

UNA PRESENTAZIONE DELLE GEOMETRIE NON ARCHIMEDEE

Franco Eugeni, Salvatore Furneri e Fabio Mercanti*

SUNTO - In questo lavoro si costruisce un modello numerico della retta non archimedeana equivalente al modello geometrico di G. Veronese.

ABSTRACT - In this paper, a numerical model of the non-archimedean straight line equivalent to the geometrical one by G. Veronese is built.

1. Introduzione

Prima di iniziare la presentazione del modello numerico della retta non archimedeana equivalente al modello geometrico di Veronese, vale la pena ricordare, come ci scrive C.F. Manara in un suo commento [5] al nostro lavoro, che il pensiero di Veronese ebbe a suscitare polemiche e discussioni. L'opera di Veronese è propria degli anni a cavallo tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, anni in cui fioriscono gli studi sui fondamenti della geometria e durante i quali si giunge ad una formulazione rigorosa della proprietà di continuità della retta. Veronese costruisce un sistema teorico in cui si introducono esplicitamente segmenti infiniti o infinitesimi attuali, giungendo ad una geometria non archimedeana [6]. Proprio a riguardo di questa costruzione sono particolarmente aspre le polemiche di Peano verso Veronese. Nella polemica interviene in seguito, anche se non esplicitamente, T. Levi-Civita il quale costruisce un modello analitico di continuo veronesiano i cui elementi sono da lui chiamati "numeri monosemii" [4]. Tali elementi permettono di formalizzare analiticamente il pensiero prettamente geometrico di Veronese dimostrando che il sistema concettuale costruito da Veronese non è contraddittorio come, invece, sostengono Peano e Cantor.

F. Eugeni, S. Furneri: Dipartimento di metodi per l'economia e il territorio - Università di Teramo. F. Mercanti: Dipartimento DITEC - Politecnico di Milano. Lavoro svolto nell'ambito del nucleo di ricerca didattica *ALMPRT*.

1.1. I postulati della retta

Come è noto la *retta euclidea* è un insieme non vuoto $I = \{A, B, C, \dots\}$ detto "retta" di elementi, chiamati punti, soddisfacenti i seguenti gruppi di postulati, rispettivamente, d'ordine, di congruenza e di continuità.

I) Postulati d'ordine

POSTULATO 1. *Su ogni retta I esiste una relazione d'ordine totale.*

La relazione d'ordine esistente su I si chiama "relazione di precedere" e si indica con $\leq$. La relazione inversa si dice "relazione di seguire" e si denota con $\geq$. Un insieme I soddisfacente al postulato 1 si dice "retta orientata".

POSTULATO 2. *Sia I una retta orientata. Comunque si prendano due punti distinti A e B su I , con A che precede B , esiste almeno un punto C diverso sia da A sia da B , che segue A e precede B .*

Dal postulato 2 si può considerare il seguente insieme, definito per ogni $A, B \in I$, con $A \neq B$ e $A < B$,

$$[AB] = \{C: A \leq C \leq B\},$$

che prende il nome di "segmento assoluto" di estremi A e B . A questo insieme si possono associare i due insiemi ordinati

$$(AB) = ([AB], \geq),$$

che prendono il nome di segmenti orientati. Sulla retta I sono importanti i due insiemi seguenti:

$$I(A) = \{P: P \in I, P \geq A\},$$

$$I'(A) = \{P: P \in I, P \leq A\},$$

dette semirette di origine A .

II) Postulati di congruenza

POSTULATO 3. *Nell'insieme S dei segmenti orientati di una retta è definita una relazione di equivalenza che prende il nome di congruenza.*

La scrittura $(AB) \cong (CD)$ verrà letta (AB) congruo a (CD) .

POSTULATO 4. *Postulato d'invertibilità del segmento.*

Ogni segmento orientato (AB) è congruo al suo opposto (BA) .

