorfe. Per questo motivo è interessante capire quali siano le proprietà che G ha già dal punto di vista "geometrico" per essere un gruppo ordinato, e quali potrebbe ulteriormente avere così da modificare, in maniera non isomorfa, la struttura conseguente. Da questo punto di vista è rilevante il teorema che segue.

Teorema 1.2. Sia $(G, +_G, \leq_G)$ un gruppo abeliano totalmente ordinato con $G \neq \{0_G\}$. Allora su G e sull'insieme dei suoi segmenti $S(G)$ sono indotte le relazioni di "stare fra" e congruenza "$\equiv$" che soddisfano agli assiomi I1, II1, II2, II4, II5, II6, III1, III2, III3, III4 della retta euclidea.
Dim. L'assioma I1 deve valere perché altrimenti G sarebbe formato dal solo elemento neutro 0_G . Definiamo ora le relazioni di "stare fra" e congruenza:
i) g_2 sta fra g_1 e g_3 se $g_1 <_G g_2 <_G g_3$ oppure $g_3 <_G g_2 <_G g_1$ (5)

ii) $(g_1, g_2) \equiv (g_3, g_4)$ se $g_2 +_G (-g_1) = g_4 +_G (-g_3)$. (6)

Gli assiomi II1, II2, II4, II5, II6 derivano facilmente dalla definizione (5), e dunque sono conseguenza dall'ordinamento totale su G. Gli assiomi III1, III2, III3, III4 derivano banalmente dalla definizione (6) e dunque sono conseguenza della struttura di gruppo di G.

Osservazione. Se G è un gruppo abeliano totalmente ordinato la coppia G, $S(G)$ soddisfa, dunque, gran parte degli assiomi "geometrici" della retta (riportati in Appendice). Rimangono non dimostrati e "non valutabili" soltanto tre assiomi, sulla cui validità in G e $S(G)$ non possiamo asserire nulla. Gli assiomi in questione sono: l'assioma di densità II3, l'assioma di Archimede IV1 (o la sua negazione) e l'assioma di Cantor IV2, ovvero un postulato di "ordinamento" e tutti i postulati di "continuità". Nel prossimo paragrafo descriveremo alcuni modelli che fanno luce su questi aspetti e che dimostrano come questi postulati possano sia valere che non valere su G, avendo in ogni caso strutture non archimedee coerenti.

2. Particolari modelli di rette non archimedee

Il primo esempio sul quale vogliamo soffermarci è quello che denominiamo "modello planare standard di retta non archimedea".

Consideriamo, utilizzando la costruzione del primo paragrafo, il modello ottenuto ponendo $G = \mathbb{R}$, ovvero prendendo il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e applicando le definizioni (1), (2) che caratterizzano la struttura generale di retta non archimedea.

Le omografie che mutano la retta non archimedea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in sé, hanno equazioni del tipo

$$\tau : \begin{cases} a' = c_{11}a + c_{13} \\ \alpha' = c_{21}a + c_{22}\alpha + c_{23} \end{cases} \quad \text{con} \quad c_{11}c_{22} \neq 0 \qquad (7)$$

in cui alla coppia (a, α) viene associata la coppia (a', α').

Le isometrie del modello in sé, ovvero le trasformazioni che individuano quei movimenti per i quali vale il postulato del trasporto, hanno, invece, le equazioni seguenti:

$$v:\begin{cases} a' = \varepsilon_1 a + c_{13} \\ \alpha' = c_{21} a + \varepsilon_2 \alpha + c_{23} \end{cases} \quad \text{con } \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1 \tag{8}$$

dove i coefficienti c_{ij}, sia in (7) che in (8), sono tutti reali.

Osservazione. Il modello planare standard è un esempio di modello in cui il gruppo $G = \mathbb{R}$ soddisfa tutti gli assiomi euclidei, ved. teorema 1.2 e osservaz. seguente, dunque sono soddisfatti tutti i postulati II3, IV1 e IV2.

Il modello planare standard è molto semplice da un punto di vista intuitivo: basta immaginare il piano reale rigato con le rette parallele all'asse delle ordinate, ovvero secondo il punto all'infinito (0, 0, 1). In modo analogo si possono considerare, attraverso una semplice variante, tutta una serie di modelli isomorfi al modello standard. Questi modelli sono caratterizzati, nel piano reale rigato, da rette parallele ad una data, ovvero dal fascio improprio corrispondente ad un determinata direzione, individuata dal punto all'infinito $(0, l, m)$.
Fissiamo dunque il punto $P_\infty(0, l, m)$ con $(l, m) \neq (0, 0)$. Il punto P_∞ individua le rette di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$.
Allora possiamo considerare la relazione di ordinamento "$\leq_P$":
$(a, \alpha) \leq_P (b, \beta)$ se e solo se (9)
$m(\alpha - \beta) \leq l(a - b)$ oppure $m(\alpha - \beta) = l(a - b)$ ed $a \leq b$

che è, come si dimostra facilmente, di ordine totale. Ora, attraverso la relazione "$\leq_P$", possiamo definire una relazione di "stare fra$_P$":
(a_2, α_2) sta fra$_P$ (a_1, α_1) e (a_3, α_3) se (10)
$(a_1, \alpha_1) <_P (a_2, \alpha_2) <_P (a_3, \alpha_3)$ oppure $(a_3, \alpha_3) <_P (a_2, \alpha_2) <_P (a_1, \alpha_1)$.

Definiamo, infine la congruenza dei segmenti in questo modo:
$((a_1, \alpha_1), (b_1, \beta_1)) \equiv_P ((a_2, \alpha_2), (b_2, \beta_2))$ se e solo se (11)

$b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ e $m(\alpha_1 - \beta_1) - l(a_1 - b_1) = m(\alpha_2 - \beta_2) - l(a_2 - b_2)$.

Proposizione 2.1. La struttura ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, "stare fra$_P$", "$\equiv_P$") individuata dalla direzione (0, 1, m) è di retta non archimedea.
Dim. La verifica è un facile esercizio. L'assioma I1 è banalmente vero; gli assiomi II1, …, II6, riguardanti la relazione "stare fra$_P$", e gli assiomi III1, … III4, riguardanti la congruenza "$\equiv_P$", sono verificati proprio per via della loro definizione. La validità dell'assioma IV2 discende dalla sua validità in $\mathbb{R}$, mentre quella dell'assioma Non-IV1 è banalmente verificata: se prendiamo due segmenti $((a_1, \alpha_1), (b_1, \beta_1))$, $((a_2, \alpha_2), (b_2, \beta_2))$ in modo che $a_2 < b_2$ e se reiteriamo il trasporto del primo segmento a partire dal punto (a_2, α_2) non possiamo raggiungere nessun punto del tipo (a, α) se vale $a_2 < a$, dunque nemmeno (b_2, β_2).

Consideriamo ora le affinità che mutano il modello planare standard nel modello individuato da (0, l, m). Le equazioni sono del tipo:

$$\begin{cases} a' = c_{11}a + lc_{12}\alpha + c_{13} \\ \alpha' = c_{21}a + mc_{12}\alpha + c_{23} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & l \\ c_{21} & m \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (12)$$

dove i coefficienti c_{ij} sono tutti reali.
Dal punto di vista geometrico queste equazioni rappresentano le affinità che mutano fasci impropri in fasci impropri. In altre parole la geometria planare standard definita sulle coppie $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ può essere trasportata sulle coppie $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove le "sotto-rette" sono quelle di equazione $ly - mx = k$, mediante la trasformazione affine (12). Tale modello verrà detto "modello planare associato alla direzione $P_\infty(0, a, b)$".
Assegnato, dunque, un arbitrario piano π in $\mathbb{R}^n$ ed una sua direzione P_∞, la costruzione precedente si chiamerà "costruzione standard di retta non archimedea nella coppia (π, P_∞)".

Il modello non archimedeo $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Il modello che si ottiene ponendo $G = \mathbb{Q}$ con le relazioni (1), (2) è di retta non archimedea ma non è isomorfo al modello planare standard. Dal punto di vista geometrico, infatti, l’insieme dei razionali, preso singolarmente, soddisfa il postulato di densità II3 e il postulato archimedeo IV2 ma non il postulato di Cantor IV1.

Le omografie che mutano la retta non archimedea $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ in sé hanno equazioni del tipo (7), ma con $c_{11}, c_{13} \in \mathbb{Q}$.

Ulteriori modelli si possono ottenere a partire da $\mathbb{Q}$ considerando una qualsiasi estensione di campo □ [s] con $s \in$ □$_0$.

Il modello non archimedeo $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Il modello non archimedeo ottenuto ponendo $G = \mathbb{Z}$, sempre con le relazioni binarie (1), (2), è una nuova struttura non isomorfa ai modelli già illustrati. Infatti, dal punto di vista geometrico, l’insieme degli interi relativi, preso da solo, non soddisfa il postulato di densità II3 e il postulato di Cantor IV1 ma soddisfa il postulato archimedeo IV2.

Le trasformazioni omografiche che mutano il modello $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ in sé hanno equazioni del tipo (7), ma con $c_{11}, c_{13} \in \mathbb{Z}$.

E’ da osservare, infine, che a partire da $\mathbb{Z}$ si può ottenere una ampia classe di modelli che risultano tra di loro isomorfi. Ciò avviene, ad esempio, considerando i gruppi additivi di tipo $d\mathbb{Z}$, con $d \in \mathbb{N}_0$.

Quest’ultimo modello coincide, tra l’altro, con la cosiddetta “retta di Veronese”, come mostrato anche in [23].

Il modello non archimedeo $G \times \mathbb{R}$*, con G non archimedeo*. La struttura $G \times \mathbb{R}$ descritta nel primo paragrafo lascia ampio spazio a numerose costruzioni di modelli non archimedei. Un’ulteriore ed interessante struttura in tal senso si può ottenere prendendo un gruppo additivo non archimedeo, ad esempio uno dei modelli precedenti come $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Seguendo questa ottica si crea, tra l’altro, una genesi di modelli di rette non archimedee del tipo, ad esempio:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $((\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, …

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, … e così via.

Per quanto visto, dunque, i modelli che si possono costruire sono molteplici. Inoltre, quelli che noi abbiamo individuato possono essere opportunamente classificati dal punto di vista degli isomorfismi, identificandone le proprietà geometriche in riferimento agli assiomi di densità, di Cantor e di Archimede. Lo schema seguente riassume tali caratteristiche:

Gruppo *G*	**Modello $G \times \mathbb{R}$**	**Proprietà di *G***		
		Densità (ass. II3)	*Archimede* (ass. IV1)	*Cantor* (ass. IV2)
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$	*NO*	*SI*	*NO*
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$	*SI*	*SI*	*NO*
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	*SI*	*SI*	*SI*
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$	*SI*	*NO*	*SI*

- Tab. 1 -

3. L'assiomatica non archimedea: conseguenze

Sia L un insieme non vuoto di elementi detti "punti". Supponiamo siano validi tutti gli assiomi I1, II1, II2, II3, II4, II5, II6, III1, III2, III3, III4, Non-IV1, IV2 riportati in Appendice.

Osservazione. Ricordiamo, come detto anche in Appendice, che la relazione di "stare fra", induce una relazione binaria d'ordine totale "$\leq$" fra i punti di L (cfr. in questo libro la sezione sulla retta euclidea). Con la notazione (A, B) indicheremo il segmento ordinato $(]A, B[, \leq)$.

Definizione. Fissiamo un punto $O \in L$. Per mezzo del postulato del trasporto è indotta un'operazione binaria di somma sui punti di L

$$“+_L”: L \times L \to L \tag{13}$$

definita ponendo $A +_L B = C$ dove C è così individuato:
a) se $O \leq A$ si prende l'unico punto $C \in I(B)$ per cui $(O, A) \equiv (B, C)$;
b) se $A \leq O$ si prende l'unico punto $C \in I'(B)$ per cui $(A, O) \equiv (C, B)$.
Ricordiamo, inoltre, che la struttura $(L, +_L)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro O (cfr. in questo libro la sezione sulla retta euclidea).

Definizione. Un segmento (A, B) si dice "commensurabile" con (C, D) se esiste un naturale n tale che il trasporto del segmento (A, B) reiterato n volte da C sulla semiretta passante per D, porta al di là del punto D. In tal caso scriveremo $n(A, B) \succ (C, D)$.

Definizione. Un segmento (A, B) è detto di "prima specie" se ogni segmento (H, K) in esso contenuto è commensurabile con (A, B) stesso, cioè se esiste un naturale n tale che $n(H, K) \succ (A, B)$.
Un segmento è detto di "seconda specie" se non è di prima specie.
Queste definizioni inducono una relazione binaria tra i punti di L: se il segmento (A, B) è di prima specie diremo anche che "A è di prima specie con B" e scriveremo $A \sim B$; se invece (A, B) è di seconda specie diremo che "A è di seconda specie con B" e scriveremo $A \nsim B$.

Corollario 3.1. Se (A, B) è un segmento qualsiasi e (H, K) è un segmento in esso contenuto, allora (A, B) è sempre commensurabile con (H, K).
Dim. Basta osservare che si ha sempre $1(A, B) \succ (H, K)$.

Corollario 3.2. I segmenti contenuti in un segmento di prima specie sono tutti di prima specie. Inoltre, tutti i segmenti che contengono un segmento di seconda specie sono di seconda specie.
Dim. Siano (A, B) di prima specie, $(C, D) \subset (A, B)$ e (H, K) un qualsiasi segmento contenuto in (C, D). Allora (H, K) è contenuto in (A, B) per cui è con esso commensurabile, in altre parole esiste un naturale n tale che $n(H, K) \succ (A, B)$ ed essendo $1(A, B) \succ (C, D)$ si ha

anche $n(H, K) \succ (C, D)$. Supponiamo infine che (A, B) sia di seconda specie e che $(A, B) \subset (C, D)$. Allora in (A, B) esiste almeno un segmento contenuto, diciamo (H', K'), con esso non commensurabile. Dunque, essendo $B \leq D$ e $A \leq C$, (H', K') non è commensurabile nemmeno con (C, D),

Proposizione 3.4. Sia (A, B) commensurabile con (C, D) e sia (C, D) congruente con (E, F). Allora (A, B) è commensurabile con (E, F).
Dim. Sia n tale che $n(A, B) \succ (C, D)$ e sia (C, B') il segmento ottenuto reiterando il trasporto del segmento (A, B) a partire da C: per ipotesi vale $(C, D) \subset (C, B')$. Reiteriamo n volte anche il trasporto di (A, B) a partire dal punto E e verso l'altro punto F e sia (E, B'') il segmento così ottenuto. Per come sono stati costruiti vale $(C, B') \equiv (E, B'')$ e poiché $(C, D) \equiv (E, F)$ si ha $(E, F) \subset (E, B'')$, ovvero $n(A, B) \succ (E, F)$.