Il postulato 4 permette di considerare la relazione di congruenza anche nell'insieme dei segmenti non orientati.

POSTULATO 5. *Postulato di biiezione.*

Se (AB) e (CD) sono due segmenti orientati e congruenti, allora esiste una funzione f tale che $f(AB) \rightarrow (CD)$, con $f(A)=C$ e $f(B)=D$, soddisfacente la seguente proprietà:

$$\forall U, V \in (AB) \Rightarrow f(U, V) \cong (f(U), f(V)).$$

POSTULATO 6. *Postulato del trasporto.*

Dati un segmento $[AB]$ ed una semiretta di origine O , denotata con $I(A)$, esiste in $I(A)$ un unico punto P tale che $[AB] \cong [OP]$.

Questo postulato permette di definire relazioni d'ordine tra segmenti orientati e non orientati e di definire la somma e la differenza tra segmenti.

III) Postulati della continuità

Viene enunciato ora il postulato di Dedekind che include il terzo gruppo di postulati, gli stessi che concorrono alla definizione assiomatica di retta Euclidea.

POSTULATO 7. *Postulato di Dedekind.*

Dividendo un segmento $[AB]$ in due insiemi di punti H e K , detti sezioni, tali che ogni punto di $[AB]$ appartenga ad una ed una sola delle due parti e che un punto qualunque della prima parte preceda un qualsiasi punto della seconda, allora esiste uno ed un solo punto C del segmento, detto punto di separazione, che appartiene o alla prima o alla seconda sezione e tale che ogni punto di $[AB]$ che precede C appartenga alla prima e ogni punto che segue C appartenga alla seconda sezione della partizione stabilita.

2. Sul postulato della continuità

Le proprietà di continuità delle figure geometriche furono considerate evidenti fino a tutto il XIX secolo.

Fu la necessità di postulati generali dai quali far discendere criteri che garantissero l'esistenza di enti dei quali si intuiva l'esistenza, senza però riuscire a giustificarla razionalmente, che portò Dedekind (1831-1916) a formulare il postulato della continuità sopra enunciato.

Secondo Euclide, un qualsiasi ente geometrico esiste solo se se ne conosce la costruzione mediante operazioni realmente eseguibili. Euclide non avverte l'esigenza di formulare postulati che ne assicurino a priori l'esistenza.

E' noto che la trattazione assiomatica a partire da Euclide e fino a Hilbert fu imprecisa e lacunosa ed iniziò a perfezionarsi proprio nel XIX secolo nell'ambito di una più consapevole costruzione ipotetico-deduttiva. Da un punto di vista empirico-intuitivo, la presa di coscienza della continuità sulla retta si può far risalire alla scoperta dell'incommensurabile, ossia al teorema di Pitagora, il quale condusse ad intuire e poi scartare l'idea di una "retta fatta da atomi".

Nei primi anni del 1900, D. Hilbert intuì la necessità di modificare e completare il sistema di assiomi della geometria euclidea in modo che da essi si potesse dedurre tutta la geometria elementare. Nella sua opera "Grundlagen der Geometrie", pubblicata a Lipsia nel 1930, Hilbert formula un soddisfacente sistema di postulati analizzandone la completezza, la compatibilità e l'indipendenza.

Fu evidente l'insufficienza degli assiomi e dei postulati euclidei per giustificare i ragionamenti euclidei fondati sulla continuità e sull'ordine. Tale carenza indusse Dedekind e Cantor a formulare un postulato che garantisse la continuità, Archimede a formalizzare la sua proposizione sulle grandezze di una stessa classe e Pasch a introdurre tra gli assiomi della geometria i postulati d'ordine.

Per maggior completezza della trattazione vengono nel seguito riportati i postulati di Cantor e di Archimede.

POSTULATO DI CANTOR. *Due insiemi di punti separati e contigui di una retta o di un segmento ammettono un solo punto di separazione.*

POSTULATO DI EUDOSSO-ARCHIMEDE. *Date due grandezze A e B di una stessa classe con $A < B$ e non nulla, è sempre possibile determinare un numero naturale n tale che $nA > B$.*

La continuità può essere assegnata mediante il solo postulato di Dedekind oppure, in alternativa, con una coppia di postulati: il postulato di Cantor e il postulato di Eudosso-Archimede. Si può verificare che, se si considera il postulato di Dedekind come postulato per la retta Euclidea, i "postulati di Cantor e di Archimede" possono essere provati come teoremi. Al contrario, se i postulati di Archimede e Cantor vengono assunti come postulati per la retta Euclidea, il "postulato di Dedekind" si può dedurre come teorema. Da quanto detto si evince anche che, se si ammette il postulato di Archimede e non quello di Cantor, non vale il postulato di Dedekind.

3. Brevi cenni sulle geometrie non-archimedee

Furono ricerche di natura critica, analoghe a quelle che portarono alla scoperta delle geometrie non-euclidee, a condurre alla nascita delle geometrie non-archimedee e così come si chiamano geometrie non euclidee quelle per le quali valgono tutti i postulati di Hilbert, eccettuato quello delle parallele, analogamente vengono dette geometrie non-archimedee

quelle geometrie per le quali valgono tutti i postulati di Hilbert, tranne quello di Archimede.

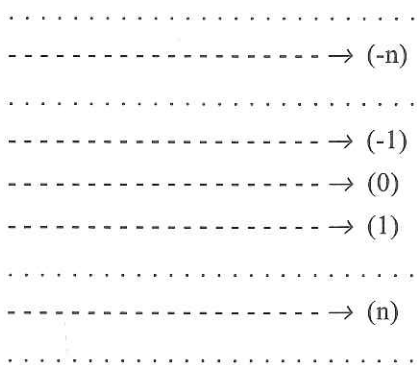
Di queste geometrie, conformantisi spesso come modello nel loro sviluppo alla geometria non euclidea, ve ne sono diverse, ma non si sono mai elevate oltre il campo critico elementare.

Fu Cantor a dare l'avvio fin dai suoi primi studi sulla teoria degli insiemi a numerosi e rilevanti esempi di grandezze non-archimedee.

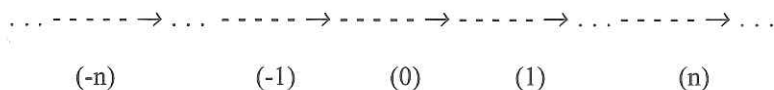
4. Il modello geometrico di G. Veronese

Nel 1890 Giuseppe Veronese, in una celebre memoria della Regia Accademica dei Lincei, formulò un esempio di "retta non-archimedeaa".

Partendo dall'analisi sulla natura dei postulati della continuità, Veronese considerò un insieme continuo nel senso di Cantor, ma non in quello di Dedekind e, per le implicazioni prima evidenziate, nemmeno nel senso di Archimede. Egli considerò su di un piano euclideo una successione bilatera di rette euclidee tra loro parallele e a distanza costante (ad esempio unitaria) l'una dall'altra. Pensiamo allora tali rette ciascuna individuata da un numero relativo ($\pm n$).



Indichiamo con il nome V-retta l'insieme di tutti i punti appartenenti a tali rette. Sulla V-retta, seguendo Veronese, stabiliamo una relazione di ordine totale nel senso comune del termine ed una relazione di congruenza per mezzo di due movimenti rigidi (traslazione e V-movimento) che portano ogni retta sulla successiva o sulla precedente, secondo l'ordine degli indici:



È possibile considerare, su questo insieme "incollato", due tipi di segmenti a seconda che essi siano o no su una stessa retta euclidea, chiamandoli rispettivamente segmenti corti

o lunghi. L'idea base è che nel modello suddetto le "classi contigue" di segmenti lunghi o corti hanno sempre un elemento separatore, mentre "classi contigue" di punti non godono sempre di questa proprietà, in particolare non hanno un elemento separatore. Quanto detto evidenzia che la retta di Veronese verifica il postulato di Cantor ma non quello di Dedekind. Tale retta è quindi una retta non-archimedeo. Se la prima classe è su una retta mentre la seconda classe è sulla retta successiva e se le due classi di punti indicano i secondi estremi dei segmenti corti e lunghi, possiamo dire che non si verifica il postulato di Archimede non potendo un multiplo di un segmento corto superare un segmento lungo.