Proposizione 3.5. Un segmento di prima specie ed uno di seconda specie non sono mai congruenti.
Dim. Siano $A \sim B$, $C \nsim D$ e supponiamo $(A, B) \equiv (C, D)$. Sia H tale che $(A, H) \subset (A, B)$ allora esiste n tale che $n(A, H) \succ (A, B)$. Sia H' il punto sulla semiretta destra di C tale che $(A, H) \equiv (C, H')$. Allora si ha $n(A, H) \equiv n(C, H')$, cfr. in questo libro la sezione sulla retta euclidea, da cui $n(C, H') \succ (A, B)$ dunque $n(C, H') \succ (C, D)$ contro l'ipotesi che $C \nsim D$.

Osservazione. E' banale conseguenza della prop. 3.5 che segmenti congruenti devono essere della stessa specie. Da questa angolazione si intuisce che la relazione di "essere della stessa specie" sia comunque "più debole" della relazione di congruenza.
Proposizione 3.6. La relazione "~" è d'equivalenza.
Dim. La verifica delle proprietà di "~" è immediata:
i) vale banalmente $A \sim A$ in quanto $(A, A) = \varnothing$;
ii) se (A, B) è di 1^a specie anche (B, A) è di prima specie, cioè $B \sim A$;

iii) siano $A \sim B$ e $B \sim C$. Sia $(H, K) \subset (A, B)$ ed n il naturale tale che $n(H, K) \succ (A, B)$. Sia infine K' il punto sulla semiretta destra di B tale che $(H, K) \equiv (B, K')$, allora esisterà m tale che $m(B, K') \succ (B, C)$. Per quanto detto vale $(n+m)(H, K) \succ (A, C)$, ovvero anche $A \sim C$.

Definizione. Consideriamo, a questo punto, l'insieme quoziente

$$T = L/\sim \; = \{L_j\}_{j \in J} \tag{14}$$

che denominiamo "quoziente trasversale" di L. Con il passaggio al quoziente l'insieme L viene diviso secondo una partizione che, come si vedrà nel seguito, risulterà di importanza cruciale.

Proposizione 3.7. Se $A \in L_j$ allora $L_A = \{P \in L \mid (A, P)$ è di prima specie$\}$ coincide con L_j.
Dim. Poiché $A \in L_j$, vale chiaramente $L_A \subset L_j$. Sia $H \in L_j$ allora, sempre poiché $A \in L_j$, vale $A \sim H$, per cui $H \in L_A$ ovvero $L_j \subset L_A$.

Proposizione 3.8. Su ogni classe d'equivalenza L_j vale l'assioma di Eudosso-Archimede.
Dim. Siano $A, B, C, D \in L_j$, dunque $A \sim B$ e $C \sim D$. Sia H il punto ottenuto trasportando (A, B) a partire da C e nella direzione di D in modo che $(A, B) \equiv (C, H)$. Se $D < H$ allora $1(A, B) \succ (C, D)$; se invece $H < D$, essendo $C \sim D$, esiste n naturale tale che $n(A, B) \succ (C, D)$.

Teorema 3.9. Ogni classe d'equivalenza L_j è isomorfa ad $\mathbb{R}$.
Dim. E' sufficiente provare la validità di tutti gli assiomi della retta euclidea all'interno di ogni classe L_j. La validità degli assiomi II1, II4, II5, II6, III1, III2, III3 su ogni L_j è banalmente indotta dalla validità su L, mentre la validità di IV1 è stata già provata nella prop. 3.8. Rimangono da provare, dunque, solo gli assiomi di "esistenza" I1, II2, II3, III4 e IV2. In dettaglio:
I1) Su L_j ci sono almeno due punti. Se tutti gli L_j consistessero di un solo punto, i segmenti sarebbero, tutti di prima specie in quanto ogni segmento non vuoto, non restando confinato all'interno di una classe,

si estenderebbe fino ad intersecare più classi e sarebbe, così, commensurabile con qualunque altro segmento. Ciò sarebbe in contraddizione con la validità dell'assioma Non-IV1. Dunque esiste almeno una classe L_α contenente due punti e, per trasporto, in base alla prop. 3.5 ogni classe ha almeno due punti;
II2) Dati i punti distinti A e C in L_j esiste, per il trasporto, un punto D in L tale che $(A, C) \equiv (C, D)$. Ma $A \sim C$ per cui deve essere $C \sim D$, quindi D è nella stessa classe L_j;
II3) Dati i punti distinti A, $C \in L_j \subset L$, c'è sempre un punto $B \in L$ tale che $B \in\ ]A, C[$, ma $A \sim C$ implica $A \sim B$ ovvero $B \in L_j$;
III4) Dati i punti A, B, $A' \in L_j$ ed una semiretta di origine A', esiste un unico punto C su tale semiretta tale che $(A, B) \equiv (A', C)$ ma per la congruenza, essendo $A \sim B$, deve essere $A' \sim C$ ovvero $C \in L_j$;
IV2) Ogni coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di $L_j \subset L$ ha un elemento di separazione in L. Se $A \in S_1$, $B \in S_2$ e H è l'elemento separatore delle classi S_1, S_2, poiché $A \leq H \leq B$, da $A \sim B$ segue $A \sim H$ ovvero $H \in L_j$.
A questo punto l'isomorfismo con $\mathbb{R}$ discende dagli assiomi della retta euclidea (cfr. in questo libro la sezione sulla retta euclidea).

Proposizione 3.10. L'insieme quoziente $T = \{L_j\}_{j \in J}$ è composto da infinite classi d'equivalenza L_j.
Dim. L'insieme quoziente T non può essere composto da una sola classe $L_j = L$ perché altrimenti sarebbe sempre valido l'assioma archimedeo, come visto nella prop. 3.8. Supponiamo, dunque, che T sia composto da due classi distinte L_α, L_β e siano $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$ dei punti rappresentanti delle due classi. Supponiamo inoltre $A < B$ (nel caso $B < A$ il ragionamento è analogo). Il segmento (A, B) è di seconda specie ed il suo trasporto sulla semiretta destra di B individua un punto K tale che $(A, B) \equiv (B, K)$ con anche il segmento (B, K) di seconda specie per via della prop. 3.5. Essendo $A < B < K$ con $K \notin L_\beta$, segue che $K \in L - (L_\alpha \cup L_\beta)$ in quanto se $K \in L_\alpha$ il segmento (A, K) sarebbe di prima specie e dunque anche $(A, B) \subset (A, K)$ sarebbe di prima specie, contraddicendo così l'ipotesi. Pertanto esiste un'ulteriore classe $L_\gamma = L_K$. Iterando il ragionamento, cioè trasportando infinite

volte il segmento (A, B), si prova l'infinità delle classi L_j, ovvero la tesi.