Poiché la V-retta, con la struttura che le è stata indotta, verifica tutti i postulati d'ordine, di appartenenza e di congruenza e quello di continuità nella forma di Cantor, mentre non verifica l'assioma di Eudosso-Archimede, è lecito affermare che tale V-retta rappresenta un *continuo non archimedeo*.

5. Un modello numerico equivalente al modello di Veronese

Viene proposto ora un modello numerico equivalente al modello di Veronese di retta non-archimedeo. Tale modello viene costruito sul prodotto cartesiano $\mathcal{R} \times \mathcal{Z}$, con $\mathcal{R}$ insieme dei numeri reali e $\mathcal{Z}$ insieme dei numeri interi relativi. Alle rette del modello di Veronese prima enunciato vengono sostituite coppie di $\mathcal{R} \times \mathcal{Z}$. Viene chiamato modello numerico di Veronese la terna $(V, \leq, \equiv)$ nella quale:

- $V = \mathcal{R} \times \mathcal{Z}$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, i) , con $a \in \mathcal{R}$ e $i \in \mathcal{Z}$. Nel seguito la coppia (a, i) verrà indicata con a_i .
- La relazione $\leq$ è una relazione d'ordine definita tra i punti di V nel seguente modo:

$$a_i < b_j \Leftrightarrow i < j \vee \text{ se } i = j \Rightarrow a < b,$$

$$a_i = b_j \Leftrightarrow i = j \wedge a = b.$$

(1)

- La relazione $\equiv$ è una relazione di equivalenza sui segmenti orientati di V . Considerati due segmenti

$$(AB) = ((a, i), (b, j))$$

e

$$(CD) = ((c, h), (d, k)),$$

essi sono congruenti se:

$$(2) \quad |b - a| = |d - c| \quad \wedge \quad |j - i| = |k - h|.$$

Si vuole provare che il modello sopra definito è una retta non-archimedeana; per far ciò è necessario dimostrare preventivamente due lemmi, grazie ai quali si può concludere che le relazioni definite in V soddisfano gli assiomi di ordine e di congruenza.

LEMMA 1. *La relazione $\leq$ sui punti di V soddisfa i postulati d'ordine 1 e 2 della retta euclidea.*

Dimostrazione. Si dimostra che il postulato 1 è verificato, ovvero che $\leq$ è una relazione d'ordine totale. È evidente che le seguenti relazioni:

$$\forall a_i \in \mathcal{R} \times \mathcal{Z} \Rightarrow a_i \leq a_i$$

$$\forall a_i, b_j, c_h \in \mathcal{R} \times \mathcal{Z} \quad a_i \leq b_j \wedge b_j \leq c_h \Rightarrow a_i \leq c_h$$

sono verificate in base alla definizione data prima; la relazione gode quindi delle proprietà riflessiva e transitiva.