Proposizione 3.11. Siano $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$ con $L_\alpha \neq L_\beta$, $A \leq B$. Se $A' \in L_\alpha$, $B' \in L_\beta$ allora $A' \leq B'$.
Dim. Per le ipotesi fatte i segmenti (A, A') e (B, B') sono di prima specie, mentre (A, B), (A, B'), (A', B) e (A', B') sono tutti di seconda specie. Allora:
i) se $A' \leq A$ e $B \leq B'$ per la transitività di "$\leq$" si ha $A' \leq B'$;
ii) se $A' \leq A$ e $B' \leq B$ iterando il trasporto di (B', B) a partire da B nella direzione di B' si va subito oltre B' ma non si può andare al di là del punto A in quanto $A \not\sim B$, perciò $A \leq B'$ da cui $A' \leq B'$;
iii) se $A \leq A'$ e $B' \leq B$, iterando la stessa costruzione del punto ii), si va subito oltre B' ma non al di là del punto A' poiché $A \not\sim B$, perciò vale $A' \leq B'$;
iv) se $A \leq A'$ e $B \leq B'$, iterando il trasporto di (B, B') a partire da B' nella direzione di B si va subito oltre B ma non si può andare al di là del punto A' in quanto $A' \not\sim B'$, perciò $A' \leq B$ da cui $A' \leq B'$.

Definizione. Consideriamo l'ordinamento totale "$\leq$" su L, alla luce del nuovo insieme quoziente T. Su questo insieme, e quindi con riferimento alle classi d'equivalenza, è indotta una relazione "$\leq_T$".
Presi $A, B \in L$ definiamo:
i) $L_\alpha <_T L_\beta$ se $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, con $L_\alpha \neq L_\beta$, e $A < B$;
ii) $L_\alpha \leq_T L_\beta$ se $L_\alpha <_T L_\beta$ oppure $L_\alpha = L_\beta$. (15)

Corollario 3.12. La relazione "$\leq_T$" è ben definita.
Dim. La verifica discende dalla prop. 3.11, in quanto la scelta di rappresentanti diversi non influenza in alcun modo la definizione.
Proposizione 3.13. La relazione "$\leq_T$" è d'ordine totale.
Dim. La verifica è immediata:
a) (riflessiva) $L_\alpha \leq_T L_\alpha$ infatti $L_\alpha = L_\alpha$;
b) (antisimmetria) siano $L_\alpha \leq_T L_\beta$ e $L_\beta \leq_T L_\alpha$. Se fosse $L_\alpha <_T L_\beta$ allora si avrebbe da un lato $A < B$ e dall'altro $B \leq A$ per ogni $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, il

che è assurdo, così se fosse $L_\beta <_T L_\alpha$ si avrebbero $B < A$ e $A \le B$ per qualunque $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, il che è ancora assurdo. In definitiva deve valere $L_\alpha = L_\beta$;
c) (transitiva) Siano $L_\alpha \le_T L_\beta$ e $L_\beta \le_T L_\gamma$. Se vale almeno una fra $L_\alpha = L_\beta$ e $L_\beta = L_\gamma$ sarebbe banalmente $L_\alpha \le_T L_\gamma$; nel caso $L_\alpha <_T L_\beta$ e $L_\beta <_T L_\gamma$, presi dei rappresentanti A, B, C delle tre classi valgono $A < B$ e $B < C$ per cui $A < C$ ovvero $L_\alpha \le_T L_\gamma$.
d) Siano $L_\alpha, L_\beta \in T$ e siano $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$. Se L_α, L_β sono distinti si ha che $A < B$ oppure $B < A$ da cui $L_\alpha <_T L_\beta$ oppure $L_\beta <_T L_\alpha$. In definitiva si ha $L_\alpha \le_T L_\beta$ oppure $L_\beta \le_T L_\alpha$.

Corollario 3.14. Se $A < B$ allora $L_A \le_T L_B$. Se $L_A <_T L_B$ allora $A < B$.
Dim. Le verifiche discendono banalmente dalle definizioni (15).

Osservazione. Nel seguito, per indicare l'ordinamento totale sulle classi di T, in luogo della notazione "$\le_T$", useremo la stessa notazione "$\le$" utilizzata sui punti di L, visto che l'una è indotta dall'altra e ne conserva, sostanzialmente, tutte le proprietà. Questa scelta, comunque, è fatta per semplificare il più possibile le notazioni utilizzate.

Proposizione 3.15. Il punto B sta fra i punti A e C se e soltanto se vale una fra le seguenti affermazioni:
i) $L_A < L_B < L_C$ oppure $L_C < L_B < L_A$;
ii) $L_A = L_B < L_C$ e $A < B$;
iii) $L_A < L_B = L_C$ e $B < C$;
iv) $L_C = L_B < L_A$ e $C < B$;
v) $L_C < L_B = L_A$ e $B < A$;
vi) $L_A = L_B = L_C$ e $A < B < C$ oppure $C < B < A$.
Dim. Se B sta fra A e C allora $A < B < C$ oppure $C < B < A$ per cui rimane verificata una delle condizioni i) …vi). Supponiamo, invece, che sia valida una delle condizioni i) …vi), allora:
i) se vale $L_A < L_B < L_C$ (rispettivamente $L_C < L_B < L_A$) si ha $A < B < C$ (rispettivamente $C < B < A$);
ii) $L_A = L_B < L_C$ e $A < B$ poiché vale $B < C$ segue $A < B < C$;
iii) $L_A < L_B = L_C$ e $B < C$ poiché vale $A < B$ segue $A < B < C$;
iv) se $L_C = L_B < L_A$ e $C < B$ poiché vale $B < A$ segue $C < B < A$;

v) se $L_C < L_B = L_A$ e $B < A$ poiché vale $C < B$ segue $C < B < A$;
vi) se vale $L_A = L_B = L_C$ e vale una fra $A < B < C$ e $C < B < A$ la tesi è subito provata.
In ogni caso vale $A < B < C$ oppure $C < B < A$, ovvero B sta fra A e C.

4. Le proprietà della nozione di congruenza

In questo paragrafo si fissa ancora l'attenzione sulla retta non archimedea (L, "stare fra", $\equiv$) definita attraverso gli assiomi riportati in Appendice. Lo scopo del paragrafo è di approfondire la nozione di congruenza ed in particolare esaminare la struttura che questa relazione induce nel quoziente trasversale T.

Definizione. Consideriamo il punto O fissato nella definizione (13). Definiamo "ampiezza trasversale" di un segmento (A, B) l'insieme:
$\Gamma_{(A, B)} = \{L_j \in T \mid (A, B) \cap L_j \neq \emptyset\} = \{L_j \in T \mid L_A \leq L_j \leq L_B\}$.
Dati due qualsiasi segmenti (A, B), (C, D) diremo che hanno stessa ampiezza trasversale se $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(C, D)}$.
Definiamo, infine, "ampiezza trasversale" Γ_A di un punto A l'ampiezza del segmento $]O, A[$, cioé: $\Gamma_A = \Gamma_{]O, A[}$.

Proposizione 4.1. Segmenti di stessa ampiezza trasversale sono della stessa specie.
Dim. Se l'ampiezza trasversale di due segmenti è formata da una sola classe, cioè $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(C, D)} = \{L_A\}$, allora sono segmenti di prima specie; se invece la loro l'ampiezza trasversale contiene più di una classe L_j, sono segmenti di seconda specie.