È necessario verificare ora che la relazione $\leq$ gode della proprietà antisimmetrica, ovvero che:

$$\forall a_i, b_j \in \mathcal{R} \times \mathcal{Z}, \quad a_i \leq b_j \wedge b_j \leq a_i \Rightarrow a_i = b_j.$$

È evidente che:

- 1) se $i = j$, allora (cfr.(1)) si ha

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b, \text{ da cui } a_i = b_j;$$
- 2) se $i \neq j$, si constata che se fosse $i < j$ cadrebbe l'ipotesi $b_j < a_i$, se fosse $j < i$ cadrebbe l'altra ipotesi $a_i < b_j$, quindi

$$a_i = b_j.$$

Si prova ora che il postulato P_2 è verificato. È sufficiente verificare che

$$\forall a_i, b_j \in \mathcal{R} \times \mathcal{Z} \quad \exists c_h \in \mathcal{R} \times \mathcal{Z} \setminus a_i \leq c_h \leq b_j.$$

Dall'essere $a_i < b_j$, segue che:

- se $i < j$ si considera $c > a$ e $c_i > a_i$, oppure $d < b$ e quindi $d_j < b_j$ oppure se $i < h < j$ viene individuato un elemento x_h , con x arbitrario;
- se $i = j$, essendo $a < b$, si considera la coppia y_i con y soddisfacente la condizione $a < y < b$.

LEMMA 2. *La relazione $\equiv$ definita sui segmenti orientati di V è una relazione di equivalenza soddisfacente i postulati di congruenza 3, 4, 5 e 6.*

Dimostrazione. Si dimostra che la relazione $\cong$ è una relazione di equivalenza. È immediata la verifica delle seguenti relazioni:

$$\forall (a_i, b_j) \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{Z}, \quad (a_i, b_j) \cong (a_i, b_j),$$

$$\forall (a_i, b_j), (c_h, d_k) \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{Z}, \quad (a_i, b_j) \cong (c_h, d_k) \Rightarrow (c_h, d_k) \cong (a_i, b_j).$$

Le proprietà riflessiva e simmetrica sono dunque verificate.

Per verificare che la relazione gode della proprietà transitiva si considerino i segmenti (AB), (CD), (EF), in modo che

$$(a_i, b_j) \cong (c_h, d_k) \wedge (c_h, d_k) \cong (e_r, f_s),$$

dalla quale si ha (cfr.(2))

$$|b-a| = |d-c| \text{ con } |j-i| = |k-h|, |d-c| = |f-e| \text{ con } |k-h| = |s-r|.$$

Si ricava:

$$|b-a| = |f-e| \wedge |j-i| = |s-r|,$$

che permette di concludere che

$$(a_i, b_j) \cong (e_r, f_s).$$

Allora si conclude che

$$\forall (AB), (CD), (EF) \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{Z} \quad (AB) \cong (CD) \wedge (CD) \cong (EF) \Rightarrow (AB) \cong (EF).$$

Dalla definizione di segmenti congruenti si giunge banalmente alla verifica del postulato 4.

Si dimostra ora che anche il postulato 5 è verificato. Occorre provare che, dati due segmenti equivalenti

$$(A, B) = (a_i, b_j) \cong (C, D) = (c_h, d_k),$$

esiste tra essi una biiezione

$$f(a_i, b_j) = (c_h, d_k)$$

tale che:

$$f(a_i) = c_h \wedge f(b_j) = d_k.$$

Inoltre

$$\forall U_r, V_s \in (a_i, b_j)$$

risulta :

$$(U_r, V_s) \cong (f(u_r), f(v_s)).$$

Quanto scritto si verifica in forza delle proprietà delle biiezioni. Attraverso particolari traslazioni si ha infatti:

$$f(b_j) = (-b+c+a, -j+i+h) = d_k \quad \text{e} \quad f(a_i) = (-a+c+a, -i+i+h) = c_h,$$

dove

$$f \begin{cases} y = -x + c + a \\ n = -m + i + h. \end{cases}$$

Si verifica in ultimo che il postulato del trasporto è verificato. È sufficiente provare che, prefissato un segmento orientato (a_i, b_j) ed una semiretta di origine c_h , esiste un punto y_m tale che:

$$(c_h, y_m) \cong (a_i, b_j). \quad (3)$$

Dovendo essere:

$$|y-c| = |b-a| \wedge |m-h| = |j-i|,$$

si hanno le seguenti possibilità:

$$y-c = b-a, \text{ con } m-h = j-i;$$

$$y-c = a-b, \text{ con } m-h = j-i;$$

$$y-c = b-a, \text{ con } m-h = i-j;$$

$$y-c = a-b, \text{ con } m-h = i-j.$$

ciascuna delle quali conduce ad un sistema di traslazioni, verificando tutte la (3).