Proposizione 4.2. Siano $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(E, F)}$, $\Gamma_{(B, C)} = \Gamma_{(F, G)}$ con $A \leq B \leq C$ e $E \leq F \leq G$. Allora $\Gamma_{(A, C)} = \Gamma_{(E, G)}$.
Dim. La verifica è immediata, infatti:
$$\begin{aligned}\Gamma_{(A, C)} &= \{L_j \in T \mid L_A \leq L_j \leq L_C\} = \\ &= \{L_j \in T \mid L_A \leq L_j \leq L_B\} \cup \{L_j \in T \mid L_B \leq L_j \leq L_C\} = \\ &= \Gamma_{(A, B)} \cup \Gamma_{(B, C)} = \Gamma_{(E, F)} \cup \Gamma_{(F, G)} = \\ &= \{L_j \in T \mid L_E \leq L_j \leq L_F\} \cup \{L_j \in T \mid L_F \leq L_j \leq L_G\} = \Gamma_{(E, G)} .\end{aligned}$$

Proposizione 4.3. Il punto $A' \in L_A$ se e solo se, preso un qualsiasi altro punto B, si ha $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(A', B)}$.
Dim. Sia $A' \in L_A$. Allora essendo $L_{A'} = L_A$ e supposto $A' \leq B$:
$\Gamma_{(A', B)} = \{L_j \in T \mid L_{A'} \leq L_j \leq L_B\} = \{L_j \in T \mid L_A \leq L_j \leq L_B\} = \Gamma_{(A, B)}$. Se vale $B \leq A'$ la verifica è analoga.
Sia ora $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(A', B)}$. Allora la tesi $A' \in L_A$ segue dal fatto che $\{L_j \in T \mid L_A \leq L_j \leq L_B\} = \{L_j \in T \mid L_{A'} \leq L_j \leq L_B\}$ per cui $L_A = L_{A'}$.

Corollario 4.4. Il punto $A' \in L_A$ se e soltanto se $\Gamma_A = \Gamma_{A'}$.
Dim. Basta applicare la prep. precedente con $B = O$.

Osservazione. A tutti i punti di L_A rimane associata, dunque, la stessa ampiezza trasversale.

Proposizione 4.5. Sia $(A, B) \equiv (A', B')$ con $A \sim A'$. Allora $B \sim B'$.
Dim. Da $(A, B) \equiv (A', B')$ discende, per le proprietà della congruenza, $(A, A') \equiv (B, B')$. Ma (A, A') è di 1^a specie, per cui, per la prop. 3.5, anche (B, B') è di 1^a specie.

Definizione. L'operazione di somma "$+_L$" induce un'operazione binaria di somma sulle classi d'equivalenza "$+_T$": $T \times T \to T$ definita ponendo $L_\alpha +_T L_\beta = L_\gamma$ se:
$A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$ e $A +_L B = C$ con $C \in L_\gamma$. (16)

Corollario 4.6. L'operazione "$+_T$" è ben definita.
Dim. Supponiamo $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, $A +_L B = C$ e $C \in L_\gamma$. Siano, inoltre, $A' \in L_\alpha$, $B' \in L_\beta$, $A' + B' = C'$. Supponiamo infine, ma non è una limitazione, che $A \leq A'$, $B \leq B'$.
Allora esiste H tale che $(A, A') \equiv (C, H)$ ma $A \sim A'$ per cui, per la prop. precedente, $C \sim H$. Inoltre, dalle proprietà delle congruenze, essendo $(O, A) \equiv (B, C)$ e $(A, A') \equiv (C, H)$ discende $(O, A') \equiv (B, H)$ per cui, essendo anche $(O, A') \equiv (B', C')$, segue $(B', C') \equiv (B, H)$ e poiché vale $B \sim B'$, ancora per la proposizione 4.5 si ha che $C' \sim H$. In definitiva $C \sim H \sim C'$ovvero $C' \in L_\gamma$.

Teorema 4.7. La struttura $(T, +_T, \leq_T)$ è di gruppo commutativo totalmente ordinato.
Dim. Abbiamo provato nella prop. 3.13 che la struttura è totalmente ordinata. La prova che il quoziente trasversale T è un gruppo abeliano deriva dal fatto che $(L, +_L)$ è esso stesso gruppo abeliano.

Definizione. Consideriamo il medesimo punto O fissato in precedenza e con esso la classe d'equivalenza che lo contiene L_O.
Denominiamo "segmento trasversale assoluto" l'insieme così formato: $]L_\alpha, L_\beta[= \{L_j \in T \mid L_\alpha < L_j < L_\beta\}$. E' evidente che, se $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, esso soddisfa: $\Gamma_{(A, B)} =]L_\alpha, L_\beta[\cup L_\alpha \cup L_\beta$.
Dato il segmento trasversale assoluto $]L_\alpha, L_\beta[$, con $L_\alpha \leq L_\beta$,definiamo il "segmento trasversale orientato positivamente" come il segmento trasversale ordinato $(L_\alpha, L_\beta) = (]L_\alpha, L_\beta[, \leq)$, ed il suo segmento opposto $-(L_\alpha, L_\beta) = (]L_\alpha, L_\beta[, \geq)$.
Consideriamo infine l'insieme $S_T = \{(L_\alpha, L_\beta) \mid L_\alpha, L_\beta \in T\}$.
Definiamo su S_T la seguente relazione binaria:
(L_α, L_β), (L_γ, L_δ) sono in relazione di "congruenza trasversale", e in tal caso scriviamo $(L_\alpha, L_\beta) \cong (L_\gamma, L_\delta)$, se presi due segmenti (A, B), (C, D), con $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, $C \in L_\gamma$, $D \in L_\delta$, il loro trasporto, a partire da O e verso la semiretta destra, individua la stessa ampiezza trasversale, cioè $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$ dove $(O, H) \equiv (A, B)$, $(O, K) \equiv (C, D)$.

Corollario 4.8. Supponiamo $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(A', B')}$ e siano $(O, K) \equiv (A, B)$, $(O, K') \equiv (A', B')$. Allora $\Gamma_{(O, K)} = \Gamma_{(O, K')}$.
Dim. Dalle ipotesi si ha che $L_A = L_{A'}$, $L_B = L_{B'}$. Inoltre dalle congruenze si deducono $K +_L A = B$ e $K' +_L A' = B'$. Dunque passando alla somma delle classi si hanno $L_K +_T L_A = L_B$, $L_{K'} +_T L_{A'} = L_{B'}$ ed essendo T un gruppo si ha $L_K = L_{K'}$ per cui $\Gamma_{(O, K)} = \Gamma_{(O, K')}$.

Corollario 4.9. La relazione "$\cong$" è ben definita.
Dim. Siano $A, A' \in L_\alpha$, $B, B' \in L_\beta$, $C, C' \in L_\gamma$, $D, D' \in L_\delta$, e sia per ipotesi $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$ dove $(O, H) \equiv (A, B)$, $(O, K) \equiv (C, D)$. Siano infine $(O, H') \equiv (A', B')$, $(O, K') \equiv (C', D')$ i segmenti ottenuti in

corrispondenza degli altri rappresentanti. Per come sono presi i punti valgono $\Gamma_{(A, B)} = \Gamma_{(A', B')}$ e $\Gamma_{(C, D)} = \Gamma_{(C', D')}$, e per il corollario precedente si deducono $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, H')}$ e $\Gamma_{(O, K)} = \Gamma_{(O, K')}$. Infine, combinando queste uguaglianze con $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$, si ha $\Gamma_{(O, H')} = \Gamma_{(O, K')}$.

Proposizione 4.10. La relazione “≅” è d’equivalenza.
Dim. La validità delle proprietà riflessiva, transitiva e simmetrica deriva dal fatto che la congruenza dei segmenti è una relazione d’equivalenza, infatti “≅” è definita attraverso “≡”:
a) (riflessiva) $(L_A, L_B) \cong (L_A, L_B)$, e non c’è nulla da provare;
b) (simmetrica) supponiamo $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$, allora $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$ dove $(O, H) \equiv (A, B)$, $(O, K) \equiv (C, D)$ e invertendo l’uguaglianza si ha $(L_C, L_D) \cong (L_A, L_B)$;
c) (transitiva) supponiamo $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$ e $(L_C, L_D) \cong (L_E, L_F)$, allora $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$ dove $(O, H) \equiv (A, B)$, $(O, K) \equiv (C, D)$ e inoltre $\Gamma_{(O, K)} = \Gamma_{(O, X)}$ dove $(O, X) \equiv (E, F)$, dunque $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, X)}$ che implica $(L_A, L_B) \cong (L_E, L_F)$.

Proposizione 4.11. Se $(A, B) \equiv (C, D)$ allora $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$.
Dim. Sia H tale che $(O, H) \equiv (A, B) \equiv (C, D)$. E’ del tutto evidente che $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, H)}$ perciò ne segue $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$.

Proposizione 4.12. Siano $L_C < L_K$, $L_C < L_D$ con $(L_C, L_K) \cong (L_C, L_D)$. Allora $L_K = L_D$.
Dim. Siano H, H' tali che $(O, H) \equiv (C, K)$, $(O, H') \equiv (C, D)$; allora, per ipotesi, $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, H')}$. Poiché $(O, C) \equiv (H, K)$, $(O, C) \equiv (H', D)$ si ha $(H, K) \equiv (H', D)$ ed essendo $L_H = L_{H'}$, per la prop. 4.5, si deduce che $L_K = L_D$.
Proposizione 4.13. Siano $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$ e $(A, B) \equiv (C, K)$ dove $A \in L_A$, $B \in L_B$, $C \in L_C$. Allora $K \in L_D$.
Dim. Per la prop. 4.11 vale $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_K)$ e per la proprietà transitiva si ha $(L_C, L_K) \cong (L_C, L_D)$. Ora per la prop. 4.12 si ha la tesi.

Proposizione 4.14. Supponiamo (L_A, L_B), (L_B, L_C) disgiunti, così come $(L_{A'}, L_{B'})$, $(L_{B'}, L_{C'})$. Se $(L_A, L_B) \cong (L_{A'}, L_{B'})$ e $(L_B, L_C) \cong (L_{B'}, L_{C'})$ allora vale pure $(L_A, L_C) \cong (L_{A'}, L_{C'})$.

Dim. La verifica discende dall'assioma di addizionabilità III3 e dalle prop. precedenti. Infatti siano $A \in L_A$, $B \in L_B$, $A' \in L_{A'}$, $K \in L_{B'}$ tali che $(A, B) \equiv (A', K)$ e $C \in L_C$, $K' \in L_{C'}$ tali che $(B, C) \equiv (K, K')$.

Per l'assioma III3 si deduce $(A, C) \equiv (A', K')$ da cui, per la prop. 4.11, si ottiene $(L_A, L_C) \cong (L_{A'}, L_{K'})$ ovvero $(L_A, L_C) \cong (L_{A'}, L_{C'})$.

Definizione. Chiamiamo "semiretta destra" di L_α l'insieme così definito $I(L_\alpha) = \{L_j \in T \mid L_\alpha \leq L_j\}$. Chiamiamo, inoltre, "semiretta sinistra" di L_α l'insieme $I'(L_\alpha) = \{L_j \in T \mid L_j \leq L_\alpha\}$.

Proposizione 4.15. Siano date le classi L_A, L_B, $L_{A'}$ ed una semiretta di origine $L_{A'}$. Allora esiste un'unica classe L_C su tale semiretta tale che $(L_A, L_B) \cong (L_{A'}, L_C)$.

Dim. Siano $A \in L_A$, $B \in L_B$, $A' \in L_{A'}$. Per l'assioma III4 del trasporto, su una qualunque semiretta esiste un punto C tale che $(A, B) \equiv (A', C)$ e tale punto è unico. Chiaramente C individua un'unica classe L_C. Per la prop. 4.11 segue $(L_A, L_B) \cong (L_{A'}, L_C)$.

Proposizione 4.16. La coppia T, S_T soddisfa agli assiomi I1, II1, II2, II4, II5, II6, III1, III2, III3, III4 della retta (vedere Appendice).

Dim. L'assioma I1 deve valere perché altrimenti T sarebbe formato da una sola classe e dunque L sarebbe archimedeo.

Gli assiomi II1, II2, II4, II5, II6 derivano dall'ordinamento di T.

Gli assiomi III1, III2, III3, III4 derivano dalla congruenza "trasversale" di T.

Proposizione 4.17. Se $(L_A,L_B) \cong (L_C,L_D)$ allora $L_B +(-L_A) = L_D +(-L_C)$.

Dim. Da $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$ segue $\Gamma_{(O, H)} = \Gamma_{(O, K)}$ dove $(O, H) \equiv (A, B)$, $(O, K) \equiv (C, D)$ ovvero $L_H = L_K$. Poiché $L_H + L_A = L_B$ e $L_K + L_C = L_D$ si ottiene $L_B + (-L_A) = L_H = L_K = L_D + (-L_C)$.

Osservazione. La coppia T, S_T soddisfa, come si è visto nella prop. 4.16, gran parte degli assiomi della retta riportati in Appendice. Rimangono al momento fuori dalla nostra considerazione soltanto tre assiomi, sulla cui validità in (T, S_T) non possiamo asserire nulla. Gli assiomi in questione sono: l'assioma di densità II3, l'assioma di Archimede IV1 e l'assioma di Cantor IV2. I modelli descritti nel secondo paragrafo provano come questi postulati possano sia valere che non valere, dando luogo, in ogni caso, a strutture non archimedee coerenti.

5. La ricostruzione della retta non archimedea come modello generale $G \times \mathbb{R}$

Nel presente paragrafo, utilizzando particolari isomorfismi tra $\mathbb{R}$ e ciascuna delle classi che sono elementi di T, si deducono alcune proprietà su $T \times \mathbb{R}$ indotte dall'assiomatica della retta non archimedea. Tali proprietà permettono di provare che una qualsiasi retta non archimedea, definita dagli assiomi in Appendice, è interpretabile come struttura $T \times \mathbb{R}$ che è isomorfa al cosiddetto "modello generale" $G \times \mathbb{R}$ introdotto nel primo paragrafo. Si tratta dunque di una prova che il modello generale è atto a rappresentare una qualsiasi retta non archimedea. Sarà il variare di G a fornire modelli di rette tra loro non isomorfe.
Proveremo ora, in dettaglio, che la struttura indotta da L su $T \times \mathbb{R}$ è isomorfa alla struttura del modello generale $G \times \mathbb{R}$ (di retta non archimedea).