È ora possibile dimostrare il seguente

TEOREMA. *La terna $(V, \leq, \cong)$ definita in $\mathcal{R} \times \mathcal{Z}$ soddisfa gli assiomi di congruenza e ordine della retta euclidea e non soddisfa il postulato della continuità.*

DIMOSTRAZIONE. I due lemmi precedentemente dimostrati assicurano la validità della prima parte del teorema (assiomi di congruenza e ordine della retta euclidea). Resta ora da provare che la terna $(V, \leq, \cong)$ definita in $\mathcal{R} \times \mathcal{Z}$:

1) non verifica il postulato di Eudosso-Archimede.

La verifica è immediata poichè non esiste un multiplo di un "segmento corto" (segmento con estremi aventi indici uguali) che superi un "segmento lungo" (segmento con estremi aventi indici diversi).

Dati (a_i, b_i) e (c_h, d_h) è sempre $|h-i| \geq |h-j|$, quando $i \neq j$.

2) Non verifica il postulato di Dedekind.

È sufficiente considerare un segmento $[AB]$ con A su una retta d'indice n e B sulla retta successiva; allora i due insiemi α e β , formati rispettivamente dai punti d'indice n del segmento e da quelli d'indice n+1 dello stesso, verificano le ipotesi del postulato di Dedekind ma non ammettono un elemento separatore.

3) Verifica il postulato di Cantor.

Siano α , β , rispettivamente, due classi contigue di segmenti. Non è restrittivo supporre che i segmenti abbiano una origine comune e siano tutti all'interno di un fissato segmento. Siano α' , β' , rispettivamente, gli insiemi di punti formati dai secondi estremi dei segmenti dati e i e j rispettivamente il massimo indice degli elementi di α' ed il minimo indice degli elementi di β' . Risulta necessariamente $i=j$. Se per assurdo si suppone il contrario, la differenza di due segmenti delle due classi di segmenti dati, sarebbe sempre un segmento lungo, mai minore di un segmento corto prefissato.

Se si considerano ora i due sottoinsiemi α'' di α' e β'' di β' costituiti dai punti aventi indice i, questi formano due classi contigue di numeri reali sulla i-ma coppia di R (per l'ipotesi iniziale di contiguità dei segmenti) e definiscono un elemento separatore che è il secondo estremo di un segmento che risulta elemento separatore dei due insiemi di segmenti α e β . Il postulato di Cantor è allora verificato.

6. Conclusioni

La verifica degli assiomi per il modello $(V, \leq, \cong)$ (cfr. §5) è completata. La terna $(V, \leq, \cong)$, con $V = \mathcal{R} \times \mathcal{Z}$ e le definizioni sopra esposte, rappresenta dunque un modello numerico di continuo non archimedeo equivalente al modello geometrico di Veronese.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BERZOLARI (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementari*, Hoepli Milano, 1950.
- [2] F. ENRIQUEZ, *Questioni riguardanti la matematica elementare*, Zanichelli, Bologna, 1951.
- [3] G. FANO, *Geometria non-euclidea*, Zanichelli., Bologna, 1908.
- [4] T. LEVI-CIVITA, *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti Ist. Veneto, s. VII, t. IV (1892-93), 1765-1815.
- [5] C.F. MANARA, *Comunicazione personale*.
- [6] C.F. MANARA, *Giuseppe Veronese e il problema del continuo geometrico*, Rend. sem. mat. fis. Milano, vol. 56, (feb. 1987), 105-119.
- [7] G. VERONESE, *Fondamenti di geometria*, Tipografia del seminario, Padova, 1891.