Definizione. Consideriamo il punto O fissato in (13) e fissiamo un altro punto $U \in L_O$. Su ogni classe L_j fissiamo un punto O_j ed un punto U_j in modo che questi punti, nel loro insieme, soddisfino le proprietà:
i) $O_\alpha + O_\beta = O_\gamma$ se $L_\alpha + L_\beta = L_\gamma$; (17)
ii) $(O, U) \equiv (O_j, U_j)$ per ogni $j \in J$.

Proposizione 5.1. Siano $A\in L_\alpha$, $B\in L_\beta$ e $C\in L_\gamma$ tali che $A + B = C$ e siano A_O, B_O, $C_O \in L_O$ tali che $(O, A_O) \equiv (O_\alpha, A)$, $(O, B_O) \equiv (O_\beta, B)$ e $(O, C_O) \equiv (O_\gamma, C)$. Allora $A_O + B_O = C_O$.
Dim. Dalle ipotesi si ha $A_O + O_\alpha = A$, $B_O + O_\beta = B$, $C_O + O_\gamma = C$, ma vale anche, per ipotesi sui punti O_j, che $O_\alpha + O_\beta = O_\gamma$. Dall'ipotesi che $A + B = C$ segue allora $A_O + O_\alpha + B_O + O_\beta = C_O + O_\gamma$ e per le proprietà di gruppo di L, si ha infine $A_O + B_O = C_O$.

Proposizione 5.2. $(A, B) \equiv (C, D)$ se e solo se $B + (–A) = D + (–C)$.
Dim. Sia K tale che $(O, K) \equiv (A, B) \equiv (C, D)$. Queste congruenze valgono, per come è definita la somma in L, se e soltanto se $K + A = B$ e $K + C = D$ e ancora, per le proprietà di gruppo di L, ciò vale se e solo se $B + (–A) = K = D + (–C)$.

Corollario 5.3. Siano A_O, B_O, C_O, $D_O \in L_O$. Allora:
$(A_O, B_O) \equiv (C_O, D_O)$ se e solo se $B_O + (–A_O) = D_O + (–C_O)$.
Dim. La verifica è analoga a quella della prop. 5.2.

Proposizione 5.4. Siano dati i punti $A\in L_\alpha$, $B\in L_\beta$, $C\in L_\gamma$, $D\in L_\delta$ tali che $(A, B) \equiv (C, D)$ e siano A_O, B_O, C_O, D_O i punti in L_O che soddisfano $(O, A_O)\equiv(O_\alpha, A)$, $(O, B_O)\equiv(O_\beta, B)$, $(O, C_O)\equiv(O_\gamma, C)$, $(O, D_O)\equiv(O_\delta, D)$. Allora $(A_O, B_O)\equiv(C_O, D_O)$.
Dim. Sia K tale che $(O, K) \equiv (A, B) \equiv (C, D)$. Allora valgono, per come definita la somma dei punti, $K + A = B$ e $K + C = D$ ovvero, per le proprietà di gruppo di L, $A + D = B + C$. Per le ipotesi, inoltre, valgono $A_O + O_\alpha = A$, $B_O + O_\beta = B$, $C_O + O_\gamma = C$, $D_O + O_\delta = D$ da cui, sommando: $A_O + O_\alpha + D_O + O_\delta = B_O + O_\beta + C_O + O_\gamma$. Ma dal fatto che $(A, B) \equiv (C, D)$ segue, per le prop. 4.11 e 4.17, $O_\alpha + O_\delta = O_\beta + O_\gamma$ che assieme alla precedente equazione implica $A_O + D_O = B_O + C_O$ ovvero, per il coroll. 5.2, $(A_O, B_O) \equiv (C_O, D_O)$.

Corollario 5.5. $(A, B) \equiv (C, D)$ se e soltanto se $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$ e $(A_O, B_O) \equiv (C_O, D_O)$.
Dim. Se $(A, B) \equiv (C, D)$ la tesi segue dalle prop. 4.11 e 5.3. Supponiamo invece che $(L_A, L_B) \cong (L_C, L_D)$ e $(A_O, B_O) \equiv (C_O, D_O)$.

Innanzitutto vale $O_B + (-O_A) = O_D + (-O_C)$ per via della congruenza della classi e $B_O + (-A_O) = D_O + (-C_O)$ per via della congruenza dei punti corrispondenti in L_O. Allora, sommando le due equazioni, si ha $O_B + (-O_A) + B_O + (-A_O) = O_D + (-O_C) + D_O + (-C_O)$ e quindi, tenendo conto che $O_A + A_O = A$, $O_B + B_O = B$, $O_C + C_O = C$, $O_D + D_O = D$, si ottiene $B + C = O_B + B_O + O_C + C_O = O_A + A_O + O_D + D_O = A + D$ dunque, per la prop. 5.2, si ha $(A, B) \equiv (C, D)$.

Definizione. In base al teorema 3.9 ed alle definizioni (17) possiamo considerare, per ogni classe L_j, un isomorfismo $\psi_j : L_j \to \mathbb{R}$ tale che:

iii) $\psi_j(O_j) = \psi_O(O) = 0$; (18)
iv) $\psi_j(U_j) = \psi_O(U) = 1$;
v) $\psi_j(rU_j) = \psi_O(rU) = r$.

Osservazione. La conclusione del paragrafo ci conduce alle seguenti ulteriori considerazioni sul *gruppo quoziente trasversale* $(T, +_T)$ che, ricordiamo, è un gruppo abeliano totalmente ordinato.
Alla luce di quanto ci appare, definite le classi $\{L_j\}_{j\in J}$ che sono elementi di T, ciascuna di esse, come struttura geometrica, è una retta euclidea, ovvero una copia di $(\mathbb{R}, +, \leq)$. Ne segue che l'intera struttura di retta non archimedea può essere concepita come una struttura definibile, a meno di isomorfismi, nel prodotto cartesiano $T \times$ □.
Poiché un qualsiasi elemento di L, diciamo A, appartiene ad una classe L_j, possiamo considerare la proiezione canonica di L sul suo insieme quoziente, ovvero η: $L \to T$, in cui $\eta(A) = L_A$. Possiamo considerare, inoltre, gli isomorfismi (18) ψ_{L_j}: $L_j \to \mathbb{R}$, ed il numero corrispondente ad A secondo l'applicazione opportuna: $\psi_{\eta(A)}(A) = a$. A questo punto, combinando tali applicazioni, si può costruire una corrispondenza biunivoca $\phi : L \to T \times \mathbb{R}$, compatibile con le relazioni utilizzate, che associa ad ogni punto $A \in L$ una coppia $(t, a) \in T \times \mathbb{R}$ nel modo seguente: $\phi(A) = (\eta(A), \psi_{\eta(A)}(A))$.
Dunque, utilizzando questa particolare trasformazione, possiamo ricostruire su $T \times \mathbb{R}$ l'intera struttura di modello generale non

archimedeo semplicemente rileggendo in termini di coppie le relazioni “assiomatiche” di L, ovvero lo “stare fra” e la congruenza, definendo:

i) (t_2, a_2) sta fra (t_1, a_1) e (t_3, a_3) se A_2 sta fra A_1 e A_3; (19)
ii) $((t_1, a_1), (t_2, a_2)) \equiv ((t_3, a_3), (t_4, a_4))$ se $(A_1, A_2) \equiv (A_3, A_4)$; (20)

dove $A_i = \phi^{-1}(t_i, a_i)$, per $i = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 5.6. La struttura non archimedea che L induce sul prodotto cartesiano $T \times \mathbb{R}$ è la stessa struttura costruita su $G \times \mathbb{R}$ con le definizioni (1) e (2).
Dim. La validità del teorema deriva, in ultima analisi, dalla prop. 3.15 e dal corollario 5.5.

Osservazione. Per quanto provato, dunque, la struttura di retta non archimedea induce su $T \times \mathbb{R}$ una struttura che è equivalente al modello generale $G \times \mathbb{R}$ (cfr. paragrafo 1). In altri termini, l’insieme quoziente trasversale T è tale che la geometria ottenuta è esattamente quella del modello generale costruito a partire da un qualunque gruppo abeliano totalmente ordinato.
Gli assiomi della retta non archimedea non sono di tipo categorico, dunque esistono più modelli, tra loro non isomorfi, di tale retta. Possiamo affermare che l’insieme quoziente trasversale T, anzi il gruppo quoziente ad esso associato, che è costruibile in ogni retta non archimedea, è l’elemento che discrimina tra loro i vari modelli. Dunque attraverso T è possibile rappresentare la retta non archimedea data mediante un modello generale $T \times \mathbb{R}$ e quindi ritenere non isomorfe due rette che producono quozienti trasversali non isomorfi come gruppi ordinati.

Appendice

Sia L un insieme non vuoto di elementi detti “punti”.

Ass. **I1**. Su L ci sono almeno due punti.

Definizione. Comunque dati due punti A, B ad essi è associata una parte di L, denotata con $]A, B[$ che si chiama "segmento assoluto aperto".

Ass. **II1**. Se $B \in\ ]A, C[$ allora A, B, C sono punti distinti e $B \in\ ]C, A[$.

Ass. **II2**. Dati i punti distinti A e C, esiste almeno un punto D tale che $C \in\ ]A, D[$.

Ass. **II3**. Dati i punti distinti A e C, c'è sempre almeno un punto B tale che $B \in\ ]A, C[$.

Ass. **II4**. Dati comunque tre punti distinti, ne esiste almeno uno che sta fra gli altri due.

Ass. **II5**. Dati i punti distinti A, B, C, D se $B \in\ ]A, C[$ e se $C \in\ ]B, D[$ allora B sta anche fra A e D.

Ass. **II6**. Dati i punti distinti A, B, C, D se $B \in\ ]A, C[$ e se $C \in\ ]A, D[$ allora C sta anche fra B e D.

Definizione. La relazione di "stare fra" induce una relazione d'ordine totale "$\leq$" su L. Dato un segmento assoluto $]A, B[$, con $A < B$, definiamo il "segmento orientato positivamente" $(A, B) = (]A, B[, \leq)$ ed il suo opposto $-(A, B) = (]A, B[, \geq)$.

Ass. **III1**. Ogni segmento (A, B) è congruo al suo opposto $-(A, B)$.

Ass. **III2**. Se valgono $(A', B') \equiv (A, B)$ e $(A'', B'') \equiv (A, B)$ allora vale $(A', B') \equiv (A'', B'')$.

Ass. **III3**. Siano (A, B), (B, C) segmenti disgiunti così come (A', B') e (B', C'). Se valgono $(A, B) \equiv (A', B')$ e $(B, C) \equiv (B', C')$ allora vale pure $(A, C) \equiv (A', C')$.

Ass. **III4**. Dati i punti A, B, A' ed una semiretta di origine A', esiste un unico punto C su tale semiretta tale che $(A, B) \equiv (A', C)$.

Ass**. Non-IV1**. Dati due segmenti qualsiasi (A, B), (C, D) non è sempre possibile determinare un numero naturale n tale che il trasporto del segmento (*A*, *B*) reiterato *n* volte da *C* sulla semiretta passante per *D*, porta al di là del punto *D*.

***Ass.* IV2**. Ogni coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di *L* ha un elemento di separazione.

Bibliografia

[1] Pasch M. (1882), Vorlesungen über neuere Geometrie, Lipsia

[2] Peano G. (1889), I Principii di Geometria logicamente esposti, da *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. II, 59-78

[3] Hilbert D. (1970), *Fondamenti della Geometria*, trad. di P.Canetta dall'opera G*rundlagen der Geometrie* (1889), Feltrinelli, Milano

[4] Levi-Civita T. (1893), Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, in: Atti R. Ist. Veneto di Sci. Lett. Ed Arti, vol. VII, 4, 1765-1815

[5] Peano G. (1894), Sui Fondamenti della Geometria, tratto da *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, 115-157

[6] Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. VI, 2° Sem., 161-167

[7] Levi-Civita T. (1898), Sui numeri transfiniti, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 1° Sem., 113-121

[8] Veronese G. (1898), Segmenti e numeri transfiniti, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. VII, 1° Sem., 161-167

[9] Bindoni A. (1902), Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. XI, 2° Sem., 205-209

[10] Veronese G. (1905), La geometria non Archimedea. Una questione di priorità, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. XIV, 1° Sem., 347-351

[11] Veronese G. (1908), La geometria non Archimedea, in: *Atti del 4° congresso internaz. dei Matematici*, Roma, vol. I, 197-208

[12] Morin U., Busulini F. (1966), *Elementi di Geometria per le Scuole Medie Superiori*, Quarta edizione, Cedam, Padova

[13] Freguglia P. (1977), Osservazioni inerenti alla Geometria sulla retta di G. Peano, *Archimede*, 2, 95-103
[14] Spagnolo F., Camarda S. (1989), Angoli di contingenza e Analisi non Standard, *La Matematica e La sua Didattica*, nr. 3, 48-54
[15] Manara C. F. (1991), Giuseppe Peano ed i Fondamenti della Geometria, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 171-184
[16] Marchi M. (1991), L'Opera di Peano e la moderna Geometria di Incidenza, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 197-212
[17] Spagnolo F., Margolinas C. (1991), Un ostacolo epistemologico. rilevante per il concetto di limite: il postulato di Archimede, in: *Atti congresso PME*, Assisi
[18] Spagnolo F., Margolinas C. (1993), Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: Il postulato di Archimede, *La Matematica e la sua Didattica*, nr. 4, 408-427
[19] Di Leonardo, Marino, Spagnolo F. (1994), Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di Esaustione, *La Matematica e la sua didattica*, nr. 1, 25-37
[20] Spagnolo F. (1995), Obstacles Epistèmologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Bordeaux I (Francia), in: *Atelier National de Réproduction des thèses Microphiches*, Grenoble (Francia)
[21] Baldassarri Ghezzo S. (1995), *Giuseppe Veronese. Matematico dell'Università di Padova*, Decibel, Padova
[22] Spagnolo F. (1998), *Insegnare le Matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze
[23] Eugeni F., Furneri S., Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in: *Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1999*, Edigrafital, Teramo, 101-111
[24] Spagnolo F. (1999), A theoretical-experimental model for research of epistemological obstacles, in: *International Conf. on Mathematics Education into the 21st Century*, Cairo (Egitto)

[25] Eugeni F., Mascella R. (2000), La Retta Euclidea Reale a partire da una relazione d'ordine, accettato per la pubblicazione: *Periodico di Matematiche*, nr. 3